Sistemas dinámicos en más dimensiones

Ayer vimos que en 1D teníamos trayectorias monótonas.

Veamos que pasa cuando agregamos más dimensiones

El caso más simple es 2D, sistema lineal.

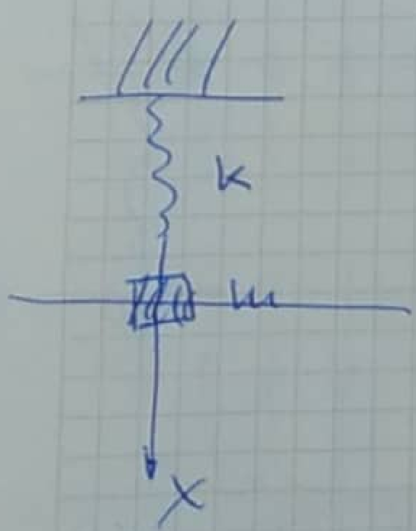
$$\dot{x} = ax + by$$

$$\dot{y} = cx + dy$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$m\ddot{x} + kx = 0$$



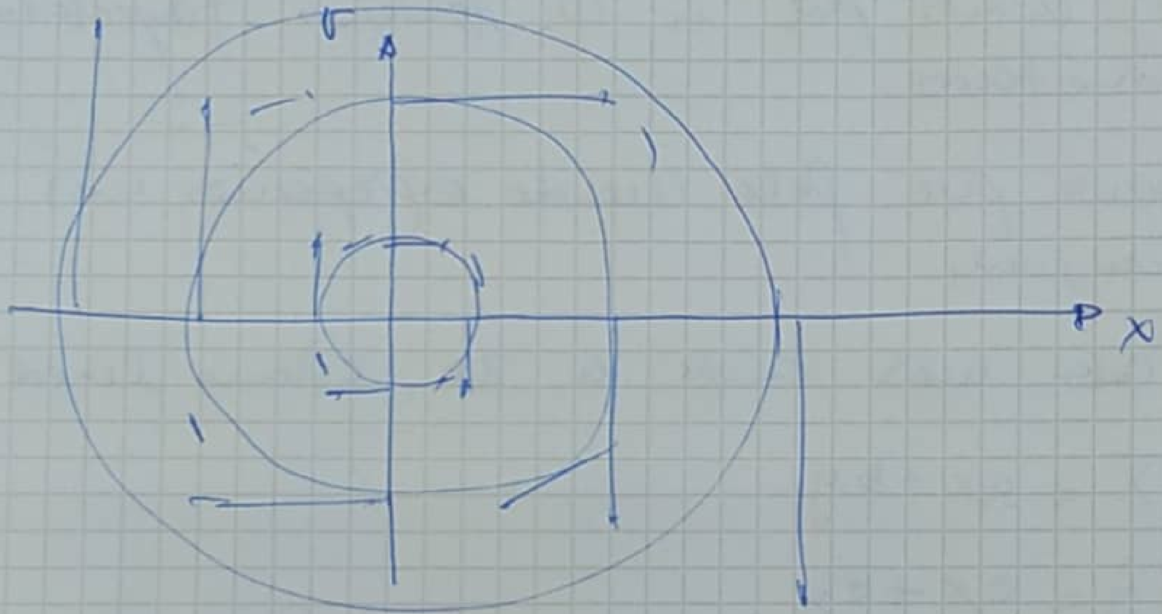
Recordemos el truco que vimos ayer

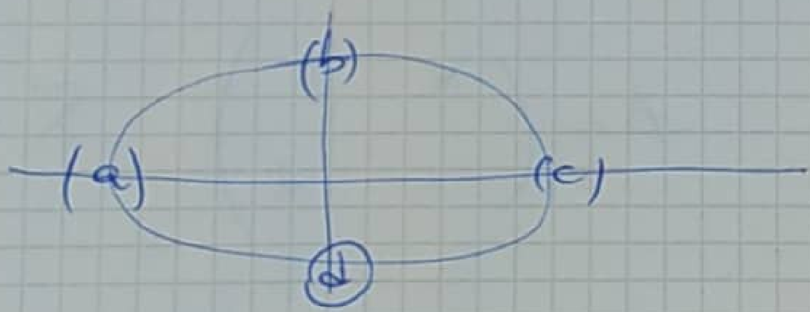
$$\dot{x} = v$$

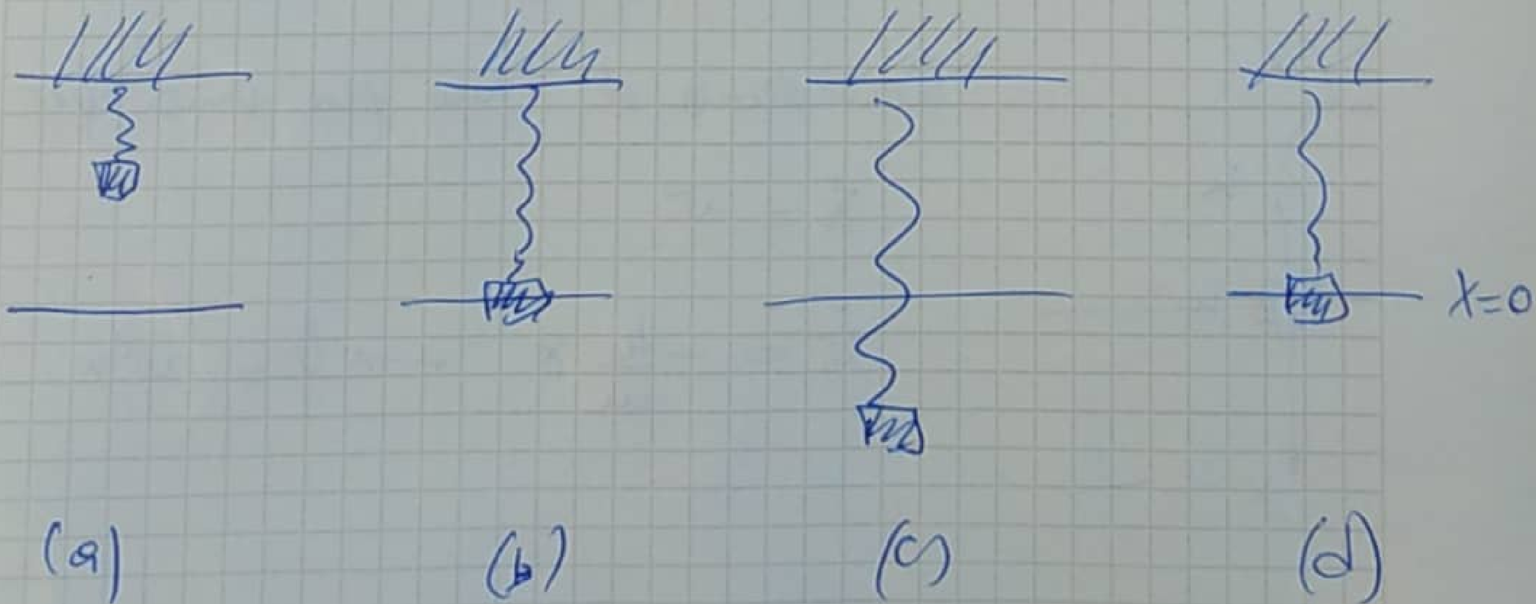
$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x \longrightarrow \dot{v} = -\omega^2 x$$

si $v=0 \longrightarrow (0, -\omega^2 x)$

si $x=0 \longrightarrow (v, 0)$

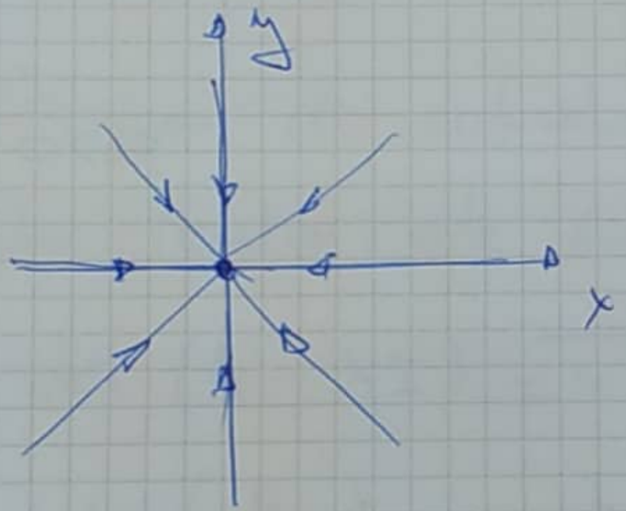




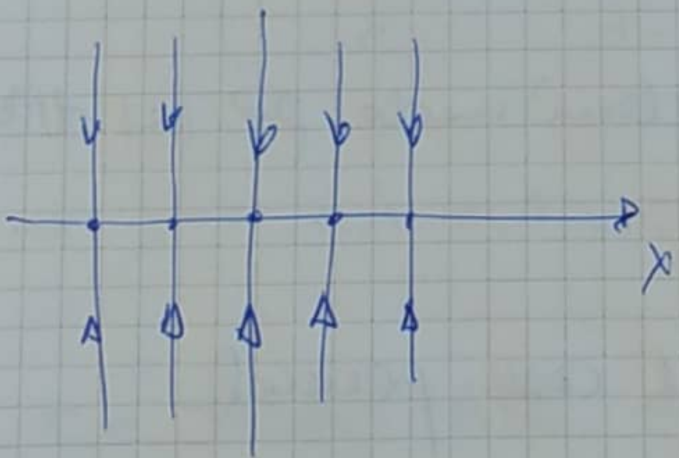


Otro ejemplo

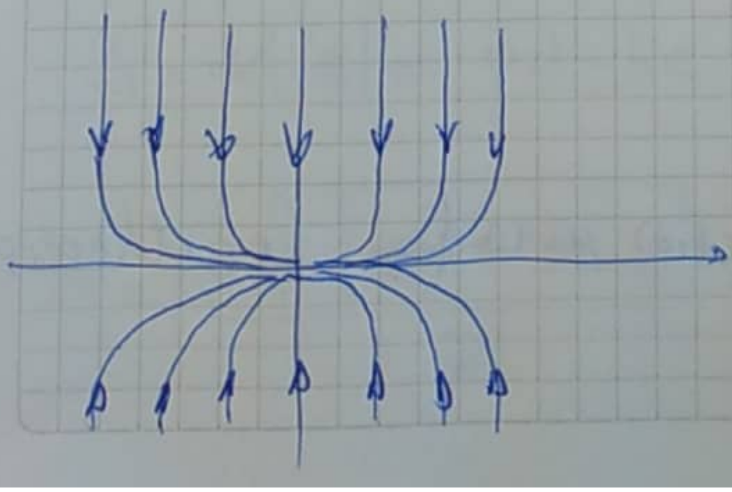
$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{aligned}$$



$a = -1$

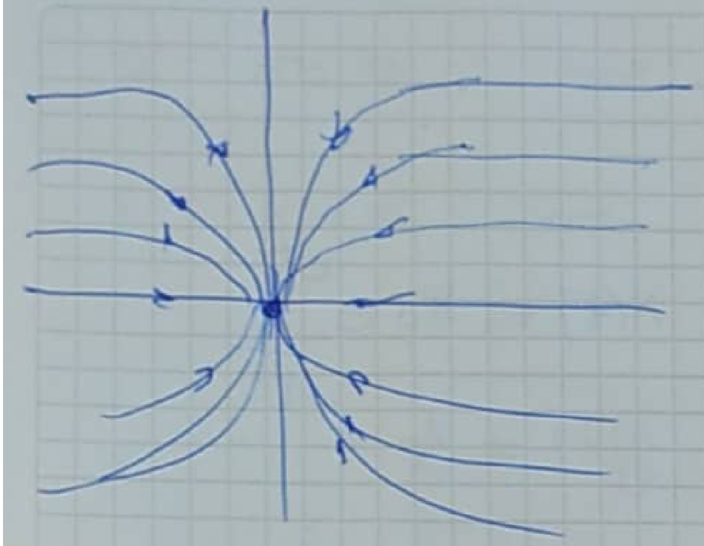


$a = 0$

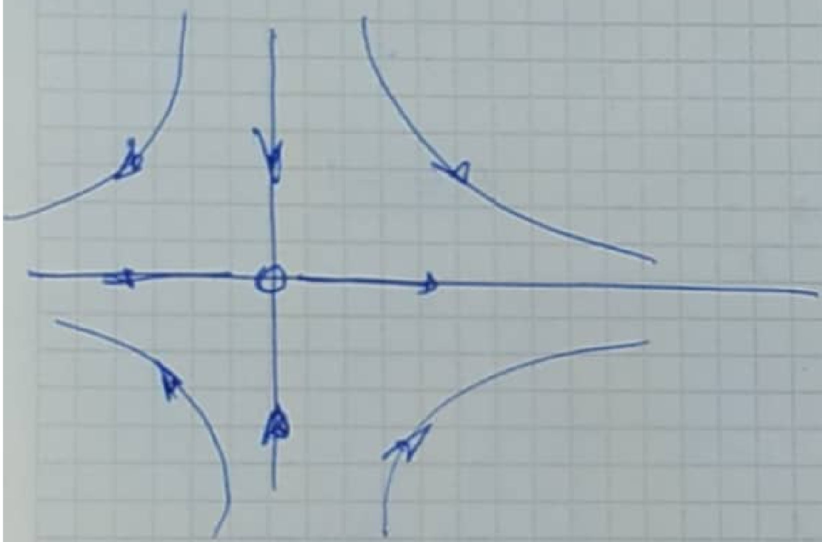


$-1 < a < 0$

Escaneado con CamScanner



$a < -1$



$a > 0$

Este ejemplo está dominado por las direcciones de los ejes x e y

Si ahora pensamos el caso general

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

Intuitivamente, podemos encontrar las direcciones

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$$

Ahora bien

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t} \vec{v}$$

$$\rightarrow \dot{\vec{x}} = A\vec{x} \longrightarrow \boxed{\lambda \vec{v} = A \vec{v}}$$

Ecuación de autovalores y autovectores.

Para resolver este sistema hay que calcular

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

$$\tau = \text{traza}(A) = a+d$$

$$\Delta = \det(A) = ad - bc$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son los autovectores asociados

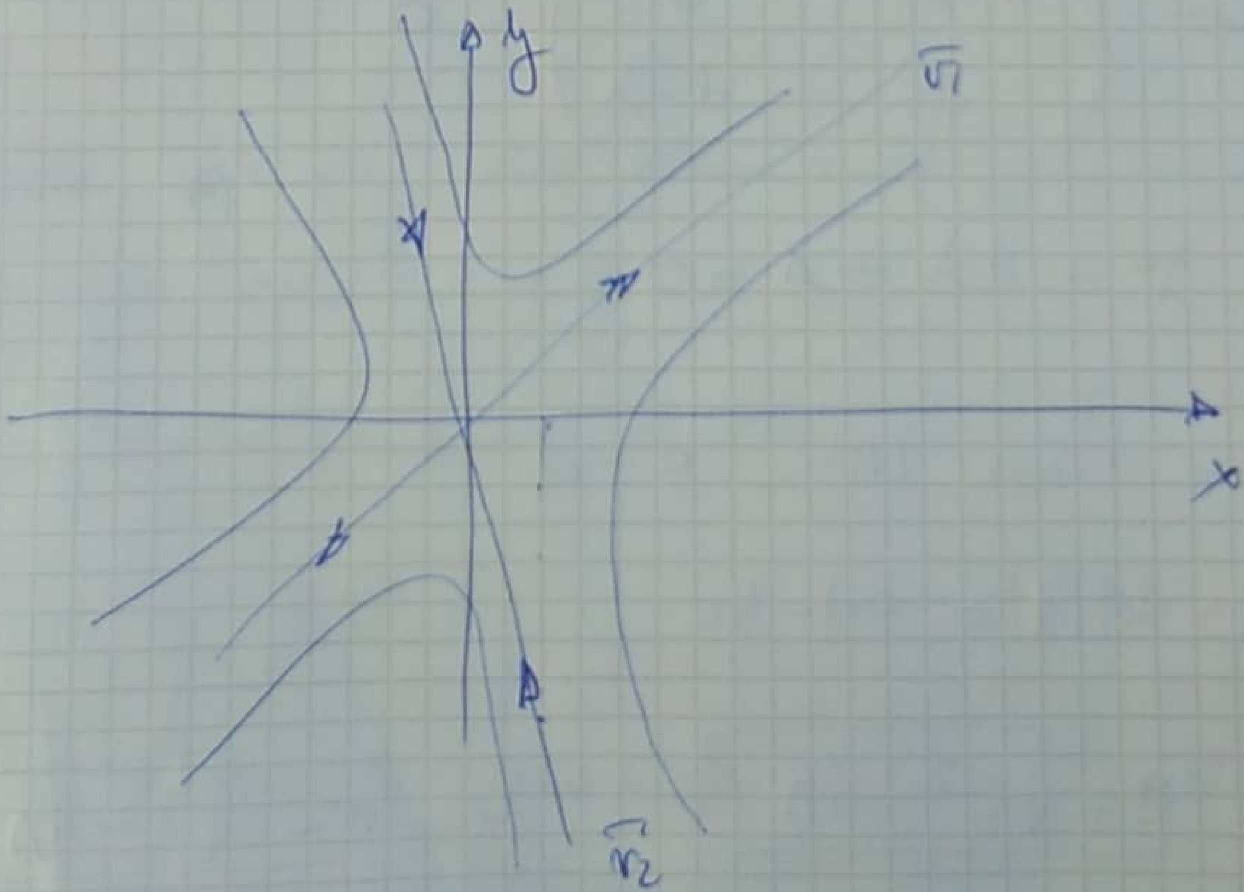
$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Ejemplo

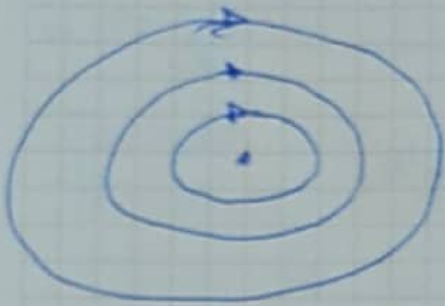
$$\dot{x} = x + y$$
$$\dot{y} = 4x - 2y$$

$\lambda_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $\vec{v}_1 = (1, 1)$

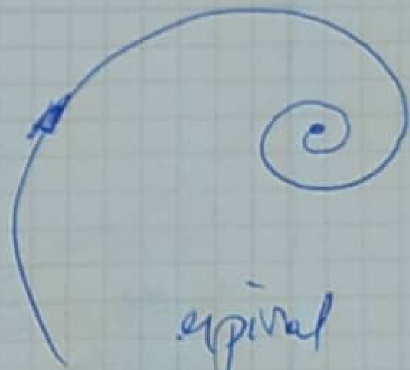
$\lambda_2 = -3$ $\qquad\qquad$ $\vec{v}_2 = (1, -4)$



Si los autovalores son complejos



centro



espiral

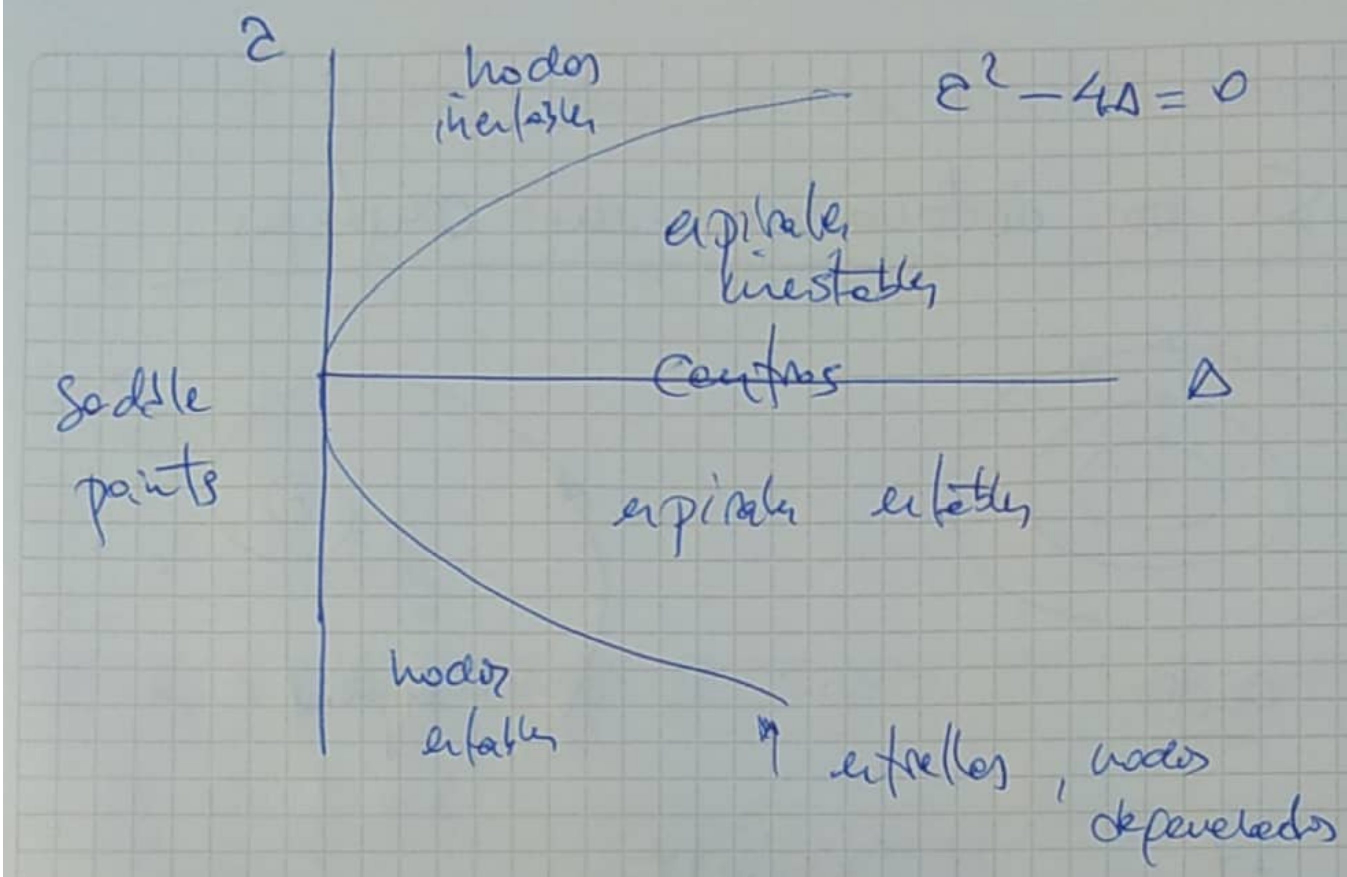
$$e^{\lambda t} \rightarrow e^{(\alpha + i\omega)t}$$

recordemos que $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$$\vec{x}(t) \longrightarrow e^{\alpha t}\cos(\omega t) \qquad e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$\alpha < 0$ oscilaciones que decrecen en amplitud

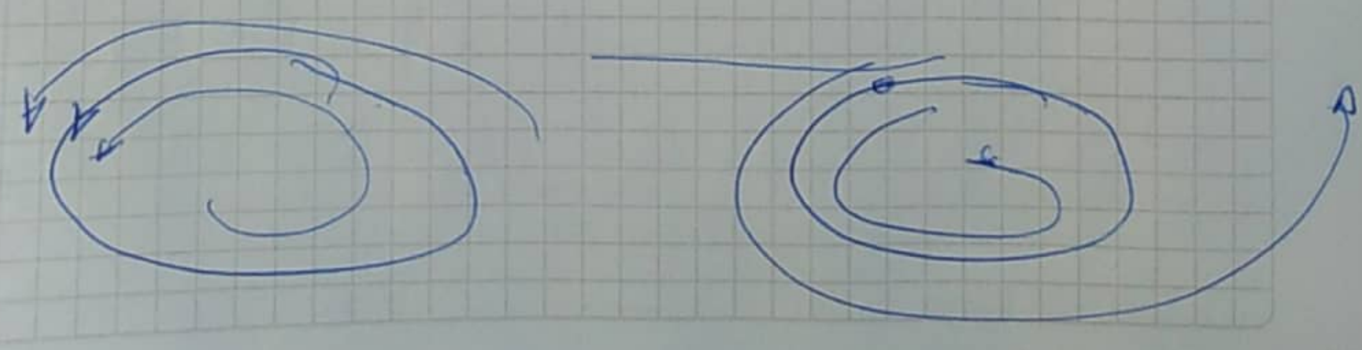
$\alpha > 0$ " " crecen " "



Ciclos límite

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislado

puede ser estable o inestable



Ciclos límites estables

Sistemas en la naturaleza con oscilación auto-sostenidas

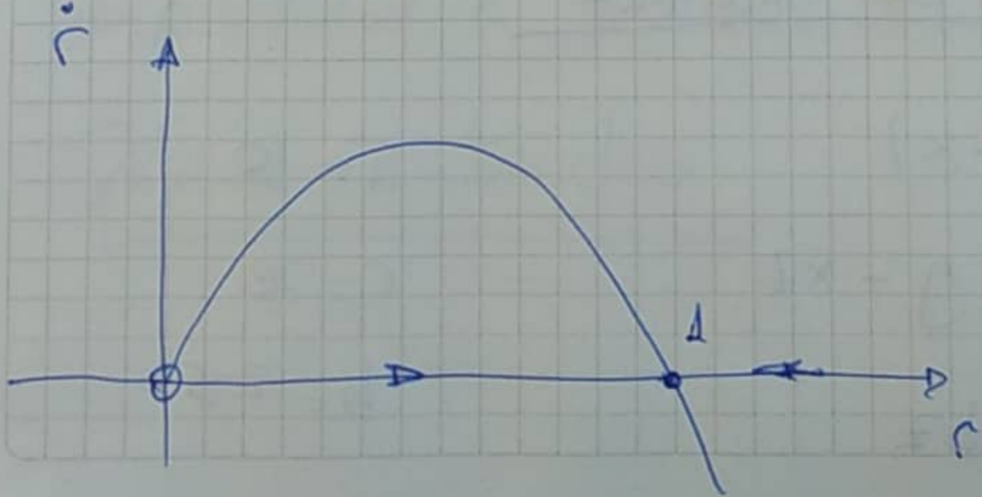
latidos del corazón
neuronas marcapaso
ritmos de la temperatura corporal
ritmos de secreción hormonal
reacción químicas que oscilan

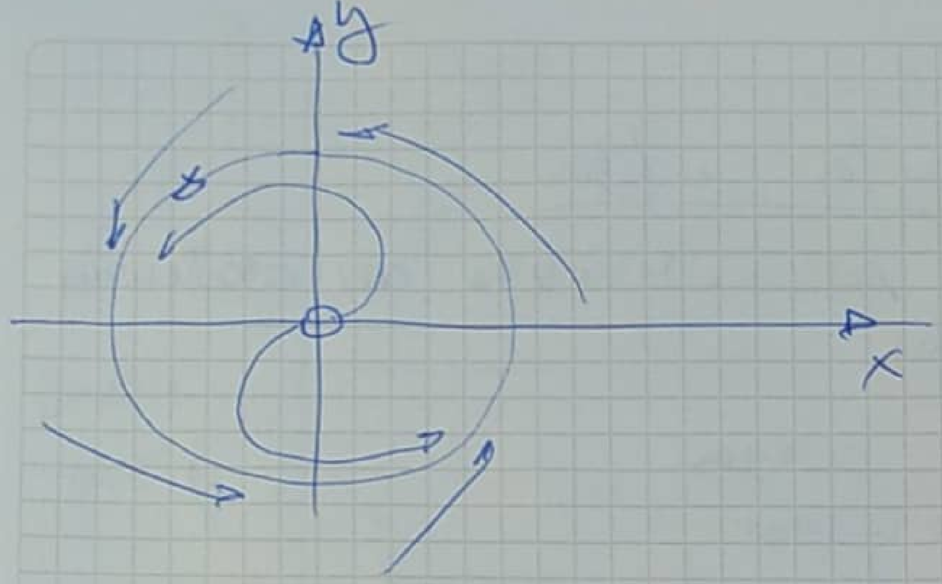
<u>Notas</u> En sistemas lineales hay orbitas cerradas, pero no son aisladas
Los ciclos límites son fenómenos no-lineales.

<u>Veamos un ejemplo</u>

$$\dot{r} = r(1-r^2) \qquad \dot{\theta} = 1$$

$$r \geq 0$$





Bifurcación

En dos dimensiones podemos tener bifurcación donde aparezcan ciclos límite. Esto quiere decir que variando un parámetro podemos hacer que aparezcan oscilaciones en el sistema

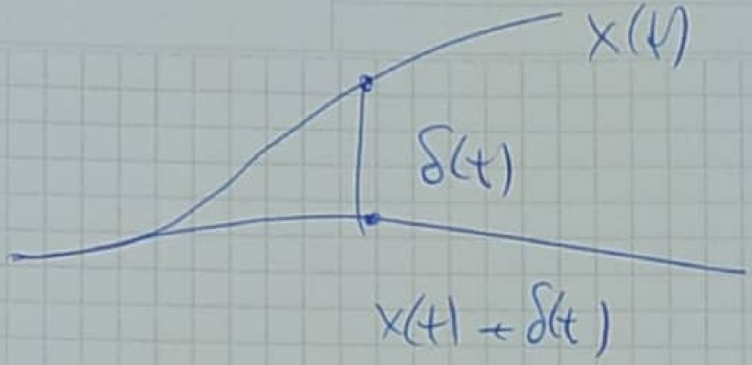
Vídeos bifurcación de Hopf

Ecuaciones de Lorenz

$$\dot{x} = \sigma (y - x) \qquad \sigma = 10$$

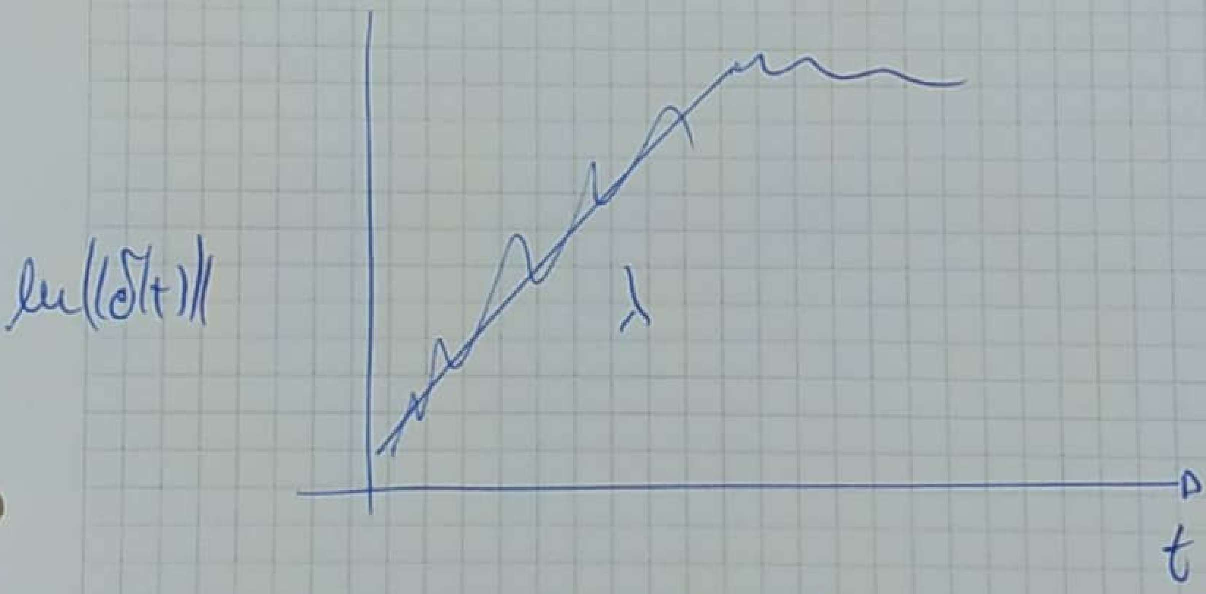
$$\dot{y} = rx - y - xz \qquad r = 28$$

$$\dot{z} = xy - bz \qquad b = 2.5$$



En el atractor de Lorenz

$\|\delta(t)\| \sim \delta_0 e^{\lambda t}$ $\quad \lambda \approx 0.9$



λ = exponente de Liapunov.

Sensibilidad a las condiciones iniciales.

<u>Página interactiva</u>