特征方程法求解递推关系中的数列通项

摘要：本文章讲解特征方程法求解递推关系中的数列通项的有关问题，分别从一阶线性递推式，二阶线性递推式，分式递推式加以讲解，通过几个例子加以分析，简单易懂，对于该类型的数列问题就不用怕啦~~

关键字：特征方程法，数列通项，递推关系

不吐血不推荐~~~

一、（一阶线性递推式）

设已知数列$\{a_n\}$的项满足$a_1=b, a_{n+1}=ca_n+d$，其中$c\neq 0, c\neq 1,$求这个数列的通项公式。

采用数学归纳法可以求解这一问题，然而这样做太过繁琐，而且在猜想通项公式中容易出错，本文提出一种易于被学生掌握的解法——特征方程法：针对问题中的递推关系式作出一个方程$x=cx+d,$称之为特征方程；借助这个特征方程的根快速求解通项公式.下面以定理形式进行阐述.

定理 1：设上述递推关系式的特征方程的根为x_0，则当$x_0=a_1$时，a_n为常数列，即$a_n=a_1$;当$x_0=a_1$时,$a_n=b_n+x_0$，其中$\{b_n\}$是以c为公比的等比数列，即$b_n=b_1c^{n-1}, b_1=a_1-x_0$.

证明：因为$c\neq 0,1,$由特征方程得$x_0=\dfrac{d}{1-c}$.作换元$b_n=a_n-x_0,$则

$$b_{n-1}=a_{n-1}-x_0=ca_n+d-\frac{d}{1-c}=ca_n-\frac{cd}{1-c}=c(a_n-x_0)=cb_n.$$

当$x_0\neq a_1$时，$b_1\neq 0$，数列$\{b_n\}$是以c为公比的等比数列，故$b_n=b_1c^{n-1}$;

当$x_0=a_1$时，$b_1=0$，$\{b_n\}$为 0 数列，故$a_n=a_1, n\in \mathrm{N}$.（证毕）

下面列举两例，说明定理 1 的应用.

例 1．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n-2, n\in \mathrm{N}, a_1=4,$求$a_n$.

解：作方程 $x=-\frac{1}{3}x-2$, 则 $x_0=-\frac{3}{2}$.

当 $a_1=4$ 时，$a_1\neq x_0, b_1=a_1+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

数列 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列．于是 $b_n=b_1(-\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{11}{2}(-\frac{1}{3})^{n-1}, a_n=-\frac{3}{2}+b_n=-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}(-\frac{1}{3})^{n-1}, n\in \mathrm{N}.$

例 2．已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系：$a_{n+1}=(2a_n+3)i, n\in \mathrm{N}$, 其中 i 为虚数单位。当 a_1 取何值时，数列 $\{a_n\}$ 是常数数列？

解：作方程 $x=(2x+3)i$, 则 $x_0=\frac{-6+3i}{5}$. 要使 a_n 为常数，即则必须 $a_1=x_0=\frac{-6+3i}{5}$.

二、（二阶线性递推式）

定理 2：对于由递推公式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，$a_1=a, a_2=b$ 给出的数列 $\{a_n\}$，方程 $x^2-px-q=0$，叫做数列 $\{a_n\}$ 的特征方程。

若 x_1, x_2 是特征方程的两个根，当 $x_1\neq x_2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$，其中 A，B 由 $a_1=a, a_2=b$ 决定（即把 a_1, a_2, x_1, x_2 和 $n=1,2$，代入 $a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$，得到关于 A、B 的方程组）；当 $x_1=x_2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=(A+B)x_1^{n-1}$，其中 A，B 由 $a_1=a, a_2=b$ 决定（即把 a_1, a_2, x_1, x_2 和 $n=1,2$，代入 $a_n=(A+Bn)x_1^{n-1}$，得到关于 A、B 的方程组）。

例 3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a, a_2=b, 3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0 (n\geq 0, n\in N)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解法一（待定系数——迭加法）

由$3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$，得

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n),$$

且$a_2-a_1=b-a$。

则数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$b-a$为首项，$\frac{2}{3}$为公比的等比数列，于是

$a_{n+1}-a_n=(b-a)(\frac{2}{3})^{n-1}$。把$n=1,2,3,\cdots,n$代入，得

$$a_2-a_1=b-a,$$

$$a_3-a_2=(b-a)\cdot(\frac{2}{3}),$$

$$a_4-a_3=(b-a)\cdot(\frac{2}{3})^2,$$

●●●

$$a_n-a_{n-1}=(b-a)(\frac{2}{3})^{n-2}。$$

把以上各式相加，得

$$a_n-a_1=(b-a)[1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})+\cdots+(\frac{2}{3})^{n-2}]=\frac{1-(\frac{2}{3})^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}(b-a)。$$

$$\therefore a_n=[3-3(\frac{2}{3})^{n-1}](b-a)+a=3(a-b)(\frac{2}{3})^{n-1}+3b-2a。$$

解法二（特征根法）：数列$\{a_n\}$：$3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0(n\geq 0,n\in N)$，

$a_1=a,a_2=b$的特征方程是：$3x^2-5x+2=0$。

$$\because x_1=1,x_2=\frac{2}{3},$$

$$\therefore a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}=A+B\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}。$$

又由$a_1=a,a_2=b$，于是

$$\begin{cases} a = A + B \\ b = A + \frac{2}{3}B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3b - 2a \\ B = 3(a-b) \end{cases}$$

故 $a_n = 3b - 2a + 3(a-b)(\frac{2}{3})^{n-1}$

三、(分式递推式)

定理 3：如果数列$\{a_n\}$满足下列条件：已知a_1的值且对于$n \in \mathrm{N}$，都有

$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + h}$（其中 p、q、r、h 均为常数，且 $ph \neq qr, r \neq 0, a_1 \neq -\frac{h}{r}$），

那么，可作特征方程 $x = \frac{px+q}{rx+h}$.

（1）当特征方程有两个相同的根 l （称作特征根）时，

若 $a_1 = l$，则 $a_n = l, n \in \mathrm{N}$;

若 $a_1 \neq l$，则 $a_n = \frac{1}{b_n} + l, n \in \mathrm{N}$，其中

$b_n = \frac{1}{a_1 - l} + (n-1)\frac{r}{p - rl}, n \in \mathrm{N}$.特别地，当存在 $n_0 \in \mathrm{N}$, 使 $b_{n_0} = 0$ 时，无穷数列$\{a_n\}$不存在.

（2）当特征方程有两个相异的根 l_1、l_2（称作特征根）时，则

$a_n = \frac{l_2 c_n - l_1}{c_n - 1}$，$n \in \mathrm{N}$,

其中 $c_n = \frac{a_1 - l_1}{a_1 - l_2}(\frac{p - l_1 r}{p - l_2 r})^{n-1}, n \in \mathrm{N}$,(其中$a_1 \neq l_2$).

例 3、已知数列$\{a_n\}$满足性质：对于 $n \in \mathrm{N}, a_{n-1} = \frac{a_n + 4}{2a_n + 3}$, 且 $a_1 = 3$, 求

$\{a_n\}$的通项公式.

解：依定理作特征方程 $x=\dfrac{x+4}{2x+3}$, 变形得 $2x^2+2x-4=0$, 其根为 $l_1=1, l_2=-2.$ 故特征方程有两个相异的根，使用定理 2 的第（2）部分，则有

$$c_n=\frac{a_1-l_1}{a_1-l_2}\cdot\left(\frac{p-l_1r}{p-l_2r}\right)^{n-1}=\frac{3-1}{3+2}\cdot\left(\frac{1-1\cdot 2}{1-2\cdot 2}\right)^{n-1}, n\in \mathrm{N}.$$

$$\therefore c_n=\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}, n\in \mathrm{N}.$$

$$\therefore a_n=\frac{l_2c_n-l_1}{c_n-1}=\frac{-2\cdot\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}-1}{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}-1}, n\in \mathrm{N}.$$

即 $a_n=\dfrac{(-5)^n-4}{2+(-5)^n}, n\in \mathrm{N}.$

例 5．已知数列$\{a_n\}$满足：对于 $n\in \mathrm{N}$, 都有 $a_{n+1}=\dfrac{13a_n-25}{a_n+3}$.

（1）若 $a_1=5$, 求 a_n;

（2）若 $a_1=3$, 求 a_n;

（3）若 $a_1=6$, 求 a_n;

（4）当 a_1 取哪些值时，无穷数列$\{a_n\}$不存在？

解：作特征方程 $x=\dfrac{13x-25}{x+3}$. 变形得 $x^2-10x+25=0$,

特征方程有两个相同的特征根 $l=5$. 依定理 2 的第（1）部分解答.

(1) $\because a_1=5, \therefore a_1=l. \therefore$ 对于 $n\in \mathrm{N}$, 都有 $a_n=l=5$;

(2) $\because a_1=3, \therefore a_1\neq l.$

$$\therefore b_n=\frac{1}{a_1-l}+(n-1)\frac{r}{p-rl}$$

$$=\frac{1}{3-5}+(n-1)\cdot\frac{1}{13-1\cdot5}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{n-1}{8},$$

令$b_n=0$，得$n=5$.故数列$\{a_n\}$从第 5 项开始都不存在，

当$n\leqslant4$，$n\in$ N时，$a_n=\frac{1}{b_n}+l=\frac{5n-17}{n-5}$.

(3)$\because a_1=6, l=5, \therefore a_1\neq l$.

$$\therefore b_n=\frac{1}{a_1-l}+(n-1)\frac{r}{p-lr}=1+\frac{n-1}{8}, n\in N.$$

令$b_n=0$, 则$n=-7\notin n$. $\therefore$对于$n\in$ N, $\mathrm{b_n}\neq0$.

$$\therefore a_n=\frac{1}{b_n}+l=\frac{1}{1+\frac{n-1}{8}}+5=\frac{5n+43}{n+7}, n\in \mathrm{N}.$$

(4)、显然当$a_1=-3$时，数列从第 2 项开始便不存在.由本题的第（1）小题的解答过程知，$a_1=5$时，数列$\{a_n\}$是存在的，当$a_1\neq l=5$时，则有$b_n=\frac{1}{a_1-l}+(n-1)\frac{r}{p-lr}=\frac{1}{a_1-5}+\frac{n-1}{8}, n\in$ N. 令 $b_n=0$, 则 得$a_1=\frac{5n-13}{n-1}, n\in$ N 且$n\geqslant2$.

$\therefore$当$a_1=\frac{5n-13}{n-1}$（其中$n\in$ N且 N≥2）时，数列$\{a_n\}$从第n项开始便不存在.

于是知：当a_1在集合$\{-3$或$\frac{5n-13}{n-1}: n\in N$, 且$n\geqslant2\}$上取值时，无穷

数列$\{a_n\}$都不存在.

练习题：

求下列数列的通项公式：

1、 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1, a_2=7,\ a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}(n\geq 3)$，求$a_n$。（key：

$a_n=2\cdot 3^{n-1}+(-1)^{n-2}$）

2、 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1, a_2=5,$ 且$a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$，求a_n。（key：

$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$）

3、 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3, a_2=7,\ a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}(n\geq 3)$，求$a_n$。（key：

$a_n=2^{n+1}-1$）

4、 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3, a_2=2,\ a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$，求$a_n$。（key：

$a_n=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{3})^{n-2}$）

5、 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3, a_2=\frac{5}{3},\ a_{n+2}=\frac{1}{3}(4a_{n+1}-a_n)$，求$a_n$。（key：

$a_n=1+\frac{2}{3^{n-1}}$）

6、 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=a, a_2=b,\ a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$，且$p+q=1$.求$a_n$.

（ key ： $q=1$ 时， $a_n=a+(n-1)(b-a)$ ； $q\neq 1$ 时，

$a_n=\dfrac{aq+b-(b-a)(-q)^{n-1}}{1+q}$）

7、在数列$\{a_n\}$中， $a_1=a, a_2=a+b,\ pa_{n+2}-(p+q)a_{n+1}+qa_n=0$

（p,q是非 0 常数）.求a_n.（key： $a_n=a+\dfrac{p}{p-q}[1-(\dfrac{q^{n-1}}{p})]b$

（$p\neq q$）； $a_n=a_1+(n-1)b$）（$p=q$）

8、在数列$\{a_n\}$中， a_1,a_2给定， $a_n=ba_{n-1}+ca_{n-2}$. 求

a_n.(key: $a_n=\dfrac{b^{n-1}-a^{n-1}}{b-a}\cdot a_2+\dfrac{c(b^{n-2}-a^{n-2})}{b-a}\cdot a_1$ ($a\neq b$)；若$a=b$，

上式不能应用，此时， $a_n=(n-1)a_2\cdot a^{n-2}-(n-2)a_1a^{n-1}$.

附定理 3 的证明

定理 3(分式递推问题)：如果数列$\{a_n\}$满足下列条件：已知a_1的值且对于$n\in \mathrm{N}$，都有$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+h}$（其中$p$、$q$、$r$、$h$均为常数，且$ph\neq qr, r\neq 0, a_1\neq -\dfrac{h}{r}$），那么，可作特征方程$x=\dfrac{px+q}{rx+h}$.

（1）当特征方程有两个相同的根l（称作特征根）时，

若$a_1=l$，则$a_n=l, n\in \mathrm{N}$; 若$a_1\neq l$，则$a_n=\dfrac{1}{b_n}+l, n\in \mathrm{N}$, 其中$b_n=\dfrac{1}{a_1-l}+(n-1)\dfrac{r}{p-rl}, n\in \mathrm{N}$.特别地，当存在$n_0\in \mathrm{N}$, 使$b_{n_0}=0$时，无穷数列$\{a_n\}$不存在.

（2）当特征方程有两个相异的根l_1、l_2（称作特征根）时，则$a_n=\dfrac{l_2c_n-l_1}{c_n-1}$，$n\in \mathrm{N}$, 其中

$$c_n=\frac{a_1-l_1}{a_1-l_2}(\frac{p-l_1r}{p-l_2r})^{n-1},n\in \mathrm{N},(其中a_1\neq l_2).$$

证明：先证明定理的第（1）部分.

作交换 $d_n=a_n-l,n\in \mathrm{N}$

则 $d_{n+1}=a_{n+1}-l=\frac{pa_n+q}{ra_n+h}-l$

$$=\frac{a_n(p-lr)+q-lh}{ra_n+h}$$

$$=\frac{(d_n+l)(p-lr)+q-lh}{r(d_n+l)+h}$$

$$=\frac{d_n(p-lr)-[rl^2+l(h-p)-q]}{rd_n+h-rl} \qquad ①$$

$\because$ l 是特征方程的根，$\therefore$ $l=\frac{pl+q}{rl+h}\Rightarrow rl^2+l(h-p)-q=0.$

将该式代入①式得 $d_{n+1}=\frac{d_n(p-lr)}{rd_n+h-lr},n\in \mathrm{N}.$ ②

将 $x=\frac{p}{r}$ 代入特征方程可整理得 $ph=qr$,这与已知条件 $ph\neq qr$ 矛盾.

故特征方程的根 $l\neq\frac{p}{r}$, 于是 $p-lr\neq 0.$ ③

当 $d_1=0$，即 $a_1=d_1+l=l$ 时，由②式得 $b_n=0,n\in \mathrm{N}$, 故 $a_n=d_n+l=l,n\in \mathrm{N}.$

当 $d_1\neq 0$ 即 $a_1\neq l$ 时，由②、③两式可得 $d_n\neq 0,n\in \mathrm{N}.$ 此时可对②式作如下变化：

$$\frac{1}{d_{n+1}}=\frac{rd_n+h-lr}{d_n(p-lr)}=\frac{h+lr}{p-lr}\cdot\frac{1}{d_n}+\frac{r}{p-lr}. \qquad ④$$

由 l 是方程 $x=\frac{px+q}{rx+h}$ 的两个相同的根可以求得 $l=\frac{p-h}{2r}$.

$$\therefore \frac{h+lr}{p-lr}=\frac{h+\frac{p-h}{2r}r}{p-\frac{p-h}{2r}r}=\frac{h+p}{p+h}=1,$$

将此式代入④式得 $\frac{1}{d_{n+1}}=\frac{1}{d_n}+\frac{r}{p-lr}, n\in \mathrm{N}.$

令 $b_n=\frac{1}{d_n}, n\in \mathrm{N}$. 则 $b_{n+1}=b_n+\frac{r}{p-lr}, n\in \mathrm{N}$. 故数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{r}{p-lr}$ 为公差的等差数列.

$$\therefore b_n=b_1+(n-1)\cdot\frac{r}{p-lr}, n\in \mathrm{N}.$$

其中 $b_1=\frac{1}{d_1}=\frac{1}{a_1-l}$.

当 $n\in \mathrm{N}, b_n\neq 0$ 时，$a_n=d_n+l=\frac{1}{b_n}+l, n\in \mathrm{N}.$

当存在 $n_0\in \mathrm{N}$, 使 $b_{n_0}=0$ 时，$a_{n_0}=d_{n_0}+l=\frac{1}{b_{n_0}}+l$ 无意义.故此时，无穷数列 $\{a_n\}$ 是不存在的.

再证明定理的第（2）部分如下:

$\because$ 特征方程有两个相异的根 l_1、l_2，$\therefore$ 其中必有一个特征根不等于 a_1，不妨令 $l_2\neq a_1$. 于是可作变换 $c_n=\frac{a_n-l_1}{a_n-l_2}, n\in \mathrm{N}.$

故$c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-l_1}{a_{n+1}-l_2}$，将$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+h}$代入再整理得

$$c_{n+1}=\frac{a_n(p-l_1r)+q-l_1h}{a_n(p-l_2r)+q-l_2h},n\in \mathrm{N} \qquad ⑤$$

由第（1）部分的证明过程知$x=\dfrac{p}{r}$不是特征方程的根，故$l_1\neq\dfrac{p}{r}, l_2\neq\dfrac{p}{r}$.

故$p-l_1r\neq 0, p-l_2r\neq 0$.所以由⑤式可得：

$$c_{n+1}=\frac{p-l_1r}{p-l_2r}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-l_1h}{p-l_1r}}{a_n+\dfrac{q-l_2h}{p-l_2r}},n\in \mathrm{N} \qquad ⑥$$

$\because$ 特征方程$x=\dfrac{px+q}{rx+h}$有两个相异根l_1、l_2 $\Rightarrow$ 方程$rx^2+x(h-p)-q=0$有两个相异根l_1、l_2，而方程$-x=\dfrac{q-xh}{p-xr}$与方程$rx^2-x(h-p)-q=0$又是同解方程.

$$\therefore \frac{q-l_1h}{p-l_1r}=-l_1,\frac{q-l_2h}{p-l_2r}=-l_2$$

将上两式代入⑥式得

$$c_{n-1}=\frac{p-l_1r}{p-l_2r}\cdot\frac{a_n-l_1}{a_n-l_2}=\frac{p-l_1r}{p-l_2r}c_n,n\in \mathrm{N}$$

当$c_1=0$, 即$a_1\neq l_1$时，数列$\{c_n\}$是等比数列，公比为$\dfrac{p-l_1r}{p-l_2r}$.此时对于$n\in \mathrm{N}$都有

$$c_n=c_1(\frac{p-l_1r}{p-l_2r})^{n-1}=(\frac{a_1-l_1}{a_1-l_2})(\frac{p-l_1r}{p-l_2r})^{n-1}.$$

当$c_1=0$即$a_1=l_1$时，上式也成立.

由$c_n=\frac{a_n-l_1}{a_n-l_2}$且$l_1\neq l_2$可知$c_n=1, n\in \mathrm{N}.$

所以$a_n=\frac{l_2c_n-l_1}{c_n-1}, n\in \mathrm{N}.$(证毕)

注:当 $ph=qr$ 时,$\frac{pa_n+q}{ra_n+h}$会退化为常数;当$r=0$时,$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+h}$可化归为较易解的递推关系,在此不再赘述.