Departamento de Estadística y Matemáticas
Facultad de Ciencias Económicas
Estadística II
Parcial I

Nombre: ______________________________ Cédula:____________

1. **(1.5 punto)** Sea $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Weibull con parámetros α desconocido y parámetro β conocido, función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \text{ para } x \geq 0; \alpha > 0; \beta > 0$$

Demuestre cuál es el valor del primer momento asociado a la población, y con éste, encuentre el estimador por el método de los momentos para el parámetro desconocido α.

2. **(1.5 punto)** Sea $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Weibull con parámetros α desconocido y parámetro β conocido, función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \text{ para } x \geq 0; \alpha > 0; \beta > 0$$

Encuentre el estimador por el método de máxima verosimilitud para el parámetro desconocido α, y demuestre si este estimador maximiza efectivamente la función de verosimilitud.

3. **(1 punto)** Sea $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Maxwell, con parámetro α desconocido, función de distribución dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2 e^{-\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{\alpha^3} \qquad \text{para } 0 \leq x \leq \infty; \alpha > 0$$

esperanza matemática y varianza dadas por

$$\mathbb{E}(X) = 2\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$
$$Var(X) = \frac{\alpha^2(3\pi - 8)}{\pi}$$

Pruebe si el estimador

$$\hat{\alpha} = \bar{X} - \frac{\bar{X}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Es un estimador consistente para el parámetro α.

4. **(1 punto)** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de probabilidad, con media $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha^3}{\beta^2}$ y varianza $Var(X) = \alpha^6\beta^3$. Demuestre cuál de los dos estimadores planteados a continuación es más eficiente para el parámetro α, tal que

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{13}(2x_{74} - x_{25} + 3x_{97} - 4x_{19} + 2x_{18})$$
$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{8}(2x_{75} + x_6 + 4x_{46} + 3x_{29} + 2x_{15} + x_{14} + 4x_{59})$$