Problema 1: Desarrolle en serie de Fourier real (senos y cosenos) las siguientes funciones:

a) $f(x) = \pi - |x|$, $-\pi < x < \pi$;

b) $f(x) = x$, $0 < x < a$;

c) $f(x) = x^2$, $-1 < x < 1$;

d) $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1; \end{cases}$

e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$.

Problema 2: Halle los autovalores k_n^2 y las autofunciones y_n del PSL

$$\begin{aligned} &y'' + k^2 y = 0, \qquad 0 < x < a, \\ &y(0) = y'(a) = 0, \end{aligned}$$

y desarrolle la función $f(x) = x$ en serie de y_n.

Problema 3:

a) Desarrolle en serie de $P_n(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$

b) Desarrolle $\operatorname{sen}^2 \theta$, $0 < \theta < \pi$ en serie de $P_n(\cos\theta)$.

Problema 4: Halle los autovalores λ_n y las autofunciones y_n del PSL

$$\begin{aligned} &(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}, \\ &y'\left(\pm\tfrac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Problema 5: Halle los autovalores k_n y las autofunciones y_n del PSL

$$\begin{aligned} &xy'' + y' + \left(kx - \frac{n^2}{x}\right) y = 0, \qquad 0 < x < 1, \\ &\lim_{x\to 0} |y(x)| < \infty, \quad y(1) = 0, \end{aligned}$$

y desarrolle la función $f(x) = 1 - x^2$ en serie de y_n.

Problema 6: Halle los autovalores k_n y las autofunciones y_n del PSL

$$\begin{aligned} &xy'' + y' + \left(kx - \frac{n^2}{x}\right) y = 0, \qquad 1 < x < 2, \\ &y(1) = y'(2) = 0, \end{aligned}$$

y calcule la integral de normalización $\int_1^2 y_n^2(x) x \, dx$.

Problema 7: Un sistema lineal tiene como respuesta $G(\omega)e^{-i\omega t}$ a una señal de entrada $e^{-i\omega t}$, donde ω es arbitrario. Si la entrada tiene la forma particular

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$$

donde λ es una constante fija, la salida resultante es

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (1 - e^{-\alpha t})e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$$

donde α es otra constante fija.

a) Calcule $G(\omega)$.

b) Calcule la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = A\delta(t)$.

Problema 8: Muestre que la solución de la EDO

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + k_0^2 u = h(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

es

$$u(x) = \frac{1}{2k_0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k_0|x-x'|}h(x')\,dx'.$$

Discuta qué está asumiendo sobre las CC satisfechas por u y h en $x = \pm\infty$.

Problema 9: Calcule la transformada de Fourier de la función de onda para un electrón 2p en el átomo de hidrógeno,

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^5}}\, z\, exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right),$$

donde a_0 es el radio de Bohr, z es la coordenada Cartesiana y $r = \|\vec{x}\,\|$.

Problema 10: Utilizando la representación integral

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$

calcule la transformada de Laplace de $J_0(x)$.

Problema 11: ¿De qué función es

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

la transformada de Laplace?

Problema 12: Tres nucleos radioactivos decaen sucesivamente en serie, de forma tal que los números $N_i(t)$ de cada tipo obedecen las ecuaciones

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3.$$

Si inicialmente $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_3 = n$, calcule $N_3(t)$ utilizando transformadas de Laplace.