Omar E. Ortiz

1 Teorema Espectral y Forma Canónica de Jordan

Notación: En esta sección utilizaré el símbolo I para denotar indistintamente el operador identidad y la matriz identidad en cualquier dimensión.

Sea A un operador sobre V, espacio vectorial complejo con $\dim(V) = n$. Denotamos también por A la matriz representante del operador A en cualquier base dada de V. Los autovalores de A son las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Este es un polinomio de grado n, cuyo coeficiente más alto (el coeficiente de λ^n) es $(-1)^n$. Entonces, de acuerdo al Teorema Fundamental del Álgebra, $p(\lambda)$ tiene un factorización

$$p(\lambda) = (-1)^n \ (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ \ldots \ (\lambda - \lambda_p)^{m_p},$$

donde $\lambda_1, \ \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ son distintos, y los números naturales $m_j, \ j = 1, \ldots, p$ son las *multiplicidades algebraicas* de cada autovalor λ_j. Claramente

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n, \qquad p \leq n.$$

Cada autovalor λ_j tiene asociados uno o más autovectores que son las soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$(A - \lambda_j I)\vec{u} = 0. \tag{1}$$

Denotamos estos autovectores por $\vec{u}_{j1}, \vec{u}_{j2}, \ldots$

Antes de enunciar el Teorema Espectral, que explicaremos sin una prueba completa, y de explicar la Forma Canónica de Jordan (versión matricial de dicho teorema), veremos algunas de sus afirmaciones y algunos casos particulares que ilustran el caso general.

El Teorema Espectral asegura que correspondiendo a cada autovalor λ_j de A, existe un subespacio $W_j \subset V$ invariante de A. Cada W_j tiene dimensión $\dim(W_j) = m_j$, y entre todos los W_j llenan V. Mas aún

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_p.$$

Esto significa que existen operadores proyección P_j, $j = 1, \ldots, p$, tales que $W_j = P_j V$, con $P_j P_k = 0$ si $j \neq k$. En una base adaptada a esta descomposición de V en subespacios invariantes, es decir cuando la base de V es la unión de bases de cada W_j, la matriz A toma forma diagonal por bloques. Un bloque de tamaño $m_j \times m_j$ por cada subespacio invariante W_j.

Por ejemplo, si A tiene n autovalores distintos entonces $p = n$ y todos los m_j valen 1. En este caso tenemos también n autovectores linealmente independientes (uno por cada autovalor), que podemos usar como base de V. Cada subespacio invariante W_j tiene dimensión uno y en esta base de autovectores, la matriz representante de A toma forma diagonal (n bloques 1×1 en la diagonal) $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Los W_j son, en este caso, subespacios invariantes irreducibles. En general, un autovalor λ_j con $m_j = 1$ se dice "simple".

En el caso en que p es estrictamente menor que n, una o más multiplicidades algebraicas son estrictamente mayores que uno al igual que las dimensiones de los correspondientes W_j. Un autovalor λ_j cuya multiplicidad algebraica m_j es mayor a uno se llama "degenerado". Para analizar estos casos pensemos nuevamente en la ecuación para los autovectores de λ_j. La ecuación (1) nos dice que los autovectores correspondientes al autovalor λ_j son vectores

$$\vec{u} \in \ker(A - \lambda_j I).$$

La dimensión de $\ker(A - \lambda_j I)$ (cantidad de soluciones linealmente independientes de (1)), llamada *multiplicidad geométrica* de λ_j, es la cantidad de autovectores linealmente independientes que corresponden a λ_j.

Ejercicio 1: Probar que $\ker(A - \lambda_j I)$ es un subespacio de V invariante bajo la acción de A.

Sea r_j la multiplicidad geométrica de λ_j. Claramente $r_j \leq m_j$. Cuando $r_j = m_j$ se dice que el autovalor λ_j es semisimple; en este caso tenemos suficientes autovectores de A como para formar una base de W_j y en esta base el bloque correspondiente de la matriz A toma forma diagonal.

De acuerdo a lo anterior, si todos los autovalores de A son semisimples, A es diagonalizable. En el caso general, para uno o varios bloques puede suceder que $r_j < m_j$, es decir pueden existir autovalores de A que no son semisimples y en este caso A no es diagonalizable.

Teorema 1 *(Teorema Espectral)*
Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $dim(V) = n$, y $A : V \to V$ un operador lineal. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ los autovalores de A (por lo tanto $1 \leq p \leq n$), entonces V admite una descomposición directa en p subespacios

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_p.$$

Además, para cada autovalor λ_j existe un operador proyección P_j y un operador D_j nilpotente que satisfacen

a) $P_j A = A P_j = P_j A P_j = \lambda_j P_j + D_j$,

b) $D_j P_j = P_j D_j = D_j$,

c) $D_j^{m_j} = 0$, *donde m_j es la multiplicidad algebraica de λ_j,*

tales que $W_j = P_j V$ y A puede descomponerse en la forma

$$A = \sum_{j=1}^{p} (\lambda_j P_j + D_j).$$

Nota: La propiedad (c) asegura que D_j es nilpotente de grado m_j, sin perjuicio de que pueda ser nilpotente de grado menor e incluso idénticamente cero (en el caso en que el bloque es diagonalizable).

Damos ahora dos ejemplos simplícimos en representación matricial.

Ejemplo 1: *(Completar las cuentas intermedias)*
Sea V de dimensión 2 y A representado, en alguna base dada (base original), por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Todos los vectores y operadores de este ejemplo serán expresados en la base original o canónica.

Los autovalores de esta matriz son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 3$, ambos con multiplicidad algebraica igual a uno. Estos autovalores, con sus correspondientes autovectores son:

$$\lambda_1 = 6, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{y } \lambda_2 = 3, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

En este ejemplo, tenemos dos autovectores y los dos subespacios invariantes W_1 y W_2 son de dimensión uno.

Como los autovectores no son ortogonales (con el producto escalar Euclideano en la base original), para hallar los proyectores en los subespacios W_1 y W_2 debemos obtener la matriz de cambio de base. A tal fin normalizamos los autovectores y escribimos la matriz que expresa dichos autovectores normalizados como columnas. Esta es:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Claramente esta matriz transforma componentes de vectores (columnas) de la base $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$ (base de los autovectores normalizados de A) a la base original. Por ejemplo, el vector columna $(1 \quad 0)^t$ que expresa al autovector $\hat{u}_1$ en la base de autovectores a la primera columna de Λ que es justamente este mismo autovector escrito en la base original.

La matriz de cambio de base que transforma las componentes de un vector (columna) en la base original a la base $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$ es la inversa de la anterior:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el proyector P_1 al primer subespacio W_1 se puede fabricar con el primer autovector nomalizado (primer columna de Λ) y la primera fila de la matriz Λ^{-1}. O sea:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Analogamente se obtiene

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo, ambos nilpotentes D_1 y D_2 son idénticamente cero (ya que V se descompuso en dos subespacios de dimensión 1). Queda al lector verificar que se satisfacen todas las relaciones (a) a (c) del teorema. Finalmente, es directo verificar que $A = 6P_1 + 3P_2$ como asegura el teorema.

Ejemplo 2: Consideremos ahora otro operador sobre el mismo espacio vectorial del ejemplo anterior, dado por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $p(\lambda) = (5-\lambda)(7-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 12\lambda + 36 = (\lambda - 6)^2$, por lo que esta matriz tiene un solo autovalor $\lambda = 6$ con multiplicidad algebraica 2. Si calculamos los autovectores encontramos que tiene un solo autovector (hacer las cuentas!):

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en este caso hay un solo subespacio invariante $W = V$. El proyector es por lo tanto la identidad. Existe además un operador nilpotente D que satisface $B = \lambda P + D = 6I + D$. O sea

$$D = B - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es directo verificar que $D^2 = 0$, o sea D es nilpotente de grado 1.

En la sección siguiente daremos ejemplos menos triviales de este teorema en la representación matricial.

1.1 Forma canónica de Jordan

Es posible ahondar más en la estructura de los subespacios W_j. Eligiendo una base apropiada, puede verse que cada W_j se subdivide a su vez en r_j espacios invariantes irreducibles, con exactamente un autovector en cada uno de ellos.

$$W_j = W_{j1} \oplus W_{j2} \oplus \cdots \oplus W_{jr_j},$$

Si $r_j < m_j$ uno o más de los W_{js} tendrá dimensión mayor a uno. Supongamos que el W_{js} tiene dimensión mayor a uno, digamos $\dim(W_{js}) = d_{js} > 1$. Entonces, puede probarse que existe una base "cíclica" $\{\vec{u}_{s1}, \vec{u}_{s2}, \ldots, \vec{u}_{sd_{js}}\}$ en dicho subespacio invariante irreducible de manera que

$$\begin{aligned} &(A - \lambda_j I)\vec{u}_{s1} = 0, \\ &(A - \lambda_j I)\vec{u}_{sk} = \vec{u}_{s(k-1)}, \qquad k = 2, \ldots, d_{js}, \end{aligned} \tag{2}$$

El vector $\vec{u}_{s1}$ es autovector de A (el único que corresponde a este bloque irreducible), mientras que suele llamarse a los otros $\vec{u}_{sk},\ k = 2, \ldots, d_{js}$ “autovectores generalizados”.

En esta base cíclica, el bloque correspondiente de la matriz A toma forma de “bloque de Jordan”

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & \ldots & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j I + D,$$

donde D tiene unos en la primer diagonal superior y ceros en todo el resto, y satisface $D^{d_{js}} = 0$, o sea D es nilpotente de grado d_{js}.

Cuando uno construye bases, según el criterio anterior, partiendo de todos los autovectores de A, obtenemos en conjunto la base de Jordan, y en dicha base la matriz A toma la forma que se conoce como forma Canónica de Jordan, que es lo más cercano a una matriz diagonal que se puede obtener para A.

Antes de dar un enunciado en términos puramente matriciales, construiremos las formas de Jordan para los dos ejemplos dados precedentemente *(completar las cuentas faltantes)*

Ejemplo 3: *(Ejemplo 1 revisado)*
Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 3$, por lo que tiene dos autovectores linealmente independientes que constituyen la base de Jordan. En esta base la matriz toma forma diagonal. Haciendo las cuentas obtenemos:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Podríamos normalizar estos vectores, pero a los fines de hallar la forma de

Jordan no es realmente necesario. La matriz de cambio de base es entonces

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz A en la nueva base es (Forma de Jordan de A):

$$J_A = \Lambda^{-1} A \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4: *(Ejemplo 2 revisado)*
Consideremos ahora la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $p(\lambda) = (5-\lambda)(7-\lambda)+1 = \lambda^2 - 12\lambda + 36 = (\lambda-6)^2$, por lo que esta matriz tiene un solo autovalor $\lambda = 6$ con multiplicidad algebraica 2. Si calculamos los autovectores encontramos que tiene un solo autovector (hacer las cuentas!):

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como la multiplicidad geométrica de λ es 1, tendremos un bloque de Jordan 2×2 (matriz no diagonalizable). Para buscar el segundo vector de base resolvemos la relación cíclica:

$$(B - 6I)\vec{u}_{12} = \vec{u}_1,$$

o bien

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo obtenemos una única solución linealmente independiente de $\vec{u}_1$, por ejemplo,

$$\vec{u}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de base es entonces

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y la forma de Jordan de B es, como se espera,

$$J_B = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

El operador nilpotente D que corresponde a este único bloque en la base de Jordan es

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es directo verificar que $D^2 = 0$.

Damos ahora una versión simple del teorema de la forma canónica de Jordan, motivada en la discusión anterior, pero sin prueba.

Teorema 2 (Forma Canónica de Jordan)
Sea A una matrix compleja $n \times n$. Existe una transformación de semejanza $\Lambda^{-1}A\Lambda$ que lleva la matriz A a forma diagonal en bloques, donde cada bloque es un bloque de Jordan. Asociado a cada bloque de Jordan hay exactamente un autovector de A. La nueva base de V, donde la matriz A toma forma de Jordan, está compuesta por todos los autovectores de A (apropiadamente elegidos en caso de corresponder a autovalores degenerados) y completada con autovectores generalizados como se indica en la ecuación (2)*.*

Ilustramos el teorema con un ejemplo.

Ejemplo: Buscaremos la forma de Jordan de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -5 & 22 & -11 & 6 \\ -4 & -1 & -4 & 16 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -8 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 16 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores (si no podemos analíticamente, podemos numéricamente):

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^6 - 14\lambda^5 + 75\lambda^4 - 180\lambda^3 + 135\lambda^2 + 162\lambda - 243$$

Notamos que -1 es raíz de este polinomio. Dividiendo $p(\lambda)$ por $\lambda+1$ obtenemos:

$$\frac{p(\lambda)}{\lambda+1} = \lambda^5 - 15\lambda^4 - 90\lambda^3 - 270\lambda^2 + 405\lambda - 243 = (\lambda-3)^5,$$

Por lo que los autovalores de A son: $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = 3$ con multiplicidad algebraica 5.

Buscamos ahora los autovectores (y multiplicidades geométricas).

a) Para $\lambda = -1$ tenemos:

$$(A+I)\,\vec{u} = 0.$$

Resolviendo este sistema lineal para $\vec{u} = (u^1\ u^2\ u^3\ u^4\ u^5\ u^6)^t$ se obtiene[1]

$$u^1 = u^6, \quad u^2 = u^6, \quad u^3 = 0, \quad u^4 = 0, \quad u^5 = 0, \quad u^6 = u^6,$$

esto es, todas las componentes expresadas en términos de una sola de ellas (u^6 en este caso). Existe entonces un sólo autovector linealmente independiente que puede elegirse como

$$\vec{u}_1 = (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)^t \tag{3}$$

la multiplicidad geométrica de $\lambda = -1$ es 1, coincidente con la multiplicidad algebraica.

b) Para $\lambda = 3$ tenemos:

$$(A-3I)\,\vec{u} = 0.$$

Resolviendo este sistema lineal para $\vec{u} = (u^1\ u^2\ u^3\ u^4\ u^5\ u^6)^t$ se obtiene:

$$u^1 = -u^2 - u^3, \quad u^2 = u^2, \quad u^3 = u^3, \quad u^4 = u^4, \quad u^5 = 2u^4, \quad u^6 = 0,$$

esto es, todas las componentes expresandas en términos de tres de ellas (u^2, u^3, y u^4). Existen por lo tanto tres soluciones linealmente independientes que podemos elegir como:

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[1]El superíndice t indica transposición.

La multiplicidad geométrica de $\lambda = 3$ es 3, estrictamente menor que la algebraica.

Antes de completar la base de Jordan, podemos concluir que la forma de Jordan final para A tendrá un bloque 1×1 correspondiente a $\lambda = -1$, y para $\lambda = 3$ hay dos posibilidades: 2 bloques 1×1 y un bloque 3×3, o un bloque 1×1 y dos bloques 2×2. Cabe aclarar aquí, que la aplicación del Teorema Espectral a este ejemplo, garantiza la existencia del bloque 1×1 correspondiente a $\lambda = -1$ (y correspondiente al subespacio $W_1 \subset V$ de dimensión 1) y un bloque 5×5 correspondiente a $\lambda = 3$ (y correspondiente al subespacio $W_2 \subset V$ de dimensión 5). La forma canónica de Jordan nos dice además, que el subespacio W_2 puede subdividirse a su vez en tres subespacios irreducibles W_{21}, W_{22} y W_{23}.

Para completar la base de Jordan, debemos encontrar dos autovectores generalizados. Cabe recordar aquí que los autovectores correspondientes a un mismo autovalor no estan unívocamente determinados (en este ejemplo $\vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4$), así como no lo está en general la base de Jordan, dado que combinaciones lineales de ellos son también autovectores posibles. Puede ocurrir que para poder encontrar los autovalores generalizados sea necesario utilizar una elección distinta de autovectores a la hecha inicialmente, lo cual se hace evidente al intentar resolver la relación cíclica de los autovectores generalizados. En este ejemplo hemos elegido los autovectores apropiadamente, como veremos a continuación, dado que podemos encontrar los dos autovectores generalizados que necesitamos para completar la nueva base.

a) Intentamos con $\vec{u}_2$, buscamos soluciones de $(A - 3I)\vec{u} = \vec{u}_2$, pero este sistema no tiene soluciones.

b) Intentamos con $\vec{u}_3$, buscamos ahora soluciones de $(A - 3I)\vec{u} = \vec{u}_3$. En este caso si existen soluciones que satisfacen: $u^1 = -u^2 - u^3 - 2$, $u^2 = u^2$, $u^3 = u^3$, $u^4 = u^4$, $u^5 = 2u^4 + 1$ y $u^6 = 0$. Es decir, hay múltiples formas de obtener el vector generalizado.

c) Buscamos soluciones de $(A-3I)\vec{u} = \vec{u}_4$. Nuevamente existen soluciones que satisfacen: $u^1 = -u^2-u^3+1$, $u^2 = u^2$, $u^3 = u^3$, $u^4 = u^4$, $u^5 = 2u^4-1$ y $u^6 = -1$.

Eligiendo uno de los posibles autovectores generalizados para $\vec{u}_3$, esto es: $\vec{u}_{32} = (-2\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)^t$, y uno para el $\vec{u}_4$, esto es: $\vec{u}_{42} = (0\ 0\ 0\ 1\ 2\ \ -1)^t$, tenemos una de las posibles bases de Jordan: $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_{32},\ \vec{u}_4,\ \vec{u}_{42}\}$. La matriz de cambio de base y su inversa son entonces:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

La transformación de semejanza que se realiza con este cambio de base lleva a A a su forma canónica de Jordan:

$$J_A = \Lambda^{-1}\ A\ \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2: En el ejemplo anterior el espacio vectorial de dimensión 6 queda separado en 4 subespacios invariantes irreducibles de acuerdo a la estructura diagonal por bloques que muestra la forma de Jordan. Muestre que los cuatro proyectores correspondientes son:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ P_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{22} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 12 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

Calcule además los nilpotentes D_{22} y D_{23} correspondientes. *Sugerencia:* Si lo desea puede ayudarse con un programa de manipulación simbólica (tal como SymPy, Maple o Mathematica)).

Recordemos que, aplicado a este ejemplo, el Teorema Epectral asegura que el espacio vectorial V de dimensión 6 se descompone en 2 subespacios invariantes, el W_1 de dimensión 1 y el W_2 de dimensión 5 (que en la descomposición de Jordan quedó subdividido a su vez en tres subespacios invariantes irreducibles). El proyector total en W_2 es simplemente:

$$P_2 = P_{21} + P_{22} + P_{23}.$$

Ejercicio 3: : Escriba P_2 y verifique que es un proyector. Verifique además que $P_1 + P_2 = I$, (¿por qué?).