

提高组初赛历年数学题

NOIP2007

1. 给定 n 个有标号的球，标号依次为 $1, 2, \dots, n$ 。将这 n 个球放入 r 个相同的盒子里，不允许有空盒，其不同放置方法的总数记为 $S(n, r)$ 。例如， $S(4, 2)=7$ ，这 7 种不同的放置方法依次为 $\{(1), (234)\}$, $\{(2), (134)\}$, $\{(3), (124)\}$, $\{(4), (123)\}$, $\{(12), (34)\}$, $\{(13), (24)\}$, $\{(14), (23)\}$ 。当 $n=7, r=4$ 时， $S(7, 4)=$ _____。

2. N 个人在操场里围成一圈，将这 N 个人按顺时针方向从 1 到 N 编号，然后，从第一个人起，每隔一个人让下一个人离开操场，显然，第一轮过后，具有偶数编号的人都离开了操场。依次做下去，直到操场只剩下一个人，记这个人的编号为 $J(N)$ ，例如， $J(5)=3$, $J(10)=5$ ，等等。则 $J(400)=$ _____。（提示：对 $N=2^m+r$ 进行分析，其中 $0 \leq r < 2^m$ ）。

NOIP2008

3、对有序数组 $\{5, 13, 19, 21, 37, 56, 64, 75, 88, 92, 100\}$ 进行二分查找，等概率情况下，查找成功的平均查找长度（平均比较次数）为（ ）：

A. $35/11$ B. $34/11$ C. $33/11$ D. $32/11$ E. $34/10$

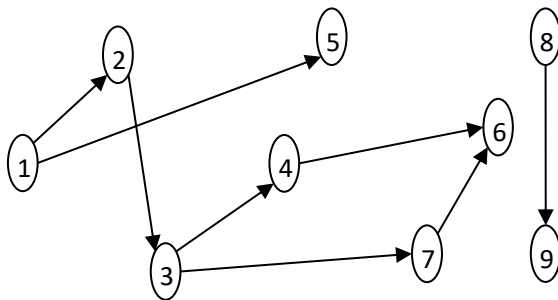
4、有 6 个城市，任何两个城市之间都有一条道路连接，6 个城市两两之间的距离如下表所示，则城市 1 到城市 6 的最短距离为_____。

	城市1	城市2	城市3	城市4	城市5	城市6
城市1	0	2	3	1	12	15
城市2	2	0	2	5	3	12
城市3	3	2	0	3	6	5
城市4	1	5	3	0	7	9
城市5	12	3	6	7	0	2
城市6	15	12	5	9	2	0

5、书架上有 21 本书，编号从 1 到 21，从其中选 4 本，其中每两本的编号都不相邻的选法一共有_____种。

NOIP2009

6、拓扑排序是指将有向无环图 G 中的所有顶点排成一个线性序列，使得图中任意一对顶点 u 和 v ，若 $\langle u, v \rangle \in E(G)$ ，则 u 在线性序列中出现在 v 之前，这样的线性序列成为拓扑序列。如下的有向无环图，对其顶点做拓扑排序，则所有可能的拓扑序列的个数为_____。



7、某个国家的钱币面值有 1, 7, 7^2 , 7^3 共计四种，如果要用现金付清 10015 元的货物，假设买卖双方各种钱币的数量无限且允许找零，那么交易过程中至少需要流通_____张钱币。

NOIP2010

8. 一个平面的法线是指与该平面垂直的直线。过点 $(1, 1, 1)$ 、 $(0, 3, 0)$ 、 $(2, 0, 0)$ 的平面的法线是（ ）。

- A. 过点 $(1, 1, 1)$ 、 $(2, 3, 3)$ 的直线 B. 过点 $(1, 1, 1)$ 、 $(3, 2, 1)$ 的直线
C. 过点 $(0, 3, 0)$ 、 $(-3, 1, 1)$ 的直线 D. 过点 $(2, 0, 0)$ 、 $(5, 2, 1)$ 的直线

9、LZW 编码是一种自适应词典编码。在编码的过程中，开始时只有一部基础构造元素的编码词典，如果在编码的过程中遇到一个新的词条，则该词条及一个新的编码会被追加到词典中，并用于后继信息的编码。

举例说明，考虑一个待编码的信息串：“xyx yy yy xyx”。初始词典只有 3 个条目，第一个为 x ，编码为 1；第二个为 y ，编码为 2；第三个为空格，编码为 3；于是串“xyx”的编码为 1-2-1（其中-为编码分隔符），加上后面的一个空格就是 1-2-1-3。但由于有了空格，我们就知道前面的“xyx”是一个单词，而由于该单词没有在词典中，我们就可以自适应的把这个词条添加到词典里，编码为 4，然后按照新的词典对后继信息进行编码，以此类推。于是，最后得到编码：1-2-1-3-2-2-3-5-3-4。

我们可以看到，信息被压缩了。压缩好的信息传递到接受方，接收方也只要

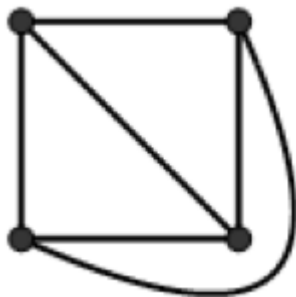
根据基础词典就可以完成对该序列的完全恢复。解码过程是编码过程的逆操作。现在已知初始词典的 3 个条目如上述，接收端收到的编码信息为 2-2-1-2-3-1-1-3-4-3-1-2-1-3-5-3-6，则解码后的信息串是“ ”。

10、无向图 G 有 7 个顶点，若不存在由奇数条边构成的简单回路，则它至多有_____条边。

11、记 T 为一队列，初始时为空，现有 n 个总和不超过 32 的正整数依次入列。如果无论这些数具体为何值，都能找到一种出队的方式，使得存在某个时刻队列 T 中的数之和恰好为 9，那么 n 的最小值是_____。

NOIP2011

12、平面图可以画在平面上，且它的边仅在顶点上才能相交的简单无向图。4 个顶点的平面图至少有 6 条边，如图所示。那么，5 个顶点的平面图至多有_____条边。

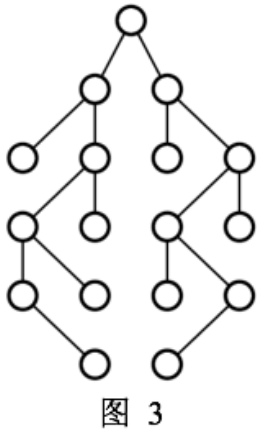
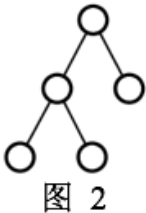
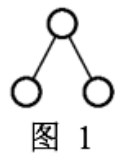


13、定义一种字符串操作，一次可以将其中一个元素移到任意位置。举例说明，对于字符串“BCA”可以将 A 移到 B 之前，变字符串“ABC”。如果要将字符串“DACHEBGIF”变成“ABCDEFGHI”最少需要_____次操作。

NOIP2012

14、本题中，我们约定布尔表达式只能包含 p, q, r 三个布尔变量，以及“与” (\wedge)、“或” (\vee)、“非” (\neg) 三种布尔运算。如果无论 p, q, r 如何取值，两个布尔表达式的值总是相同，则称它们等价。例如， $(p \vee q) \vee r$ 和 $p \vee (q \vee r)$ 等价， $p \vee \neg p$ 和 $q \vee \neg q$ 也等价；而 $p \vee q$ 和 $p \wedge q$ 不等价。那么，两两不等价的布尔表达式最多有_____个。

15、对于一棵二叉树，独立集是指两两互不相邻的节点构成的集合。例如，图 1 有 5 个不同的独立集（1 个双点集合、3 个单点集合、1 个空集），图 2 有 14 个不同的独立集。那么，图 3 有_____个不同的独立集。



NOIP2013

16、某系统自称使用了一种防窃听的方式验证用户密码。密码是 n 个数 s_1, s_2, \dots, s_n ，均为 0 或 1。该系统每次随机生成 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n ，均为 0 或 1，请用户回答 $(s_1a_1+s_2a_2+\dots+s_na_n)$ 除以 2 的余数。如果多次的回答总是正确，即认为掌握密码。该系统认为，即使问答的过程被泄露，也无助于破解密码——因为用户并没有直接发送密码。

然而，事与愿违。例如，当 $n=4$ 时，有人窃听了以下 5 次问答：

问答编号	系统生成的 n 个数				掌握密码的用户的回答
	a_1	a_2	a_3	a_4	
1	1	1	0	0	1
2	0	0	1	1	0
3	0	1	1	0	0
4	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0

就破解出了密码 $s_1=_____$ ， $s_2=_____$ ， $s_3=_____$ ， $s_4=_____$ 。

17、现有一只青蛙，初始时在 n 号荷叶上。当它某一时刻在 k 号荷叶上时，下一时刻将等概率地随机跳到 $1, 2, \dots, k$ 号荷叶之一上，直至跳到 1 号荷叶为止。当 $n=2$ 时，平均一共跳 2 次；当 $n=3$ 时，平均一共跳 2.5 次。则当 $n=5$ 时，平均一

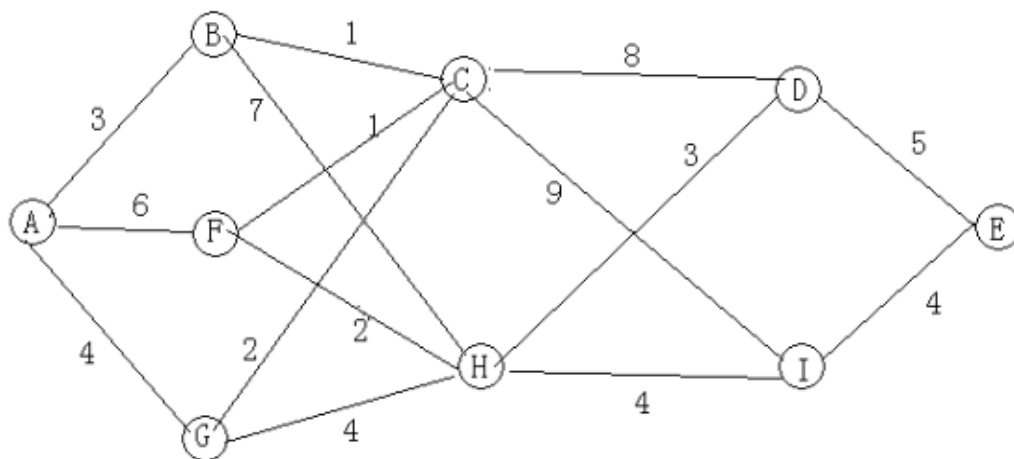
共跳_____次。



NOIP2014

18、由数字 1, 1, 2, 4, 8, 8 所组成的不同的四位数的个数是_____。

19、如图所示，图中每条边上的数字表示该边的长度，则从 A 到 E 的最短距离是_____。



NOIP2015

20、在 1 和 2015 之间(包括 1 和 2015 在内)不能被 4、5、6 三个数任意一个数整除的数有_____个。

21、结点数为 5 的不同形态的二叉树一共有_____种。(结点数为 2 的二叉树一共有 2 种:一种是根结点和左儿子, 另一种是根结点和右儿子。)

NOIP2016

22、一个 1×8 的方格图形(不可旋转)用黑、白两种颜色填涂每个方格。如果每个方格只能填涂一种颜色, 且不允许两个黑格相邻, 共有_____种填涂方案。

23、某中学在安排期末考试时发现，有 7 个学生要参加 7 门课程的考试，下表列出了哪些学生参加哪些考试（用√表示要参加相应的考试）。最少要安排_____个不同的考试时间段才能避免冲突？

考试	学生 1	学生 2	学生 3	学生 4	学生 5	学生 6	学生 7
通用技术	√				√		√
物理	√	√					√
化学		√		√			
生物	√				√	√	
历史			√	√		√	
地理		√	√				√
政治			√			√	

NOIP2017

24、2017 年 10 月 1 日是星期日，1949 年 10 月 1 日是（ ）。

A. 星期三 B. 星期日 C. 星期六 D. 星期二

25、由四个不同的点构成的简单无向连通图的个数是（ ）。

A. 32 B. 35 C. 38 D. 41

26、将 7 个名额分给 4 个不同的班级，允许有的班级没有名额，有（ ）种不同的分配方案。
A. 60 B. 84 C. 96 D. 120

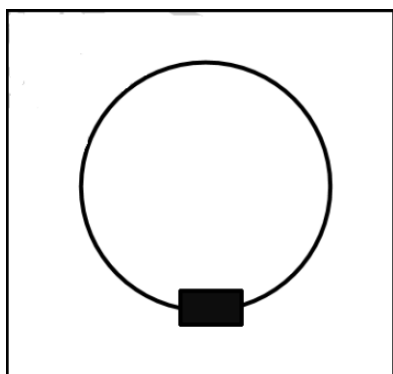
27、小明要去南美洲旅游，一共乘坐三趟航班才能到达目的地，其中第 1 个航班准点的概率是 0.9，第 2 个航班准点的概率为 0.8，第 3 个航班准点的概率为 0.9。如果存在第 i 个（i=1,2）航班晚点，第 i+1 个航班准点，则小明将赶不上第 i+1 个航班，旅行失败；除了这种情况，其他情况下旅行都能成功。请问

小明此次旅行成功的概率是（ ）。

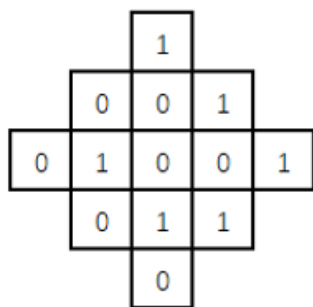
A. 0.5 B. 0.648 C. 0.72 D. 0.74

28、欢乐喷球：儿童游乐场有个游戏叫“欢乐喷球”，正方形场地中心能不断喷出彩色乒乓球，以场地中心为圆心还有一个圆形轨道，轨道上有一列小火车在匀速运动，火车有六节车厢。假设乒乓球等概率落到正方形场地的每个地点，包括火车车厢。小朋友玩这个游戏时，只能坐在同一个火车车厢里，可以在自己的车厢里捡落在该车厢内的所有乒乓球，每个人每次游戏有三分钟时间，则一个小朋友独自玩一次游戏期望可以得到（ ）个乒乓球。假设乒乓球喷出的速度为 2 个/秒，每节车厢的面积是整个场地面积的 $1/20$ 。

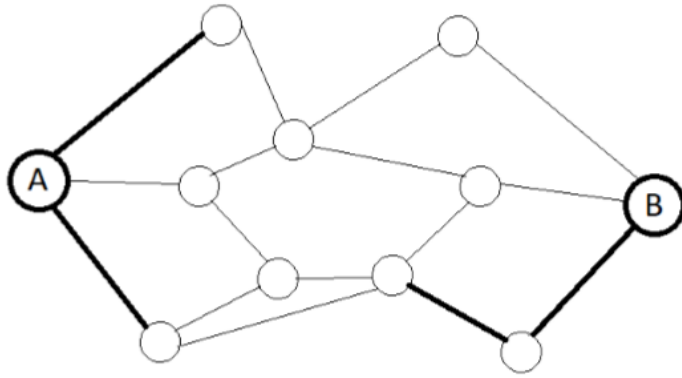
A. 60 B. 108 C. 18 D. 20



29、如右图所示，共有 13 个格子。对任何一个格子进行一次操作，会使得它自己以及与其上下左右相邻的格子中的数字改变（由 1 变 0，或由 0 变 1）。现在要使得所有的格子中的数字都变为 0，至少需要_____次操作。



30、如下图所示，A 到 B 是连通的。假设删除一条细的边的代价是 1，删除一条粗的边的代价是 2，要让 A、B 不连通，最小代价是_____，最小代价的不同方案数是_____。（只要有一条删除的边不同，就是不同的方案）



NOIP2018

31、在一条长度为 1 的线段上随机取两个点，则以这两个点为端点的线段的期望长度是（ ）。

- A. $1/2$ B. $1/3$ C. $2/3$ D. $3/5$

32、关于 Catalan 数 $C_n = (2n)! / (n+1)! / n!$ ，下列说法中错误的是（ ）。

A

- A. C_n 表示有 $n+1$ 个结点的不同形态的二叉树的个数。
 B. C_n 表示含 n 对括号的合法括号序列的个数。
 C. C_n 表示长度为 n 的入栈序列对应的合法出栈序列个数。
 D. C_n 表示通过连接顶点而将 $n+2$ 边的凸多边形分成三角形的方法个数。

33、假设一台抽奖机中有红、蓝两色的球，任意时刻按下抽奖按钮，都会等概率获得红球或蓝球之一。有足够多的人每人都用这台抽奖机抽奖，假如他们的策略均为：抽中蓝球则继续抽球，抽中红球则停止。最后每个人都把自己获得的所有球放到一个大箱子里，最终大箱子里的红球与蓝球的比例接近于（ ）。

- A. $1:2$ B. $2:1$ C. $1:3$ D. $1:1$

34、甲乙丙丁四人在考虑周末要不要外出郊游。 已知①如果周末下雨，并且乙不去，则甲一定不去；②如果乙去，则丁一定去；③如果丙去，则丁一定不去；④如果丁不去，而且甲不去，则丙一定不去。如果周末丙去了，则甲_____（去了/没去），乙_____（去了/没去），丁_____（去了/没去），周末_____（下雨/ 没下雨）。

35、方程 $a * b = (a \text{ or } b) * (a \text{ and } b)$ ，在 a, b 都取 $[0, 31]$ 中的整数时， 共有_____组解。（*表示乘法；or 表示按位或运算；and 表示按位与运算）