

Departamento de Estadística y Matemáticas  
Facultad de Ciencias Económicas  
Estadística II  
Parcial I

Nombre: \_\_\_\_\_ Cédula: \_\_\_\_\_

1. **(1.5 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Weibull con parámetros  $\alpha$  desconocido y parámetro  $\beta$  conocido, función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \text{ para } x \geq 0; \alpha > 0; \beta > 0$$

Demuestre cuál es el valor del primer momento asociado a la población, y con éste, encuentre el estimador por el método de los momentos para el parámetro desconocido  $\alpha$ .

2. **(1.5 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Weibull con parámetros  $\alpha$  desconocido y parámetro  $\beta$  conocido, función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \text{ para } x \geq 0; \alpha > 0; \beta > 0$$

Encuentre el estimador por el método de máxima verosimilitud para el parámetro desconocido  $\alpha$ , y demuestre si este estimador maximiza efectivamente la función de verosimilitud.

3. **(1 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Maxwell, con parámetro  $\alpha$  desconocido, función de distribución dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}}{\alpha^3} \text{ para } 0 \leq x \leq \infty; \alpha > 0$$

esperanza matemática y varianza dadas por

$$\mathbb{E}(X) = 2\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$
$$Var(X) = \frac{\alpha^2(3\pi - 8)}{\pi}$$

Pruebe si el estimador

$$\hat{\alpha} = \bar{X} - \frac{\bar{X}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Es un estimador consistente para el parámetro  $\alpha$ .

4. **(1 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de probabilidad, con media  $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha^2}{\beta}$  y varianza  $Var(X) = \alpha^5 \beta^3$ . Demuestre cuál de los dos estimadores planteados a continuación es más eficiente para el parámetro  $\alpha$ , tal que

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{12} (3x_{48} - x_{36} + 2x_{96} + 4x_{93} + 3x_{53})$$
$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{7} (3x_{88} + 2x_{86} - x_{88} + 4x_{86})$$