

Departamento de Estadística y Matemáticas  
Facultad de Ciencias Económicas  
Estadística I  
Parcial II

Nombre: \_\_\_\_\_ Cédula: \_\_\_\_\_

1. **(1 punto)** Un estudiante que trabaja en una fotocopidora de la Universidad de Antioquia y decide encontrar una función de probabilidad que se ajuste al número de toner de tinta negra que gasta en un día una fotocopidora. Luego de recaudar información de varios meses, encuentra que la distribución que presenta un mejor ajuste al gasto de toner, posee una distribución de Yule truncada en 4, la cual está dada por

$$p(x) = k(\mu + 1) \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(\mu+2)}{\Gamma(x+\mu+3)} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Entonces si el valor del parámetro  $\mu = 4$ ,

- a) **(0.5 punto)** Encuentre el valor  $k$  que hace que la función de probabilidad esté bien definida, y construya la tabla de probabilidad,  $(x, p(x))$ .
- b) **(0.5 punto)** Encuentre la probabilidad de que el número de toner que se gastan en un día en la fotocopidora sea inferior a 4 toners.
2. **(1 punto)** Suponga que Rappi hace un estudio sobre el número de pedidos que realiza un Rappitendero en bicicleta en una hora y el número de pedidos que realiza un Rappitendero en motocicleta en una hora.

Sea la variable aleatoria  $X$  el número de pedidos que realiza un Rappitendero en bicicleta en una hora y la variable aleatoria  $Y$  el número de pedidos que realiza un Rappitendero en motocicleta en una hora. Entonces si las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son independientes con función conjunta dada por

$p(x, y)$		$X$				
		0	1	2	3	4
$Y$	0	1078	2744	4508	3528	1568
	1	946	2408	3956	3096	1376
	2	506	1288	2116	1656	736
	3	858	2184	3588	2808	1248
	4	1078	2744	4508	3528	1568
	5	1562	3976	6532	5112	2272

Entonces, si se toma un intervalo cualquiera de una hora

- a) **(0.5 punto)** Calcule el valor  $k$  que hace que la función de probabilidad conjunta  $p(x, y)$  esté bien definida, y calcule las distribuciones marginales,  $g(x)$  y  $h(y)$ . **Nota:** Trate de usar fraccionarios para que no se compliquen con tanto decimal.
- b) **(0.5 punto)** Calcule las funciones de distribución acumulada  $G(X)$  y de  $H(Y)$ .
3. **(1 punto)** Suponga IMUSA decide hacer una prueba extensa a la nueva lavadora que pretende sacar al mercado, con el fin de determinar el tiempo de vida de una lavadora hasta que ésta requiera de una reparación mayor. suponga que la función de distribución del tiempo de vida de las lavadoras está dado por

$$f(x) = 9 - 6x^3 + x^6 \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1$$

- a) **(0.5 punto)** Verifique si la función de densidad de probabilidad está bien definida (de no estarlo, multiplique por una constante  $k$ , de tal forma que quede bien definida), y calcule la función de distribución acumulada del tiempo de vida de una lavadora hasta que requiera de una reparación mayor.
- b) **(0.5 punto)** Calcule la probabilidad de que el tiempo de vida de una lavadora hasta que requiera una reparación sea al menos de 0.05 pero máximo de 3.09.
4. **(1 punto)** Suponga que la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Antioquia encabeza un estudio sobre el número meses de garantía que se ofrecen para diferentes marcas de bicicletas en el país, y encuentra que la función de distribución acumulada  $F(X)$  del número de meses de garantía que las bicicletas está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 9 \\ 0.0224 & 9 \leq x < 10 \\ 0.1074 & 10 \leq x < 12 \\ 0.2689 & 12 \leq x < 18 \\ 0.4735 & 18 \leq x < 20 \\ 0.6679 & 20 \leq x < 27 \\ 1 & x \geq 27 \end{cases}$$

- a) **(0.5 punto)** Construya la tabla de la función de masa de probabilidad  $(x, p(x))$ .
- b) **(0.5 punto)** Calcular la probabilidad de que el número de meses de garantía que tiene una bicicleta sea no más de 19, dado que se sabe que el número de meses de garantía es de mayor a 15 meses.
5. **(1 punto)** Una nueva cervecería decide crear un nuevo tipo de cerveza y para ello decide mezclar el sabor de la malta tostada que caracteriza a las cervezas STOUT, con el sabor de la malta pálida que caracteriza a las cervezas LAGER, y otros sabores frutales que caracterizan a las cervezas Ale. Las proporciones de malta tostada y malta pálida en una mezcla pueden traducirse en una función de distribución conjunta, siendo  $X$  la proporción de malta tostada, y  $Y$  la proporción de malta pálida.

La función de densidad de probabilidad conjunta se presenta a continuación

$$f(x, y) = 288x^3y^3 \quad \text{para } 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1; \quad x + y \leq 1$$

Si la cervecería logra sintetizar un nuevo sabor de cerveza

- a) **(0.5 punto)** Calcule es la probabilidad de que la proporción de malta tostada sea menor a 33 %, y la proporción de malta pálida sea menor a 27 %.
- b) **(0.5 punto)** Calcule es la probabilidad de que la proporción de malta tostada sea al menos de 17 %, y la proporción de malta pálida sea mayor a 42 %.