圆锥曲线学习日志

1 椭圆

1.1 椭圆的基本定义

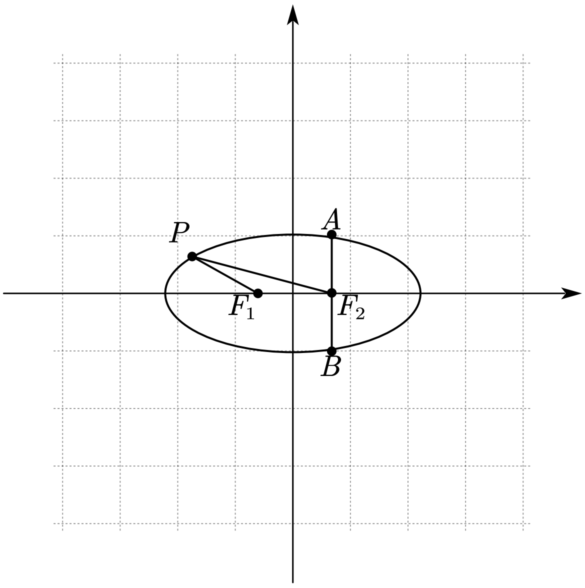
一个椭圆定义为到两定点距离之和为定值的动点轨迹，一个中心在原点的椭圆可以由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$确定.

对于一个横置的椭圆，其左右顶点的坐标分别为$(-a,0)$和$(a,0)$，而$2a$为椭圆的长轴长度，同理，$2b$为短轴长度，其上下顶点坐标分别为$(0,b)$和$(0,-b)$.

两个定点分别称为椭圆的左焦点和右焦点，其坐标为$(-c,0)$和$(c,0)$，其中c满足关系$a^2=b^2+c^2$.

椭圆的离心率由e表示，满足$e=\frac{c}{a}$，且总有$0<e<1$.

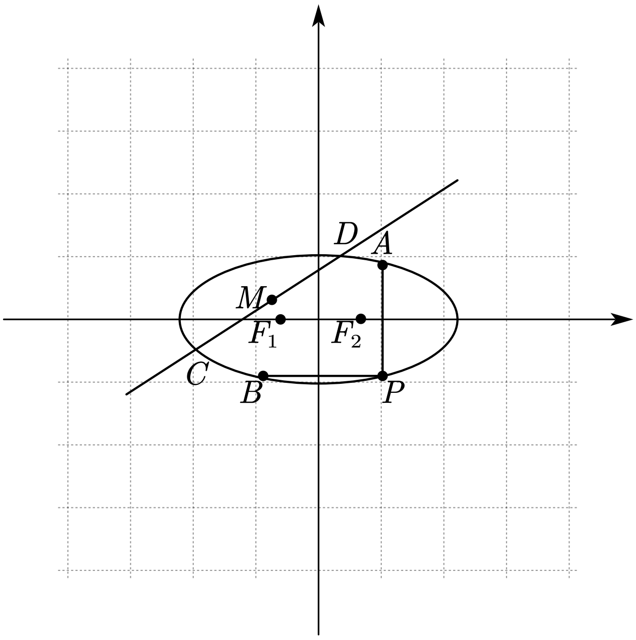
对于椭圆上任意一点A，总有$AF_1+AF_2=2a$.



左图展现了一个典型的椭圆，我们称AB为椭圆的通径，其一半的长度$AF_2=BF_2=\frac{b^2}{a}$.

我们称以椭圆两焦点及椭圆上任意一点组成的三角形为焦三角形，其面积为$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$

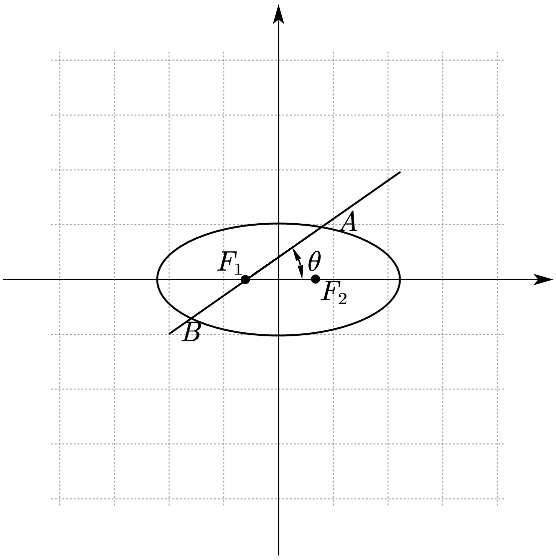
1.2 椭圆基本性质



如图，对于任意在椭圆上且关于原点对称的两点A,B，及椭圆上任意一点P，总是有$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，其中$k_{PA}$指的是$PA$直线的斜率.

对于任意一条穿过椭圆的直线交椭圆于C,D两点的中点坐标$M(x_0,y_0)$，总有$k_{CD}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$

1.3 椭圆的进阶性质



对于穿过椭圆任一焦点的任意直线，交椭圆于A,B两点，倾斜角为θ，总可以得到以下结论.

$$AF_1=\frac{ep}{1-e\cos\theta}\quad BF_1=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$$

$$\frac{AF_1}{BF_1}=\frac{1-e\cos\theta}{1+e\cos\theta}\quad AB=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$$

其中，$p=\dfrac{b^2}{c}$.