Problema 1: Considere la matriz $\mathsf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Halle los autovalores y los correspondientes autovectores a derecha e izquierda.

b) Construya la matriz U que tiene a los autovectores a izquierda como filas y la martiz V que tiene a los autovectores a derecha como columnas, y verifique que $\mathsf{UV} = \mathsf{I}$ y que UAV es diagonal.

c) Halle la norma espectral de A.

d) Muestre que A no es normal.

Problema 2: Diagonalice la matriz A, y escriba el vector x en la base en la cual A es diagonal, para

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ i \\ b \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3: Halle la forma de Jordan de la matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Problema 4:

a) Muestre que el operador identidad $\mathcal{I} : V \to V$ corresponde al tensor $I = \delta^i{}_j\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,j}$, y calcule $\mathrm{Tr}(I)$.

b) Muestre que si $S_{ij}\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j}$ es un tensor, S_{ii} *no es* un escalar.

c) Verifique que $T^i{}_j = T^j{}_i$ en cierta base, no implica que $T'^i{}_j = T'^j{}_i$ en otra.

d) Muestre que si un tensor totalmente antisimétrico tiene rango mayor que $\dim(V)$, es idénticamente nulo.

e) Dado un tensor $T = T_{ijk}\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}^{\,k}$, ¿es cierto que $T_{ijk} = T_{\{ijk\}} + T_{[ijk]}$? ¿Porqué?

f) Demuestre que el producto tensorial de dos densidades tensoriales de pesos p_1 y p_2, es otra densidad tensorial de peso $p_1 + p_2$.

g) Muestre que si A_{ij} es antisimétrico y S^{ij} es simétrico, entonces $A_{ij}S^{ij} = 0$. Muestre también que para todo tensor T de rango 2, $T^{ij} = T^{\{ij\}} + T^{[ij]}$ (idem con T_{ij}). Use estos resultados para mostrar que el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{e}_i\, \epsilon_{ijk} u^{[j} v^{k]}$ entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$ puede escribirse

$$\vec{u} \times \vec{v} = \epsilon_{ijk} u^i v^j \vec{e}^{\,k}\,.$$

Problema 5: Muestre que en coordenadas arbitrarias

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{klm} = \delta^i{}_l\delta^j{}_m - \delta^i{}_m\delta^j{}_l\,.$$

Ayuda: muestre primero que en coordenadas Cartesianas ortonormales, donde los índices pueden subirse y bajarse arbitrariamente, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, usando todas las simetrías disponibles para trabajar menos; luego suba los índices que correspondan, transforme a coordenadas arbitrarias y verifique la cancelación de pesos en el lado izquierdo.

Problema 6: Determine el caracter tensorial (rango, tipo y peso) de las siguientes entidades:

a) La densidad de carga eléctrica de un cuerpo extenso, tomando en cuenta que la carga eléctrica total es un escalar.

b) La densidad de masa de un cuerpo extenso, tomando en cuenta que la masa total es un escalar.

c) El momento cuadrupolar eléctrico de un cuerpo puntual, tomando en cuenta que la energía electrostática de un cuadrupolo es un escalar, y que el campo eléctrico es un vector (determine su tipo).

d) El "tensor de inercia" de un cuerpo rígido, tomando en cuenta que la energía cinética de rotación es un escalar, y que la velocidad angular es un *pseudovector* (densidad vectorial).

Problema 7: Considere la superficie S definida por $z = \cos x \cos y$ en coordenadas Cartesianas ortonormales x, y, z en $\mathbb{R}^3$.

a) Parametrice adecuadamente S (puede usar $u^1 = x$ y $u^2 = y$ si quiere).

b) Construya la métrica inducida en S, y calcule los diferenciales de área escalar y orientado.

c) Calcule el área del parche $x, y \in [-\pi, \pi]$, y el flujo de $\vec{E} = E\hat{z}$ a través del mismo.

d) Calcule la longitud de la curva C definida en S por $x = y$, $z = \cos x \cos y$ desde $x = -\pi$ hasta $x = \pi$.

Problema 8:

a) El potencial electrostático de un dipolo $\vec{p} = p\hat{z}$ situado en el origen, expresado en coordenadas esféricas $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$, es

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2},$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío. Calcule el campo eléctirico $\vec{E} = \nabla\varphi$, su rotor $\nabla\times\vec{E}$ y su divergencia $\nabla\cdot\vec{E}$.

b) En coordenadas esféricas, el potencial vector de un dipolo magnético de momento $\vec{m} = m\hat{z}$ ubicado en el origen se escribe

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{1}{r^3}\,\vec{e}_\phi\,,$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. Calcule el campo magnético $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ y su divergencia $\nabla\cdot\vec{B}$.

Problema 9: Dadas las coordenadas esféricas

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

donde x, y, z son las coordenadas Cartesianas ortonormales en $\mathbb{R}^3$,

a) construya la martiz Jacobiana, las bases tangente y dual, la métrica, su inversa y su determinante, los factores de escala, el diferencial de volumen, y los diferenciales de área escalar y orientado para las superficies coordenadas $r = c$, c constante;

b) calcule los elementos de la conexión afín de Levi–Civita y explicite las expresiones para el gradiente de un escalar φ, el rotor de un vector covariante $\vec{u} = u_i \vec{e}^{\,i}$, la divergencia de un vector contravariante $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$ y el Laplaciano de un escalar φ;

c) construya expresiones explícitas para el gradiente, el rotor, la divergencia y el Laplaciano en términos de factores de escala, componentes físicas y versores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$.