Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Fisica II

Guía N° 1 (2022)

Problema 1: Sea V el conjunto de todas las sucesiones reales infinitas (funciones de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Pruebe que V es un espacio vectorial con las operaciones de suma y multiplicación por números reales:

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots\}$,

b) $\lambda\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n, \ldots\}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.

¿Qué dimensión tiene este espacio vectorial?. Justifique.

Problema 2: Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V. Muestre que las componentes de $\vec{u} \in V$ en la base B están unívocamente determinadas.

Problema 3: Suponga que V admite una base de n vectores. Pruebe que cualquier otra base de V tiene también n vectores y por lo tanto $\dim(V)$ está bien definida.

Problema 4: Muestre el conjunto de todos los polinomios de variable compleja z de grado menor o igual que n constituyen, con la suma usual de polinomios y producto por números complejos, un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre los complejos y halle una base para dicho espacio.

Problema 5: Sea V el conjunto de todos los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & (4/3)x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & (2/3)x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

Encontrar un conjunto finito de vectores que generan V.

Problema 6: Sea V el espacio de todas las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sea V_p el subconjunto de las funciones pares, $f(-x) = f(x)$; sea V_i el subconjunto de las funciones impares, $f(-x) = -f(x)$.

a) Demostrar que V_p y V_i son subespacios de V.

b) Demostrar que $V_p + V_i = V$.

c) Demostrar que $V_p \cap V_i = \{0\}$.

Problema 7: Sea $\{\hat{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$ base de V y $\{\hat{e}^i, \quad i = 1, \ldots, n\}$ su base dual (base de V^*). Si $\vec{u} \in V$, y $\omega \in V^*$, pruebe que las componentes de dichos vector y covector pueden calcularse como: $u^i = \hat{e}^i(\vec{u})$ y $\omega_j = \hat{e}_j(\omega)$.

Problema 8: Sea $\{\hat{e}_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ base de V y $\{\hat{e}^i, \ i = 1, \ldots, n\}$ su base dual. Probar que

a) Los n^2 tensores tipo (1,1), $\hat{e}_i \otimes \hat{e}^j, \ i, j = 1, 2, \ldots, n$, son linealmente independientes.

b) Probar que todo tensor tipo (1,1) puede expandirse como combinación lineal del los tensores del punto anterior y por lo tanto dichos tensores constituyen una base de T_1^1 y $\dim(T_1^1) = n^2$.

Problema 8bis: Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre los reales. Considere los vectores (dados como matrices 3×1, o sea columnas)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Pruebe que los vectores son linealmente independientes y, por lo tanto, constituyen una base.

b) Calcule la co-base correspondiente de V^* expresando los covectores como matrices fila (1×3).

c) Explicite los 9 elementos de la base producto del espacio de tensores T_1^1.

d) Explicite los 9 elementos de la base producto del espacio de tensores T_2^0.

Problema 9: Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$. Considere el espacio vectorial T_2^0 con $\dim(T_2^0) = n^2$. Sean S el subconjunto de tensores tipo (0,2) y A el subconjunto de tensores tipo (0,2) antisimétricos. Muestre que S y A son subespacios complementarios de T_2^0, que $\dim(S) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y $\dim(A) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. De esta forma $T_2^0 = S \otimes A$.

Problema 10: Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y $\{\hat{e}_i,\ i = 1, 2, 3\}$ una base. Sea $\mathbb{T}_0^2$ el espacio tensorial tipo $(2, 0)$ asociado a V. Considere el tensor particular

$$T = 4\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_1 - \hat{e}_1 \otimes \hat{e}_2 + 2\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_3 + 2\hat{e}_2 \otimes \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \otimes \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 \otimes \hat{e}_1 + 3\hat{e}_3 \otimes \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 \otimes \hat{e}_3 \qquad (1)$$

Las partes *simética* y *antisimétrica* de T se definen, respectivamente, como dos tensores S y A en $\mathbb{T}_0^2$ tales que

$$\begin{aligned} S(\hat{e}^i, \hat{e}^j) =& \frac{1}{2}\Big(T(\hat{e}^i, \hat{e}^j) + T(\hat{e}^j, \hat{e}^i)\Big), \qquad \forall\, i, j \\ A(\hat{e}^i, \hat{e}^j) =& \frac{1}{2}\Big(T(\hat{e}^i, \hat{e}^j) - T(\hat{e}^j, \hat{e}^i)\Big), \qquad \forall\, i, j \end{aligned}$$

a) Escriba S y A explícitamente en la base producto (como en (1)).

b) Calcule además $S + A$, >resulta igual a T?, >debería?. Explique.

Problema 11: Dadas las componentes T_{ijk} de un tensor tipo (0,3) demostrar que las

$$S_{ijk} = T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{ikj} + T_{kji} + T_{jik}$$

son componentes de un tensor totalmente simétrico y las

$$A_{ijk} = T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{ikj} - T_{kji} - T_{jik}$$

son componentes de un tensor totalmente antisimétrico.

Problema 12: Demostrar que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores del espacio vectorial V de dimensión $n \geq 3$, las cantidades

$$T_{ijk} = \begin{vmatrix} u_i & u_j & u_k \\ v_i & v_j & v_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix}$$

son componentes de un tensor antisimétrico.

Problema 13: Pruebe el siguiente **Teorema:** Sea V un espacio vectorial con norma $\|\ \|$ (en general complejo), entonces la norma proviene de un producto escalar, es decir $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$, si y solo si satisface la *ley del paralelogramo*:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\Big), \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Ayuda: Para $\Rightarrow$ simplemente haga la cuenta. Para $\Leftarrow$ utilice la *identidad de polarización*, que expresa el producto escalar en términos de la norma,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 + i\|\vec{u}-i\vec{v}\|^2 - i\|\vec{u}+i\vec{v}\|^2 \Big), \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V,$$

y muestre que dicha definición es efectivamente un producto escalar si la norma utilizada en el lado derecho satisface la ley del paralelogramo.

Problema 14: Sea V el espacio vectorial tal que $V = \mathbb{R}^2$ y $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$. Verifique que las siguientes definiciones son normas:

a) $||\vec{u}|| = \max\{|x|, |y|\}$

b) $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $||\vec{u}|| = |x| + |y|$

Indique cuáles de las normas provienen de un producto escalar.

Problema 15: Sea $V = \mathbb{R}^3$ con la norma Euclídea, $||(x\,y\,z)^T|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calcule la expresión de la norma inducida en V^*.

Problema 16: Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n y sea B el espacio de las sucesiones complejas infinitas.

a) ¿son las normas $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |u^j|^2}$ y $\|u\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |u^j|$ equivalentes en V? (pruebe su afirmación o busque un contraejemplo).

b) ¿son las normas $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2}$ y $\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ equivalentes en B? (pruebe su afirmación o busque un contraejemplo).

Problema 17: Sean V y W espacios vectoriales sobre los mismos escalares y sea T una transformación lineal de V en W. Muestre que la imagen de T, $T(V)$, es un subespacio de W y que el núcleo de T, $ker(T)$, es un subespacio de V.

Problema 18: Sea V un espacio vectorial con producto interno complejo de dimensión finita $(\big\langle \vec{u}, \vec{v} \big\rangle \in \mathbb{C}, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V)$ y sea T un operador lineal sobre V. Demostrar que T es autoadjunto si, y solo si, $\big\langle T(\vec{u}), \vec{u} \big\rangle$ es real para todo $\vec{u} \in V$.

Problema 19: Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todos los operadores sobre V, de dimensión finita. Sean $\vec{v} \in V$ y A, $B \in \mathcal{L}$. Muestre que

$$||A|| = \max_{||\vec{v}||=1} ||A\vec{v}||,$$

define una norma. Muestre también que $||A\vec{v}|| \leq ||A||||\vec{v}||$ y que $||AB|| \leq ||A||||B||$

Problema 20: Sean A, B operadores que admiten una representación matricial $n \times n$. Muestre que:

a) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$, con s, t escalares.

b) Si A, B, son operadores que conmutan, i.e. $AB = BA$, entonces, $e^{A+B} = e^A e^B$.

c) $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. *Hint*: $\mathrm{tr}(A) = \hat{e}^i(A\hat{e}_i)$.

d) $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$, con t escalar.

Problema 21: Sea $P : V \to V$ un proyector. Mostrar que todo $\vec{v} \in V$ puede descomponerse como $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, con $P\vec{u} = \vec{u}$ y $P\vec{w} = 0$ y esta descomposición es única.

Problema 22: Encontrar los autovalores y autovercores normalizados de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Problema 23: En una dada base $\{\hat{e}_i\}$ de un espacio vectorial abstracto, una transformación lineal y un vector de dicho espacio, quedan respectivamente determinados por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Encontrar las representaciones matriciales de la transformación y del vector en una nueva base tal que la antigua queda representada por:

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 24: Considere las bases $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ en $\mathbb{R}^3$, en donde

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

a) Halle la matriz de cambio de base de B a B'.

b) Calcule las componentes del vector

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix},$$

en la base B y utilice la matriz de cambio de base obtenida en *a)* para escribir el vector en la base B'.

c) Verifique el resultado obtenido en *b)* calculando directamente las componentes de $\vec{w}$ en B'.

Problema 25: Considere las bases $B = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ y $B' = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ para los polinomios de orden 1, en donde $\mathbf{p}_1 = 6 + 3\,x$, $\mathbf{p}_2 = 10 + 2\,x$, $\mathbf{q}_1 = 2$, $\mathbf{q}_2 = 3 + 2\,x$.

a) Halle la matriz de cambio de base de B a B'.

b) Calcule las componentes de $\mathbf{r} = -4 + x$ en B y aplique la matriz obtenida en *a)* para calcular sus componentes en B'.

c) Verifique el resultado obtenido en *b)* calculando directamente las componentes de $\mathbf{r}$ en B'.

d) Halle la matriz de cambio de base de B' a B.

Problema 26: Sea V el espacio generado por $\mathbf{f}_1 = \sin(x)$ y $\mathbf{f}_2 = \cos(x)$.

a) Demuestre que $\mathbf{g}_1 = 2\sin(x) + \cos(x)$ y $\mathbf{g}_2 = 3\cos(x)$ forman una base para V.

b) Halle la matriz de cambio de base de $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ a $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$.

c) Calcule las componentes de $\mathbf{h} = 2\sin(x) - 5\cos(x)$ en B y aplique la matriz obtenida en *b)* para calcular sus componentes en B'.

d) Verifique el resultado obtenido en *c)* calculando directamente las componentes de $\mathbf{h}$ en B'.

e) Halle la matriz de cambio de base de B' a B.

Problema 27: Encontrar la descomposición de Schur de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dar la matriz triangular final y la matriz cambio de base total.

Problema 28:

a) Busque los autovalores y autovectores de las siguientes matrices e inmediatamente escriba las posibles formas de Jordan.

b) Halle la forma canónica de Jordan de las siguientes matrices realizando el cambio de base. Encuentre las correspondientes bases y los proyectores de los subespacios invariantes irreducibles. Obtenga el desarrollo espectral $A = \sum_{j=1}^{p} (\lambda_j P_j + D_j)$ (*puede ayudarse con un programa matemático*).

$$a)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -10 & 6 & -5 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & -1 & 3 \\ -6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 7 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 8 & -6 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$