

Departamento de Estadística y Matemáticas  
Facultad de Ciencias Económicas  
Estadística I  
Parcial II

Nombre: \_\_\_\_\_ Cédula: \_\_\_\_\_

1. **(1 punto)** Suponga que le han integrado a un software de trading, un componente de aprendizaje asociado a la probabilidad de que para una cryptomoneda en particular, se registre un índice de fuerza relativa (RSI) por debajo de los 30 puntos, seguido con un RSI por encima de los 70 puntos, ya que esto permitirá determinar el número de transacciones de compra y venta que deben realizarse en un día, y así maximizar la ganancia que tiene el usuario en el proceso de trading.

Suponga que para aprender sobre la probabilidad asociada al número de transacciones que se realizan durante un día cualquiera, los programadores han decidido establecer un tiempo límite 247 días de aprendizaje para que el software integre las probabilidades de ocurrencia de las oscilaciones del RSI.

Si de los días registrados se encuentra que en 24 de los días nunca se registró una oscilación entre los RSI menores a 30 y mayores a 70, en 17 de los días se presentó solo una oscilación, en 40 se presentaron dos oscilaciones, en 9 se presentaron tres oscilaciones, en 9 se presentaron cuatro oscilaciones, en 34 se presentaron cinco oscilaciones, en 19 se presentaron seis oscilaciones, en 39 se presentaron siete oscilaciones, en 9 se presentaron ocho oscilaciones, en 25 se presentaron nueve oscilaciones y en 22 se presentaron diez oscilaciones.

Entonces, si usamos dichos registros como el comportamiento real de la variable

- a)* **(0.5 punto)** Construya una tabla de probabilidad  $(x, p(x))$ , para el número de veces que el RSI de la cryptomoneda en particular oscila entre los 30 y 70 puntos, durante un día, y con ella construya la función de distribución acumulada  $F(X)$ .
- b)* **(0.5 punto)** Calcule la probabilidad de que un día cualquiera el número de veces que la cryptomoneda oscila entre los 30 y 70 puntos sea no menos de 3, pero no más de 4.
2. **(1 punto)** Otro aspecto adicional que posee el componente de aprendizaje del software de trading, es el cálculo automático de la comisión en dólares que debe pagarse para que las transacciones de compra o venta se realicen de forma inmediata, ya que en el comercio de las cryptomonedas, fijar comisiones más altas significa tener transacciones que se realizan con prioridad sobre las transacciones que poseen comisiones más bajas.

Por tanto, si se desea que el software haga el proceso de compra y venta de la cryptomoneda de forma automática, se debe garantizar que para una comisión en particular la transacción realizada se realice con prioridad sobre otras transacciones para la misma cryptomoneda.

Luego de recolectar la información del número de transacciones que se exponen en el punto 1, el software encuentra que la función de probabilidad del costo de la comisión en dólares que debe pagarse para que la transacción salga con prioridad sobre otras transacciones está dada por

$$f(x) = x^5 e^{-\frac{x}{11}} + 23 \quad \text{para } 0.32 \leq x \leq 1.34$$

Dado lo anterior,

- a) **(0.5 punto)** Encuentre el valor  $k$  que hace a la función de densidad estar bien definida, y calcule la función de distribución acumulada  $F(X)$  para el costo de la comisión en dólares que debe pagarse para que la transacción se realice con prioridad sobre otras transacciones.
- b) **(0.5 punto)** Calcule la probabilidad de que la comisión que deba pagarse para que una transacción cualquiera se priorice sobre las demás sea al menos de 0.33, pero menor a 0.75.
3. **(1.5 puntos)** Similar a la importancia que tiene el número de veces que el RSI oscila entre 30 y 70 puntos durante un día, también es importante observar de forma individual el número de veces que el RSI cae por debajo de 30 puntos y el número de veces que el RSI cae por encima de los 70 puntos, en intervalos de una hora.

Ya que dependiendo del número de veces que durante una hora el software de trading registre valores por debajo o por encima de 30 y 70 puntos, respectivamente, podrá deducir si para la siguiente hora, la serie registrará una tendencia a la baja o una tendencia al alza, a partir de observar si dicha serie cayó más veces por debajo de 30 puntos, o si por el contrario, estuvo más veces por encima de 70 puntos.

Suponga que la tabla de frecuencias conjunta para el número de veces que cae por debajo de 30 puntos ( $X$ ) y el número de veces que cae por encima de 70 puntos ( $Y$ ), se registra a continuación.

| $p(x, y)$ |   | $X$ |    |    |    |    |    |    |
|-----------|---|-----|----|----|----|----|----|----|
|           |   | 0   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| $Y$       | 0 | 10  | 9  | 9  | 30 | 26 | 20 | 18 |
|           | 1 | 5   | 10 | 29 | 22 | 27 | 7  | 15 |
|           | 2 | 16  | 33 | 15 | 16 | 8  | 20 | 14 |
|           | 3 | 19  | 29 | 23 | 46 | 11 | 10 | 12 |
|           | 4 | 28  | 23 | 6  | 29 | 11 | 9  | 19 |
|           | 5 | 8   | 18 | 11 | 4  | 4  | 8  | 7  |
|           | 6 | 13  | 8  | 26 | 11 | 23 | 8  | 2  |

- a) **(0.5 punto)** Construya la tabla de probabilidad conjunta  $p(x, y)$  bien definida y calcule la probabilidad de que el número de veces que el RSI cae por debajo de 30 sea inferior a 4, mientras que, el número de veces que el RSI cae por encima de 70 sea superior a 3.
- b) **(0.5 punto)** Calcule las distribuciones marginales,  $g(x)$  y  $h(y)$ , y con éstas, calcule las distribuciones acumulada  $G(X)$  y  $H(Y)$
- c) **(0.5 punto)** Calcule la distribución condicional  $p(x|y = 0)$ .
4. **(1.5 puntos)** Como aspecto final que posee el componente de aprendizaje del software de trading, se encuentra la capacidad de medir la proporción de veces en las cuales el software vende de forma acertada al registrarse valores de RSI mayores a 70 puntos, y la capacidad de medir la proporción de veces en las cuales el software compra de forma acertada al registrarse valores de RSI menores a 30 puntos.

En donde el término “de forma acertada” hace referencia a haber vendido en precios máximos, o comprar en precios mínimos. Lo anterior es un aspecto extremadamente importante en el proceso de trading, debido a que es el proceso que permite maximizar las ganancias que se generan al comprar y vender cryptomoneda, ya que se compra barato y se vende caro, y dicho ciclo se repite una y otra vez.

Por otro lado, se tendría que una compra o una venta “no sería acertada” en aquellos casos en donde se realiza la venta a un precio, pero la cryptomoneda sigue creciendo, es decir, se hubiese podido vender más cara, o en aquellos casos en donde se compra cryptomoneda a un

precio, pero el precio de la moneda sigue cayendo, es decir, se hubiese podido comprar más barato.

Si definimos la variable  $X$  como la proporción de aciertos que se tienen en un día al momento de vender, y la variable  $Y$  como la proporción de aciertos que se tienen en un día al momento de comprar, se tendrá que la función de probabilidad conjunta de  $f(x, y)$  esta definida como

$$f(x, y) = 8x^2 + 19y \quad \text{para } 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1$$

- a)* **(0.5 punto)** Encuentre el valor  $k$  que hace que la función esté bien definida, y demuestre si la proporción de aciertos al momento de vender, es independiente a la proporción de acierto al momento de comprar.
- b)* **(0.5 punto)** Calcule es la probabilidad de que  $\mathbb{P}(0.83 < x + y < 1.83)$ .
- c)* **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que  $P(y \leq 0.54 | x > 0.6)$ .