二元对称不等式的证明

李宗泽

July 2020

1 简介

二元对称不等式，通常在高中数学的压轴函数题目中出现。他的形式一般为：

$$f(x_1, x_2) \geq 0$$

并且有 $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$.

2 定元转变元

让我们来看第一个例子。

例 1. 已知函数 $f(x) = e^x - x - 1$，任取两点 $x_1 < x_2$，试证明存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$，使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 成立，并求 x_0 的值。

解. 整理等式 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 得

$$e^{x_0} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$$

我们不妨考虑函数 $g(x) = e^x - \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$ 的零点情况。

显然，$g(x)$ 是增函数，而

$$g(x_1) = e^{x_1} - \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1) - e^{x_2 - x_1} + 1}{(x_2 - x_1) e^{-x_1}} < 0$$

同理不难证明 $g(x_2) > 0$，从而我们可以通过零点存在定理说明函数存在唯一零点 x_0，他就是

$$x_0 = \ln \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}$$

这道题目的关键之处在于将“存在性问题”转化为“零点问题”，使得通过函数单调性研究问题成为可能。其中也蕴含了“特殊的一般化”思想。

我们再来看一道例题。

例 2. 已知 $g(x) = xe^{x-\ln x} - x - 1$，试证明对于所有 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$，都有

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$$

解. 整理原不等式有

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$$

现在我们证明此式成立。

我们不妨把 x_1 看作一个变量，从而构造函数

$$f(x) = e^{\frac{x+x_2}{2}} - \frac{e^x + e^{x_2}}{2}$$

现在我们来研究 $f(x)$ 的单调性。

容易有 $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+x_2}{2}} - e^x\right)$，很容易得到如下结论

- $x \in (0, x_2)$ 时，$f'(x) > 0$，从而 $f(x)$ 递增。
- $x \in (x_2, +\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，从而 $f(x)$ 递减。
- $f(x_2) = 0$

通过以上条件我们就说明了 $f(x) \leq 0$ 恒成立，从而原不等式成立。

这道题的解法是具有启发意义的。在不等式中选取一个“常量”将其看作变量，让我们有机会证明对任意的 x，不等式都成立。