Sistemas dinámicos

Sistemas que evolucionan en el tiempo.

Vamos a ver herramientas para ver que pasa cuando $t \to \infty$.

Vamos a trabajar con

① Ecuaciones diferenciales: Describen la evolución temporal de sistemas en tiempo continuo

② Mapas iterados: Describen la evolución temporal de sistemas en tiempo discreto.

Vamos a trabajar con Ecuaciones diferenciales ordinarias: Una sola variable independiente, t

Ejemplo Oscilador armónico amortiguado

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Nomenclatura $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

De forma general

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Podemos usar esta nomenclatura para reescribir la ecuación del oscilador

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0$$

Hacemos un truco $\quad x_1 = x$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{x}_2 + b x_2 + k x_1 = 0$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 \end{aligned} \right\} \; 2D$$

Ejemplo de un sistema lineal. f_1 y f_2 son lineales

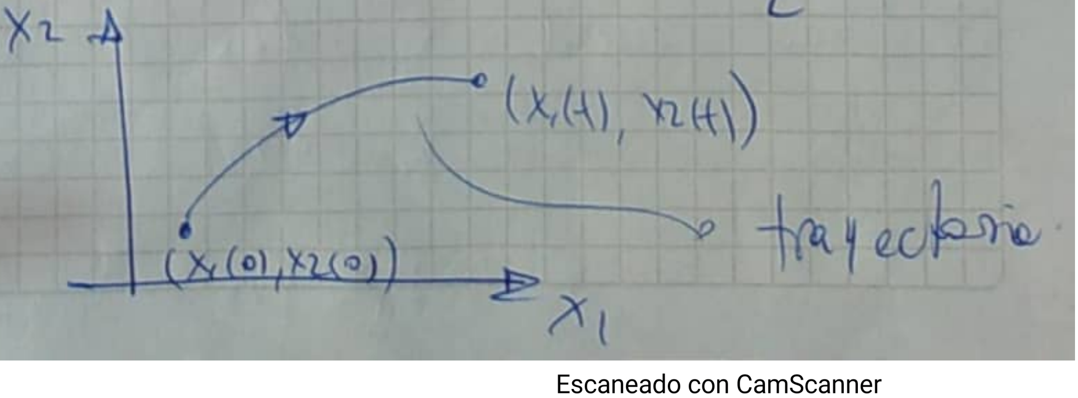
Si las funciones son no-lineales el sistema es no-lineal.

Ejemplo Un péndulo de longitud L

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,x = 0 \qquad \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L}\sin x_1 \end{aligned} \right.$$

Nomenclatura

Espacio de fases



Vamos a trabajar con sistemas autónomos donde el tiempo no aparece de forma explícita

Si tenemos un sistema no-autónomo. Truco

Ejemplo: oscilador armónico forzado.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F\cos t$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = t$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F\cos x_3) \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

Sistema <u>3 dimensional</u> $x_1 \quad x_2 \quad x_3$

Vamos a empezar con sistemas de una dimensión

$$\left.\begin{matrix} \dot{x}_1 = f(x_1 \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x_1 \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \dot{x} = f(x)$$

Ejemplo $\dot{x} = \operatorname{sen} x$

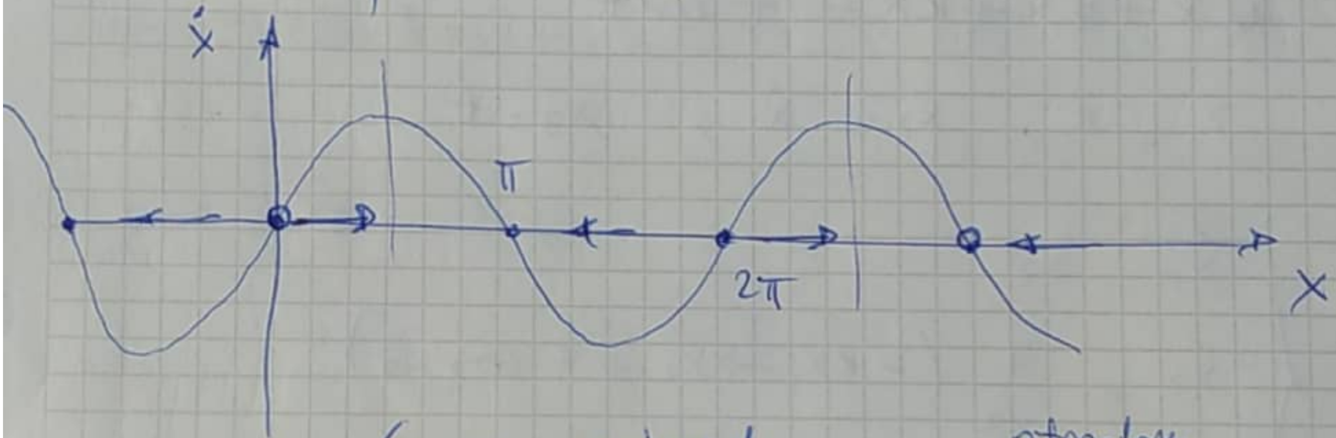
$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen} x \longrightarrow \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int dt$$

Si tenemos condiciones iniciales $x_0 = x(t=0)$

$$t = \ln \left| \frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)} \right|$$

Feo!

Veamos gráficamente



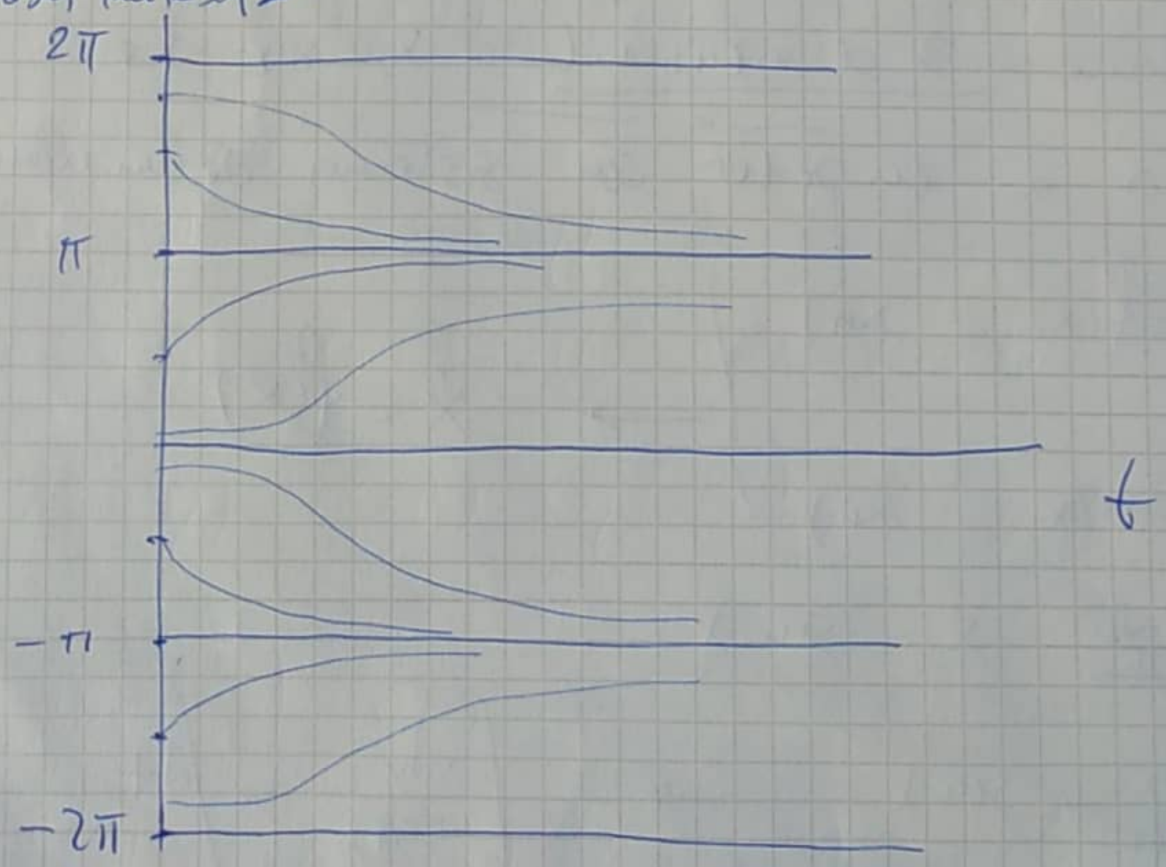
Campo vectorial

① puntos fijos ② flujo

estables inestables

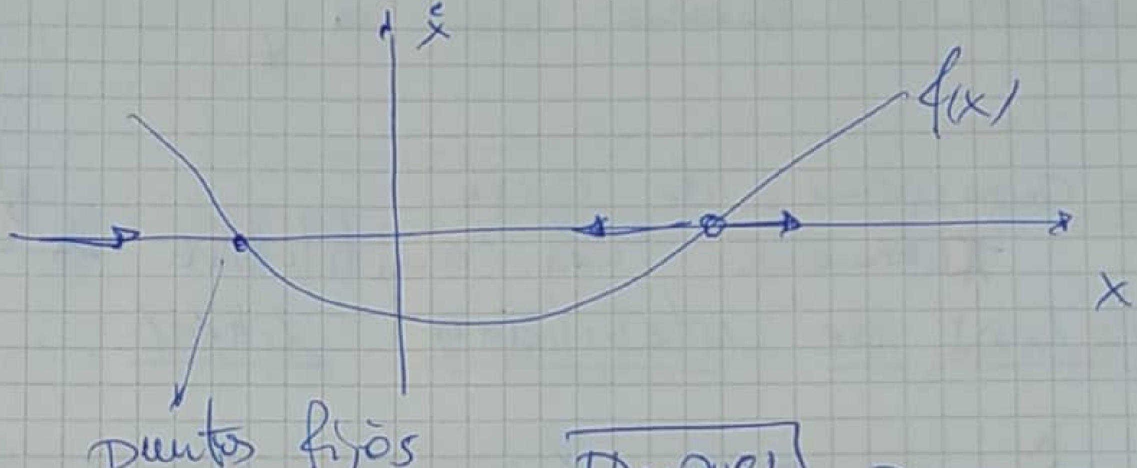
atractores

fuentes



Malthus: "Un ensayo sobre el principio de la población, o una
1803 visión de sus efectos pasados y presentes sobre la felicidad humana, con una investigación sobre nuestras perspectivas con respecto a la futura eliminación o mitigación de los males que ocasiona"

De forma general, para cualquier sistema en una dimensión

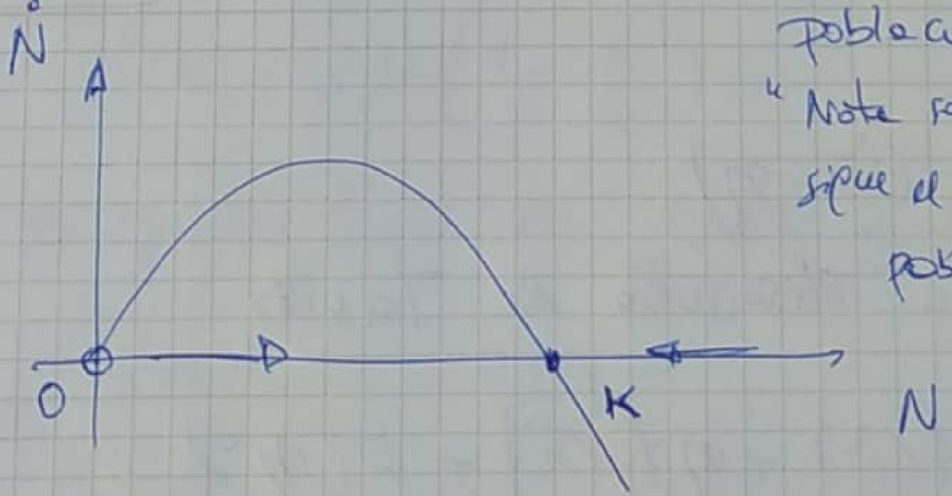


Después

Otro ejemplo: Ecuación logística

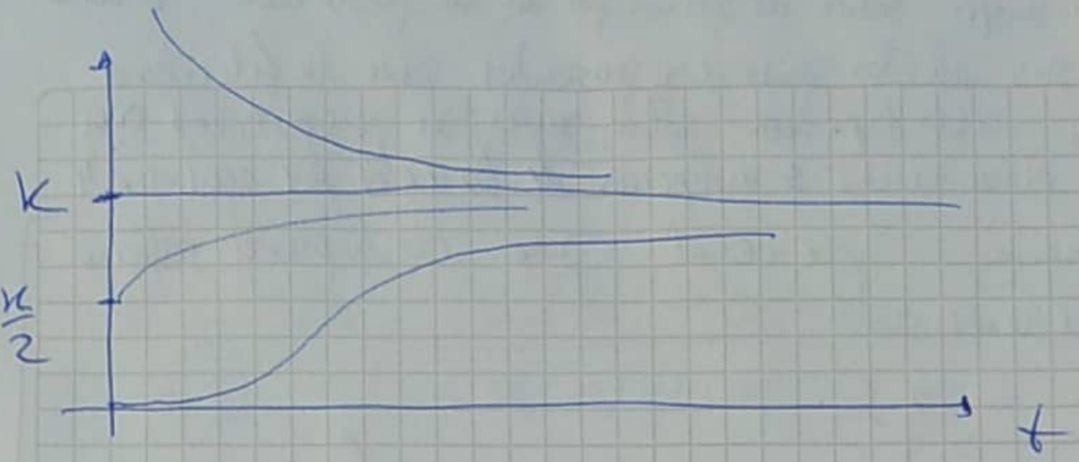
$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Verhulst 1838
Crecimiento de población:
"Nota sobre la ley que sigue el crecimiento de la población"



Puntos fijos $N = 0$ inestable

$N = K$ estable



Cualitativo

K = capacidad de carga.

Información más cuantitativa

<u>Análisis de estabilidad lineal</u>

Sea $\tilde{x}$ un punto fijo

$$\eta(t) = x(t) - \tilde{x}$$

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}\left(x(t) - \tilde{x}\right) = \dot{x} = f(x) \quad \underline{\tilde{x} = cte}$$

$$\to f(x) = f(\tilde{x} + \eta)$$

Haciendo un desarrollo de Taylor.

$$f(\tilde{x} + \eta) = f(\tilde{x}) + \eta f'(\tilde{x}) + O(\eta^2)$$

pero $f(\tilde{x}) = 0$ (punto fijo)

$$\Rightarrow \dot{\eta} = \eta f'(\tilde{x}) + O(\eta^2)$$

$\rightarrow \dot{\eta} \approx \eta f'(\tilde{x})$

si $f'(\tilde{x}) = 0$ no podemos tirar los términos de $\mathcal{O}(\eta^2)$

si $f'(\tilde{x}) > 0 \rightarrow$ crecimiento exponencial

si $f'(\tilde{x}) < 0 \rightarrow$ decrecimiento exponencial

$\frac{1}{|f'(\tilde{x})|}$ escala de tiempo característica

Ejemplo Ecuación logística

$$f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

los puntos fijos son $\tilde{N} = 0$ y $\tilde{N} = k$

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{k}$$

$f'(0) = r$ inestable

$f'(k) = -r$ estable

Escala de tiempo característico $\boxed{\dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{r}}$

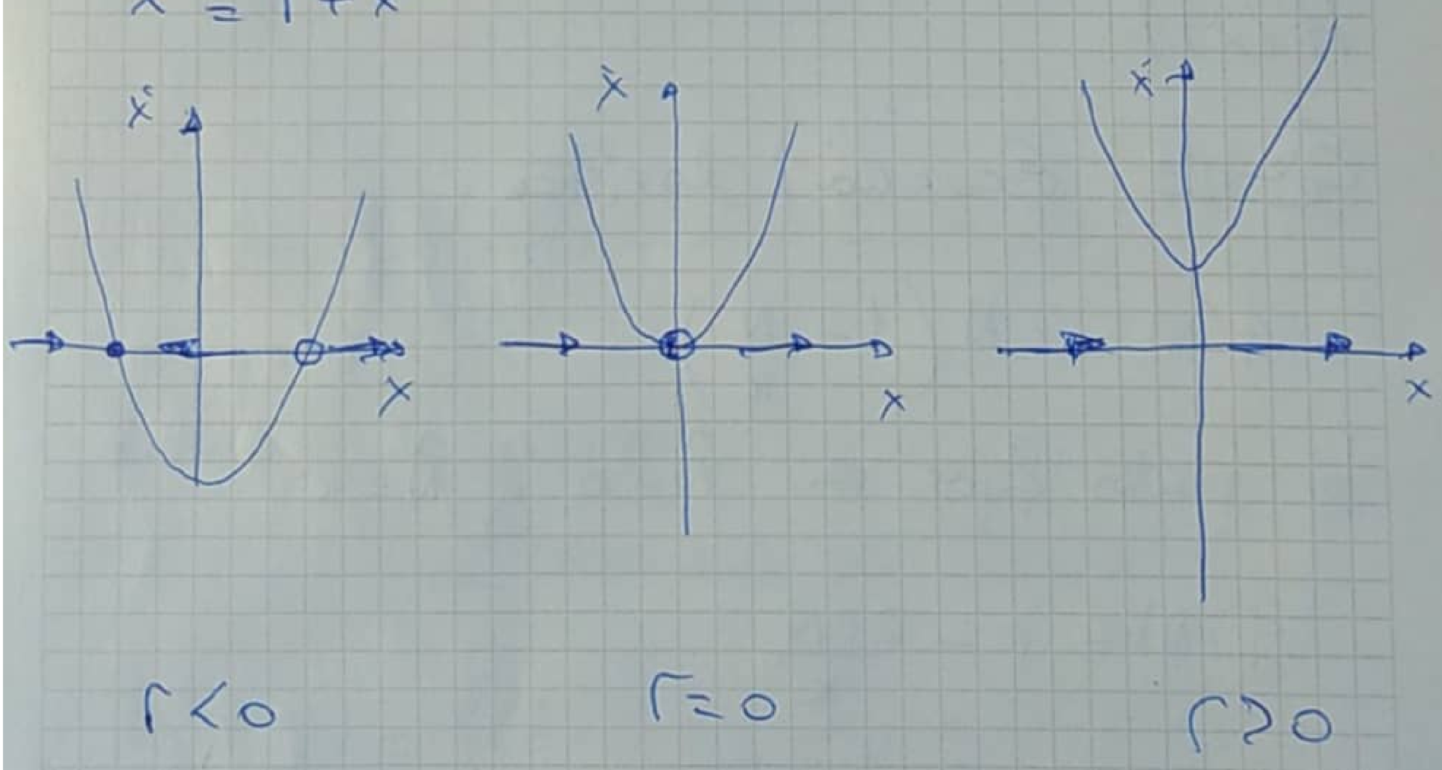
No hay oscilaciones en 1D

Si existe un punto fijo como solución de equilibrio $\Rightarrow$ el comportamiento es monotónico.

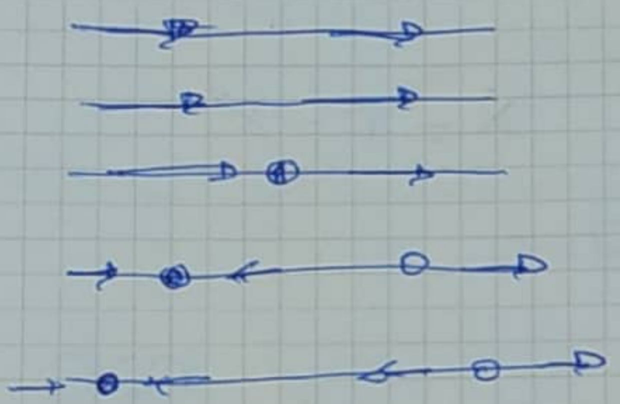
No existen soluciones periódicas a $\dot{x} = f(x)$.

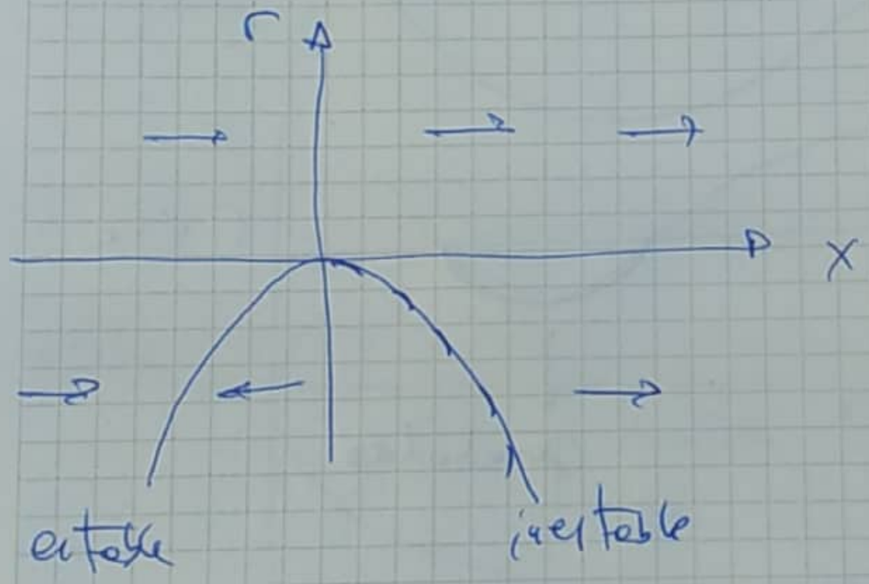
Bifurcaciones

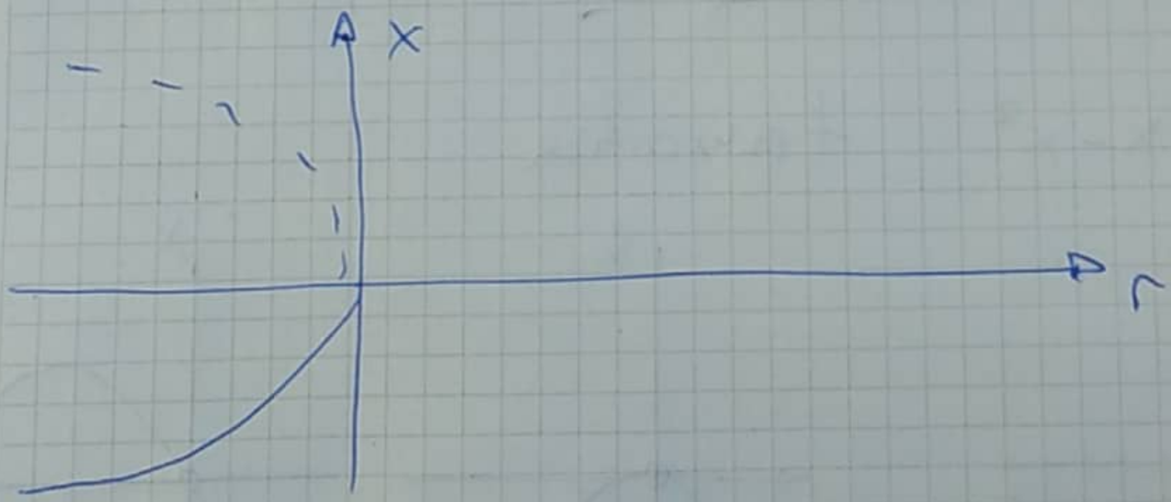
$\dot{x} = r + x^2$



$r>0$



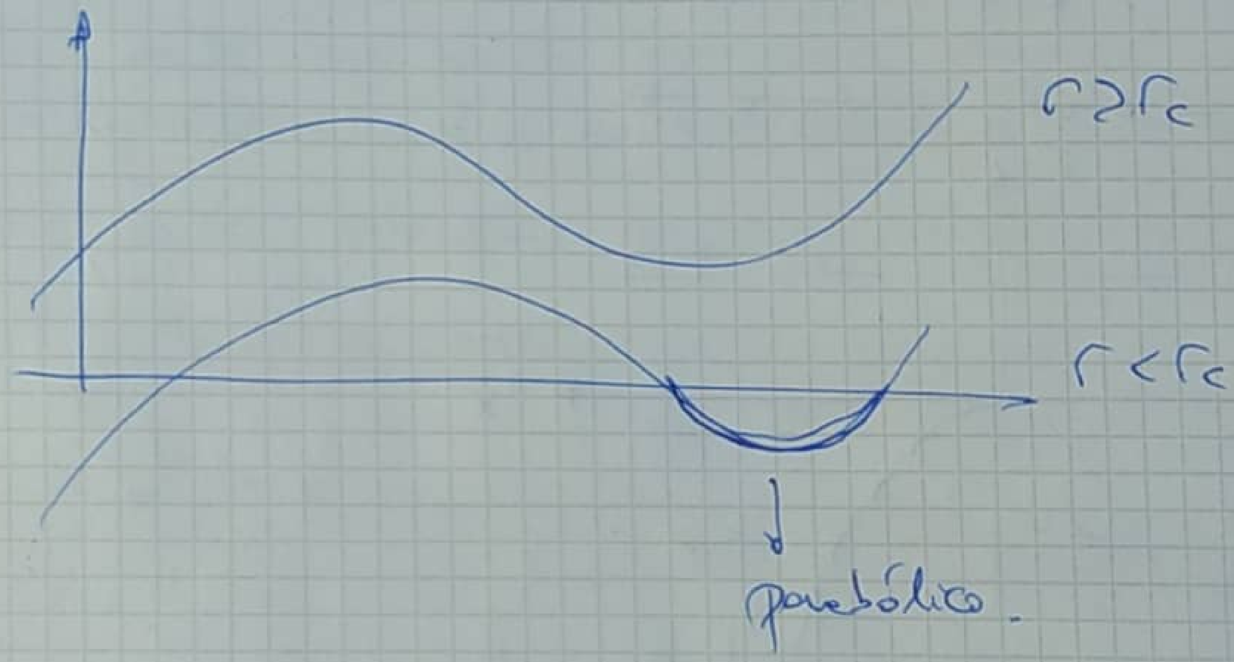




Saddle - Node.

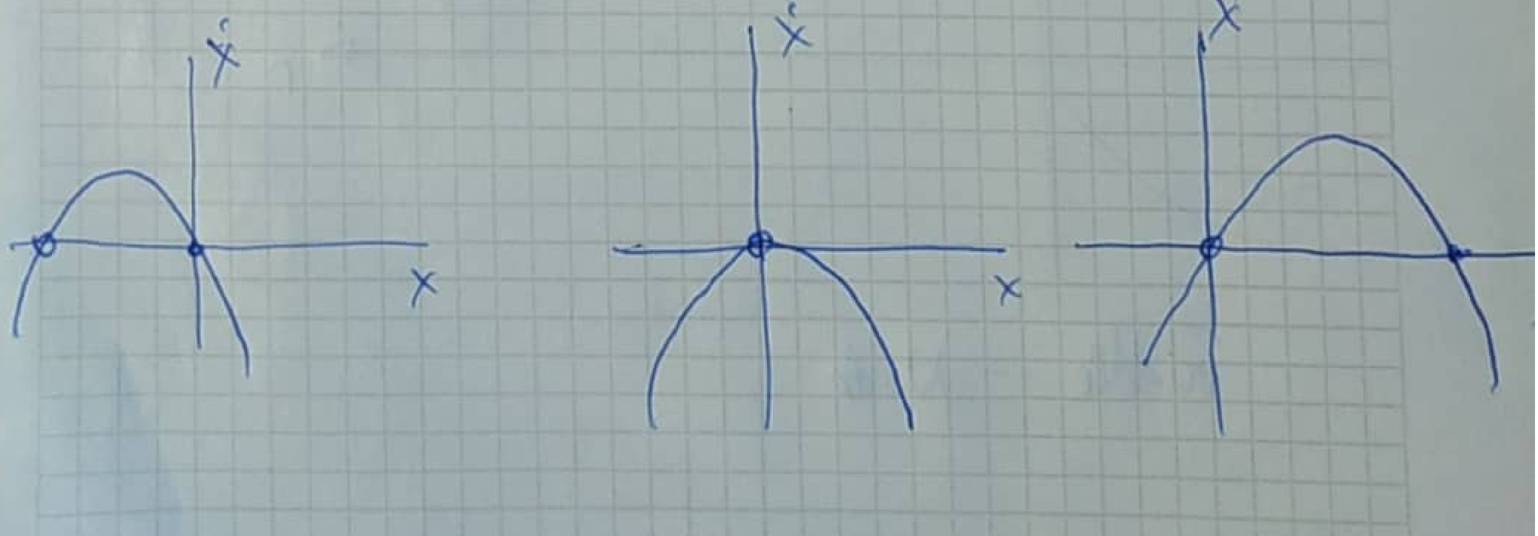
Formas normales

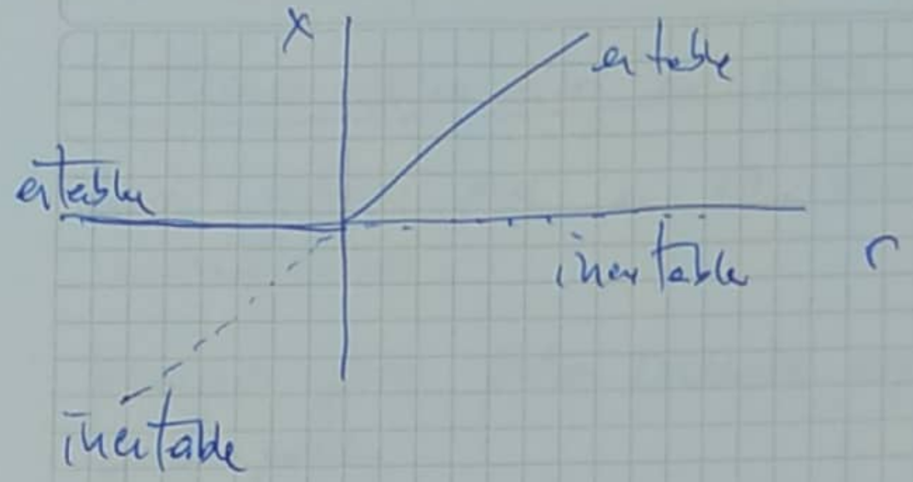
$\dot{x} = r + x^2$ $\dot{x} = r - x^2$

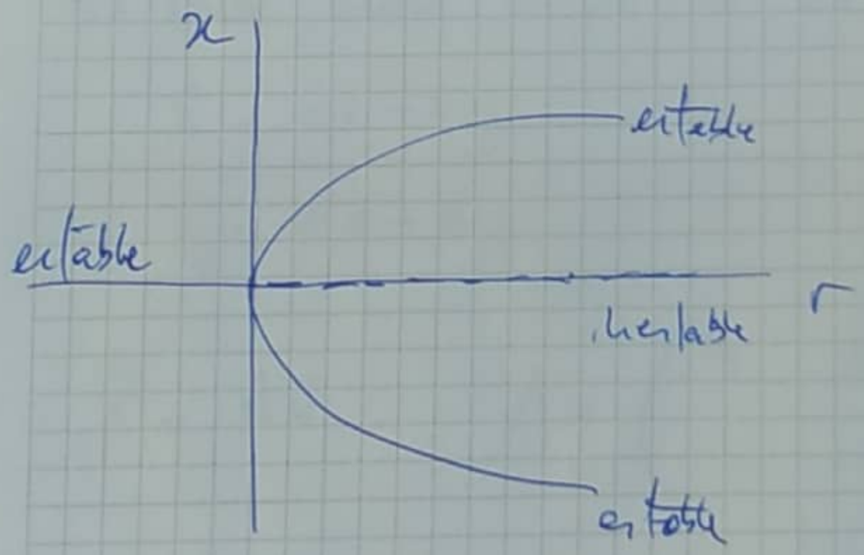


Otras bifurcaciones

$\dot{x} = rx - x^2$ transcrítica







Bifurcación
Pitch fork
Supercrítica

$$\dot{x} = rx - x^3$$