Problema 13: La ecuación diferencial de Hermite se escribe

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

y aparece en Mecánica Cuántica al escribir la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico.

a) Muestre que el factor integrante e^{-x^2} reduce el operador diferencial a la forma standard $L = \partial_x(p(x)\partial_x) - q(x)$ y reescriba el problema como uno de Sturm–Liouville

$$Ly + \lambda\rho y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

con CC a especificar en $\pm\infty$. Identifique $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ y λ. ¿Es un PSL regular o singular?

b) Muestre que para n entero positivo o 0, se tienen soluciones polinomiales

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},$$

conocidas como *polinomios de Hermite*. Escriba explícitamente H_0, H_1, H_2 y H_3.

c) La función generatriz para los polinomios de Hermite $H_n(x)$ es

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{h^n}{n!}.$$

Escriba la relación de recurrencia que conecta $H_{n-1}(x)$, $H_n(x)$ y $H_{n+1}(x)$.

d) Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)\, dx.$$

Problema 14: La ecuación diferencial de Laguerre se escribe

$$xy'' + (1-x)y' + ny, \qquad 0 < x < \infty,$$

y aparece en Mecánica Cuántica al separar la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno en coordenadas esféricas.

a) Muestre que el factor integrante e^{-x} reduce el operador diferencial a la forma standard $L = \partial_x(p(x)\partial_x) - q(x)$ y reescriba el problema como uno de Sturm–Liouville

$$Ly + \lambda\rho y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

con CC a especificar en 0 e ∞. Identifique $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ y λ. ¿Es un PSL regular o singular?

b) Muestre que para n entero positivo o 0, se tienen soluciones polinomiales

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

conocidas como *polinomios de Laguerre*. Escriba explícitamente L_0, L_1, L_2 y L_3.