

Departamento de Estadística y Matemáticas  
Facultad de Ciencias Económicas  
Estadística II  
Parcial I

Nombre: \_\_\_\_\_ Cédula: \_\_\_\_\_

1. **(1.5 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Wald con parámetro desconocido  $\mu$ , función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2x}} \text{ para } x > 0; \mu > 0$$

y función generadora de momentos dada por

$$M_x(t) = e^{\mu(1-\sqrt{1-2t})}$$

Demuestre cuál es el valor del primer momento asociado a la población y con éste, encuentre el estimador por el método de los momentos para el parámetro desconocido  $\mu$ .

2. **(1.5 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Wald con parámetro desconocido  $\mu$  y función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2x}} \text{ para } x > 0; \mu > 0$$

Encuentre el estimador por el método de máxima verosimilitud para el parámetro desconocido  $\mu$ , y demuestre si este estimador maximiza efectivamente la función de verosimilitud.

3. **(1 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Pareto, con parámetro  $\alpha$  conocido, parámetro  $\beta$  desconocido, función de distribución dada por

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ para } \beta \leq x \leq \infty; \alpha > 2; \beta > 0$$

esperanza matemática y varianza dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \\ \text{Var}(X) &= \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \end{aligned}$$

Pruebe si el estimador

$$\hat{\beta} = \bar{X} - \frac{\bar{X}}{\alpha} - 5$$

Es un estimador consistente para el parámetro  $\beta$ .

4. **(1 punto)** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria *iid* de una distribución de probabilidad, con media  $\mathbb{E}(X) = \alpha^2$  y varianza  $\text{Var}(X) = \alpha^4\beta^2$ . Demuestre cuál de los dos estimadores planteados a continuación es más eficiente para el parámetro  $\alpha$ , tal que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n-5} [x_i - 5] \\ \hat{\mu}_2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-4} [x_i + x_{i+1}] \end{aligned}$$