Omar E. Ortiz

1 INTRODUCCIÓN

Repasemos dos conceptos básicos, ya estudiados en materias previas, que serán de gran utilidad en lo que sigue.

Sucesiones de Cauchy. Una sucesión infinita de números (reales o complejos) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, es una sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos los números naturales $n, m > N$ se cumple que $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Este concepto es clave por su relación con el concepto de convergencia. Por lo pronto recordemos que toda sucesión convergente es de Cauchy.

Naturalmente, este concepto se generaliza a cualquier espacio vectorial con norma. Si $\{\vec{v}_n\}$ es una sucesión infinita de vectores en un espacio vectorial V, que posee una norma $\| \ \|$, la sucesión es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos los números naturales $n, m > N$ se cumple que $\|\vec{v}_n - \vec{v}_m\| < \varepsilon$.

Relaciones de equivalencia. Sea X un conjunto cualquiera y "$\equiv$" una relación entre elementos de dicho conjunto. Entonces $\equiv$ es una *Relación de Equivalencia* entre elementos de X, si

a) Para todo $x \in X$, $x \equiv x$. ($\equiv$ es reflexiva).

b) Si $x, y \in X$, y $x \equiv y$, entonces $y \equiv x$. ($\equiv$ es simétrica)

c) Si $x, y, z \in X$ y $x \equiv y$ y $y \equiv z$, entonces $x \equiv z$. ($\equiv$ es transitiva).

Complementariamente a este concepto, surge el concepto de *Clases de equivalencia*. Dado X y una relación de equivalencia $\equiv$ entre elementos de X, agrupamos los elementos de X en subconjuntos tales que todos los elementos de un subconjunto son equivalentes entre sí, y no existe fuera de este subconjunto ningún elemento de X equivalente a ellos. Un subconjunto tal es una *clase de equivalencia*. Claramente las distintas clases de equivalencia, son disjuntas entre si. Para trabajar con este conjunto de clases equivalentes es conveniente tomar un único elemento, llamado “representante,” de cada clase equivalente.

Los números reales. Para visualizar los conceptos previos, recordemos como se construyen los números reales ($\mathbb{R}$) a partir de los racionales ($\mathbb{Q}$)[1]. Un procedimiento similar usaremos luego en espacios más generales.

Consideremos las sucesiones infinitas de números racionales $\{q_n\}$ que son de Cauchy. Estas sucesiones son convergentes pero pueden converger a un número que no es racional (el conjunto de los racionales es “incompleto”). La idea es “agregar” esos números faltantes al conjunto $\mathbb{Q}$ para así definir un conjunto más grande, el de los números reales.

Podríamos pensar que agregamos a los racionales nuevos números definidos como sucesiones de Cauchy de números racionales. Sin embargo hay muchas (infinitas) sucesiones de racionales que convergen a un mismo límite. Estaríamos entonces agregando demasiados números, nuestro conjunto sería redundante. Para evitar esto, decimos que dos sucesiones de Cauchy de números racionales, $\{q_n\}$ y $\{p_n\}$ son equivalentes si

$$\lim_{n\to\infty} |q_n - p_n| = 0. \tag{1}$$

El conjunto $\mathbb{R}$ es entonces el conjunto de las clases equivalentes de sucesiones de Cauchy de racionales bajo la relación de equivalencia (1). Por supuesto, los mismísimos racionales pueden pensarse de esta forma (pensar en una sucesión constante). Coloquialmente hablando, agregamos de esta forma a los números racionales todos los números irracionales y cada número aparece una sola vez en el conjunto.

[1] Desde tiempos antiguos se sabe que existen números que no pueden representarse como fracciones. Notemos, sin embargo, que todos los cálculos aritméticos que realizamos, aún con las más poderosas computadoras digitales, son cálculos con números racionales. Sin embargo, como los números racionales son densos dentro de los reales, es decir, podemos acercarnos tanto como queramos a, por ejemplo $\sqrt{2}$, usando fracciones, podemos aproximar cualquier cálculo de números reales tanto como queramos.

Nos interesa trabajar ahora en espacios vectoriales de dimensión infinita provistos de una norma. Los conceptos que veremos (o revisaremos) pueden aplicarse también a espacios en dimensión finita (con dimensión mayor a cero), pero nuestro interés estará centrado en dimensión infinita. Para simplificar la notación, omitiremos de ahora en más la "flechita" sobre los elementos de X.

Sea X el espacio vectorial, y sea $\|\ \|$ una norma sobre X. Como no existe una base finita en X, el concepto de convergencia basado en la convergencia de las componentes de un vector en una dada base, que usamos en dimensión finita, no es muy útil ahora y utilizaremos más bien una noción de convergencia basada en la norma.

Definición. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de vectores en X, diremos que esta sucesión converge a $u \in X$ si $\|u_n - u\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

El límite u, cuando existe, está unívocamente determinado por la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Antes de dar algunos ejemplos de espacios vectoriales normados en dimensión infinita, recordemos que tales espacios tienen una topología definida a partir de la norma. Revisemos conceptos básicos de esta topología.

Sean $u_0 \in X$ y $r > 0$. El subconjunto de los $u \in X$ tales que $\|u - u_0\| < r$ es una *bola abierta* de centro u_0 y radio r; el de los $u \in X$ tales que $\|u - u_0\| \leq r$ es una *bola cerrada*. Cualquier subconjunto $S \subset X$ es una *vecindad* de $u \in X$ si contiene una bola centrada en u. Un subconjunto $S \subset X$ es *acotado* si está contenido en una bola. Para cualquier subconjunto $S \subset X$, u es un punto interior de S si S es una vecindad de u, y u es un punto *exterior* de S si es interior del complemento S' de S respecto de X. $u \in X$ es un punto *frontera* de $S \subset X$ si no es un punto interior ni exterior de S. La unión de todos los puntos frontera de S, denotada ∂S es la *frontera* de S. La *clausura* $\bar{S}$ es la unión de S y ∂S. $S \subset X$ es *abierto* si contiene sólo puntos interiores; S es cerrado si S' es abierto o, equivalentemente, si $S = \bar{S}$. Finalmente, digamos que $S \subset X$ es *denso en todos lados* si $\bar{S} = X$; en este caso, todo punto en X pude ser aproximado tanto como queramos por puntos en S.

Damos algunos ejemplos de espacios vectoriales con norma (o espacios "normados").

Ejemplo 1: Consideremos el conjunto de todas las sucesiones infinitas de números complejos. Como vimos antes, este conjunto es un espacio vectorial. De este espacio, consideremos el subconjunto de las sucesiones que son acotadas (claramente es un subespacio vectorial, o sea un espacio vectorial en sí mismo). Consideremos la norma

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_j \{|u^j|\}, \tag{2}$$

donde u^j es el j-ésimo integrante de la sucesión u. Es decir, esta norma toma el supremo sobre los módulos de todos los números de la sucesión. No es difícil probar que esta definición satisface los axiomas de una norma (que ya estudiamos). El subespacio de las sucesiones acotadas es precisamente el subespacio de las sucesiones que tienen norma $\| \ \|_{l^\infty}$ finita. Este subespacio, constituye un espacio vectorial de dimensión infinita con norma.

Ejemplo 2: Continuando con el conjunto de las sucesiones infinitas de números complejos, introducimos una nueva norma

$$\|u\|_{l^1} = \sum_{j=0}^{\infty} |u^j|, \tag{3}$$

es decir la suma de los módulos de todos los números de la sucesión. Esta norma también está bien definida. El subconjunto de las sucesiones que tienen esta norma finita es también un subespacio vectorial.

Generalizando el ejemplo anterior, definimos la norma $l^p, \ p > 1$ sobre el espacio de sucesiones infinitas de números complejos como

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |u^j|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1. \tag{4}$$

Ejercicio 1: Probar que la norma l^p está bien definida.

Ejercicio 2: Probar que el subconjunto de sucesiones con norma l^p finita está contenido en el subconjunto de las sucesiones con norma l^q finita si $p < q$.

2.1 Espacios funcionales

Ejemplos más importantes de espacios vectoriales normados de dimensión infinita son los espacios donde los vectores son funciones, llamados genéricamente “espacios funcionales”.

Ejemplo 3: Quizá el ejemplo más simple de espacio funcional es $C([a,b])$, el espacio de las funciones continuas, de valores complejos, de variable real x sobre un intervalo cerrado finito $[a,b]$. En este espacio podemos definir diversas normas que lo hacen un espacio normado. Por ejemplo

$$\|u\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b} \{|u(x)|\}. \tag{5}$$

Otras normas sobre $C([a,b])$ son

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1. \tag{6}$$

De particular importancia son las normas L^1 y L^2.

Ejemplo 4: El espacio funcional $C^1([a,b])$ de funciones continuamente diferenciables sobre $[a,b]$, con norma

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty, \qquad u' = \frac{du}{dx}. \tag{7}$$

Desigualdades de Hölder Si $p > 1$ y $q > 1$ son tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, entonces

$$|\sum_j u^j \; v^j| \leq \|uv\|_{l^1} \leq \|u\|_{l^p} \; \|v\|_{l^q},$$

y

$$\left|\int_a^b u(x)v(x) \; dx\right| \leq \|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \; \|v\|_{L^q}.$$

Ejercicio 3: Probar, que para la norma L^p vale la desigualdad

$$\|uv\|_{L^s} \leq \|u\|_{L^p} \; \|v\|_{L^q}, \quad \text{para} \quad s^{-1} = p^{-1} + q^{-1}.$$

Sugerencia: Utilizar la desigualdad de Hölder para la función $(uv)^s$.

La desigualdad del ejercicio anterior vale también para la norma l^p.

2.2 Completitud

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de vectores en un espacio normado X. Dijimos que $u_n \to u$ (u_n tiene límite $u \in X$) si $\|u_n - u\| \to 0$. Si X es de dimensión finita, tal sucesión es de Cauchy y, recíprocamente, si una sucesión es de Cauchy entonces converge a algún $u \in X$ (tiene límite en X).

Si X es de dimensión infinita la situación no es tan simple; pueden existir sucesiones de Cauchy que no tienen límite en X (tal como ocurre para los números racionales).

Definición. Un espacio vectorial normado X se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy tiene límite en X. Un espacio vectorial normado que es completo se llama *espacio de Banach*.

Un espacio normado X que no es completo se dice *incompleto*.

Ejemplo 5: Consideremos nuevamente el espacio $C([a, b])$ con la norma $\| \|_\infty$. Es sabido que una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ en este espacio es uniformemente convergente a una función continua f sobre $[a, b]$ y por lo tanto tiene límite en $C([a, b])$. El espacio $C([a, b])$ con esta norma es entonces completo y por lo tanto un espacio de Banach.

Ejemplo 6: Para dar este ejemplo en forma estricta deberíamos estudiar integral de Lebesgue (o teoría de la medida), cosa que no haremos. Apelaremos un poco a la intuición del lector. En vez de considerar el espacio de funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ consideremos el espacio de funciones sobre $[a, b]$ que tiene norma L^1 finita. Denotamos este espacio como $L^1(a, b)$. Estas funciones pueden presentar discontinuidades (incluso infinitas discontinuidades). Puede verse que $C([a, b])$ es un subespacio denso de $L^1(a, b)$. Con la norma L^1 el espacio $C([a, b])$ es incompleto, pero si lo "completamos" obtenemos $L^1(a, b) = \overline{C([a, b])}$ (la clausura de $C([a, b])$, bajo la norma L^1 es completo).

¿Cómo completamos un espacio normado incompleto?. El procedimiento es totalmente análogo al que hicimos con los números reales. Sea X un espacio vectorial con norma $\| \|$. Si X es incompleto, definimos que dos sucesiones de Cauchy $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son equivalentes si $\|u_n - v_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, el espacio completado es el espacio de las clases equivalentes de dichas sucesiones bajo esta relación. Intuitivamente, lo que agregamos a X son los puntos frontera bajo la topología dada por la norma $\| \|$. El espacio completado es precisamente la clausura $\overline{X}$.

Muchos de los los conceptos que aprendimos en espacios vectoriales de dimensión finita se extienden o revalidan en dimensión infinita, pero no todos. Revisaremos algunos de ellos, sin pruebas.

2.3 Transformaciones lineales

Sean X e Y dos espacios de Banach. Denotamos con $\| \ \|_X$ y $\| \ \|_Y$ sus respectivas normas. En dimensión finita, todas las transformaciones lineales de X en Y son continuas. Esto no es más cierto en dimensión infinita.

Definición. Sea $T : X \to Y$ una aplicación, no necesariamente lineal. T se dice *continua* en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$ si $\|x - x_0\|_X < \delta$.

Ejercicio 4: Probar que si $T : X \to Y$ es lineal (X e Y son espacios de Banach) entonces T es contínua en todo punto de X si y solo si T es contínua en cero.

Lema 1 *$T : X \to Y$ es continua si y solo si para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de vectores en X se tiene* $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Definición. Sea $T : X \to Y$ lineal. Decimos que T es *acotada* si existe $K \geq 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que $\|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X$. En este caso la norma de T, definida como

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \{\|Tx\|_Y\},$$

es finita.

Entonces, tenemos el siguiente resultado

Lema 2 *Si $T : X \to Y$ es lineal, entonces T es acotada si y solo si es continua.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que T es acotada, es decir, existe C tal que para todo $x \in X$, $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$. Pero entonces tomando límite para $x \to 0$

vemos que Tx tiende a cero y T es contínua en cero. Pero como T es lineal, contínua en cero implica contínua en cualquier punto.

($\Leftarrow$) T contínua implica T contínua en cero, es decir $\forall\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|_X < \delta$ implica $\|Tx\|_Y < \varepsilon$. Entonces, para $x \neq 0$ arbitrario tomamos $z = \frac{\delta}{\|x\|_X}x$. Entonces $\|z\|_X < \delta$ y $\|Tz\|_Y < \varepsilon$ y tenemos

$$\|Tz\|_Y = \left\|T\Big(\frac{\delta}{\|x\|_X}x\Big)\right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X}\ \|Tx\|_Y < \varepsilon.$$

Entonces $\|Tx\|_Y < \frac{\varepsilon}{\delta}\|x\|_X$ y T es acotada con constante $C = \varepsilon/\delta$.

2.4 Bases

En un espacio de Banach X se definen series infinitas convergentes en la manera usual, es decir pensando en la convergencia de la sucesión de sumas parciales.

Definición. Una *base* de X es un conjunto $B \subset X$ tal que para todo $x \in X$ existe una única sucesión $\{v_1, v_2, \dots\} \subset B$ y una única sucesión de números complejos $\{a^1, a^2, \dots\}$ tales que $x = \sum_{j=0}^{\infty} a^j v_j$, Esta última expresión se llama *expansión* o *desarrollo* de x en la base.

Notemos que la definición de base no asegura que B tenga una cantidad numerable de elementos, pero si que cualquier vector del espacio puede escribirse como una combinación lineal (numerable aunque en general infinita). En dimensión infinita, no todo espacio de Banach admite una base, pero si lo hacen en general los espacios que usamos en física.

Definición. Un espacio de Banach es *separable* si tiene un subconjunto denso y numerable.

Una consecuencia obvia de esta definición es que todo espacio de Banach separable posee una base numerable. Afortunadamente los espacios de Banach con los que trabajamos en física son separables.

La inyectividad y suryectividad de T se definen en la misma forma que en dimensión finita. El núcleo (*kernel* en inglés) de T también se define como en dimensión finita.

El *Dominio* o *Dominio de definición* $D(T)$ de T es el subespacio vectorial donde T está definida (no necesariamente todo X). El *Rango* $R(T)$ de T es el conjunto de los $Tx \in Y$ tales que $x \in D(T)$.

La inversa T^{-1} de T se define si y solo si T es inyectiva, lo cual ocurre si y solo si $Tx = 0$ implica $x = 0$ (o sea $\ker(T) = \{0\}$). T^{-1} es la transformación de Y en X que envía Tx a x. Así, $D(T^{-1}) = R(T)$ y $R(T^{-1}) = D(T)$. Además: $T^{-1}(Tx) = x$, para todo $x \in D(T)$, y $T(T^{-1}y) = y$ para todo $y \in R(T)$.

3 Espacios de Hilbert

Un *Espacio de Hilbert* es un espacio de Banach en el cual la norma proviene de un producto escalar. Un producto escalar se define exactamente igual que en dimensión finita.

Sea H un espacio de Hilbert. Denotamos con $\langle\ ,\ \rangle$ al producto escalar. La norma de $x \in H$ se define como en dimensión finita

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{8}$$

Probemos ahora, que (8) define realmente una norma (recuerde las propiedades que debe satisfacer). La primer propiedad es obvia:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0, \qquad \text{y la igualdad vale sii } x = 0.$$

Para la segunda propiedad, sea $x \in H$ y $a \in \mathbb{C}$. Tenemos

$$\|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax\rangle} = \sqrt{\bar{a}\ a\ \langle x, x\rangle} = |a|\ \|x\|.$$

La tercer propiedad, la desigualdad triangular, requiere más trabajo. Probamos primero la desigualdad de Schwarz

Lema 3 *Si $x, y \in H$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\|$.*

Prueba: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in H$ arbitrarios. Tenemos que $y + \lambda\langle x, y\rangle x \in H$, por lo que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle y + \lambda\langle x, y\rangle x, y + \lambda\langle x, y\rangle x\rangle \\
&= \|y\|^2 + \lambda\ \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle + \lambda\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle + \lambda^2\ |\langle x, y\rangle|^2\ \|x\|^2 \\
&= \|y\|^2 + 2\lambda|\langle x, y\rangle|^2 + \lambda^2|\langle x, y\rangle|^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

La última línea es un polinomio en λ con coeficientes reales. Que sea mayor o igual que cero implica que su discriminante es menor o igual que cero, o sea

$$4\ |\langle x,y\rangle|^4 - 4\ \|y\|^2 |\langle x,y\rangle|^2 \|x\|^2 \leq 0,$$

de donde se deduce la desigualdad. ¿En qué casos vale la igualdad? (Ejercicio).

Ejercicio 5: Complete la prueba de que (8) define una norma, probando la desigualdad triangular. A tal fin utilice la desigualdad de Schwarz.

Ejemplo 7: $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar Euclídeo es un espacio de Hilbert de dimensión finita.

Ejemplo 8: El espacio de sucesiones infinitas de números complejos (introducido en el ejemplo 1), pero limitado a las que tienen norma l^2 finita (definida en (4) con $p=2$). Sea $x = \{x^i\}_{i=1}^{\infty}$, e $y = \{y^j\}_{j=1}^{\infty}$ dos vectores en este espacio. El producto escalar se define como

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{x^i}\ y^i. \tag{9}$$

Es claro que este producto escalar induce la norma l^2. Este espacio, con este producto escalar es un espacio de Hilbert (denotado usualmente l^2, como la norma).

Para probar que este es un espacio de Hilbert, debemos verificar que es completo, es decir que toda sucesión de de Cauchy converge a un vector con norma l^2 finita. A tal fin sea $\{x^i\}_n,\ n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de vectores en l^2 (es decir, una sucesión de sucesiones complejas). Por hipótesis esta sucesión es de Cauchy. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i - x_m^i|^2 = \|\{x^i\}_n - \{x^i\}_m\|_{l^2}^2 \leq \varepsilon^2, \quad \text{si } n,m > N. \tag{10}$$

Pero entonces cada sumando (i fijo) satisface

$$|x_n^i - x_m^i| < \varepsilon, \quad \text{si } n,m > N.$$

o sea que para todo i fijo, la sucesión en n $\{x_n^i\}$ es de Cauchy. Pero como el plano complejo es completo (igual que los reales), cada una de esas sucesiones converge a un número complejo z^i. Podemos entonces pensar en la sucesión de números complejos $\{z^i\}$. Queremos demostrar entonces que $\{z^i\} \in l^2$.

Ahora bien, truncando la sumatoria en (10) a k términos, y tomando límite para $m \to \infty$ en (10), tenemos

$$\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - z^i|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \text{si } n > N. \tag{11}$$

Pero como el miembro izquierdo es una sucesión no decreciente de reales positivos, acotada por arriba, el límite para $k \to \infty$ existe y tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i - z^i|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \text{si } n > N. \tag{12}$$

por lo tanto la sucesión $\{x_n^i - z^i\}$ está en l^2. Entonces

$$\|\{z^i\}\|_{l^2} = \|\{x_n^i\} - \{z^i\} - \{x_n^i\}\|_{l^2} \leq \|\{x_n^i\}\|_{l^2} + \|\{x_n^i - z^i\}\|_{l^2},$$

Como ambos términos del miembro derecho son finitos, tenemos que $\{z^i\} \in l^2$, y la (12) nos dice que $\{x_n^i\}$ converge to $\{z^i\}$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 9: *(Espacio L^2)* Es el espacio de funciones (no necesariamente continuas) de cuadrado integrable en $\mathbb{R}$, con dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ identificadas cuando

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \; dx = 0,$$

y con producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \; g(x) \; dx, \tag{13}$$

que obviamente induce la norma L^2 en $\mathbb{R}$

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \; dx. \tag{14}$$

Este espacio puede pensarse como el de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$, de cuadrado integrable, completado respecto de la norma (14).

El ejemplo 9 puede considerarse un caso particular del siguiente.

Ejemplo 10: *(Espacios de Sobolev)* Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. Consideremos la norma, definida para funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, que son m veces contínuamente diferenciables en Ω, dada por

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{H^m} = \int_\Omega \Big(|f|^2 + \sum_{i=1}^{p} |\partial_i f|^2 + \sum_{i,j=1}^{p} |\partial_i \partial_j f|^2 + \dots \\ + \sum_{i,j,\dots,k=1}^{p} |\partial_i \partial_j \dots \partial_k f|^2 \Big) \, dx^1 \dots dx^p \end{aligned} \tag{15}$$

donde en el último término hay m derivadas y ∂_i denota derivada parcial respecto de x^i ($x^1, \dots, x^p$ coordenadas Cartesianas de $\mathbb{R}^p$). Luego, completando este espacio de funciones respecto de esta norma, obtenemos un espacio de Banach. Introduciendo el producto escalar (obvio) que produce esta norma tenemos un espacio de Hilbert $H^m(\Omega)$. Estos son espacios funcionales de suma importancia en la teoría de ecuaciones diferenciales. Notar que el espacio H^0 es el espacio L^2 del ejemplo anterior (cuando tomamos $\Omega = \mathbb{R}$).

Embeddings. Existen muchos teoremas de *embedding* (que escapan a este curso) que relacionan distintos espacios funcionales. Simplemente como ejemplo, es interesante mencionar uno de tales embeddings que garantiza el orden de diferenciabilidad en sentido clásico de las funciones en H^m. Si $m > q + p/2$ entonces $H^m(\Omega) \subset C^q(\Omega)$. Por ejemplo, en dimensión $p = 3$, las funciones en H^4 pertenecen también a C^2, es decir son dos veces contínuamente diferenciables.

Una propiedad importante, tanto para espacios de Banach como para espacios de Hilbert, es que un subespacio cerrado hereda la norma y/o producto escalar (por simple restricción al subespacio) y entonces dicho subespacio es de Banach o Hilbert en si mismo, puesto que al ser cerrado es completo.

Sea H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado. Se define el complemento ortogonal de M como

$$M^\perp = \{x \in H / \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M\}.$$

Daremos algunos resultados sin demostración (aunque varios de ellos pueden encontrarse en el libro de Reula).

Lema 4 *Sea H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado. Entonces, $M^\perp$ es también un espacio de Hilbert. Además M y $M^\perp$ son complementarios, es decir, $H = M \oplus M^\perp$.*

Corolario 1 $(M^\perp)^\perp = M$.

El ortogonal "$\perp$" está definido también para subespacios no cerrados. En este caso, si $M \subset H$ subespacio, entonces $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

Definición: Un espacio de Hilbert H es separable si lo es como espacio de Banach (con la norma derivada del producto escalar).

Ejemplo 11: Consideremos el espacio l^2 del ejemplo 8. Sea $\hat{e}_i \in l^2$ la sucesión que tiene un 1 en el i-ésimo lugar y cero en todos los restantes. Definiendo estos elementos de l^2 para $i = 1, 2, \ldots$ el conjunto numerable $B = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots\} \subset l^2$ es una base de l^2. Más aún, es fácil ver que B es una base ortonormal.

Ejercicio 6: Probar la última afirmación.

Ejemplo 12: Nuevamente l^2. Si consideramos todas las combinaciones lineales de elementos de B con coeficientes racionales, tenemos un conjunto numerable (pues B es numerable y los racionales son numerables también) que es denso en l^2. Esto es, dado cualquier $x \in l^2$ podemos aproximarlo tanto como queramos con alguna combinación lineal de las antes descriptas.

La importancia de los espacios separables está dada por el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración.

Teorema 1 *Un espacio de Hilbert H es separable si y solo tiene una base ortonormal numerable B. Si B tiene un número finito de elementos, digamos N, entonces H es isomorfo a $\mathbb{C}^N$. Si B tiene un número infinito de elementos, entonces H es isomorfo a l^2.*

Recordemos que un isomorfismo entre dos espacios vectoriales es H y V significa, en este caso, que existe un mapa $\varphi : H \to V$ lineal, continuo e invertible con inversa continua. Las normas de los vectores en cada espacio están relacionadas por $\|\varphi(x)\|_V = \|x\|_H$.

Este teorema es importante por que en definitiva nos dice que que en los espacios de Hilbert separables la estructura del espacio es o bien similar a la de $\mathbb{C}^N$ (caso dimensión finita) o bien a la de l^2 (caso dimensión infinita).

Ejercicio 7: Sea H un espacio de Hilbert y $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_N\}$ un conjunto ortonormal (no necesariamente una base). Pruebe que

a) Identidad de Pitágoras. Si $x \in H$,

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |\langle \hat{e}_j, x\rangle|^2 + \|x - \sum_{j=1}^{N} \langle \hat{e}_j, x\rangle \ \hat{e}_j\|^2.$$

b) Desigualdad de Bessel. Si $x \in H$

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle \hat{e}_j, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ejercicio 8: Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots\}$ una base ortonormal. Pruebe que si $x \in H$,

a) $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \hat{e}_j, x\rangle \ \hat{e}_j$

b) Identidad de Parseval:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \hat{e}_j, x\rangle|^2.$$

Teorema 2 *Sea H un espacio de Hilbert y sea $B_1 = \{x \in H / \|x\|_H \leq 1\}$ la bola unitaria. B_1 es compacta si y solo si H es de dimensión finita.*

Prueba (para H separable): Si H es de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{C}^n$, donde la bola unitaria es acotada y cerrada, y por lo tanto es compacta. Si H es de dimensión infinita, es isomorfo a l^2, pero en l^2 todos los vectores de la base introducida en el ejemplo 11 pertenecen a la bola unitaria, y la sucesión $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots\}$ claramente no tiene ninguna subsucesión convergente, por lo tanto no es compacta.

Un ejemplo muy interesante de espacio de Hilbert separable, es aquel que le da origen a las series de Fourier.

Ejemplo 13: Consideremos el espacio de Hilbert $H^0([0,2\pi]) = L^2([0,2\pi])$. Este espacio es separable y una base ortonormal para el mismo es

$$S = \left\{ \hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Cualquier función del espacio puede desarrollarse en esta base (desarrollo de Fourier de f),

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^n\ \hat{e}_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f^n\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \tag{16}$$

donde los coeficientes del desarrollo son

$$f^n = \langle \hat{e}_n, f \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-inx}\ f(x)\ dx.$$

Notar que la igualdad entre $f(x)$ y su desarrollo (miembro derecho) debe entenderse bajo la equivalencia del espacio de Hilbert (f y g son equivalentes si $\|f - g\| = 0$). De hecho, sabemos que si $f(x)$ tiene una discontinuidad en algún punto, el desarrollo de Fourier converge al promedio de los valores por izquierda y por derecha en dicho punto; la posible diferencia con la f original se produce en un conjunto de medida cero. La identidad de Parseval del ejercicio 8 nos da precisamente la conocida identidad de Parseval de las series de Fourier.

Definición. Sea H un espacio de Hilbert. El espacio *dual* H' es el espacio de funcionales lineales continuas de H en $\mathbb{C}$.

Note que se agregó el requisito de continuidad respecto del caso de dimensión finita. Si no se requiere la continuidad el nuevo espacio resulta demasiado grande y no guarda relación clara con H. El dual H' de H resulta también un espacio de Hilbert con la siguiente norma. Sea $\varphi \in H'$

$$\|\varphi\|_{H'} = \sup_{\|x\|_H = 1} \{|\varphi(x)|\}.$$

Más aún, con la definición dada de dual tenemos,

Teorema 3 (de representaciones de Riesz).
Sea $\varphi \in H'$. Existe un único $y \in H$ tal que $\varphi(x) = \langle y, x \rangle$ para todo $x \in H$. Por lo tanto H' puede identificarse con H en el sentido que tenemos un mapa invertible entre ambos espacios.

Veamos finalmente algunas propiedades de operadores sobre espacios de Hilbert.

Un operador A sobre H es una transformación lineal de H en si mismo. La definición de autovalores y autovectores es igual que en dimensión finita. Sea $A : H \to H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de A, si existe un vector $u \in H$, $u \neq 0$ tal que $Au = \lambda u$. Es decir, $u \in \ker(A - \lambda I)$.

Una diferencia fundamental con el caso de dimensión finita es que el espectro de un operador puede ser vacío.

Ejemplo 14: Considere el espacio l^2 con la base ortonormal introducida en el ejemplo 11. Sea A el operador definido mediante

$$A\hat{e}_i = \hat{e}_{i+1}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Este operador no tiene autovalores. Para ver esto, supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ y $u \in l^2$, tales que $Au = \lambda u$. Desarrollando u en la base ortonormal, tenemos

$$A\Big(\sum_{j=1}^{\infty} u^i \hat{e}_i\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} u^i \hat{e}_{i+1} = \lambda\Big(\sum_{j=1}^{\infty} u^i \hat{e}_i\Big).$$

Como los desarrollos son únicos, la igualdad debe satisfacerse componente a componente,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda\ u^1 \\ u^1 &= \lambda\ u^2 \\ u^2 &= \lambda\ u^3 \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$ las igualdades implican que todas las componentes de u son cero, por lo tanto $u = 0$. Si $\lambda \neq 0$, entonces la primer ecuación nos dice que $u^1 = 0$ y entonces la segunda nos dice $u^2 = 0$, la tercera $u^3 = 0$, y así sucesivamente, por lo que $u = 0$. Por lo tanto A no tiene autovalores.

Un operador A que actúa sobre un espacio de Hilbert es un caso particular de transformación lineal entre espacios de Banach. Valen por lo tanto los resultados antes comentados.

A es acotado si y solo si es contínuo. El conjunto de los operadores acotados sobre H, normalmente denotado como $B(H)$, no solo es un espacio vectorial; el producto de dos operadores acotados es también un operador acotado y $B(H)$ es por lo tanto un álgebra cerrada. Como comentario general, puede decirse que aquellas propiedades de los operadores en $B(H)$ en dimensión finita que no utilizan explícitamente una base para su definición, pueden trasladarse a dimensión infinita. Por ejemplo, si $A \in B(H)$, se define el operador adjunto A^* tal que $\langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle,\ \forall x, y \in H$. Además $A^{**} = A$. Mientras que en general no se define el determinante de A, que necesita una base particular para su definición.

$T \in B(H)$ se dice *isométrico* si preserva la norma, es decir $\|Tx\| = \|x\|,\ \forall x \in H$. En este caso $T^*T = I$ y $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in H$. En este caso T es invertible, ya que $Tx = 0$ implica $x = 0$. Sin embargo, es posible que T^{-1} no sea acotado pues puede ocurrir que no todo H sea dominio para T^{-1}. Cuando T^{-1} está definido sobre todo H, T se llama *unitario.* En este caso $T^{-1} \in B(H)$ y T^{-1} es unitario en sí mismo; además se tiene $T^*T = TT^* = I$, o bien $T^{-1} = T^*$.

Una clase más restrictiva de operadores en $B(H)$ es la de los operadores compactos. $A \in B(H)$ es *compacto* si la imagen $\{Ax_n\}$ de toda sucesión acotada $\{x_n\}$ tiene una subsucesión de Cauchy.

Para operadores compactos pueden probarse interesantes propiedades acerca de sus autovalores. Si $T \in B(H)$ es compacto, entonces su espectro es un conjunto discreto (los autovalores pueden numerarse). Además todos ellos tienen multiplicidad finita, con la sola posible excepción de $\lambda = 0$. Los autovalores pueden ordenarse, digamos, en orden de magnitud decreciente: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$ y el mayor autovalor es igual al *radio espectral* de T,

$$|\lambda_1| = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = spr(T).$$

$T \in B(H)$ es *normal*, si $T^*T = TT^*$.

Teorema 4 *Si $T \in B(H)$ es normal y compacto, T tiene una representación espectral*

$$T = \sum_j \lambda_j P_j, \qquad P_j^* = P_j, \qquad dim(P_j) < \infty,$$

en el sentido de convergencia en la norma[2] *. Los proyectores P_j forman, junto con el proyector P_0 a $ker(T)$, una familia ortogonal completa.*

[2]Es decir $\|T - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n)\| \to 0,\ n \to \infty$.

En física no solo importan los operadores compactos o acotados. En muchas ocasiones se utilizan operadores no acotados. Para ilustrar esto basta considerar el operador derivada.

Ejemplo 15: Consideremos el espacio funcional $L^2([0,1])$. La función $f(x) = \sqrt{x}$ pertenece a este espacio ya que

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |f|^2 \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Consideremos el operador derivación D que lleva $f(x)$ a $f'(x)$. Tenemos

$$\|Df\|^2 = \int_0^1 \frac{1}{4x} \, dx = \infty.$$

Así, D envía a f fuera del espacio; D es no acotado en L^2