

Omar E. Ortiz

1 ESPACIO, VECTORES Y FORMA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Supongamos que tenemos un conjunto de puntos donde queremos trabajar en física. Por ejemplo el espacio Euclídeo tridimensional, o la superficie de una esfera, un toroide, un cono, una superficie genérica, etc.

Tal conjunto de puntos es lo que llamamos “espacio físico” o simplemente “espacio” (en geometría diferencial suele llamarse “variedad”). En nuestro espacio podemos introducir diversos sistemas de coordenadas. Un sistema de coordenadas nos sirve para identificar puntos en este espacio. No hablamos de un espacio vectorial, sino de un espacio físico donde ocurre algo que queremos describir (por ejemplo una partícula que se mueve sobre una trayectoria en este espacio).

Base coordinada. Supongamos que tenemos un espacio de dimensión n (es decir, necesitamos exactamente n números reales para ubicar un punto). Sean $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ coordenadas sobre tal espacio. Sobre nuestro espacio tenemos definidas funciones del punto, es decir funciones de valores reales (o complejos) que varían punto a punto. Una vez elegido un sistema de coordenadas estas funciones toman una expresión $f(x^1, \dots, x^n)$ tal como una función de algún dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} .

En un punto particular del espacio podemos además querer asignar vectores (por ejemplo la velocidad de la partícula), covectores y tensores en general. Para esto necesitamos poder pensar en un espacio vectorial V asociado a este punto (también en su espacio dual V^* , y espacios de tensores en general). Asociando un espacio vectorial a cada punto de nuestro espacio podemos hablar de “campos vectoriales” (campos tensoriales, etc). El espacio vectorial asociado a un punto del espacio suele llamarse “espacio tangente” (para visualizar esto, imagine que el espacio físico es la superficie de una esfera, como la tierra; el espacio vectorial asociado a cada punto es el plano tangente a la esfera en ese punto.).

Sea $f(x^1, \dots, x^n)$ una función arbitraria definida en el espacio. Una idea

muy fructífera es pensar a los vectores como mapas, que actuando sobre una función f nos dan la derivada direccional de dicha función en la dirección del vector. Además es frecuentemente muy conveniente definir la base de vectores en cada punto directamente relacionada con las coordenadas usadas.

Esta idea surge naturalmente cuando consideramos la derivada de f a lo largo de una curva parametrizada. Supongamos que $x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$ es una curva parametrizada en nuestro espacio. La derivada de f a lo largo de la curva es (usando la convención de suma sobre índices repetidos)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f.$$

Esta derivada es la derivada direccional de f en la dirección del vector tangente a la curva, por lo que si pensamos al vector como el operador diferencial que actuando sobre la función nos da dicha derivada, tenemos

$$\vec{v} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Entonces las componentes del vector son las derivadas dx^i/dt y el vector está escrito en la *base coordenada*. Es decir, cada coordenada x^i tiene asociado un vector de base que es simplemente el operador derivada parcial respecto de x^i

$$\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

de manera que dicho vector actuando sobre una función f nos da la derivada parcial de f respecto de x^i

$$\vec{e}_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Luego, un vector vector genérico $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$ actuando sobre una función, nos da la derivada direccional de la función en dicho punto y en esa dirección:

$$\vec{v}(f) = v^i \vec{e}_i(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Forma diferencial. Juntamente con el espacio V (espacio tangente) se introduce el espacio dual (o espacio “cotangente”) V^* . Para pensar en V^* introducimos el concepto de “diferencial de una función”. La diferencial de una función f (también llamada forma diferencial de f), denotada como df ,

es un elemento de V^* , o sea un covector o 1-forma, cuya acción sobre un vector \vec{v} se define mediante $df(\vec{v}) = \vec{v}(f) \in \mathbb{R}$. Notemos entonces que la base dual a la base coordenada es el conjunto de diferenciales de las coordenadas: $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$, ya que

$$dx^i(\vec{e}_j) = \vec{e}_j(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Podemos ahora expresar la diferencial de una función general en esta base de V^* . Recordemos que las componentes de un elemento de V^* en la base dual, pueden calcularse usando la base de vectores. O sea

$$(df)_i = \vec{e}_i(df) = df(\vec{e}_i) = \vec{e}_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

por lo que la diferencial de una función genérica es en definitiva (suma implícita sobre índices repetidos),

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Cuando introducimos otras coordenadas en el mismo espacio, digamos $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ tenemos la transformación, invertible, de coordenadas

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(y^1, \dots, y^n) \\ &\dots \\ x^n &= x^n(y^1, \dots, y^n) \end{aligned}$$

Los nuevos vectores de base para V son

$$\vec{f}_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

y la regla de la cadena relaciona ambas bases de vectores, de donde obtenemos la matriz de cambio de base:

$$\vec{f}_j = \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Lambda_j^i \vec{e}_i. \quad (1)$$

Así un vector en ambas bases es

$$\vec{v} = v_y^j \frac{\partial}{\partial y^j} = v_y^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

por lo que las componentes transforman, de una base coordenada a la otra, como sigue

$$v_x^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} v_y^j,$$

donde el subíndice x o y indica a qué base corresponde la componente.

Análogamente la diferencial de una función en las nuevas coordenadas será

$$df = \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j = \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

2 ESPACIO EUCLÍDEO Y COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

Frecuentemente trabajamos en el espacio Euclídeo tridimensional (el espacio ordinario de la mecánica Newtoniana), donde tenemos la métrica Euclíadiana (sabemos medir distancias a lo largo de trayectorias). Las coordenadas más usuales en este espacio son las Cartesianas $\{x, y, z\}$. La base de vectores en cada punto normalmente llamada $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ es precisamente la base coordenada. El espacio vectorial V en cada punto es también \mathbb{R}^3 con el producto escalar (y norma) Euclídeo al igual que el espacio dual V^* , también \mathbb{R}^3 . Con el producto vectorial Euclídeo, la base coordenada Cartesiana es ortonormal. La métrica Euclídea sirve además para establecer un isomorfismo entre V y V^* . Por ejemplo, las derivadas parciales cartesianas de una función f pueden pensarse como las componentes de la forma diferencial $df \in V^*$, y también como las componentes de un vector, el gradiente de f en V .

Es pertinente aquí aclarar que al trabajar en un espacio Euclídeo, es frecuente “confundir” el espacio físico (donde se mueve la partícula) con el espacio vectorial V (donde pertenece el vector velocidad de la partícula) e incluso con el espacio dual V^* que es isomorfo a V . Esto ocurre por ejemplo al escribir la posición de la partícula como un vector (el vector posición), cosa que no haremos en este apunte. Es bueno, a mi entender, tener en mente que el espacio físico y el espacio vectorial tangente en cada punto son espacios diferentes. Esta diferencia es obvia (la confusión desaparece naturalmente) cuando uno piensa en un espacio curvo. Por ejemplo al considerar el movimiento de una partícula sobre una superficie esférica S^2 , que es claramente distinguible del espacio vectorial tangente V en cada punto (plano tangente) que es \mathbb{R}^2 con un producto escalar.

Recordemos las definiciones usuales del cálculo vectorial en este espacio y en estas coordenadas. Sea f una función sobre el espacio y \vec{F} un campo vectorial

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}. \quad (\text{Gradiente}) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z}. \quad (\text{Divergencia}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (\text{Rotor}) \quad (4)$$

Si queremos escribir estos operadores diferenciales en otras coordenadas genéricas, debemos transformar estas fórmulas usando la regla de la cadena y el cambio de base (1) para los vectores de la base.

Ejemplo 1. Para hacer un ejemplo muy sencillo, supongamos que introducimos nuevas coordenadas $\{u, v, w\}$ en el espacio, dadas por

$$x = u, \quad y = v - u, \quad z = w.$$

Esta transformación es lineal (fácilmente invertible). Por ejemplo, calculemos el gradiente de una función f en las nuevas coordenadas. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial w} \end{aligned}$$

y los vectores de base se transforman

$$\hat{i} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} = \vec{f}_u + \vec{f}_v$$

en obvia notación. Análogamente se obtiene

$$\hat{j} = \vec{f}_v, \quad \text{y} \quad \hat{k} = \vec{f}_w.$$

Por lo que el gradiente (2) queda, en las nuevas coordenadas,

$$\nabla f(u, v, w) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \vec{f}_u + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + 2 \frac{\partial f}{\partial v} \right) \vec{f}_v + \frac{\partial f}{\partial w} \vec{f}_w.$$

Notemos que los vectores de la nueva base coordinada no son ortogonales ni están todos normalizados.

Ejercicio 1: Probar la última afirmación.

2.1 COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

De particular interés en física y en muchísimas aplicaciones son las *Coordenadas Curvilíneas Ortogonales*, donde los vectores de la base coordenada resultan ortogonales. Además, usualmente se los normaliza para obtener una base ortonormal en cada punto del espacio. Ejemplos fundamentales de estas coordenadas son, además de las Cartesianas, las coordenadas Cilíndricas y las Esféricas en el espacio.

Sean (u, v, w) coordenadas curvilíneas ortogonales en el espacio. Tenemos la transformación a coordenadas Cartesianas

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w), \\ y &= y(u, v, w), \\ z &= z(u, v, w). \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, el primer vector de la nueva base coordenada es

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k} = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k}.$$

La norma Euclídea de este vector, que denotaremos h_u , es

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

Procediendo de la misma manera con los demás, obtenemos los tres vectores de la nueva base base coordenada y las tres normas de los mismos, h_u , h_v , h_w , comúnmente llamadas *factores de escala*. Por hipótesis (pues las nuevas coordenadas son curvilíneas ortogonales) los nuevos vectores de base son ortogonales; una vez normalizados utilizaremos la notación $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ para la nueva base ortonormal.

La relación entre ambas bases ortonormales es

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k}, \\ \hat{v} &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k}, \\ \hat{w} &= \frac{1}{h_w} \frac{\partial x}{\partial w} \hat{i} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial y}{\partial w} \hat{j} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial z}{\partial w} \hat{k}, \end{aligned} \tag{6}$$

Acomodando los coeficientes en una matriz, tenemos la matriz de cambio de base

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{h_w} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{h_w} \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{1}{h_v} \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{1}{h_w} \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Como esta matriz relaciona dos bases ortonormales, es ortogonal (unitaria y real) y su inversa es simplemente su transpuesta,

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{h_v} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{1}{h_w} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{1}{h_w} \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{1}{h_w} \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Curvas y superficies coordenadas. Si en la transformación (5) fijamos dos de las coordenadas y movemos la otra, recorremos una curva en el espacio llamada “curva coordenada” cuyo vector tangente es el correspondiente vector de la base coordenada. Por cada punto del espacio pasan las tres curvas coordenadas que se cortan en ángulos rectos. Los elementos de longitud de arco sobre las curvas donde el parámetro es u , v y w respectivamente

$$ds = h_u du, \quad ds = h_v dv, \quad ds = h_w dw.$$

Si ahora en (5) dejamos fijas una de las coordenadas y movemos las otras dos, obtenemos una superficie parametrizada llamada “superficie coordinada”. Dada la ortogonalidad, el diferencial de superficie es muy simple de calcular, es simplemente el producto de los diferenciales de las dos curvas tangentes contenidas en él

$$(dS)_u = h_v h_w dv dw, \quad (dS)_v = h_u h_w du dw, \quad (dS)_w = h_u h_v du dv.$$

Finalmente, el elemento de volumen subtendido en estas coordenadas (prisma rectangular) es

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw. \quad (9)$$

Gradiente. Usando la matriz (8) podemos transformar las componentes del gradiente (2) de f a la nueva base. Por ejemplo, para la primera componente tenemos

$$(\nabla f)^u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u},$$

donde usamos la regla de la cadena en la última igualdad. Procediendo análogamente con las otras dos componentes, obtenemos la fórmula del gradiente en la nueva base ortonormal

$$\nabla f(u, v, w) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{w}. \quad (10)$$

Divergencia. La forma más simple de obtener la fórmula de la divergencia de un campo en las coordenadas (u, v, w) es recordando la interpretación (vista en Cálculo), de la misma: “*la divergencia de un campo vectorial es igual al flujo del mismo hacia afuera de un volumen elemental, por unidad de volumen*”. Utilizando un prisma elemental, el flujo neto hacia afuera se obtiene sumando los aportes de los tres pares de caras $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$. Por ejemplo, si tenemos un campo vectorial $\vec{F}(u, v, w) = F^u \hat{u} + F^v \hat{v} + F^w \hat{w}$, el flujo correspondiente a las caras con u y $u + du$ tenemos,

$$\begin{aligned} \text{flujo} &= \vec{F}(u + du, v, w) \cdot (\hat{u} h_v(u + du, v, w) h_w(u + du, v, w) dv dw) \\ &\quad + \vec{F}(u, v, w) \cdot (-\hat{u} h_v(u, v, w) h_w(u, v, w) dv dw) \\ &\approx \frac{\partial}{\partial u} \left(F^u(u, v, w) h_v(u, v, w) h_w(u, v, w) \right) dudvdw, \end{aligned}$$

donde conservamos sólo el término dominante en el desarrollo de Taylor de $F^u h_v h_w$. Procediendo análogamente con los otros pares de caras del volumen elemental, y recordando que el elemento de volumen es (9), obtenemos para la divergencia de \vec{F}

$$\nabla \cdot \vec{F}(u, v, w) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F^u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F^v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F^w) \right). \quad (11)$$

Rotor. Para obtener la fórmula del rotor utilizaremos dos conocidas identidades, a saber

$$\nabla \times (f \vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f \nabla \times \vec{F}, \quad \text{y} \quad \nabla \times \nabla f = 0.$$

Notemos que $\nabla u = \frac{1}{h_u} \hat{u}$, y entonces podemos reescribir el campo vectorial en la forma

$$\vec{F} = F^u h_u \nabla u + F^v h_v \nabla v + F^w h_w \nabla w.$$

Calculamos el rotor del primer término usando las identidades mencionadas

$$\begin{aligned}\nabla \times (F^u h_u \nabla u) &= \nabla(F^u h_u) \times \nabla u \\ &= \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} (h_u F^u) \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} (h_u F^u) \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u F^u) \hat{w} \right) \times \left(\frac{1}{h_u} \hat{u} \right) \\ &= \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u F^u) \hat{v} - \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial v} (h_u F^u) \hat{w},\end{aligned}$$

Procedemos análogamente con los otros dos términos del campo. Luego, sumando las expresiones correspondientes a los tres términos del campo, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F}(u, v, w) &= \frac{1}{h_v h_w} \left(\frac{\partial(h_w F^w)}{\partial v} - \frac{\partial(h_v F^v)}{\partial w} \right) \hat{u} \\ &\quad + \frac{1}{h_u h_w} \left(\frac{\partial(h_u F^u)}{\partial w} - \frac{\partial(h_w F^w)}{\partial u} \right) \hat{v} \\ &\quad + \frac{1}{h_u h_v} \left(\frac{\partial(h_v F^v)}{\partial u} - \frac{\partial(h_u F^u)}{\partial v} \right) \hat{w}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2 (Coordenadas Cilíndricas). Las coordenadas cilíndricas en el espacio, $\{r, \theta, z\}$ son

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z. \quad (12)$$

Probemos en primer lugar que estas coordenadas son curvilíneas ortogonales. Para eso calculamos los vectores de la nueva base coordenada.

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} = \cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j},$$

y, análogamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} &= -r \sin(\theta) \hat{i} + r \cos(\theta) \hat{j}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \hat{k}\end{aligned}$$

Utilizando que $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son ortonormales, es directo ver que los nuevos vectores son mutuamente ortogonales, por lo tanto las coordenadas cilíndricas (12) son curvilíneas ortogonales. Además, calculando la norma de los vectores recién obtenidos vemos que

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1. \quad (13)$$

por lo que la nueva base coordenada, normalizada, $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}\}$ es

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j}, \\ \hat{\theta} &= -\sin(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j}, \\ \hat{z} &= \hat{k}. \end{aligned} \quad (14)$$

De aquí obtenemos los coeficientes de Λ y Λ^{-1} . Las fórmulas del gradiente, divergencia y rotor nos dan en este caso

$$\nabla f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \vec{F}(r, \theta, z) = \frac{\partial}{\partial r}(r F^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(r F^z). \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}(r, \theta, z) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F^z}{\partial \theta} - \frac{\partial(r F^\theta)}{\partial z} \right) \hat{r} \\ &\quad + \left(\frac{\partial F^r}{\partial z} - \frac{\partial F^z}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F^r}{\partial \theta} \right) \hat{z}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ejercicio: Muestre que las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) definidas como

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\phi) \cos(\theta), \\ y &= \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \\ z &= \rho \cos(\phi), \end{aligned}$$

para $\rho \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$, son curvilíneas ortogonales. Describa las superficies coordenadas. Calcule los factores de escala y las fórmulas del gradiente, divergencia y rotor.

Ejercicio: Repita el ejercicio anterior para las coordenadas esferoidales pro-ladas, dadas por

$$\begin{aligned}x &= a \sinh(\mu) \sin(\nu) \cos(\phi), \\y &= a \sinh(\mu) \sin(\nu) \sin(\phi), \\z &= a \cosh(\mu) \cos(\nu),\end{aligned}$$

donde $a > 0$ es constante y $\mu \in [0, \infty)$, $\nu \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$.