Métodos Matemáticos de la Física II

Omar E. Ortiz

FAMAF, UNC

Córdoba, 2021

Transformada de Fourier

Motivación. Una manera tradicional de introducir la transformada de Fourier es como límite de una serie de Fourier en el que el intervalo acotado de la serie se extiende a todo $\mathbb{R}$. En este proceso, lo que interesa es preservar algunas de las propiedades fundamentales de la serie.

Recordemos que una serie de Fourier $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \, \frac{e^{i\omega_n x}}{\sqrt{L}}$

1. Es un desarrollo (o expansión) de una función de cuadrado integrable en una base ortonormal $\{\hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\omega_n x}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{L}, \; n \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2([a, a+L])$. Esto es

$$g(x) \in L^2 \quad \Leftrightarrow \quad \{g_n = \langle \frac{e^{i\omega_n x}}{\sqrt{L}}, g(x) \rangle\} \in l^2,$$

   La identidad de Parseval garantiza la equivalencia.

2. Las funciones de base tiene la importantísima propiedad de ser autofunciones del operador derivación:

$$\frac{d\hat{e}_n}{dx} = i\omega_n \; \hat{e}_n(x).$$

Propiedades

El primer punto nos dice que podemos considerar a la serie de Fourier como un mapa invertible de $L^2([a, a+L])$ a l^2.

El segundo punto es una propiedad nos permite transformar un problema diferencial en uno algebraico, con la consecuente conveniencia para resolver ecuaciones diferenciales. Además, notemos que si $g \in L^2([a, a+L])$ y además $g' \in L^2([a, a+L])$, entonces, los coeficientes del desarrollo de g' son

$$(g')_n = \langle \hat{e}_n, \frac{dg}{dx} \rangle = -\langle \frac{d\hat{e}_n}{dx}, g \rangle = i\omega_n \ \langle \hat{e}_n, g \rangle = i\omega_n \ g_n.$$

por lo que el desarrollo de $g'(x)$ es la derivada término a término del desarrollo de $g(x)$.

Nota: Leer el ejemplo de la página 163 del libro de Reula.

Queremos considerar ahora funciones en $L^2(\mathbb{R})$ (en vez de un intervalo finito con condiciones de contorno periódicas). Las exponenciales complejas no son funciones en $L^2(\mathbb{R})$, pero no obstante las utilizamos para no perder la segunda propiedad.

De esta manera la transformada de Fourier no será el desarrollo de una función en una base de $L^2(\mathbb{R})$, sino más bien un operador de L^2 en sí mismo con una serie de propiedades interesantes.

Enunciaremos el teorema para $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 10.1; Reula, página 164).

Teorema en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Teorema (Fourier)

Definimos la Transformada de Fourier

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx^1 \dots dx^n,$$

donde $k \cdot x = x^1 k_1 + \cdots + x^n k_n$. *Entonces*

1. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *es un mapa lineal, continuo en invertible que preserva la norma (es unitario):* $\|\hat{f}\|^2 = \|\mathcal{F}(f)\|^2 = \|f\|^2$ *(Identidad de Plancherel).*
2. *Su inversa esta dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x} \hat{f}(k)\, dk_1 \dots dk_n.$$

3. *Si la diferencial primera en sentido distribucional de* f *pertenece también a* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(k) = ik_j \mathcal{F}(k).$$

No daremos la prueba (los interesados pueden ver el texto de Reula). Pero si diremos cuál es la idea detrás de la prueba: En primer lugar se prueban las propiedades para funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego utiliza que C_0^∞ es denso en L^2 y se prueba que el mapa $\mathcal{F}$ es continuo con la norma de L^2 y se extiende el resultado para C_0^∞ a L^2 por continuidad.

Como veremos, el operador transformada de Fourier puede actuar entre otros espacios también que resultan de completar C_0^∞ con otras normas.

Nota: Tener presente que distintos autores suelen introducir la definición de la Transformada de Fourier con distintos factores delante de la intergal:

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \dots, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \dots$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \dots, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} \dots$$

$$\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \dots, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \dots$$

Ejemplo: Lorentziana en dimensión 1

Queremos calcular la transformada de Fourier de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

La ingtegral

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\, dx$$

Puede calcularse fácilmente utilizando residuos. El integrando tiene dos polos de orden 1 en $z = \pm i$.

- Si $k \leq 0$, Podemos cerrar la trayectoria por el semi plano superior y tenemos

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \ \mathrm{Res}\left\{ \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}, z = i \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{k}$$

- Si $k > 0$, Podemos cerrar la trayectoria por el semi plano inferior y tenemos

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \ \mathrm{Res}\left\{ \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}, z = -i \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-k}$$

En ambos casos el resultado es: $\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$. Claramente $\hat{f}(k) \in L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio: Calcular la transformada inversa de $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-|k|}$.

Espacio de Schwarz

Definición (Espacio de Schwarz)

El espacio de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$ que decaen a cero en infinito más rápido que la inversa de cualquier polinomio.

Notemos que

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

La inclusión es estricta. Por ejemplo la gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ya que es infinitamente diferenciable y $|e^{-x^2} p(x)| \to 0$, si $|x| \to \infty$ para todo polinomio $p(x)$. Note además que $f(x) \notin C_0^\infty(\mathbb{R})$.

No vamos a entrar en detalles (demasiado técnicos). Pero para la transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se prueba un teorema totalmente análogo al que enunciamos antes para $L^2(\mathbb{R}^n)$. (Ver *Reula* o *Reed and Simon*).

Recordemos que el espacio dual a C_0^∞ (con una apropiada noción de continuidad) es el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$. Pues bien, el espacio dual a $\mathcal{S}$ es el espacio de las *distribuciones temperadas*: $\mathcal{S}'$. Dada la inclusión (1), puede verse que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Relación de Parseval

Es importante, desde el punto de vista de aplicaciones, la generalización de la transformada de Fourier a distribuciones. Para poder definir la transformada de una distribución apropiadamente recordamos un par de herramientas.

Si una norma proviene de un producto escalar, este puede escribirse en términos de la norma mediante la *identidad de polarización*:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u-iv\|^2 - i\|u+iv\|^2\Big).$$

Por ejemplo, la norma L^2 proviene del producto escalar L^2,

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\ \psi(x)\ dx, \quad (dx = dx^1 \dots dx^n).$$

Entonces, pensando en la identidad de Plancherel para las transformadas de Fourier, y el hecho de que la norma provenga de un producto escalar, podemos probar la *Relación de Parseval* o *Igualdad e Parseval*

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle. \tag{2}$$

Transformada de una distribución

Para motivar la definición de la transformada de Fourier de una distribución, pensamos en distribuciones regulares primero. Si T_φ es una distribución regular, entonces actuando sobre una $\psi(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} T_\varphi(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ \psi(x)\ dx \\ &= \langle \bar{\varphi}, \psi \rangle \\ &= \langle \bar{\hat{\varphi}}, \hat{\psi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k)\ \hat{\psi}(k)\ dk = T_{\hat{\varphi}}(\hat{\psi}). \end{aligned}$$

Entonces, es natural identificar la transformada de Fourier de T_φ con $T_{\hat{\varphi}}$. Haciendo esta identificación extensible a cualquier distribución, definimos

Definición (Transformada de una distribución)

Sea $T \in \mathcal{D}'$ (o $\mathcal{S}'$). La transformada de Fourier $\hat{T}$ de T es tal que

$$\hat{T}(\hat{\varphi}) = T(\varphi) \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}, \ (\text{resp. } \mathcal{S}).$$

Ejemplo

Calculemos, por ejemplo, la transformada de la Delta de Dirac centrada en a, $\delta_a(x) = \delta(x-a)$. Sea $\varphi(x)$ una función de prueba, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}_a(k)\ \hat{\varphi}(k)\ dk = \hat{T}(\hat{\varphi}) = T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\ \varphi(x)\ dx = \varphi(a).$$

Interpretando la integral del miembro izquierdo como la anti transformada de Fourier de $\hat{\varphi}$ evaluada en a, obtenemos

$$\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ika}.$$

Ejercicio: Calcular la transformada de $\delta'(x-a)$.

Convolución

Definición (Convolución)

Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La *convolución de f con g* de define como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy.$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el mapa $g \to f * g$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo es continuo y además

- $\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f} * \hat{g}$
- $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\ \hat{f}\hat{g}$
- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$

Ejercicio: Probar las propiedades anteriores de la convolución.

Para más detalles sobre convolución y transformada de Fourier consultar el libro de Riley, Hobson, Bence (Ver bibliografía).