# Departamento de Estadística y Matemáticas
# Facultad de Ciencias Económicas
# Estadística II
# Parcial I

Nombre: ______________________________ Cédula: ____________

1. **(1.5 punto)** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Wald con parámetro desconocido $\mu$, función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2x}} \quad \text{para } x > 0; \mu > 0$$

y función generadora de momentos dada por

$$M_x(t) = e^{\mu\left(1-\sqrt{1-2t}\right)}$$

Demuestre cuál es el valor del primer momento asociado a la población y con éste, encuentre el estimador por el método de los momentos para el parámetro desconocido $\mu$.

2. **(1.5 punto)** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Wald con parámetro desconocido $\mu$ y función de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2x}} \quad \text{para } x > 0; \mu > 0$$

Encuentre el estimador por el método de máxima verosimilitud para el parámetro desconocido $\mu$, y demuestre si este estimador maximiza efectivamente la función de verosimilitud.

3. **(1 punto)** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de Pareto, con parámetro $\alpha$ conocido, parámetro $\beta$ desconocido, función de distribución dada por

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \qquad \text{para } \beta \le x \le \infty; \alpha > 2; \beta > 0$$

esperanza matemática y varianza dadas por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

Pruebe si el estimador

$$\hat{\beta} = \bar{X} - \frac{\bar{X}}{\alpha} - 5$$

Es un estimador consistente para el parámetor $\beta$.

4. **(1 punto)** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria *iid* de una distribución de probabilidad, con media $\mathbb{E}(X) = \alpha^3$ y varianza $Var(X) = \alpha^4\beta^3$. Demuestre cuál de los dos estimadores planteados a continuación es más eficiente para el parámetro $\alpha$, tal que

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-5}[x_i + 7]$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-5}[x_i + 4]$$