Departamento de Estadística y Matemáticas
Facultad de Ciencias Económicas
Estadística I
Parcial IV

Nombre: ______________________________ Cédula:____________

1. **(1 punto)** Durante los últimos años las empresas generadoras de energía eléctrica en Colombia, han estado interesadas en conocer cuál es la distribución de probabilidad asociada a las descargas de agua que llegan desde las diferentes vertientes hacia la cuenca hidroeléctrica, con el fin de poder medir de forma mas acertada la incertidumbre generada por los costos de la energía al momento de la generación, puesto que se sabe que existe una relación directa entre el costo de generación y el porcentaje de llenado de las cuencas.

   Por ello, las empresas deciden contratar a un grupo de hidrólogos, economistas y estadísticos, con el fin de que éstos realicen el levantamiento de información, y con ésta, puedan determinar cuál es la distribución de probabilidad de interés, pues es de sumo interés para las empresas poder cuantificar la incertidumbre asociada a las descargas de agua que llegan a las cuencas.

   Suponga que luego de un árduo trabajo y muchos meses sin dormir, los profesionales concluyen que la distribución de probabilidad de las descargas que ingresan en la cuenca hidroeléctrica estudiada es una distribución Gumbel con parámetro de localización μ y parámetro de escala σ. Es de anotar que la función de distribución Gumbel está dada por

   $$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right]} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty; -\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$$

   Entonces, si suponemos que el parámetro de localización $\mu = 20$ y el parámetro de escala $\sigma = 17$, demuestre que la función generadora de momentos para la distribución de las descargas que ingresan en la cuenca hidroeléctrica estudiada es igual a $M_x(t) = e^{20t}\Gamma(1 - 17t)$.

NOTA

a) Recuerde que $M_x(t) = \mathbb{E}(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)dx$

b) Recuerde que $e^{A+B} = e^A e^B$

c) Cuando vaya a plantear el cambio de variable, haga $u = e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}$

d) Cuando deba derivar un euler, recuerde que $\frac{\partial e^{-Ax}}{\partial x} = e^{-Ax} \underbrace{(-A)}_{interna}$

e) Recuerde que cuando hace un cambio de variable debe cambiar los límites de integración.

f) Recuerde que si le queda algún x sobrando, luego de realizar un cambio de variable, debe despejar x del la ecuación de u.

g) Recuerde que $Ln(e^{-A}) = -A$

h) Recuerde que $e^{A\ln(B)} = B^A$

i) Recuerde que $\int_{\infty}^{0} Adx = -\int_{0}^{\infty} Adx$

j) Recuerde que $\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

k) Sepa que si leyó estas notas va a darse cuenta que el orden planteado en éstas es prácticamente el mismo que debe que aplicar para realizar la demostración.

2. **(1 punto)** Durante los últimos años las empresas generadoras de energía eléctrica en Colombia, han estado interesadas en conocer cuál es la distribución de probabilidad asociada a las descargas de agua que llegan desde las diferentes vertientes hacia la cuenca hidroeléctrica, con el fin de poder medir de forma mas acertada la incertidumbre generada por los costos de la energía al momento de la generación, puesto que se sabe que existe una relación directa entre el costo de generación y el porcentaje de llenado de las cuencas.

   Por ello, las empresas deciden contratar a un grupo de hidrólogos, economistas y estadísticos, con el fin de que éstos realicen el levantamiento de información, y con ésta, puedan determinar cuál es la distribución de probabilidad de interés, pues es de sumo interés para las empresas poder cuantificar la incertidumbre asociada a las descargas de agua que llegan a las cuencas.

   Suponga que luego de un árduo trabajo y muchos meses sin dormir, los profesionales concluyen que la distribución de probabilidad de las descargas que ingresan en la cuenca hidroeléctrica estudiada es una distribución Gumbel con parámetro de localización μ y parámetro de escala σ. Es de anotar que la función de distribución Gumbel está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right]} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty; -\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$$

   Entonces, si suponemos que el parámetro de localización $\mu = 4$, el parámetro de escala $\sigma = 13$ y que la función generadora de momentos de la distribución Gumbal es igual a $M_x(t) = e^{4t}\Gamma(1 - 13t)$, demuestre cuáles serían los dos primeros momentos alrededor del origen, y con éstos demuestre que el segundo momento central para las descargas que ingresan en la cuenca hidroeléctrica es igual a $Var(X) = \frac{\pi^2}{6}(13)^2$.

NOTA

a) Recuerde que $\mathbb{E}(X^r) = \left.\frac{\partial^r M_x(t)}{\partial t^r}\right|_{t=0}$

b) Recuerde que la derivada de una multiplicación, es igual a la derivada del primer término multiplicada por el segundo término, más la derivada del segundo término multiplicada por el primer término.

c) Cuando deba derivar una función $\Gamma(\alpha)$, recuerde que $\frac{\partial\Gamma(Ax)}{\partial x} = \Gamma'(Ax) \underbrace{(A)}_{\text{interna}}$

d) Cuando deba derivar un euler, recuerde que $\frac{\partial e^{Ax}}{\partial x} = e^{Ax} \underbrace{(A)}_{\text{interna}}$

e) Recuerde que $\Gamma(1) = 1$ y que $e^0 = 1$

f) Recuerde que $\Gamma'(1) = -\gamma$ donde γ se conoce como constante de Euler–Mascheroni y simplemente $\gamma = 0.577215665$

g) Cuando deba derivar una función $\Gamma'(\alpha)$, recuerde que $\frac{\partial\Gamma'(Ax)}{\partial x} = \Gamma''(Ax) \underbrace{(A)}_{\text{interna}}$

h) No olvide la nota número planteada en *b*), y recuerde verificar si alguna de las derivadas que debe hacer, ya la hizo previamente en un paso anterior para que no pierda mucho tiempo.

i) Recuerde que $\Gamma''(1) - \Gamma'(1)^2 = \frac{\pi^2}{6}$

j) Recuerde que en google se encuentra de todo si se tiene paciencia.

3. **(1 punto)** Suponga que luego de realizar un estudio, el grupo de Macroeconomía aplicada de la facultad de Ciencias Económicas, encontró que los salarios que devengan los recién egresados del pregrado en Economía, sigue una distribución normal con una media de 1.499 millones de pesos y una desviación estándar de 0.162 millones de pesos.

   Entonces si se decide seleccionar un recién egresado de la facultad de Economía *a*) **(0.5 puntos)** Cuál es la probabilidad de que este egresado devengue entre 1.2 y 1.593 millones de pesos?

b) **(0.5 puntos)** Si resulta que dicho egresado gana más de 1.432 millones de pesos, cuál es la probabilidad de que este egresado devengue más de 1.626 millones de pesos?

4. **(1 punto)** Cierta tienda de cadena, decide emprender una campaña en ciertas horas, que busca aumentar la compra de jugos naturales sin ningún tipo de conservantes, debido a que la rotación de los mismos debe ser rápida dentro de la tienda porque suelen tener fechas de vencimiento cortas.

   Luego de varias semanas, encuentra que cuando se encuentran realizando una campaña se vende un jugo cada 1.4 minutos.

   a) **(0.5 puntos)** Entonces si se decide realizar una campaña de 4.5 horas, cuál es la probabilidad de que se vendan más de 209 jugos?

   b) **(0.5 puntos)** Entonces si en un momento cualquiera se decide realizar una campaña, y resulta que han pasado ya 0.2151 minutos y aún no se ha vendido ningún jugo, cuál es la probabilidad de que el próximo jugo se venda en más de 1.0013 minutos.

5. **(1 punto)** Si $X_1, X_2, \ldots, X_4$ son variables aleatoria exponenciales independientes e idénticamente distribuidas, tal que $X_i \sim Exp(\beta = 23)$, entonces se podría demostrar que la función generadora de momentos para cada una de las variables aleatorias estaría dada por $M_{x_i}(t) = (1 - 23t)^{-1}$.

   Ahora, suponga que Y es una combinación lineal de las variables aleatorias exponenciales X_i, tal que $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_4$. Demuestre que la función de distribución de Y será una gamma, con función generadora de momentos dada por $M_y(t) = (1 - 23t)^{-4}$.

NOTA

a) Emplee el teorema de convolución de variables aleatorias, presentado en la Clase 20.

b) Emplee el teorema de unicidad de variables aleatorias presentado en la Clase 20.

c) Wikipedia en inglés les puede servir de punto de referencia para la comparación que requiere realizar en el punto anterior.