关于数列的一些学习记录

李宗泽

2019 年 2 月 24 日

目录

1 数列的概念

数列 数列是由**数字组成的序列**，一个数列可以用 $\{a_n\}$ 表示，数列中的每个数字，称为数列的**项**，用 a_n 表示 $\{a_n\}$ 数列的第 n 项.

数列的通项公式 若能找到一个表达式 $f(n) = a_n (n \in \mathbb{Z}^+)$ 给出数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项的值，则称这个 $f(n)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

数列的前 n 项和 一般地，用 S_n 表示一个数列的前 n 项和. 有

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

特殊地，$S_1 = a_1$

数列的递推公式 数列的递推公式表示数列相邻项的关系. 例如 $a_{n+1} - a_n = d$

2 基本数列

2.1 等差数列

等差数列的概念 等差数列，也就是递推公式可以为 $a_{n+1} - a_n = d(d \neq 0)$ 的数列，它的后一项与前一项的差值是一个相等常数.

等差数列的通项公式 等差数列的通项公式是

$$a_n = a_1 + d(n-1)(n \in \mathbb{Z}^+)$$

其中，a_1 称为**首项**，d 称为**公差**.

下面，我们试着推导等差数列的通项公式.

首先，根据等差数列的递推公式 $a_{n+1} - a_n = d$，把 n 取遍 $1, 2, 3, \cdots, n$

代入，得到一系列等式

$$a_2 - a_1 = d$$
$$a_3 - a_2 = d$$
$$a_4 - a_3 = d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d$$

将这一系列等式全部相加，我们得到 $a_n - a_1 = d(n-1)$，也就是

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

这就是等差数列的通项公式.

等差数列通项公式的推广 等差数列通项公式有一个更广泛的表达，也就是

$$a_n = a_m + d(n-m)(n, m \in \mathbb{Z}^+)$$

对于这个公式，本文不做证明.

等差数列的前 n 项和 等差数列前 n 项和的公式是

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}[a_1 + d(n-1)] = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

关于这个公式的推导，有很多方式，本文叙述两种常用方法.

倒序相加法 这是相当正统的一个手法. 首先

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + a_1 + d(n-1)$$

而同时有

$$S_n = [a_1 + d(n-1)] + [a_1 + d(n-2)] + \cdots + a_1$$

两式相加，就得到了

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

因此

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

积分求和法 欲求 $f(n)=\sum_{i=1}^{n}[a_1+d(n-1)]$ 首先求导，得到

$$f'(n)=\sum_{i=1}^{n}d+C=nd+C$$

再对 $f'(n)$ 积分，得到

$$\int f'(n)=\frac{1}{2}dn^2+Cn=f(n)$$

而 $f(1)=a=\frac{1}{2}d+C$，代入之，得到

$$f(n)=\frac{1}{2}dn^2-\frac{1}{2}dn+a$$

这就完成了求和

等差数列的性质 等差数列有许多基本性质，接下来介绍其中的几个

平均数与数值替换 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，任意的四个正整数 m,n,p,q 满足 $m+n=p+q$，那么有

$$a_m+a_n=a_p+a_q$$

等式两边项数只要相等，且下标相加相等，那么这个等式就成立，例如

$$a_m+a_n+a_h+a_g=a_q+a_t+a_s+a_l$$

当 $m+n+a+g=q+t+s+l$，且它们均为正整数时成立

组成新数列 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，取连续相等数目的项相加，形成新的数列 $\{b_n\}$，那么 $\{b_n\}$ 也是等差数列.

例如 $a_1+a_2=b_1$，$a_3+a_4=b_2$，$a_5+a_6=b_3$ 等等组成的数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列.

这种情况下，新的数列 $\{b_n\}$ 的公差 d' 是 $d'=m^2d$

类似地，在等差数列 $\{a_n\}$ 中，隔连续相等数目的项取项作为新数列. $\{b_n\}$ 的项，那么 $\{b_n\}$ 也是等差数列.

例如，$a_1=b_1$，$a_3=b_2$，$a_5=b_3$，等等，则 $\{b_n\}$ 是等差数列.

奇数项（和）与偶数项（和） 这里简单地抛出两个公式

$$S_e - S_o = \frac{1}{2}nd(n \in 2k, k \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\frac{S_o}{(n+1)/2} = \frac{S_e}{(n-1)/2}(n \in 2k-1, k \in \mathbb{Z}^+)$$

等差数列求和与通项公式的快速求法 注意到等差数列的通项公式 a_n 和求和公式 S_n 具有一些微妙的关系，下面我们来看看这些关系.

根据前面的内容，我们知道等差数列的通项公式是

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

也知道求和公式是

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{d}{2}n^2 + n(a_1 - \frac{d}{2})$$

从这里看出，S_n 是一个不包含常数项的二次函数，二次项系数是公差的一半，一次项系数是首项加公差的一半.

通过这种方法，就可以很快的进行对通项公式和求和公式的转换.

2.2 等比数列

3 一般数列

一般数列是指非基本数列，也就是不是等差或等比数列的数列. 然而这些数列有些由等差与等比数列由加、乘等方式联系起来，这给我们的研究提供了一个切入点.

在中学阶段，一般数列通常在答题中考察，其对技巧性的要求是远远高于基本数列的. 下面将介绍一些一般数列的研究方法

3.1 递推、通项与求和

引言 递推公式，通项公式与求和公式在研究数列的过程中必须有机结合起来，并且应当熟悉这三者的关系和转换方法. 三种公式中，通项公式是核心. 通过通项公式，我们将能够研究一般数列的许多性质，对解题也是有很大帮助的.

3.2 单调性与类函数性质

数列的单调性 由于数列的通项公式可以看作一个自变量只取正整数的函数，数列与函数同样具有单调性.

通项公式单调性 如果一个数列的递推公式满足

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

那么我们就说，数列 a_n 是**严格单调递增**的，反之，若有

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

我们就说，数列 a_n 是**严格单调递减**的.

一般方法对通项公式单调性的判断 通过上面的方法，我们归纳出判断数列通项公式单调性的一般做法.

首先，定义 Δa 为

$$\Delta a = a_{n+1} - a_n$$

然后判断 Δa 的符号（可能要进行因式分解等代数变换）.

如果 $\Delta a > 0$ 就知道，$\{a_n\}$ 是单调递增的，反之则是单调递减的.

通过函数的性质判断通项公式单调性 我们还有另一种方法判断数列的单调性，那就是：函数法.

运用这个方法需要注意许多问题，所有这些问题都是由数列通项公式的 n 只能为**正整数**引起的.

若我们知道函数的通项公式 $f(n) = a_n(n \in \mathbb{Z}^+)$，我们很容易判断 $f(n)$ 的单调性.

对 $f(n)$ 求导我们得到 $f'(n)$，那么若 $f'(n)$ 在区间 I 上恒有

$$f'(n) > 0(x \in I)$$

我们就知道，函数 $f(n)$ 是在定义域 I 上单调递增的，反之容易判断单调递减.