del apunte de Guido Raggio
Medias esféricas. Fórmula de Kirchoff - Poisson.

3.6. Ondas en el espacio

El problema de Cauchy para la ecuación de ondas en d dimensiones espaciales

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \,, \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \tag{19}$$

consiste en encontrar soluciones $u(\boldsymbol{x}, t)$ de esta ecuación que cumplan

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \phi(\boldsymbol{x}) \,, \quad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = \psi(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

donde los datos ϕ y ψ son funciones definidas en $\mathbb{R}^d$.

El caso unidimensional ($d = 1$) ya se ha discutido y la solución está dada por la fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) \, dy \,. \tag{21}$$

En lo que sigue obtendremos una fórmula análoga primero en el caso tridimensional ($d = 3$) y luego, por el método de reducción dimensional, la correspondiente fórmula bidimensional ($d = 2$).

3.6.1. Soluciones radiales en $d = 3$

Estudiamos la ec. de ondas (19) en $d = 3$ pero con condiciones iniciales radiales

$$u(\boldsymbol{r}) = \phi(|\boldsymbol{r}|) \,, \quad u_t(\boldsymbol{r}, 0) = \psi(|\boldsymbol{r}|) \,,$$

y buscamos soluciones que sean radiales, i.e., $u(\boldsymbol{r}, t) = v(|\boldsymbol{r}|, t)$. Con $r := |\boldsymbol{r}|$, la ec. diferencial es entonces

$$v_{tt} = c^2 (v_{rr} + \frac{2}{r} v_r) \,, \quad \text{en } [0, \infty) \times [0, \infty)$$

con condiciones iniciales $v(r, 0) = \phi(r)$, $v_t(r, 0) = \psi(r)$. La transformación[10] $y(r, t) := r v(r, t)$ conlleva

$$y_{rr} = r v_{rr} + 2 v_r \,, \quad y_{tt} = r v_{tt} \,,$$

de modo que

$$y_{tt} = c^2 y_{rr} \,, \quad y(r, 0) = r\phi(r) \,, \quad y_t(r, 0) = r\psi(r) \,. \tag{22}$$

Pero si buscamos soluciones continuas y acotadas debemos imponer la condición de borde

$$y(0, t) = [r v(r, 0)]_{r=0} = 0 \tag{23}$$ (v acotada) ✓

[10] De gran provecho en problemas que involucren el Laplaciano tridimensional. Por ejemplo: problemas de mecánica cuántica.

El problema para y es una ec. de ondas unidimensional pero para la semirecta $\mathbb{R}^+$ como dominio de la variable espacial. Extendemos la ecuación diferencial y las condiciones iniciales a todo $\mathbb{R}$ y planteamos el problema

$$\xi_{tt} = c^2\xi_{xx} \ , \quad \xi(x,0) = x\widetilde{\phi}(x) \ , \quad \xi_t(x,0) = x\widetilde{\psi}(x) \ , \tag{24}$$

donde $\widetilde{\phi}$ y $\widetilde{\psi}$ son ciertas extensiones de las funciones ϕ y ψ respectivamente a $\mathbb{R}$. Para acomodar nuestra condición de borde (23), pedimos que la solución ξ sea espacialmente impar, o sea: $\xi(-x,t) = -\xi(x,t)$. En tal caso $\xi(0,t) = 0$ y la restricción de $\xi(\cdot,t)$ a $\mathbb{R}^+$ nos da una solución $y(r,t) = \xi(r,t)$ del problema de Cauchy (22) con la condición (23). Pero ¿que tomamos como extensiones de las condiciones inciales ϕ y ψ? Si ξ ha de ser espacialmente impar entonces para $x < 0$

$$x\widetilde{\phi}(x) = \xi(x,0) = -\xi(|x|,0) = -|x|\phi(|x|) = x\phi(|x|) \ ;$$

y como ξ_t también resulta espacialmente impar[11], siempre para $x < 0$

$$x\widetilde{\psi}(x) = \xi_t(x,0) = -\xi(|x|,0) = -|x|\psi(|x|) = x\psi(|x|) \ .$$

Pero entonces obtenemos que las extensiones $\widetilde{\phi}$ y $\widetilde{\psi}$ son las extensiones pares de las funciones ϕ y ψ a $\mathbb{R}$. Rescribimos el problema (24)

$$\xi_{tt} = c^2\xi_{xx} \ , \quad \xi(x,0) = x\phi(|x|) \ , \quad \xi_t(x,0) = x\psi(|x|) \ ,$$

cuya solución –dada por la fórmula de d'Alembert– conocemos. Obtenemos así (restringiendonos a $x \geq 0$)

$$y(r,t) = \frac{(r+ct)\phi(r+ct) + (r-ct)\phi(|r-ct|)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} y\psi(|y|)\, dy \ .$$

Procesamos el segundo sumando. Si $r - ct \leq 0$ entonces

$$\int_{r-ct}^{r+ct} y\psi(|y|)\, dy = \int_{r-ct}^{0} y\psi(|y|)\, dy + \int_{0}^{r+ct} y\psi(y)\, dy \ ,$$

y la primera integral es

$$\int_{r-ct}^{0} y\psi(-y)\, dy = -\int_{0}^{ct-r} s\psi(s)\, ds = -\int_{0}^{|r-ct|} s\psi(s)\, ds \ ,$$

de modo que

$$\int_{r-ct}^{r+ct} y\psi(|y|)\, dy = -\int_{0}^{|r-ct|} y\psi(y)\, dy + \int_{0}^{r+ct} \psi(y)\, dy = \int_{|r-ct|}^{r+ct} y\psi(y)\, dy \ .$$

[11] $\xi_t(-x,t) = \lim_{h\to 0} \frac{\xi(-x,t+h)-\xi(-x,t)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\xi(x,t+h)-\xi(x,t)}{h} = -\xi_t(x,h)$.

Cuando $r - ct \geq 0$ tenemos $r - ct = |r - ct|$; luego, en ambos casos,

$$\int_{r-ct}^{r+ct} y\psi(|y|)\, dy = \int_{|r-ct|}^{r+ct} y\psi(y)\, dy \ ,$$

y por ende

$$y(r,t) = \frac{(r+ct)\phi(r+ct) + (r-ct)\phi(|r-ct|)}{2} \ + \ \frac{1}{2c}\int_{|r-ct|}^{r+ct} y\psi(y)\, dy \tag{25}$$

es la solución de (22) que cumple con (23). El primer sumando puede escribirse como integral ya que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{|r-ct|}^{r+ct} y\phi(y)\, dy\right\} = c(r+ct)\phi(r+ct) + c(r-ct)\phi(|r-ct|) \ .$$

Entonces

$$y(r,t) = \frac{1}{2c}\int_{|r-ct|}^{r+ct} y\psi(y)\, dy \ + \ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2c}\int_{|r-ct|}^{r+ct} y\phi(y)\, dy\right\} \ . \tag{26}$$

Pero entonces la solución radial que buscamos es

$$\begin{aligned} v(r,t) &= \frac{(r+ct)\phi(r+ct) + (r-ct)\phi(|r-ct|)}{2r} \ + \ \frac{1}{2cr}\int_{|r-ct|}^{r+ct} y\psi(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2cr}\int_{|r-ct|}^{r+ct} y\psi(y)\, dy \ + \ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2cr}\int_{|r-ct|}^{r+ct} y\phi(y)\, dy\right\} \ . \end{aligned}$$

Una aplicación inmediata de la regla de l'Hôspital nos da

$$v(0,t) = \phi(ct) + ct\phi'(ct) + t\psi(ct) = t\psi(ct) + \frac{d}{dt}(t\phi(ct)) \ . \tag{27}$$

3.6.2. Método de medias esféricas – Fórmula de Kirchhoff-Poisson para $d = 3$

Recordamos la notación

$$S_r(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = r\} \ , \ \ B_r(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leq r\}$$

para la esfera respectivamente la bola de radio $r > 0$ alrededor de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Observe que $\partial B_r(\boldsymbol{x}) = S_r(\boldsymbol{x})$.

Si f es una función definida en $\mathbb{R}^3$ definimos su promedio esférico $f^\#$ por

Coord. esféricas (r,θ,φ)

$$f^\#(r) := \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r(\boldsymbol{0})} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(\boldsymbol{0})} f(r\cos(\varphi), \sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))\, \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi, \quad r > 0 \ .$$

Claramente $f^{\#}(0) = f(\mathbf{0})$ y, para la n-ésima derivada de $f^{\#}$ tenemos

$$(f^{\#})^{(n)} = \left(\frac{\partial^n f}{\partial r^n}\right)^{\#} .$$

Si bien hemos definido a $f^{\#}$ como función de $r \in [0, \infty)$ nada nos impide reinterpretarla –cuando convenga– como función radial de $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$: $f^{\#}(\boldsymbol{r}) = f^{\#}(r)$ donde $r = |\boldsymbol{r}|$. Se puede demostrar (de varias maneras –lo dejamos como ejercicio) que el Laplaciano conmuta con la toma del promedio esférico

$$(\Delta f)^{\#} = \Delta f^{\#} ,$$

Si u es solución del problema de Cauchy para la ec. de ondas (19,20) entonces, ya que

$$(u_{tt})^{\#} = (u^{\#})_{tt} ,$$

tendremos

$$(u^{\#})_{tt} = c^2 \Delta u^{\#} \ , \ \ u^{\#}(r, 0) = \phi^{\#}(r) \ , \ \ ((u^{\#})_t)(r, 0) = \psi^{\#}(r) \ .$$

Pero esta es exactamente la ec. de ondas radial para la cual tenemos la solución obtenida en la sección anterior. En particular la relación (27) nos entrega

$$u^{\#}(\mathbf{0}, t) = t\psi^{\#}(ct) + \frac{d}{dt}(t\phi^{\#}(ct)) \ .$$

Con la definición del promedio esférico

$$u(\mathbf{0}, t) = u^{\#}(0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \psi(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \ + \ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \phi(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \right\} \ . \tag{28}$$

Si queremos la expresión para $u(\boldsymbol{r}, t)$ recurrimos a la translación espacial $w := T_{-\boldsymbol{r}} u$ o sea $w(\boldsymbol{x}, t) = u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t)$ que satisface la ec. de ondas con condición inicial

$$w(\boldsymbol{x}, 0) = \phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}) \ , \ \ w_t(\boldsymbol{x}, 0) = \psi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}) \ ;$$

de modo que $u(\boldsymbol{r}, t) = w(\mathbf{0}, t)$ y (28) para w nos entrega

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \psi(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}) \, d\boldsymbol{y} \ + \ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\mathbf{0})} \phi(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}) \, d\boldsymbol{y} \right\} \ .$$

La transformación $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{z}$ en ambas integrales nos entrega la famosa fórmula de Kirchhoff-Poisson

$$\boxed{u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\boldsymbol{r})} \psi(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \ + \ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(\boldsymbol{r})} \phi(\boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} \right\}} \ . \tag{29}$$