圆锥曲线二级结论的证明

引言 / Introduction

圆锥曲线是高中重要的数学学习内容。圆锥曲线中，不乏很多二级结论。本文简单做一些证明。

结论及证明 / Proof of Conclusion

Conclusion 1. 过圆 $C_1\colon x^2+y^2=2a^2$ 上任一点 P 做圆 $C_2\colon x^2+y^2=a^2$ 的两条切线，则两条切线相互垂直。

Proof 1. 设点 $P(m,n)$ 满足 $m^2+n^2=2a^2$ ，则显然 P 在圆 C_1 上。

可以写出过点 P 的直线方程 $y-n=k(x-m)$，与圆 C_2 联立之，整理可以得到 $(1+k^2)x^2-(2mk^2-2nk)x+(k^2m^2+n^2-2mnk-a^2)=0$。稍作整理和化简得到 $\Delta=(4a^2-4m^2)k^2+8mnk+(4a^2-4n^2)=0$。

因此，$k_1k_2=\frac{4a^2-4n^2}{4a^2-4m^2}$。作代换 $m^2+n^2=2a^2$ 得 $k_1k_2=-1$。原命题得证。

Conclusion 2. 过椭圆 $E\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 任一焦点的直线 l 交 E 于 A、B 两点。直线 l 的倾斜角 $\theta=\theta_0$，则 $|AB|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta_0}$。

Proof 2. 不失一般性，设 l 经过的焦点为 F_1 ，另一个焦点为 F_2。连接 AF_2 和 BF_2，记 $|AF_1|=m_1$，$|BF_1|=m_2$ ，在三角形 AF_1F_2 中，由余弦定理有

$$\cos\theta_0=\frac{m^2+(2c)^2-(2a-m)^2}{2\cdot m\cdot(2c)}$$

整理得到 $m_1=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta_0}$。同理，对于 BF_2 则得到 $m_2=\frac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta_0}$。

因为 $|AB|=|AF_1|+|BF_1|=m_1+m_2$，立即得到

$$|AB|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cdot\cos\theta_0}$$

原命题得证。

Δ Conclusion 3. 过圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上任意点 P 作双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条切线，则两切线互相垂直。

Proof 3. 设 $P(m,n)$ 满足条件 $m^2+n^2=a^2-b^2$。设切线 $l\colon y-n=k(x-m)$。则其一般方程为 $kx-y+(n-km)=0$。

这里运用一个快速计算直线与圆锥曲线相交 Δ 正负的公式。

$$\Delta' = A^2 i + B^2 j - C^2$$

其中，A, B, C 为直线一般方程的系数，i, j 来自于圆锥曲线 $\frac{x^2}{i} + \frac{y^2}{j} = 1$。

那么

$$\Delta' = k^2 a^2 + (-b^2) - (n - km)^2$$
$$\Delta' = k^2(a^2 - m^2) + 2nm \cdot k + (-n^2 - b^2)$$

显然，作为切线，必须要

$$\Delta' = k^2(a^2 - m^2) + 2nm \cdot k + (-n^2 - b^2) = 0$$

这样便得到一个关于 k 的方程，有两个解，分别对应两切线的斜率。

根据韦达定理

$$k_1 k_2 = \frac{n^2 + b^2}{m^2 - a^2}$$

带入 n, m 的关系，得到

$$k_1 k_2 = -1$$

原命题得证。

Conclusion 4. 对于隐函数 $F(x, y) = 0$（其中 x 是自变量，y 是因变量），它的导数

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

其中，$F'_x(x, y)$ 表示对 x 求「偏导数」。即只把 x 作为自变量对函数求导，$F'_y(x, y)$ 同理。

证明由高中知识无法得到。

Conclusion 5. 过抛物线准线上一点 P 作抛物线的两条切线，切点弦必过焦点。

Proof 5. 加强这个命题，变为「Conclusion 6. 设 $P(x_0, y_0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ 开口外的一点，那么，过这个点的切点弦方程为 $yy_0 = p(x + x_0)$」。

Proof 6. 首先证明「Conclusion 7. 对于抛物线 $y^2 = 2px$，$M(x_0, y_0)$ 在它上，则过 M 点的切线方程为 $yy_0 = p(x + x_0)$」

Proof 7. 这里用到隐函数求导。

对于抛物线 $y^2 = 2px$，进行隐函数求导。首先变形 $y^2 - 2px = 0$。

那么

$$y' = -\frac{-2p}{2y} = \frac{p}{y}$$

从而，切线方程为

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

整理得到 $yy_0-y_0^2=p(x-x_0)$。

又由于 M 在抛物线上，有 $y_0^2=2px_0$，代入得 $yy_0-2px_0=p(x-x_0)$。

整理得到切线方程

$$yy_0=p(x+x_0)$$

证毕。

由这个结论，我们继续证明切点弦方程公式。

由已知, 抛物线开口外一点 $P(x_0,y_0)$ ，设两切点 $M(x_1,y_1)$ 和 $N(x_2,y_2)$ 都在抛物线上。则由切线方程

$$PM: yy_1=p(x+x_1)$$
$$PN: yy_2=p(x+x_2)$$

又 P 在直线 PM,PN 上，可以得到

$$y_0y_1=p(x_0+x_1)$$
$$y_0y_2=p(x_0+x_2)$$

从而就证明了 M,N 都在直线 $yy_0=p(x+x_0)$ 上。证毕。

现在就可以证明 Conclusion 5. 了。设准线上的一点 $P(-\frac{p}{2},m)$，则切点弦方程为

$$my=p(x-\frac{p}{2})$$

显然，$y=0$ 时，$x=\frac{p}{2}$，即证。

Conclusion 8. 对于抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 从其开口外任一点 M 向其做两条切线（切点分别为 A 、B ）。设 AB 中点为 N ，则 MN 平行于 x 轴。

Proof 8. 设 $M(x_0,y_0)$ ，则过其做 $y^2=2px\ (p>0)$ 的切点弦方程为

$$y\cdot y_0-2p\frac{x+x_0}{2}=0$$

变形得到

$$x=\frac{y\cdot y_0-px_0}{p}$$

将其与椭圆方程联立，得

$$y^2-2y_0y+2px_0=0$$

因此，$y_1+y_2=2y_0$ ，即 $y_N=\frac{y_1+y_2}{2}=y_0$

即证。

总结：

1. 写出切点弦方程（根据公式）

2. 变形切点弦方程（开口向左右的抛物线为 $x = f(y)$，开口向上下的为 $y = f(x)$ ）
3. 联立，写出方程
4. 韦达定理

Conclusion 9. 拥有相同焦点的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ （设共焦距为 $2c$ ）则焦点横坐标 $x_0=\pm\frac{am}{c}$。

Proof 10. 首先变形两方程。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{c^2-m^2}=1$$

由双曲线方程变形得

$$y^2=\left(\frac{c^2}{m^2}-1\right)x^2+(m^2-c^2)$$

把此方程带入抛物线方程，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{c^2}{m^2}-1\right)x^2+m^2-c^2}{a^2-c^2}=1$$

变形得到

$$x^2\left(\frac{c^2a^2}{m^2}-c^2\right)+a^2(m^2-a^2)=0$$

因此

$$\Delta=4a^2c^2(\frac{a^2}{m^2}-1)(a^2-m^2)$$

得

$$x=\pm\frac{ac\sqrt{\frac{a^4}{m^2}-2a^2+m^2}}{\frac{c^2a^2}{m^2}-c^2}$$

继而

$$x^2=\frac{a^2c^2(\frac{a^4}{m^2}-2a^2+m^2)}{c^4(\frac{a^4+m^4-2a^2+m^2}{m^4})}$$

化简得

$$x^2=\left(\frac{a}{c}\right)^2m^2$$

即

$$x = \pm \frac{am}{c}$$

即证。

总结:

1. 变形，去掉 b, n ，用 c 替代。
2. 由椭圆或双曲线其中之一方程变形为 $y^2 = f(x)$
3. 代入另一方程，得到一关于 x 的方程 $g(x) = 0$
4. 计算 Δ
5. 表示 $x^2 = \cdots$
6. 化简获得结果

Conclusion 10. (NEED TO PROVE) 拥有相同焦点的椭圆和双曲线在焦点处切线互相垂直。

Conclusion 11. 对于二次曲线系 $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ，若 $M(x_0, y_0)$，则它在 M 处的切线方程为

$$Axx_0 + Byy_0 + C\frac{x + x_0}{2} + D\frac{y + y_0}{2} + E = 0$$

Proof 11. 对于 $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ 为一个以 x 为自变量的隐函数。应用隐函数求导有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2Ax + C}{2By + D}$$

带入 $x = x_0$，得

$$l: y - y_0 = -\frac{2Ax + C}{2By + D}(x - x_0)$$

即

$$(y - y_0)(2By_0 + D) = -(2Ax_0 + C)(x - x_0)$$

与二次曲线方程联立（**相加减**）得到

$$Axx_0 + Byy_0 + C\frac{x + x_0}{2} + D\frac{y + y_0}{2} + E = 0$$

即证。

总结:

1. 使用偏导数公式求出切线斜率
2. 使用点斜式写出切线方程
3. 与二次曲线联立（相加减）

Conclusion 12. (NEED TO PROVE) 对于二次曲线系 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ，若 $M(x_0,y_0)$，则它在 M 处的切点弦方程为

$$Axx_0+Byy_0+C\frac{x+x_0}{2}+D\frac{y+y_0}{2}+E=0$$