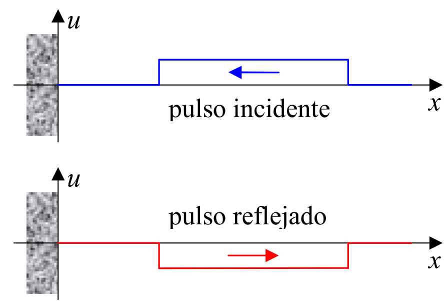
Problema 1: Halle las regiones del plano (x, t) donde la ecuación

$$u_{tt} - x u_{xx} = 0$$

es hiperbólica, parabólica y elíptica. Para la región en que es hiperbólica, grafique las curvas características y reduzca la ecuación a su forma canónica.

Problema 2: Considere una cuerda tensa que se extiende para $x > 0$ y está fija a una pared en $x = 0$, y un pulso rectangular que avanza hacia la pared, como se muestra en la figura. Muestre que el pulso *se refleja* en la pared y luego se aleja de ella, pero con u cambiada por $-u$, es decir, invertido verticalmente (la reflexión *invierte la fase* del pulso). Discuta la forma que adopta la cuerda a lo largo del proceso de reflexión. ¿Qué ocurre si incide una onda sinusoidal infinita?



Ayuda: imponga la CC mediante el método de las imágenes, asimilando el problema al de una cuerda infinita donde dos pulsos antisimétricos respecto al origen avanzan inicialmente uno hacia el otro, de modo que automáticamente $u(0, t)$ se anula para todo t. Lo mismo para la onda.

Problema 3: Una barra sólida delgada de longitud ℓ se encuentra aislada lateralmente, y en contacto térmico perfecto con reservorios a temperatura cero en sus extremos. La barra se halla inicialmente a temperatura también nula, y en el instante $t = 0$ se libera un pulso de calor concentrado en el punto $a \in (0, \ell)$.

a) Escriba el problema en la forma standard EDP+CC+CI.

b) Encuentre la temperatura $u(x, t)$ de la barra para $0 < x < \ell$, $t > 0$.

Problema 4: Una cuerda delgada e inextensible de largo ℓ y densidad lineal ρ constante cuelga del techo bajo la acción de la gravedad. Halle la tensión a lo largo de la cuerda y las CC para pequeñas oscilaciones alrededor de la vertical (suponga que la cuerda oscila en un plano). A continuación plantee la ecuación de ondas correspondiente y halle los modos espaciales y las frecuencias de oscilación.

Problema 5: Halle el estado estacionario $u(\vec{x})$ del problema de difusión del calor

$$\begin{aligned} &u_t - \kappa \nabla^2 u = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < a, \\ &u(0, y) = a - y, \quad u(x, 0) = a - x, \quad u(x, a) = u(a, y) = 0. \end{aligned}$$

Problema 6: Un cilindro infinito de radio a es mantenido a potencial V para $0 < \theta < \pi$ y $-V$ para $-\pi < \theta < 0$, y en su interior hay una densidad de carga eléctrica $\rho = \rho_0(1 - r^2/a^2)\cos(\theta)$, todo expresado en coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Use la invariancia del problema bajo traslaciones en z para reducirlo a uno bidimensional, y halle el potencial eléctrostático $u(r, \theta)$ en el interior del cilindro.

Problema 7: Un tubo cilíndrico recto y tan largo que puede considerarse infinito, de radio interior a y radio exterior b, se halla inicialmente a temperatura nula. En el instante $t = 0$ comienza a circular por su interior un fluido a temperatura $T > 0$, que lo llena instantáneamente (suponga contacto térmico perfecto), mientras su exterior se mantiene siempre a temperatura nula. Encuentre la temperatura del material del tubo como función del tiempo y la posición. ¿Cuál es la distribución estacionaria de temperaturas? ¿Qué pasa si $b \to \infty$?

Problema 8: Obtenga la temperatura $T(\rho, \phi, z)$ del estado estacionario en el interior de un cilindro recto finito de longitud L y radio a, si:

a) El cilindro se mantiene a temperatura $T = 0$ en las superficies $r = a$ y $z = 0$, mientras que en $z = L$ se mantiene a una temperatura $T(r, \phi, L) = T_0 \rho \operatorname{sen}(\phi)$.

b) El cilindro se mantiene a temperatura $T = 0$ en las superficies $z = 0$ y $z = L$, mientras que en $\rho = a$ se mantiene a una temperatura $T = T_0$.

Problema 9: Un cilindro recto sólido semi-infinito de radio a mantiene su superficie curva a temperatura $T = 0$ y su base a una temperatura T_0. Encuentre la distribución de temperatura en el cilindro en el estado estacionario.

Problema 10: Una membrana delgada de densidad de masa superficial ρ se suspende de un aro rígido, plano, circular y horizontal de radio a, quedando con una tensión σ. Si el conjunto se encuentra bajo la acción de un campo gravitatorio uniforme y vertical de intensidad g, encuentre la forma estacionaria que adquiere la membrana.

Problema 11: Una esfera conductora de radio a mantenida a potencial nulo, se introduce en un campo eléctrico previamente uniforme $\vec{E} = E\hat{z}$. Encuentre el potencial electrostático en el exterior de la esfera.

Problema 12: Una delgada cáscara esférica conductora de radio a se halla dividida por su ecuador; la mitad superior se mantiene al potencial V_0, mientras que la inferior se mantiene a $-V_0$. El interior contiene una densidad de carga uniforme ρ. Halle el potencial electrostático $V(r, \theta, \varphi)$ en el interior de la cáscara.

Problema 13: Halle el potencial electrostático en el exterior de una esfera de radio a cuya mitad superior se mantiene a potencial V_0 y su mitad inferior se mantiene a $-V_0$. ¿Cuál es la expresión del potencial para $r \to \infty$? ¿Le parece razonable?

Problema 14: Se construye una antena partiendo una esfera conductora de radio a por su ecuador y aplicando a las dos mitades voltajes alternos y opuestos $\pm V_0 e^{i\omega t}$. Encuentre el potencial electrostático para $r > a$ en el *estado de régimen*, asumiendo la condición de ondas salientes para $r \to \infty$.

Problema 15: Una esfera homogénea de radio a y coeficiente de difusividad térmica α es forzada a mantener su superficie a una temperatura $T_0 + T_1 \cos(\omega t)$. Encuentre la temperatura $T(r, \theta, \varphi, t)$ dentro de la esfera en el *estado de régimen*.