Departamento de Estadística y Matemáticas
Facultad de Ciencias Económicas
Estadística I
Parcial II

Nombre: ______________________________ Cédula: ____________

1. **(1 punto)** Un estudiante que trabaja en una fotocopiadora de la Universidad de Antioquia y decide encontrar una función de probabilidad que se ajuste al número de toner de tinta negra que gasta en un día una fotocopiadora. Luego de recaudar información de varios meses, encuentra que la distribución que presenta un mejor ajuste al gasto de toner, posee una distribución de Yule truncada en 4, la cual está dada por

$$p(x) = k\,(\mu+1)\,\frac{\Gamma(x+1)\Gamma\,(\mu+2)}{\Gamma\,(x+\mu+3)} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, 4$$

   Entonces si el valor del parámetro $\mu = 2.5$,

   a) **(0.5 punto)** Encuentre el valor k que hace que la función de probabilidad esté bien definida, y construya la tabla de probabilidad, $(x, p(x))$.

   b) **(0.5 punto)** Encuentre la probabilidad de que el número de toner que se gastan en un día en la fotocopiadora sea a lo más de 2 toners.

2. **(1 punto)** Suponga que Rappi hace un estudio sobre el número de pedidos que realiza un Rappitendero en bicicleta en una hora y el número de pedidos que realiza un Rappitendero en motocicleta en una hora.

   Sea la variable aleatoria X el número de pedidos que realiza un Rappitendero en bicicleta en una hora y la variable aleatoria Y el número de pedidos que realiza un Rappitendero en motocicleta en una hora. Entonces si las variables aleatorias X y Y son independientes con función conjunta dada por

$p(x,y)$		X				
		0	**1**	**2**	**3**	**4**
Y	**0**	138	210	384	90	138
	1	0	0	0	0	0
	2	1288	1960	3584	840	1288
	3	966	1470	2688	630	966
	4	575	875	1600	375	575
	5	713	1085	1984	465	713

   Entonces, si se toma un intervalo cualquiera de una hora

   a) **(0.5 punto)** Calcule el valor k que hace que la función de probabilidad conjunta $p(x, y)$ esté bien definida, y calcule las distribuciones marginales, $g(x)$ y $h(y)$. **Nota:** Trate de usar fraccionarios para que no se compliquen con tanto decimal.

   b) **(0.5 punto)** Calcule las funciones de distribución acumulada $G(X)$ y de $H(Y)$.

3. **(1 punto)** Suponga IMUSA decide hacer una prueba extensa a la nueva lavadora que pretende sacar al mercado, con el fin de determinar el tiempo de vida de una lavadora hasta que ésta requiera de una reparación mayor. suponga que la función de distribución del tiempo de vida de las lavadoras está dado por

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 9 \qquad \text{para } 1 \le x \le 3$$

a) **(0.5 punto)** Verifique si la función de densidad de probabilidad está bien definida (de no estarlo, multiplique por por una constante k, de tal forma que quede bien definida), y calcule la función de distribución acumulada del tiempo de vida de una lavadora hasta que requiera de una reparación mayor.

b) **(0.5 punto)** Calcule la probabilidad de que el tiempo de vida de una lavadora hasta que requiera una reparación sea superior a 1.23 pero inferior a 1.9.

4. **(1 punto)** Suponga que la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Antioquia encabeza un estudio sobre el número meses de garantía que se ofrecen para diferentes marcas de bicicletas en el país, y encuentra que la función de distribución acumulada $F(X)$ del número de meses de garantia que las bicicletas está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0.3679 & 2 \leq x < 9 \\ 0.7358 & 9 \leq x < 15 \\ 0.9197 & 15 \leq x < 21 \\ 0.981 & 21 \leq x < 29 \\ 0.9963 & 29 \leq x < 36 \\ 1 & x \geq 44 \end{cases}$$

a) **(0.5 punto)** Construya la tabla de la función de masa de probabilidad $(x, p(x))$.

b) **(0.5 punto)** Calcular la probabilidad de que el número de meses de garantía que tiene una bicicleta sea a lo más de 35, dado que se sabe que el número de meses de garantía es de mayor a 19 meses.

5. **(1 punto)** Una nueva cervecería decide crear un nuevo tipo de cerveza y para ello decide mezclar el sabor de la malta tostada que caracteriza a las cervezas STOUT, con el sabor de la malta pálida que caracteriza a las cervezas LAGER, y otros sabores frutales que caracterizan a las cervezas Ale. Las proporciones de malta tostada y malta pálida en una mezcla pueden traducirse en una función de distribución conjunta, siendo X la proporción de malta tostada, y Y la proporción de malta pálida.

La función de densidad de probabilidad conjunta se presenta a continuación

$$f(x) = 12x^2 + 20y^3 \qquad \text{para } 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1; \quad x + y \leq 1$$

Si la cervecería logra sintetizar un nuevo sabor de cerveza

a) **(0.5 punto)** Calcule es la probabilidad de que la proporción de malta tostada sea no más de 27 %, y la proporción de malta pálida sea inferior a 18 %.

b) **(0.5 punto)** Calcule es la probabilidad de que la proporción de malta tostada sea al menos de 54 %, y la proporción de malta pálida sea mayor a 42 %.