Problema 16: La superficie terrestre está sometida a cambios de temperatura de períodos principalmente diario y anual, que pueden modelarse aproximadamente como variaciones sinusoidales, y éstas se propagan debajo de la superficie. Considere el suelo como un medio semi-infinito $z < 0$ con difusividad térmica D y condición de contorno para la temperatura $T(z = 0, t) = T_0 + A_\mathrm{d}\cos(\omega_\mathrm{d} t) + A_\mathrm{a}\cos(\omega_\mathrm{a} t)$, donde T_0 es la temperatura media, A_d y A_a son las semi-amplitudes térmicas diaria y anual, y ω_d y ω_a las correspondientes frecuencias.

a) Resuelva la ecuación de difusión del calor para $z < 0$ y halle la *solución de régimen*.

b) Se desea construir una bodega en la ciudad de Córdoba, cuya temperatura sea estable a lo largo de todo el año con variación menor a 1°C. ¿A qué profundidad mínima debe construirse? Considere $T_0 = 17$°C, $A_\mathrm{d} = 6{,}5$°C, $A_\mathrm{a} = 6{,}2$°C, y $D = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$. (https://es.wikipedia.org/wiki/Clima_de_la_Ciudad_de_Córdoba_(Argentina)).

Problema 17: Un modelo extremadamente simplificado para la densidad de neutrones $n(r, \theta, \varphi, t)$ en una esfera de radio a de material fisionable, viene dado por

$$\begin{aligned} &\partial_t n - D\nabla^2 n = \kappa n, \quad r < a, \\ &n(a, \theta, \varphi, t) = 0, \end{aligned}$$

donde D es un coeficiente de difusión, κ es la tasa de producción de nuevos neutrones por fisión inducida, y hemos supuesto que los neutrones que llegan a la superficie escapan al exterior y no vuelven. Halle el *radio crítico* a_c de la esfera, por debajo del cual la densidad de neutrones en el interior permanece acotada para $t \to \infty$, pero por encima del cual diverge.

Problema 18: Para pequeños apartamientos de la presión atmosférica P_0 (supuesta constante), la presión del aire puede escribirse $P(\vec{x}, t) = P_0 + p(\vec{x}, t)$, y la *sobrepresión* $p(\vec{x}, t)$ satisface la ecuación de ondas escalares. Un tubo de órgano puede modelarse como un cilindro de radio a y longitud L (típicamente $L \gtrsim 10a$), con su extremo inferior cerrado y el superior abierto a la atmósfera; en las superficies (supuestas rígidas) del tubo las condiciones de contorno para p son homogéneas de Neumann, y en las fronteras libres (abiertas a la atmósfera) son de Dirichlet. Resuelva la ecuación para ondas de presión estacionarias en el interior del cilindro y encuentre la frecuencia del *modo fundamental* del tubo, es decir, el de frecuencia más baja. ¿Qué largo debe tener un tubo cuya fundamental sea el La de 55Hz? Considere la velocidad del sonido 343 m/s. (Para saber cómo suena, entre a https://onlinetonegenerator.com/).

Problema 19: Un timbal (ver p.ej. https://es.wikipedia.org/wiki/Timbal_de_concierto) es un instrumento de percusión consistente en una membrana tensa fijada sobre un aro circular, con una “caja de resonancia” abombada debajo, que se toca percutiendo la membrana con una baqueta o mazo.

a) Halle los modos normales de vibración de la membrana de un timbal.

b) Grafique cualitativamente dónde se ubican las líneas de nodos de los modos de frecuencias más bajas (puede guiarse por https://es.wikipedia.org/wiki/Vibraciones_de_una_membrana_circular).

c) Si el timbalista percute la membrana en el centro ¿qué modos vibran y cuáles no?