Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 4 (2022)

Problema 1: Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes distribuciones:

a) La distribución de Heaviside (escalón): $\Theta(x-a)$

b) La derivada de la delta de Dirac: $\delta'(x-a)$

Problema 2: Considere el siguiente problema de Neumann en el intervalo $[0, L]$

$$y'' = \lambda y \ , \ \ y'(0) = y'(L) = 0.$$

a) Sin usar la forma explícita de autovalores y autofunciones muestre via el producto escalar:

$$\langle f, g\rangle := L^{-1}\int_0^L f(x)g(x)dx \ \ ,$$

que los autovalores son negativos y que las autofunciones a distintos autovalores son ortogonales respecto del producto escalar.

b) Determine los autovalores y autofunciones.

Problema 3: Considere la ecuación de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0$.

a) Escriba la ecuación diferencial como un problema de Sturm-Liouville. Identifique el operador diferencial L, autovalores, autofunciones y productos escalares involucrados.

b) Resuelva la ecuación. Muestre que se pueden encontrar dos soluciones en serie de potencias de x, linealmente independientes, una con todas sus potencias pares y otra con todos sus potencias impares y que ambas divergen en $x = \pm 1$ si la serie es infinita.

c) Finalmente, muestre que eligiendo apropiadamente ℓ, una de las dos series puede ser convertida en un polinomio, evitando así la divergencia. Escriba la relación de ortogonalidad de la polinomios de Legendre.

Problema 4: Considere la ecuación de Hermite $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$,

a) Escriba la ecuación diferencial como un problema de Sturm-Liouville. Identifique el operador diferencial L, autovalores, autofunciones y productos escalares involucrados.

b) Resuelva la ecuación. Muestre que se pueden encontrar dos soluciones en serie de potencias de x, linealmente independientes, una con todas sus potencias pares y otra con todos sus potencias impares. Muestre que ambas soluciones son convergentes para todo x, y que el cociente de coeficientes sucesivos se comporta, para índices grandes, como el cociente de los coeficientes de la expansión en serie de la función $\exp(-x^2)$.

c) Muestre que eligiendo apropiadamente el parámetro α, la solución en seire puede ser truncada y conertida en polinomios finitos. Estos polinomios son los polinomios de Hermite. Escriba la relación de ortogonalidad de estos polinomios.

Problema 5: Resuelva, usando el método de las características, los siguientes problemas escalares de primer orden

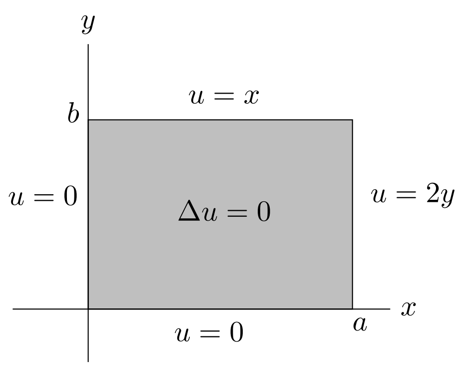
a) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad x > 0, \qquad u(x,0) = g(x).$

b) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(1,y) = 1 + 2y.$

c) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2, \quad u(x,0) = x^3.$

d) $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^u, \qquad u(0,y) = y^2 - 1.$

Problema 6: Resuelva la ecuación de Laplace dentro de un rectángulo de lados a y b con las condiciones de borde dadas.



Problema 7: Resuelva la ecuación de Laplace dentro de una región rectangular $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H$, con las siguientes condiciones de borde:

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \qquad u(L,y) = 2y, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(x,H) = 0$

Problema 8: Resuleva la ecuación $\Delta u = 1$ dentro del rectángulo de lados a y b con la condición $u = 0$ en los cuatro lados.

Problema 9: Resuelva la ecuación de Laplace en el interior de un paralelepípedo definido por los planos $x = 0, x = c, y = 0, y = c, z = 0, z = L$ tal que $\psi = 0$ en todas sus caras excepto en $z = L$ donde $\psi = V_o$.

Problema 10: Considere la región en el plano xy delimitada por $0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty$. Encuentre la solución de la ecuación $\Delta\psi = 0$ en dicha región con las condiciones: $\psi(0,y) = 0, \psi(a,y) = 0, \psi(x,0) = A(1 - \frac{x}{a})$, donde A es una constante.

Problema 11: Encuentre la solución acotada de la ecuación $\Delta u = 0$ en el exterior de un disco de radio a sujeto a las condiciones de borde $u(a,\theta) = \ln 2 + 4\cos(3\theta)$.

Problema 12: Encuentre aquella solución de la ecuación de Laplace en el interior del disco unitario de radio $r = 1$ que tenga valores en la frontera dados por

$$f(1, \phi) = \begin{cases} V_o & 0 < \phi < \pi \\ 0, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

donde V_o es una constante.

Problema 13: Considere dos cilindros coaxiales conductores de longitud infinita de radios a (interior) y b (exterior). El potencial se fija de tal manera que $V(r = a) = V_o$ y $V(r = b) = -V_o$. Sabiendo que el potencial electrostático, en una región libre de cargas, satisface la ecuación de Laplace, calcule el potencial en las regiones:

a) $r < a$

b) $a < r < b$

c) $b < r$

Problema 14: Obtenga la temperatura, T, del estado estacionario (es decir $\Delta T = 0$) en el interior de un tubo cilíndrico recto finito de longitud L y radio a. El tubo se mantiene a temperatura $T = 0$ en las superficies $r = a$ y $z = 0$, mientras que en $z = L$ se mantiene a una temperatura $T(r, \phi, L) = T_o f(r, \phi)$. Aquí, (r, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas naturales. Particularice la solución para $f(r, \phi) = r \sin \phi$.

Problema 15: Un cilindro recto sólido semi-infinito de radio a mantiene su superficie curva a temperatura $T = 0$ y su base a T_o. Encuentre la distribución de temperatura en el cilindro en el estado estacionario.

Problema 16: Considere una esfera metálica de radio unitario, con una condición de frontera:

$$U(1, \theta) = \begin{cases} U_o & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases},$$

donde U_o es una constante. Podemos dar a este problema, las siguientes interpretaciones (entre otras), para las cuales nos interesa conocer su solución:

a) Suponga que la esfera es sólida y la condición de frontera representa una distribución de temperatura. Determine el estado estacionario.

b) Suponga que la esfera es hueca y la condición de frontera representa una distribución de potencial electrostático. Encuentre el valor del potencial dentro y fuera de la esfera.