

二元对称不等式的证明

李宗泽

July 2020

1 简介

二元对称不等式，通常在高中数学的压轴函数题目中出现。他的形式一般为：

$$f(x_1, x_2) \geq 0$$

并且有 $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$.

2 定元转变元

让我们来看第一个例子。

例 1. 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$ ，任取两点 $x_1 < x_2$ ，试证明存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$ ，使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 成立，并求 x_0 的值。

解. 整理等式 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 得

$$e^{x_0} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$$

我们不妨考虑函数 $g(x) = e^x - \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$ 的零点情况。

显然， $g(x)$ 是增函数，而

$$g(x_1) = e^{x_1} - \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1) - e^{x_2 - x_1} + 1}{(x_2 - x_1)e^{-x_1}} < 0$$

同理不难证明 $g(x_2) > 0$ ，从而我们可以通过零点存在定理说明函数存在唯一零点 x_0 ，他就是

$$x_0 = \ln \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$$

这道题目的关键之处在于将“存在性问题”转化为“零点问题”，使得通过函数单调性研究问题成为可能。其中也蕴含了“特殊的一般化”思想。

我们再来看一道例题。

例 2. 已知 $g(x) = xe^{x-\ln x} - x - 1$ ，试证明对于所有 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$$

解. 整理原不等式有

$$e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$$

现在我们证明此式成立。

我们不妨把 x_1 看作一个变量，从而构造函数

$$f(x) = e^{\frac{x+x_2}{2}} - \frac{e^x + e^{x_2}}{2}$$

现在我们来研究 $f(x)$ 的单调性。

容易有 $f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x+x_2}{2}} - e^x \right)$ ，很容易得到如下结论

- $x \in (0, x_2)$ 时， $f'(x) > 0$ ，从而 $f(x)$ 递增。
- $x \in (x_2, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ，从而 $f(x)$ 递减。
- $f(x_2) = 0$

通过以上条件我们就说明了 $f(x) \leq 0$ 恒成立，从而原不等式成立。

这道题的解法是具有启发意义的。在不等式中选取一个“常量”将其看作变量，让我们有机会证明对任意的 x ，不等式都成立。

3 构造新函数

此种方法较为简单，但初学者可能接触较少，不妨在此讨论。

例 3 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2(a+1)\ln x$ 。请证明：若 $a \in (-1, 3)$ ，对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，都有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$$

证明. 原不等式容易变形为

$$f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2$$

很自然的, 我们考虑构造函数 $F(x) = f(x) - 2x$ 。

注意到

$$F''(x) = 2 \cdot \frac{x^2 - a - 1}{x^2}$$

可以得到 $F'(x)$ 在 $x = \sqrt{a+1}$ 处取得极小值, 而

$$F'(a+1) = 4\sqrt{a+1} - 2(a+1) > 0$$

从而 $F(x)$ 恒为增函数, 所以 $F(x_1) > F(x_2)$, 这就是要证的。

4 消元式证明

这是非常重要的一个证明方法, 在其余类型的导数大题也常有应用, 应仔细研究, 认真体会消元技巧。这里我们研究一个例子。

例 4. 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2$, 如果 $f(x_1) + f(x_2) = -1$ ($x_1 \neq x_2$), 试证明 $x_1 + x_2 > 2$ 。

证明. 由于 $f'(x) = 1 + \ln x - x \leq 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减。考虑将 $x_1 + x_2 > 2$ 做如下变形。

不妨将其改写为 $x_1 > 2 - x_2$, 可以证明的是 (此处略), x_1, x_2 中必有一个小于 2。不失一般性, 我们假设它是 x_2 , 从而我们能够将原不等式改写为 $f(x_1) < f(2 - x_2)$, 然 $f(x_1) + f(x_2) = -1$, 作代换得

$$-1 - f(x_2) < f(2 - x_2)$$

代入函数整理得

$$x_2 \ln x_2 - x_2^2 + (2 - x_2) \ln (2 - x_2) + 2(x_2 - 1) > -1$$

这是要证的。

我们不妨设上述不等式的右侧为新函数 $g(x)$ (x_2 替换为 x), 而 $g'(x) = \ln x - 2x - \ln(2-x) + 2$, 容易证明 $g''(x)$ 恒大于 0, 从而 $g'(x)$ 为增函数, 然 $g'(1) = 0$, 从而说明

- $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 减。
- $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 增。

而 $g(1) = -1$ 为 $g(x)$ 极小值点, 这直接说明了 $g(x) \geq -1$, 从而原不等式成立。证毕。