

Departamento de Estadística y Matemáticas
Facultad de Ciencias Económicas
Estadística II
Parcial I

Nombre: _____ Cédula: _____

1. **(1.5 punto)** Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Wald con parámetro desconocido μ , función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2x}} \quad \text{para } x > 0; \mu > 0$$

y función generadora de momentos dada por

$$M_x(t) = e^{\mu(1-\sqrt{1-2t})}$$

Demuestre cuál es el valor del primer momento asociado a la población y con éste, encuentre el estimador por el método de los momentos para el parámetro desconocido μ .

2. **(1.5 punto)** Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Wald con parámetro desconocido μ y función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2x}} \quad \text{para } x > 0; \mu > 0$$

Encuentre el estimador por el método de máxima verosimilitud para el parámetro desconocido μ , y demuestre si este estimador maximiza efectivamente la función de verosimilitud.

3. **(1 punto)** Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Pareto, con parámetro α conocido, parámetro β desconocido, función de distribución dada por

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad \text{para } \beta \leq x < \infty; \alpha > 2; \beta > 0$$

esperanza matemática y varianza dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \\ \text{Var}(X) &= \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \end{aligned}$$

Pruebe si el estimador

$$\hat{\beta} = \bar{X} - \frac{\bar{X}}{\alpha} - 5$$

Es un estimador consistente para el parámetro β .

4. **(1 punto)** Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria *iid* de una distribución de probabilidad, con media $\mathbb{E}(X) = \alpha^3$ y varianza $\text{Var}(X) = \alpha^4\beta$. Demuestre cuál de los dos estimadores planteados a continuación es más eficiente para el parámetro α , tal que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-4} [x_i + x_{i+1}] \\ \hat{\mu}_2 &= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-4} [x_i + x_{i+1}] \end{aligned}$$