Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 5 (2022)

Problema 1: Resuelva la ecuación de calor $\kappa\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ dentro de una caja delimitada por $0 < x < L$, $0 < y < H$ y $0 < z < W$. En $t = 0$ la distribución de tempratura es $u = 2y\,\mathrm{sen}(x)$. Las condiciones de borde son:

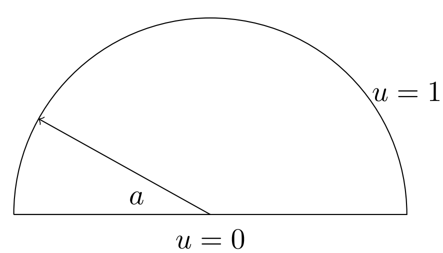
$$u(0, y, z, t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z, t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0, t) = 0$$
$$u(L, y, z, t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, z, t) = 0 \qquad u(x, y, W, t) = 0$$

Problema 2: Resuelva la ecuación de calor $u_t = \Delta u$ dentro del semicírculo de radio a con las condiciones de borde indicadas sabiendo que en $t = 0$ la temperatura es cero. Para ello:

a) Encuentre la solución, w, del estado estacionario.

b) Proponiendo una solución de la forma $u = v + w$, indique la ecuación que satisface v y que condicones de borde e iniciales satisface.

c) Calcule v y escriba, finalmente, las solución del problema.



Problema 3: Resuelva la ecuación de calor $\kappa\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ dentro de un cilindro de radio a y altura H con condiciones de borde $u(r, \theta, 0, t) = 0$, $u(r, \theta, H, t) = 0$ y $u(a, \theta, z, t) = 0$. Inicialmente el cilindro tiene una distribución de temperatua dada por $u(r, \theta, z, 0) = rz$.

Problema 4: Encuentre la distribución de temperatura, $u(r, \theta, \phi, t)$, dentro de una esfera de radio a si $u(a, \theta, \phi, t) = 0$ y $u(r, \theta, \phi, 0) = \mathrm{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0, \pi]$.

Problema 5: Considere una placa metálica semicircular de radio a, es decir $0 < \theta < \pi$ y $0 < r < a$. Resuelva la ecuación de calor $\kappa\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ en el semicírculo, con las condiciones de contorno de Dirichlet: $u(r, 0, t) = 0$, $u(r, \pi, t) = 0$, $u(a, \theta, t) = 0$, y la condición inicial $u(r, \theta, 0) = r\,\mathrm{sen}^2(\theta)$.

Problema 6: Resuelva la ecuación de calor $\kappa\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ dentro de un cuarto de círculo, con las condiciones de contorno: $u(r, 0, t) = 0$, $u(r, \pi/2, t) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, t) = 0$, y la condición inicial $u(r, \theta, 0) = r^2\cos(3\theta)$.

Problema 7: Considere la ecuación de calor unidimensional con un término fuente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x),$$

siendo $0 < x < L$ y $t > 0$, con las condiciones de contorno: $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$ y la condición inicial $u(x,0) = f(x)$. Resuelva dicha ecuación para el caso en que $L = 2$, $f(x) = 2x - x^2$, $Q(x) = 1 - |x - 1|$.

Problema 8: Resuelva la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\, u,$$

siendo $0 < x < 2$ y $t > 0$, con las condiciones de contorno: $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0$, y la condición inicial $u(x,0) = 4x - x^3$. *Ayuda*: Realice el cambio de variable $u = A(x,t)\, v$ y determine la función $A(x,t)$ que lleve a resolver una ecuación de calor para $v(x,t)$ sin ningún término fuente (como $\alpha\, u$).