Problema 1: Diga cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (y con qué cuerpo), y cuáles no:

a) $\{\mathbb{R}^3\}$, las ternas (x, y, z) de números reales;

b) $\{\mathbb{Q}^3\}$, las ternas (x, y, z) de números racionales;

c) $\{p_N(x)\}$, los polinomios en una variable real x de grado a lo sumo N;

d) $\{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$, las funciones a valores reales definidas sobre el intervalo real $[a, b]$;

e) $\{f : [a, b] \to \mathbb{R}_+\}$, las funciones a valores reales positivos definidas sobre el intervalo real $[a, b]$.

Problema 2: Demuestre que

a) $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{C}^3) = \dim(\mathbb{Z}^3) = 3$;

b) $\dim(\{p_N(x)\}) = N + 1$;

c) $\dim(\{\operatorname{sen}(nx), \cos(nx), x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}\}) = \aleph_0$;

d) $\dim(\{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}) = \aleph_1$;

donde $\aleph_0$ (aleph cero) es la cardinalidad de los enteros (infinito numerable) y $\aleph_1$ (aleph uno) la de los reales (infinito no numerable).

Problema 3: Muestre que

a) en $\mathbb{R}^3$, $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ es base, y $\{\hat{x}, \hat{x} + \hat{y}, \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}\}$ también;

b) en $\{p_N(x)\}$, $\{1, x, x^2, \ldots, x^N\}$ es base.

Problema 4: Halle las componentes de $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$ en la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^N\}$ de $\{p_N(x)\}$.

Problema 5: Muestre que

a) el plano (x, y) y el eje z son subespacios de $\mathbb{R}^3$;

b) $\{p_3(x)\}$ es un subespacio de $\{p_5(x)\}$;

c) $\mathcal{C}^N[\mathbb{R}]$ es un subespacio de $\mathcal{C}^M[\mathbb{R}]$ si $M \leq N$;

d) $\dim(\operatorname{span}(\{\vec{x}_i\}_{i=1}^k)) \leq k$ ($= k$ sii $\{\vec{x}_i\}$ LI).

Problema 6: Dado $\mathcal{A} : V \to V$, muestre que $\ker(\mathcal{A})$ es un subespacio de V invariante bajo $\mathcal{A}$; dado $\mathcal{A} : V \to W$, muestre que $\dim(\ker(\mathcal{A})) \geq \dim(V) - \dim(W)$.

Problema 7: Muestre que $\operatorname{span}(\{e^{ax},\ a \in \mathbb{R}\})$ es un subespacio de $\mathcal{C}^\infty[\mathbb{R}]$ invariante bajo ∂_x.

Problema 8: Halle las componentes de $\mathcal{A} = a\partial_x^2 - b\partial_x + c$ en la base $\{1, x, \ldots, x^5\}$ de $\{p_5(x)\}$; construya $\ker(\mathcal{A})$ algebraicamente, y verifique aplicando $\mathcal{A}$ a sus elementos.

Problema 9:

a) Considere el operador $\mathcal{P}_z$ que proyecta de $\mathbb{R}^3$ al plano xy, como un operador de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Escriba la matriz P_z que lo representa en la base Cartesiana usual, y verifique que no tiene inversa.

b) Considere el operador $\mathcal{R}_{z,\theta}$ en $\mathbb{R}^3$, que rota un ángulo θ en sentido positivo alrededor del eje z. Escriba la matriz $\mathsf{R}_{z,\theta}$ que lo representa en la base Cartesiana usual, y muestre que su inversa es la matriz que representa al operador $\mathcal{R}_{z,-\theta}$.

c) Muestre que $\mathcal{P}_z$ y $\mathcal{R}_{z,\theta}$ conmutan.

Problema 10: Calcule $\exp\left(\begin{smallmatrix} x & a \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$, $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Problema 11: Muestre que $[\mathsf{A},\mathsf{B}] = 0 \implies e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}}e^{\mathsf{B}}$. ¿Qué ocurre si $[\mathsf{A},\mathsf{B}] \neq 0$?

Problema 12: Considere la transformación de semejanza $\mathsf{A}' = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S}$. Muestre que

a) $\det(\mathsf{A}') = \det(\mathsf{A})$;

b) $\mathrm{Tr}(\mathsf{A}') = \mathrm{Tr}(\mathsf{A})$;

c) $f(\mathsf{A}') = \mathsf{S}^{-1}f(\mathsf{A})\mathsf{S}$ $\forall f$ desarrollable en serie de potencias;

d) A Hermitiana $\implies$ A' Hermitiana si S unitaria;

e) A unitaria $\implies$ A' unitaria si S unitaria;

f) A ortogonal $\implies$ A' ortogonal si S ortogonal;

g) $\mathsf{AB} = \mathsf{BA} \implies \mathsf{A}'\mathsf{B}' = \mathsf{B}'\mathsf{A}'$;

h) $\mathsf{B} = \mathsf{A}^{-1} \implies \mathsf{B}' = (\mathsf{A}')^{-1}$.

Problema 13: Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, representados en la base Cartesiana usual por

$$\mathsf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

y sea una nueva base definida por

$$\vec{e}\,'_1 = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_2, \quad \vec{e}\,'_2 = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2.$$

Halle la representación de $\mathcal{A}\vec{v}$ en la vieja base, halle las representaciones v' de $\vec{v}$ y A' de $\mathcal{A}$ en la nueva base, y verifique que $(\mathsf{Av})' = \mathsf{A}'\mathsf{v}'$.

Problema 14: Construya la base dual $\{\overleftarrow{e}'^1, \overleftarrow{e}'^2\}$ de $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ usando $\overleftarrow{e}'^i(\vec{e}\,'_j) = \delta^i{}_j$, y verifique que $\overleftarrow{e}'^j = \left[\boldsymbol{\gamma}^{-1}\right]^j{}_i \overleftarrow{e}^i$, donde $\vec{e}\,'_j = \vec{e}_i\gamma^i{}_j$.

Problema 15: Asumiendo que $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, calcule la métrica en la base $\{\vec{e}\,'_i\}$ dada por

$$\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1\,, \quad \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,, \quad \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,.$$

Calcule la norma de $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ en ambas bases. ¿Coinciden? ¿Porqué?

Problema 16: El conjunto $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$ de las matrices 2×2 con elementos complejos es un EV con $\dim(V) = 4$ (¡demuéstrelo!). Las matrices en V

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se conocen como *matrices de Pauli*. Muestre que

a) $\epsilon_{klm}\boldsymbol{\sigma}_l\boldsymbol{\sigma}_m = 2i\boldsymbol{\sigma}_k$, por lo que puede utilizarse la notación $\vec{\boldsymbol{\sigma}} \times \vec{\boldsymbol{\sigma}} = 2i\vec{\boldsymbol{\sigma}}$, con $\vec{\boldsymbol{\sigma}} = (\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z)$;

b) $\boldsymbol{\sigma}_j^2 = \mathsf{I}\ \forall j$, donde I es la matriz identidad;

c) $\{\mathsf{I}, \boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z\}$ es una base de $\mathbb{C}^{2\times 2}$.