四平方和

考虑使用计算机暴力枚举，我们可以发现在很大的范围内只有 $n=130$ 符合条件。事实也是如此。

本题摘自我在知乎上看到的某道澳大利亚的数竞题。但是因为你可以写暴力来打表，所以这题是签到题。

证明：

易知 $d_1=1$，则 $n=1+d_2^2+d_3^2+d_4^2$。

若 $n \bmod 2=1$，则四个因子皆为奇数，其平方和为偶数，矛盾。故 $2|n, d_2=2$，所以 $n-5=d_3^2+d_4^2$。

若 $d_3=3$，则 $d_4=4$ 或 $d_4=6$，经检验不存在满足条件的 n。

若 $d_3=4$，则由奇偶性可知，d_4 为奇数。又因为 $d_4^2 \equiv 1 \pmod 4$，但 $n-5-d_3^2=n-21 \equiv 3 \pmod 4$，所以矛盾。

所以 d_3 为一个大于 4 的奇质数，且 $d_4=2d_3$，故 $n-5=5d_3^2 \Longrightarrow n=5(d_3^2+1)$。故 $5|n$，即 $d_3=5, d_4=10$，得 $n=130$。经检验，n 是好的数。

挑战NPC

容易发现这题考查如何构造了 2 进制 和 3 进制的 格雷码。

我们直接考虑构造 k 进制的格雷码。

假如我们有一个 k 进制的格雷码序列 a，那么我们考虑将其做 k 进制不进位差分：

$a_0, a_1, \cdots a_n \rightarrow a_1-a_0, a_2-a_1, \cdots, a_n-a_{n-1}$

我们称"由某个 k 进制格雷码序列差分得到的序列"是**合法的**。

反过来，我们也可以对于任何一个**合法的**差分序列 b，通过加入一个起始元素来还原一个 k 进制格雷码，容易发现，只要序列 b 合法，那么任选一个起始元素都可以得到一个正确的 k 进制格雷码序列。

于是我们来考虑构造差分序列。

设 S_i 表示 i 位 k 进制格雷码的差分序列，则容易得到 $S_{i+1}=(S_i, k^i, S_i, k^i, \ldots, k^i, S_i)$，其中共有 k 个 S_i。

显然由 S_{i+1} 还原出的序列是一个 $i+1$ 位 k 进制格雷码序列。

分蛋糕

我们先尝试一种强贪心算法：

> 如果有度数小于等于3的点，就删掉这个点（和与它相关的边），先对于剩下的图构造一种方案，然后将这个点染成与他相邻的点中出现较少的颜色。

然后这个算法居然通过了本题。

这意味着，题目里的特殊性质“保证有解” 是一个幌子。

这就引导我们去尝试证明：一定可以找到度数小于等于3的点，或者点已经被删光了。

考虑任何原图的一个子图，设其点集大小为 v，由于原图是两个森林叠在一起，所以这个子图是两个森林叠在一起。所以该子图中的边数 $\le 2(v-1)$。假如所有点度数都大于3，那么意味着边数至少为 $4v/2$，而 $4v/2=2v>2(v-1)$，矛盾，故一定可以找出度数小于等于3的点。

二维码

首先，容易发现我们造不出一个“黑白相交”子矩形(不要求子矩形连续)。

形式化地，就是说无论怎样染色，都无法得到一个方案，使得存在 x_0,y_0,x_1,y_1，满足 $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ 同色，$(x_0,y_1),(x_1,y_0)$ 同色，$(x_0,y_0),(x_0,y_1)$ 不同色。

进一步地，我们考虑两行，由于上述性质的存在，这两行各自的被染黑的列集合必然存在包含关系。对于任意两列也有类似结论。

如果我们将行和列分别按照染黑的格子数排序，那么我们就得到了一个单调阶梯。

那么我们考虑枚举行的阶梯有多少级，列的阶梯有多少级，我们可以发现我们要算的东西可以转化为“求将 A 个有标号小球放入 B 个有标号盒子里的方案数”，这就是斯特林数乘上一个阶乘。

进一步地，我们又发现行和列的阶梯级数的差的绝对值是肯定小于等于1的，于是我们的枚举量就被控制到了 $O(n)$。

如果 $O(n^2)$ 求斯特林数可以拿到 90 分。

利用 FFT 求一整行斯特林数可以拿到 100 分。由于这部分内容有超纲成分，所以只设置了10分。