Omar E. Ortiz

1 Problemas de Sturm-Liouville

Es frecuente resolver ecuaciones en derivadas parciales (EDP) expandiendo la solución en bases que son productos de funciones de una variable. Tales funciones se obtienen en general como autovectores de diversos problemas de autovalores en un espacio funcional de Hilbert.

Una clase amplia de tales problemas de autovalores son los conocidos como problemas de Sturm-Liouville, que describimos brevemente a continuación.

Consideremos un espacio de Hilbert H de funciones $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. En algunos casos puede ser $a = -\infty$ y/o $b = \infty$. Consideraremos dos productos escalares definidos en tal espacio, el usual de $L^2([a,b])$ y el producto escalar dado por

$$(f,g)_\rho = \int_a^b \rho(x)\ \overline{f(x)}\ g(x)\ dx, \qquad \rho(x) > 0,\ x \in (a,b). \tag{1}$$

El problema de Sturm-Liouville es un problema de autovalores, ligeramente generalizado, para el operador diferencial ordinario, lineal, dado por

$$L = -\Big[\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{d}{dx}\Big) + q(x)\Big]. \tag{2}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones reales dadas, con $p(x) > 0$ en (a,b).

El problema de autovalores consiste en hallar los autovalores λ_j y autovectores $u_j(x)$ (autofunciones) de L tales que

$$Lu_j = -\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du_j}{dx}\Big) - q(x)u_j(x) = \lambda_j \rho(x) u_j(x), \tag{3}$$

donde $\rho(x)$ es la "función densidad" o "función de peso" utilizada en la definición del producto escalar (1).

"Ligeramente generalizado" hace referencia a que en algunos casos la función $\rho(x)$ es distinta de 1, lo que da origen a una noción de ortogonalidad particular en el espacio funcional (ortogonalidad dada por $(\ ,\ )_\rho$).

Veamos que el operador L es autoadjunto con el producto escalar L^2 si se dan ciertas condiciones de borde (o contorno) para el problema diferencial (3). Integrando por partes dos veces, tenemos

$$\begin{aligned}(u, Lv) &= -\int_a^b \overline{u(x)} \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dv}{dx}\Big)\ dx - \int_a^b \overline{u(x)} q(x) v(x)\ dx, \\ &= -\Big(\overline{u(x)} p(x)\frac{dv}{dx}\Big)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{d\bar{u}}{dx} p(x) \frac{dv}{dx}\ dx - \int_a^b \overline{u(x)} q(x) v(x)\ dx, \\ &= \Big(\frac{d\bar{u}}{dx} p(x) v(x) - \overline{u(x)} p(x) \frac{dv}{dx}\Big)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\Big(\frac{d\bar{u}}{dx} p(x)\Big) v(x)\ dx \\ &\quad - \int_a^b q(x)\overline{u(x)} v(x)\ dx, \\ &= \Big(\frac{d\bar{u}}{dx} p(x) v(x) - \overline{u(x)} p(x) \frac{dv}{dx}\Big)\Big|_a^b + (Lu, v)\end{aligned}$$

por lo tanto, si las condiciones de contorno del problema son tales que

$$\Big(\frac{d\bar{u}}{dx} p(x) v(x) - \overline{u(x)} p(x) \frac{dv}{dx}\Big)\Big|_a^b = 0, \tag{4}$$

entonces L es autoadjunto. Tales condiciones de contorno se satisfacen para varias posibilidades. Por ejemplo, la condición de Dirichlet homogénea en un extremo $u(x = a) = 0$ anula dos de los cuatro términos en (4). La condición de Neumann homogénea: $\frac{du}{dx}(x = b) = 0$ anula los otros dos términos. Puede plantearse Dirichlet homogénea en ambos extremos, combinaciones con la condición de “sujeción elástica”: $u'(a) = h_a u(a)$ y $u'(b) = h_b u(b)$, con h_a, h_b constantes, etc.

Como con otros operadores autoadjuntos pueden probarse fácilmente algunas propiedades básicas de los autovalores y autovectores de L.

- Los autovalores son reales, pues
  $$(u_j, Lu_j) = (u_j, \rho\lambda_j u_j) = \lambda_j\ \|u_j\|_\rho^2,$$
  y
  $$(Lu_j, u_j) = (\rho\lambda_j u_j, u_j) = \overline{\lambda_j}\ \|u_j\|_\rho^2.$$
  Como L es autoadjunto en el producto escalar L^2, los primeros miembros son iguales y entonces $\lambda_j = \overline{\lambda_j}$.

- Las autofunciones que corresponden a autovalores distintos son ρ-ortogonales

$$\lambda_k(u_j, u_k)_\rho = (u_j, Lu_k) = (Lu_j, u_k) = \lambda_j(u_j, u_k)_\rho,$$

  por lo tanto $(\lambda_k - \lambda_j)\ (u_j, u_k)_\rho = 0$, Si los autovalores son distintos, las autofunciones son ρ-ortogonales.

- Podemos normalizar todos los autovectores.

- Si varios autovectores corresponden al mismo autovalor, siempre podemos ortonormalizarlos con el procedimiento de Grahm-Schmidt.

Otra propiedad, no tan obvia, pero importantísima, que no probaremos se refiere a la completitud del conjunto de autofunciones, como explicamos a continuación.

Supongamos que tenemos un problema de Sturm-Liouville bien definido, es decir, el intervalo $[a, b]$, las funciones $p(x) > 0$, $q(x)$ real y la densidad $\rho(x) > 0$ en (a, b) están dadas y las condiciones de contorno satisfacen (4), entonces puede probarse el siguiente teorema clásico (Ver por ejemplo [1])

Teorema 1 *Los autovalores del problema* (3),(4) *son simples (no degenerados) y constituyen una sucesión infinita, numerable de números reales* $\{\lambda_j\|$ *que puede ordenarse tales que*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots, \qquad \textit{con}\ \ \lambda_n \to \infty\ \textit{cuando}\ n \to \infty.$$

Además, las correspondientes autofunciones, apropiadamente normalizadas, forman una base ortonormal para el espacio de funciones $f(x)$ *continuas sobre* $[a, b]$ *que tienen derivadas primera y segunda continuas a trozos. Es decir estas funciones pueden expandirse en la forma*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_j\ u_j(x), \qquad c_j = (u_j, f)_\rho,$$

y la convergencia es uniforme y absoluta.

Ejemplo 1: Consideremos el problema de Sturm-Liouville con $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $\rho(x) = 1$ en el intervalo $[0, b]$ con condiciones de Dirichlet homogéneas. Es decir

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u(x), \qquad u(0) = u(b) = 0.$$

Podemos escribir cada autofunción como combinación lineal de un seno y un coseno,

$$u = c\,\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x), \qquad \alpha^2 = \lambda.$$

Luego, aplicando las condiciones de contorno tenemos,

$$u(0) = 0 \implies d = 0, \quad \text{y} \quad u(b) = 0 \implies \alpha = \frac{j\pi}{b}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Así, normalizando las autofunciones tenemos que las autofunciones y sus correpondientes autovalores son

$$u_j(x) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\Big(\frac{j\pi}{b}x\Big), \qquad \lambda_j = \Big(\frac{j\pi}{b}\Big)^2, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

El desarrollo de una $f(x)$ en la base de Sturm-Liouville que proporciona este ejemplo resulta ser un caso particular de serie de Fourier.

El resultado descripto por el teorema anterior es algo restrictivo (convergencia uniforme es convergencia en la norma $\| \ \|_\infty$). Para muchos problemas es conveniente tener un resultado más general. Tal resultado existe y puede enunciarse en términos del espacio de Hilbert H de funciones definidas sobre $[a, b]$ con el producto escalar dado por $(\ , \ )_\rho$ (Ver [2], Chapter 9).

Teorema 2 *El espacio de Hilbert H de funciones $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con producto escalar*

$$(f, g)_\rho = \int_a^b \overline{f(x)}\ g(x)\ \rho(x)\ dx,$$

es separable, de dimensión infinita y las autofunciones normalizadas $u_j(x)$ del problema (3),(4) constituyen una base ortonormal para H.

Este teorema nos dice que si $f \in H$ (o sea $\|f\|_\rho < \infty$), podemos expandir f en la forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j, f)\ u_j(x).$$

Por supuesto, la convergencia de la sumatoria debe entenderse como convergencia en la norma $\| \ \|_\rho$ asociada al producto escalar de H, o sea

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| f(x) - \sum_{j=1}^{N} (u_j, f)\ u_j(x) \Big\|_\rho = 0.$$

Referencias

[1] Courant, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Volume I, Interscience Publishers Inc. New York, 1966.

[2] Arfker, George B., Weber, Hans, J., *Mathematical methods for physicists*, Academic Press (fifth edition), 2001.