Métodos Matemáticos de la Física II

Omar E. Ortiz

FAMAF, UNC

29 de marzo de 2022

Matrices de proyección o Proyectores

Supongamos que tenemos un espacio vectorial V con $\dim(V) = n$. Sea $\{\hat{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ una base dada de V en la que estamos trabajando y a la cual asociamos una representación matricial para nuestros vectores y operadores.

Un vector $\vec{v} \in V$ tendrá una representación matricial:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

Supongamos que tenemos ahora una nueva base $\{\vec{f}_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ de V. Cada uno de estos vectores tiene una representación matricial como una columna.

Subespacios y Proyectores

El espacio vectorial V puede descomponerse en suma directa de subespacios W_j de dimensión 1, cada uno de estos expandido por el correspondiente vector de base $\vec{f}_j$.

Queremos construir los operadores proyección P_j que proyectan cualquier vector en el subespacio W_j correspondiente.

Sabemos que el vector $\vec{v}$ puede ahora escribirse en la nueva base:

$$\vec{v} = \tilde{v}^j \vec{f}_j, \tag{1}$$

donde pusimos una "tilde" sobre cada componente para distinguirlas de las componentes en la base original (sin tilde). Los términos de la sumatoria en (1) son justamente las proyecciones de $\vec{v}$ en los subespacios W_j.

Sabemos como encontrar las nuevas componentes $\tilde{v}^j$ en la representación matricial, usando la matriz de cambio de base.

Recordemos: Si ubicamos en una matriz Λ las columnas que representan los vectores $\vec{f}_j$, entonces la matriz inversa Λ^{-1} convierte las componentes de un vector (columna) de la base original a las componentes en la nueva base $\{\vec{f}_j,\ j = 1, \ldots, n\}$.

Así, la componente $\tilde{v}^j$ de $\vec{v}$ en la nueva base, se obtiene multiplicando matricialmente la j-ésima fila de Λ^{-1} (que denotamos $(\Lambda^{-1})^j$) por la columna con las componentes de $\vec{v}$ en la base original:

$$\tilde{v}^j = (\Lambda^{-1})^j{}_i\, v^i.$$

El vector $\vec{v}$ proyectado al al subespacio W_j es el escalar $\tilde{v}^j$ multiplicando al vector de base $\vec{f}_j$. Por lo tanto, la matriz del proyector P_j que proyecta el vector $\vec{v}$ al subespacio W_j se obtiene multiplicando matricialmente la columna que representa a $\vec{f}_j$ por la j-ésima fila de Λ^{-1}. Este producto nos da una matriz cuadrada $n \times n$. Esto es (entendiendo que en las expresiones que siguen NO sumamos sobre el índice j):

$$\begin{aligned} P_j\, \vec{v} &= \tilde{v}^j\, \vec{f}_j = \vec{f}_j\, \tilde{v}^j \\ &= \vec{f}_j\, (\Lambda^{-1})^j{}_i\, v^i \qquad\qquad \text{Sin sumar sobre } j \\ &= \left[\vec{f}_j\, (\Lambda^{-1})^j\right] \vec{v}. \end{aligned}$$

Una vez construidos los $P_1, P_2, \ldots, P_n$, el Proyector que proyecta en en subespacio, por ejemplo, $W_2 \oplus W_4$ será simplemente $P_2 + P_4$.