Problema 1: Considere la función de prueba $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty[\mathbb{R}]$ definida como

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Muestre que, efectivamente, φ y todas sus derivadas son continuas en $\mathbb{R}$.

Problema 2: Considere la sucesión de funciones en $\mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}]$

$$f_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2x^2}.$$

Muestre que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta.$$

¿A qué converge f_n'? ¿Y $f_n^{(k)}$? (Ayuda: note que toda función de prueba en $\mathcal{C}_0^\infty[\mathbb{R}]$ o $\mathcal{S}[\mathbb{R}]$ es *entera*, y por consiguiente tiene un desarrollo de Taylor con radio de convergencia infinito.)

Problema 3: Muestre que

$$\int_a^b f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

asumiendo que la ecuación $g(x) = 0$ posee una sola raíz en el intervalo $a < x < b$.

Problema 4: Determine cuáles de las siguientes funciones están en $\mathcal{L}^2(0,\infty)$; para aquellas que lo estén, calcule su norma.

a) e^{-x}. b) $\operatorname{sen} x$. c) $\dfrac{1}{1+x}$. d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Problema 5: Determine el límite en $\mathcal{L}^2$ de cada una de las siguientes sucesiones de funciones, si existe.

a) $\sqrt[n]{x}$, $0 \leq x \leq 1$. b) $\begin{cases} nx, & 0 \leq x < 1/n, \\ 1, & 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$. c) $nx(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$..

Problema 6: Muestre que las funciones $\{1, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), n = 1, 2, \ldots\}$ son ortogonales dos a dos en $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$. Idem para las funciones $\{e^{inx},\, n \in \mathbb{Z}\}$.

Problema 7: Considere la ecuación de movimiento para un oscilador armónico amortiguado y sin forzamiento,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

donde $\omega > 0$ es la frecuencia natural del oscilador y $2\gamma > 0$ es la constante de fricción. Reduzca la ecuación a la forma normal de Liouville y muestre que todas las soluciones no triviales decaen exponencialmente con el tiempo. Halle la relación entre γ y ω para que existan soluciones oscilatorias.

Problema 8: Dado el operador lineal

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x),$$

e integrando por partes el producto interno $\langle g, Lf\rangle$, muestre que

$$\langle g, Lf\rangle = \left\langle L^\dagger g, f\right\rangle + \left[p(f'g^* - fg'^*) + (q - p')fg^*\right]_a^b,$$

con

$$L^\dagger g = p^* g'' + (2p'^* - q^*)g' + (p''^* - q'^* + r^*)g.$$

¿Bajo qué condiciones se tiene $L^\dagger = L$?

Problema 9: Multiplicando por una función de peso adecuada, lleve los siguientes operadores diferenciales a la forma $\partial_x(p\partial_x) - q$ con $p > 0$.

a) $x^2\partial_x^2$, $x > 0$. b) $\partial_x^2 - x\partial_x$, $x \in \mathbb{R}$. c) $\partial_x^2 - x^2\partial_x$, $x > 0$. d) $x^2\partial_x^2 + x\partial_x + (x^2 - \lambda)$, $x > 0$.

Problema 10: Traslade la inhomogeneidad del problema de contorno

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ &y(0) = a, \quad y(\ell) = b \end{aligned}$$

de las CC a la ecuación, obteniendo la inhomogeneidad más simple posible.

Problema 11: Dado el problema de contorno

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ &y(0) = 0, \quad y'(\ell) = 0, \end{aligned}$$

muestre que es de Sturm–Liouville y encuentre los autovalores λ_n y las autofunciones $y_n(x)$. Haga lo mismo si las CC son

$$y(0) = 0, \quad hy(\ell) + y'(\ell) = 0,\ h > 0.$$

Problema 12: Considere el problema de contorno

$$\begin{aligned} &x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad 1 < x < b, \\ &y(1) = y(b) = 0. \end{aligned}$$

Reduzca el operador a uno Hermitiano, y halle los autovalores y autofunciones. ¿Respecto de qué producto interno son ortogonales?

Problema 13: Dado un operador diferencial formalmente autoadjunto

$$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x),$$

diga cuáles de las siguientes CC son Hermitianas para L.

a) $p(x) = 1$, $a \le x \le b$, $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$.

b) $p(x) = x$, $0 < a \le x \le b$, $u(a) = u'(b) = 0$.

c) $p(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi/2$, $u(0) = 1$, $u(\pi/2) = 0$.

d) $p(x) = e^{-x}$, $0 < x < 1$, $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$.

e) $p(x) = x^2$, $0 < x < b$, $u(0) = u'(b)$, $u'(0) = u(b)$.

f) $p(x) = x^2$, $-1 < x < 1$, $u(-1) = u(1)$, $u'(-1) = u'(1)$.