Problema 1: Una barra delgada homogénea semiinfinita, que se extiende desde $x = 0$ en adelante, tiene su superficie lateral aislada térmicamente, y su extremo en contacto térmico perfecto con un calefactor cuya temperatura varía en el tiempo como $T_0 \cos(\omega_0 t)$. Usando transformada de Fourier en t, halle la temperatura $u(x, t)$ de la barra en el estado de régimen, asumiendo que es finita en todas partes.

Problema 2: Una cuerda semiinfinita tiene inicialmente desplazamiento y velocidad nulas. Desde $t = 0$ en adelante, su extremo es forzado a moverse según $A \operatorname{sen}(\omega_0 t)e^{-t/\tau}$. Halle el desplazamiento $u(x, t)$ de la soga para todo $x > 0$ y $t > 0$. ¿Qué tuvo que asumir acerca de u para $x \to \infty$? ¿Qué ocurre para $t \to \infty$?

Problema 3: Considere una barra homogénea infinita aislada lateralmente, con una distribución inicial de temperatura $-T_0$ para $x < 0$ y T_0 para $x > 0$. Halle la temperatura $u(x, t)$ de la barra para todo x y $t > 0$. Ayuda: recuerde la transformada de Fourier de la función escalón de Heaviside.

Problema 4: El plano $z = 0$ es mantenido a potencial nulo, excepto por un rectángulo $-a < x < a$, $-b < y < b$ mantenido a potencial V_0. Halle el potencial electrostático $u(x, y, z)$ en todo el espacio. Ayuda: tome transformada de Fourier en x y en y.

Problema 5: Encuentre las funciones de Green y resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + \frac{1}{4}y = \sin(2x)$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

b) $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

c) $y'' + \alpha y' = e^{-\beta x}$ para $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

d) $y'' + \frac{1}{4}y = x$, $y(0) = \alpha$, $y(\pi) = \beta$.

Problema 6: Muestre que para $\vec{r}, \vec{r}\,' \in \mathbb{R}^3$ la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz es

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{k}{4\pi} y_0\big(k\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|\big) = -\frac{\cos\big(k\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|\big)}{4\pi\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}.$$

Problema 7: Muestre que la solución del problema

$$\begin{array}{llll} \nabla^2_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,'), & 0 < r, r' < a, & 0 < \theta, \theta' < \pi, & 0 \le \phi, \phi' < 2\pi, \\ G(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0, & r = a,\ 0 < r' < a, & 0 < \theta, \theta' < \pi, & 0 \le \phi, \phi' < 2\pi, \end{array}$$

puede escribirse

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{j_n(\kappa_{n\ell}\frac{r}{a}) j_n(\kappa_{n\ell}\frac{r'}{a}) Y_{nm}(\theta, \phi) Y^*_{nm}(\theta', \phi')}{\kappa^2_{n\ell} \frac{a}{2} j^2_{n+1}(\kappa_{n\ell})}.$$

Problema 8: Un medio infinito tridimensional de difusividad térmca κ se halla inicialmente a temperatura homogénea T_0. En el instante $t = 0$ se activa una fuente puntual de calor $q\delta(\vec{r})$ en el origen, y permanece activada. Halle la temperatura para todo $\vec{r}$ y t.

Problema 9: Considere un helicóptero en vuelo estacionario a una altura H sobre el origen de coordenadas, con el suelo como plano xy. El helicóptero emite sonido en múltiples frecuencias; si aislamos una, tenemos una ecuación de ondas para la sobrepresión atmosférica $u(\vec{r},t)$ con una fuente puntual en $(0,0,H)$ emitiendo con frecuencia ω y condiciones de contorno homogéneas de Neumann en el plano xy. Encuentre u como función de x,y,z,t ($z>0$). Para una dada distancia horizontal al origen, halle la altura $h_0(\omega)$ a la cual se encuentra el primer mínimo de intensidad para una dada frecuencia ω, debido a la interferencia destructiva entre los frentes de onda directo y reflejado. Muestre que la interferencia hace que para pequeñas alturas las frecuencias graves se refuercen y las agudas se amortigüen.
Ayuda: Verifique que la solución fundamental para la ecuación de ondas en 3D es

$$G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = \frac{1}{2\pi c r}\Theta(t-t')\delta\big((r-r')-c(t-t')\big).$$

Utilice el método de las imágenes para imponer las CC; recuerde que estas son de Neumann.

Problema 10: El plano xy se halla a potencial nulo, excepto por un cuadrado de lado $2a$ que se halla a potencial V_0. Halle el potencial electrostático en todo el espacio usando como función de Green la solución fundamental de la ecuación de Laplace, e integrando sobre la frontera $z=0$. Compare con el resultado del Problema 4.