Métodos Matemáticos de la Física II FAMAF, UNC

**Omar E. Ortiz**

## 1 Superficies características y problema de Cauchy

En la primera parte de este apunte definiremos algunos conceptos básicos, en el marco de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden que introdujimos en un apunte anterior, especialmente útiles para entender las ecuaciones hiperbólicas. Redefiniremos "superficies características" y estudiaremos su relación con el problema de Cauchy.

Consideremos una ecuación de segundo orden semilineal (es decir lineal de coeficientes variables, pero independientes de la solución, en los términos de derivadas más altas) para una función escalar sobre algún dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ de valores reales

$$a^{ij}(x)\partial_i\partial_j u + F(x, u, \partial u) = 0, \tag{1}$$

donde se sobreentiende sumatoria sobre los índices repetidos.

El *problema de Cauchy* para la ecuación (1) consiste en dar el valor de $u$ sobre una hipersuperficie $S$ (es decir un conjunto suave de dimensión $n-1$ en $D$) y de la derivada primera de $u$ en dirección normal a $S$, y con esos datos obtener la solución de la ecuación.

Como mencionamos anteriormente el problema de Cauchy no es exitoso para ecuaciones elípticas, es decir no implica existencia y unicidad de la solución. Para ecuaciones elípticas debemos dar datos sobre una hipersuperficie cerrada que sea frontera de la región de interés y especificar solamente un dato: por ejemplo el valor de $u$ (problema de Dirichlet), o el valor de la derivada normal de $u$ (problema de Neumann), pero no ambos. Especificar ambos valores sobredetermina el problema y resulta en general en la no existencia de solución.

Vimos además que el problema de Cauchy tampoco es exitoso para ecuaciones parabólicas, donde existe una dirección singular en $D$ (por ejemplo, la dirección del eje temporal en la ecuación del calor) en la que no tenemos derivadas segundas sino primeras. Para estas ecuaciones, como la ecuación del calor, debemos especificar solamente el valor de $u$ sobre una superficie abierta y esto determina unívocamente la solución hacia el futuro.

Para las ecuaciones hiperbólicas el problema de Cauchy enunciado más arriba si es exitoso. Antes de explicar por qué, revisaremos la clasificación de los tipos de ecuaciones (1).

En un punto cualquiera $x \in D$ podemos pensar en el tensor simétrico $a^{ij}(x)$, que define la parte principal de la ecuación, como una forma cuadrática que actúa sobre las componentes de un vector $\vec{V} = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ definido en el punto $x$. Estrictamente usamos la métrica Euclídea $\delta_{ij}$ para contraer $a^{ij}$ con las componentes del vector. La forma cuadrática es $a(V) = a^{ij}(x)\delta_{ik}\delta_{jl}V^jV^l$. Alternativamente podemos pensar esta misma definición sabiendo que la métrica sirve para mapear el tensor tipo (2,0) $a^{ij}$ en un tensor tipo (0,2) $a_{kl} = a^{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}$ y escribir simplemente $a(V) = a_{ij}\ V^i\ V^j$. Una tercera forma de pensar esto (quizá la más usual) es pensar que tenemos un producto escalar (consistente con la métrica) de manera de escribir al tensor con un índice contravariante y uno covariante ($a^i_j = \delta_{jl}a^{il}$), o sea un tensor tipo (1,1) o matriz, y escribir la forma cuadrática como

$$a(\vec{V}) = \langle \vec{V}, a\vec{V} \rangle. \tag{2}$$

Pues bien, las ecuaciones elípticas son aquellas en que la matriz $a$ tiene todos los autovalores no nulos y del mismo signo. En la jerga de las formas cuadráticas eso significa que la forma (2) es o bien definida positiva o bien definida negativa. Si pensamos en la acción de $a$ sólo mirando signos y no magnitudes, todas las direcciones del espacio son "equivalentes" para la ecuación.

Las ecuaciones parabólicas son aquellas en que la forma (2) es singular. Es decir existen direcciones $\vec{V}$ (obviamente dadas por los autovectores de $a$ con autovalor cero) tales que $\langle \vec{U}, a\vec{V} \rangle = 0$ para todo $\vec{U}$.

Las ecuaciones hiperbólicas son aquellas en las cuales la matriz $a$ tiene autovalores positivos y otros negativos pero ninguno cero. La forma cuadrática asociada no es singular, pero tampoco es definida positiva ni negativa. Existen direcciones (señaladas por $\vec{V}$) que anulan la forma cuadrática, es decir $\langle \vec{V}, a\vec{V} \rangle = 0$. Teniendo en cuenta estas observaciones definimos las superficies características para la ecuación (1).

Una hipersuperficie $S \subset D$ suave es una *Superficie Característica* de (1) si en todo punto de $S$, el vector normal $\hat{n}$ de $S$ anula a la forma cuadrática asociada a la ecuación, es decir $\langle \hat{n}, a\hat{n} \rangle = 0$.

Es inmediato de esta definición que las ecuaciones elípticas no tienen superficies características. Las ecuaciones parabólicas tienen superficies características perpendiculares a las direcciones singulares y la ecuaciones hiperbólicas si tienen superficies características, perpendiculares a las direcciones que anulan la forma cuadrática.

### 1.1 Caso 2-dimensional y la posibilidad de tener solución

Para fijar ideas estudiaremos el caso de una ecuación en dos dimensiones. Sean $(x, y)$ coordenadas en $\mathbb{R}^2$. La ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = 0. \tag{3}$$

Sea $\vec{V}$ un vector en el espacio tangente en el punto $(x, y)$, $\vec{V} = V^1 \frac{\partial}{\partial x} + V^2 \frac{\partial}{\partial y}$. La forma cuadrática asociada a (3) es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V^1 & V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} =& a(x,y)(V^1)^2 + 2b(x,y)V^1V^2 \\ &+ c(x,y)(V^2)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

**Ejemplo 1:** La ecuación de Laplace (al igual que la ecuación de Poisson) en coordenadas Cartesianas en $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

tiene asociada la forma cuadrática $(V^1)^2+(V^2)^2$, claramente definida positiva.

**Ejemplo 2:** La ecuación del calor en una dimensión espacial (dos dimensiones en total con coordenadas $(t, x)$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

tiene asociada la forma $-\kappa\ (V^2)^2$, claramente singular.

**Ejemplo 3:** La ecuación de ondas en una dimensión espacial (dos dimensiones en total)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

tiene asociada la forma cuadrática $(V^1)^2 - c^2(V^2)$, que es no singular, pero tiene direcciones que anulan la forma cuadrática. Estas son

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix},$$

ya que

$$(c \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad (c \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Las superficies perpendiculares a estas direcciones son las superficies características de la ecuación; con vectores tangentes

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix},$$

estas superficies, dadas como superficies de nivel, son respectivamente

$$S_1 : x + ct = \text{constante} \qquad \text{y} \qquad S_2 : x - ct = \text{constante}.$$

**Condiciones necesarias para que haya solución.** Supongamos que queremos resolver el problema de Cauchy para la ecuación (3). Sea $S$ una superficie sobre la que daremos los datos de Cauchy. En el caso 2D que estamos considerando, tal superficie es en realidad una curva en $D \subset \mathbb{R}^2$, que se puede parametrizar como $x(s),\ y(s)$ de manera tal que el vector tangente a $S$ es distinto de cero en la región de interés

$$\vec{t} = \frac{dx}{ds}\ \hat{e}_1 + \frac{dy}{ds}\ \hat{e}_2. \tag{5}$$

El vector normal a $S$ es

$$\vec{n} = -\frac{dy}{ds}\ \hat{e}_1 + \frac{dx}{ds}\ \hat{e}_2. \tag{6}$$

Sobre $S$ damos los datos de Cauchy para la ecuación: valores de la función y de su derivada normal,

$$u(x(s), y(s)) = f(s), \qquad n^j \frac{\partial u}{\partial x^j}(x(s), y(s)) = g(s),$$

donde $f(s)$ y $g(s)$ son funciones suficientemente suaves.

Es claro que para que haya solución única al problema de Cauchy, debería ser posible determinar la solución y sus derivadas parciales (de todos los órdenes, si buscásemos una solución analítica, o hasta algún orden si buscamos una solución más general) en algún entorno de $S$ a partir de los datos de Cauchy y de la ecuación diferencial misma. Esto requiere, como mínimo y pensando en un desarrollo de Taylor de la solución centrado en algún punto de $S$, que podamos determinar las derivadas parciales de $u$ sobre la superficie $S$. Cabe aclarar que no pretendemos que existan soluciones analíticas (demasiado limitante en física), pero si que al menos hasta el orden de la ecuación todo sea consistente, es decir, que podamos obtener en forma unívoca todas las derivadas parciales hasta orden 2. Esta situación es la que queremos estudiar ahora, enfatizando que es sólo una condición necesaria para que exista solución única, pero dista mucho de ser un teorema de existencia.

El primer dato de Cauchy, la función $f(s)$, proporciona el valor de la solución sobre $S$. Derivando $f(s)$ obtenemos las derivadas parciales de cualquier orden en la dirección tangente a $S$. Nos interesa por lo pronto la derivada primera, tenemos

$$t^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} = f'(s). \tag{7}$$

La función $g(s)$ nos provee la información para la derivada normal de $u$

$$n^j \frac{\partial u}{\partial x^j} = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds} = g(s). \tag{8}$$

Escritas como un sistema lineal, para las incógnitas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, estas ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dy}{ds} & \frac{dx}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(s) \\ g(s) \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz es el módulo cuadrado del vector tangente, por lo tanto distinto de cero. El sistema tiene solución única

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{dx}{ds}\ f'(s) - \dfrac{dy}{ds}\ g(s)}{\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2} =: f_1(s) \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\dfrac{dy}{ds}\ f'(s) + \dfrac{dx}{ds}\ g(s)}{\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2} =: g_1(s) \tag{10}$$

que deben tomarse como la definición de las funciones $f_1(s)$ y $g_1(s)$. Las derivadas parciales primeras de $u$ están determinadas unívocamente sobre $S$ por los datos de Cauchy.

Para analizar qué sucede con las derivadas segundas derivamos (9) y (10) en la dirección tangente a $S$, o sea, respecto al parámetro $s$. Usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\ \frac{dy}{ds} = f_1'(s), \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\ \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ \frac{dy}{ds} = g_1'(s). \end{aligned} \tag{11}$$

Estas dos ecuaciones, juntamente con la ecuación diferencial (3) deberían determinar las derivadas segundas de la solución en el punto. En conjunto constituyen un sistema lineal[1]

$$\begin{pmatrix} a(x,y) & 2b(x,y) & c(x,y) \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F(\dots) \\ f_1'(s) \\ g_1'(s) \end{pmatrix} \tag{12}$$

donde todas las funciones están evaluadas sobre $S$. La función $F(\dots)$ es parte de la ecuación diferencial, función del punto, del valor de $u$ y de sus derivadas

[1] Estamos suponiendo que la solución es dos veces continuamente diferenciable, para poder usar el teorema de Clairaut.

primeras, por lo que es conocida totalmente sobre $S$ y podemos pensarla como fuente para las derivadas segundas de $u$. Este sistema tendrá solución única, es decir determinará unívocamente las derivadas parciales segundas de $u$ en el punto $(x, y)$, si la matriz de coeficientes tiene determinante distinto de cero, esto es

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 2b(x,y)\ \frac{dx}{ds}\ \frac{dy}{ds} + c(x,y)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \neq 0. \tag{13}$$

Pero esta expresión es justamente la forma cuadrática (4) asociada a la parte principal de la ecuación actuando sobre el vector normal a $S$ (6). La conclusión es clara, la ecuación diferencial (3), juntamente con los datos de Cauchy determinan unívocamente la solución y sus derivadas parciales hasta orden 2 en cada punto de $S$ siempre y cuando $S$ no sea una superficie característica de la ecuación.

Nos interesa en particular la aplicación de estas observaciones a una ecuación hiperbólica. El problema de Cauchy para una ecuación hiperbólica es consistente, es decir tiene chances de tener solución única, si tomamos una superficie inicial $S$, a veces llamada superficie de Cauchy, donde la condición (13) se satisfaga en todos sus puntos ($S$ no debe ser característica en ningún punto, ver Figura 1).

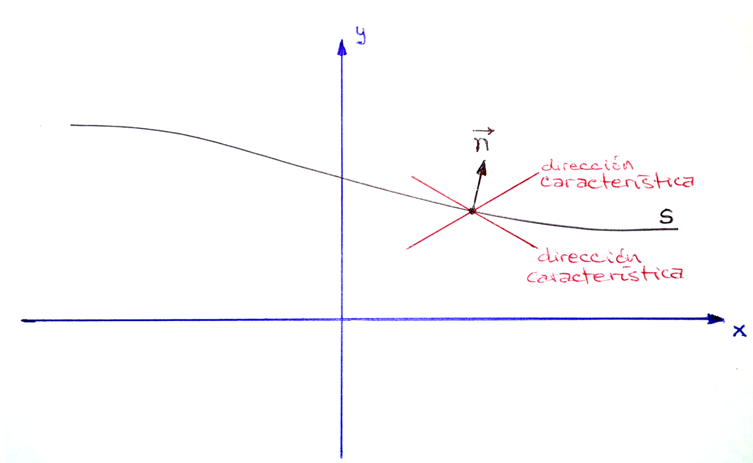


Figura 1: Superficie de Cauchy $S$, dirección normal $\vec{n}$ y direcciones características en un punto.

## 2 La ecuación de ondas en una dimensión espacial

Estudiaremos en esta sección el ejemplo más fundamental de ecuación hiperbólica en una dimensión, la ecuación de ondas. Este ejemplo servirá para introducir algunas propiedades importantes de validez general para ecuaciones hiperbólicas.

La ecuación de ondas en una dimensión espacial, para una función $u(t,x)$ es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi(x,t), \tag{14}$$

donde $c$ es constante y tiene unidades de velocidad y la inhomogeneidad $\psi(x,t)$ es una función dada (que representará, por ejemplo una fuerza). La función solución $u$ puede describir múltiples cantidades de interés en física, tales como el apartamiento de la posición de equilibrio de una cuerda de guitarra. En general, $u$ puede describir apartamientos pequeños de una posición de equilibrio estable para cualquier sistema mecánico clásico unidimensional, puede describir campos electromagnéticos viajeros, cambios de densidad en un fluido, etc.

### 2.1 Problema de Cauchy en $\mathbb{R}$

Distintos problemas para (14) pueden considerarse de acuerdo al dominio espacial de interés. Consideraremos primero el problema en toda la recta real que podemos resolver mediante el método de D'Alembert. Consideremos pues el problema de Cauchy en $D = \mathbb{R} \times [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =& \psi(x,t), \qquad u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ u(x,0) =& f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) =& g(x). \end{aligned} \tag{15}$$

En el ejemplo 3 de la sección 1.1 vimos que la superficies características de esta ecuación son $x + ct =$cte., y $x - ct =$cte., (rectas en $D$). Los datos iniciales, las funciones $f(x)$ y $g(x)$, están dados sobre la superficie de Cauchy $t = 0$.

Conviene resolver el problema (15) en coordenadas adaptadas a estas rectas características. Definimos entonces las coordenadas $(p, q)$ en $D$

$$p = x - ct, \qquad q = x + ct. \tag{16}$$

Es un ejercicio simple probar que en estas coordenadas la ecuación diferencial se escribe

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p} = \psi\Big(\frac{q+p}{2}, \frac{q-p}{2c}\Big) \tag{17}$$

Consideremos primero el caso homogéneo $\psi = 0$. La solución de (17) es, trivialmente,

$$u = U(p) + V(q),$$

donde $U$ y $V$ son funciones arbitrarias de una variable. En términos de las coordenadas originales,

$$u = U(x - ct) + V(x + ct). \tag{18}$$

Antes de utilizar los datos iniciales para determinar $U$ y $V$, notemos una propiedad básica del problema. La solución consiste en dos *ondas* que viajan con velocidad constante $c$ y $-c$ ($U$ hacia las $x$ crecientes y $V$ hacia las $x$ decrecientes). En este caso, como es una ecuación con coeficientes constantes, las ondas viajan sin deformación (lo cual no será así en general si la ecuación tiene coeficientes variables o es cuasilineal). La propiedad básica que observamos en esta solución, que tiene validez general para las ecuaciones hiperbólicas, es la velocidad finita de propagación de las señales. La "información" provista por los datos iniciales no se propaga con velocidad arbitrariamente grande, sino que lo hace con velocidad $c$.

Determinemos ahora las funciones $U$ y $V$ en términos de los datos iniciales. Para esto, notemos que

$$U(x) + V(x) = f(x), \tag{19}$$

$$c\,\big(V'(x) - U'(x)\big) = g(x). \tag{20}$$

Integrando la segunda desde algún punto de referencia arbitrario $x_0$, obtenemos

$$V(x) - U(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds + C.$$

Resolviendo esta expresión juntamente con (19) para $U$ y $V$ obtenemos,

$$V(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds + \frac{C}{2}, \tag{21}$$

$$U(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds - \frac{C}{2}. \tag{22}$$

Por lo tanto, reemplazando estas funciones en (18), la solución única al problema (15) es

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds. \tag{23}$$

Esta solución explícita en términos de los datos de Cauchy se conoce como la *fórmula de D'Alembert*, y nos dice que si $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(R)$, tenemos una solución $u \in C^2(D)$. La ecuación preserva la suavidad de los datos iniciales.

Conviene interpretar gráficamente la fórmula (23). Es claro que la solución del problema en el punto $(x,t)$ depende del dato inicial $f(x)$ en los puntos $(x-ct, 0)$ y $(x+ct, 0)$ sobre la superficie de Cauchy, y del dato $g(x)$ en el segmento que une dichos puntos sobre $S$. La región (de forma triangular en este ejemplo) que definen las superficies características desde el punto en cuestión $(x,t)$ hacia el pasado y el segmento de $S$ comprendido entre ellas se llama *dominio de dependencia* del punto $(x,t)$; ver la Figura 2.

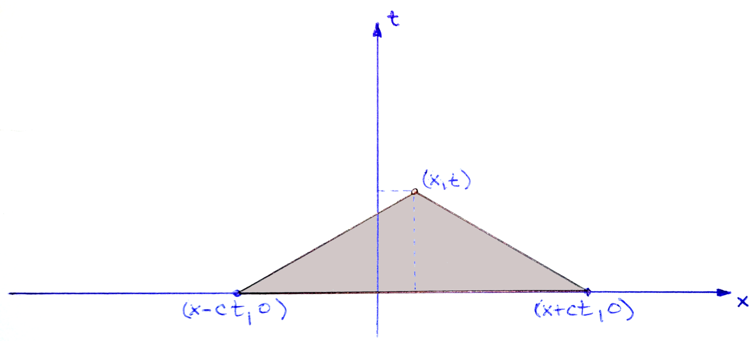


Figura 2: Dominio de dependencia del punto $(x,t)$.

Consideremos ahora el problema inhomogéneo original. A la solución del problema homogéneo, que satisface las condiciones iniciales, ya calculada, debemos sumar la solución del problema inhomogéneo con dato inicial cero. Notablemente esta solución es la integral de la inhomogeneidad sobre exactamente el dominio de dependencia del punto $(x, t)$ (lo cual justifica el nombre del mismo). Más fácil que calcular dicha solución es verificarla

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \psi(s,\tau)\ ds\ d\tau. \tag{24}$$

**Ejercicio 1:** Verificar que (24) satisface el problema (15) con dato inicial cero.

La solución completa del problema (15) es entonces

$$\begin{aligned} u(t,x) =& \frac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\ ds \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \psi(s,\tau)\ ds\ d\tau. \end{aligned} \tag{25}$$

Así como las características hacia el pasado son la frontera del dominio de dependencia del punto $(x, t)$, las mismas características prolongadas hacia el futuro son la frontera del *dominio de influencia* del mismo punto $(x, t)$, ver Figura 3.

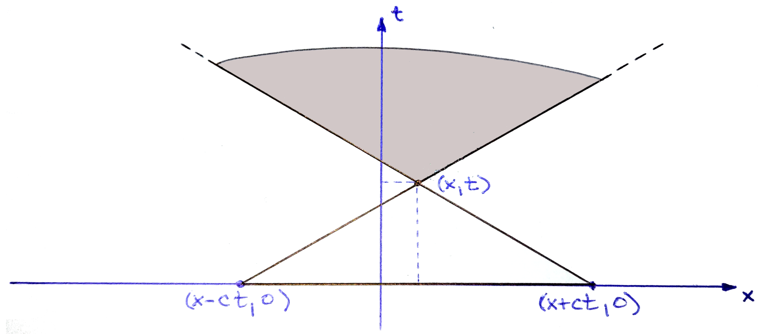


Figura 3: El dominio de influencia del punto $(x, t)$ se prolonga más allá de la zona sombreada.

Otro aspecto de suma importancia para las ecuaciones hiperbólicas se refiere a la energía de la solución. Para el problema (15) esta se define como

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + c^2 \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 \right]\ dx. \tag{26}$$

Notemos que, más allá de las constantes, $E(t)$ no es otra cosa que la suma de los cuadrados de las normas $L^2(\mathbb{R})$ de las derivadas primeras de la solución a tiempo $t$. Si el problema no tiene fuentes (caso homogéneo), la energía se conserva.

**Ejercicio 2:** Probar que si los datos iniciales $f(x)$ y $g(x)$ tienen soporte compacto, o decaen junto con sus derivadas primeras suficientemente rápido a cero cuando $|x| \to \infty$, entonces el problema (15) homogéneo ($\psi = 0$) conserva la energía de la solución. *Sugerencia:* Muestre que la derivada de $E(t)$ respecto al tiempo es cero, y por lo tanto $E(t) = E(0)$ para todo $t > 0$.

En el problema inhomogéneo, la inhomogeneidad inyecta o quita energía del sistema de modo que esta en general no se conservará.

**Ejercicio 3:** Probar que si los datos iniciales $f(x)$ y $g(x)$ tienen soporte compacto, o decaen junto con sus derivadas primeras suficientemente rápido a cero cuando $|x| \to \infty$, el problema inhomogéneo (15) satisface

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \psi(x,t)\ dx.$$

En el caso (15) hemos obtenido una prueba de existencia y unicidad de soluciones mediante la construcción explícita de la solución (fórmula de D'Alembert). Para otras ecuaciones (coeficientes variables, no lineales, etc) tal fórmula explícita no siempre existe y la existencia y unicidad se encara mediante otras herramientas. La energía juega un rol fundamental en este aspecto. Por ejemplo, para el mismo problema (15) es fácil probar unicidad usando la conservación de la energía junto con la linealidad. Si se tienen dos soluciones con iguales datos iniciales, por linealidad la diferencia satisface el mismo problema con datos iniciales cero, y entonces la conservación de la energía nos dice que la norma de la diferencia de las soluciones permanece cero para todo tiempo, y por lo tanto las soluciones son las mismas (en el espacio $H^1(\mathbb{R}) \times L_2([0,\infty))$).

**Comparación con la ecuación del calor** Enfatizamos aquí algunas diferencias importantes entre las ecuaciones hiperbólicas y las parabólicas, que pueden apreciarse comparando la ecuación de ondas con la del calor. La ecuación de ondas presenta una velocidad finita, máxima, de propagación de la información mientras que la ecuación del calor no. La ecuación de ondas mantiene la regularidad de los datos iniciales, la del calor los suaviza completamente, y la ecuación de ondas homogénea preserva la energía mientras que la del calor homogénea disipa rápidamente la energía.

## 2.2 Problema de valores iniciales con condiciones de contorno

Por supuesto la ecuación de ondas puede considerarse también en dominios espaciales acotados o semi acotados. Estos problemas, requieren además de los datos de Cauchy (datos iniciales), datos de contorno, es decir datos sobre las fronteras del intervalo espacial, dado que las mismas son cruzadas por características y por lo tanto por dichas fronteras puede entrar o salir información del dominio de interés.

Hay varias posibilidades a la hora de especificar condiciones de contorno que producen soluciones bien determinadas (con existencia y unicidad en el dominio en cuestión) y que representan diversas situaciones físicas posibles, pero es fácil también dar datos de contorno contradictorios que producen problemas mal condicionados (la solución no existe o no es única).

Veremos un ejemplo básico sobre un dominio acotado; la ecuación de ondas con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, que describe por ejemplo las vibraciones de una cuerda de guitarra. Consideremos pues el problema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u : [0, L] \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\
&u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad \text{(datos iniciales)} \\
&u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0, \qquad \text{(condiciones de contorno)}
\end{aligned} \tag{27}$$

Una vez más, conviene plantear la solución de este problema como un desarrollo en la base ortonormal de las funciones del Laplaciano con las condiciones de contorno dadas. En la sección anterior resolvimos la ecuación del calor usando esta misma base, es decir

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \quad \frac{d^2 v_n}{dx^2} = \lambda_n\, v_n, \quad \lambda_n = -\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2 < 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

siendo la condición de ortonormalidad determinada con el producto escalar

$L^2([0,L])$. Podemos desarrollar ambos datos iniciales en esta base

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x), \qquad a_n = (v_n, f) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) f(x)\ dx.$$

y

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n(x), \qquad b_n = (v_n, g) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) g(x)\ dx,$$

y la solución del problema,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) v_n(x), \tag{28}$$

cuyos coeficientes $c_n(t)$ queremos encontrar.

Insertando (28) en la ecuación y usando la unicidad del desarrollo, encontramos las ecuaciones ordinarias para los coeficientes

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} + c^2 \frac{n\pi}{L} c_n(t) = 0, \tag{29}$$

además, como $u(x,0)$ debe coincidir con $f(x)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ debe coincidir con $g(x)$, los desarrollos para estas funciones nos proveen los datos iniciales para (29),

$$c_n(0) = a_n, \qquad \frac{dc_n}{dt}(0) = b_n.$$

La soluciones son oscilatorias en el tiempo,

$$c_n(t) = a_n \cos\Big(\frac{n\pi c}{L} t\Big) + \frac{L}{n\pi c} b_n \sin\Big(\frac{n\pi c}{L} t\Big), \tag{30}$$

insertando estos coeficientes en (28) tenemos la solución del problema.

**Ejercicio 4:** Defina la Energía para el problema (27) y muestre que esta es constante en el tiempo.

**Ejercicio 5:** Considere el problema para la cuerda de guitarra, igual al anterior salvo por la introducción de una pequeña disipación, representada mediante un término de derivada temporal primera. La ecuación diferencial es entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad 0 < \gamma < \frac{2\pi c}{L}.$$

Resuelva el problema. Muestre que la solución y su energía en este caso decaen con el tiempo. ¿Con qué ley temporal?

## 2.3 Ondas entrantes y salientes a través de una frontera

Por simplicidad en la descripción, nos concentraremos en la ecuación de ondas sin fuentes como en la sección anterior.

Además de condiciones de contorno de Dirichlet, ¿qué otras condiciones podemos dar sobre la frontera del intervalo para obtener un problema correctamente condicionado?

Según vimos en la Sección 2.1, la solución de la ecuación puede pensarse como suma de dos ondas: $u(x,t) = U(x-ct) + V(x+ct)$ (ver (18)). Una de estas ondas propaga información a lo largo de características que apuntan hacia la izquierda (hacia las $x$ decrecientes) y la otra propaga información a lo largo de características que apuntan hacia la derecha (hacia las $x$ crecientes).

Supongamos que nuestro problema tiene una frontera en $x = a$, como en la figura, y que el dominio $D$ donde queremos resolver el problema se ubica a la derecha de dicha frontera.

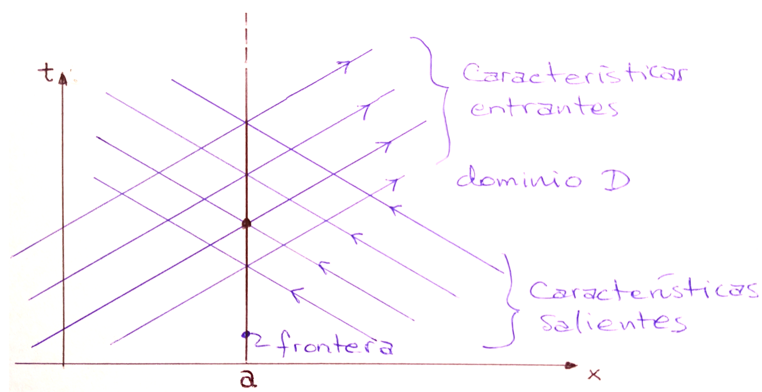


Figura 4: Características entrantes y salientes a través de la frontera $x = a$.

A lo largo de toda la frontera $x = a$ tenemos características *salientes* del dominio $D$ con ecuaciones $x+ct =$ const., y características *entrantes* al dominio $D$ con ecuaciones $x - ct =$ const. Como es intuitivo, y puede probarse rigurosamente, es posible especificar datos para la parte de la solución que entra al dominio, es decir, datos que se propagan a lo largo de las características entrantes (datos para la parte $U$ de la solución), pero no se puede especificar datos que se propaguen a los largo de características salientes del dominio (datos para la parte $V$ de la solución) pues dichos datos podrían entrar en contradicción con la información que viaja desde adentro del dominio y en tal situación, en general, no habría solución.

¿Cómo especificar correctamente datos sobre la frontera?, es decir datos para la parte $U$ y no para $V$ de la solución. Notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = -2cU'(x-ct) \tag{31}$$

por lo que podemos proporcionar los datos sobre esta frontera en la forma

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a} = h_a(t) \tag{32}$$

Entonces, ¿cómo queda la solución en un punto $(x,t) \in D$, como el indicado en la Figura 5?

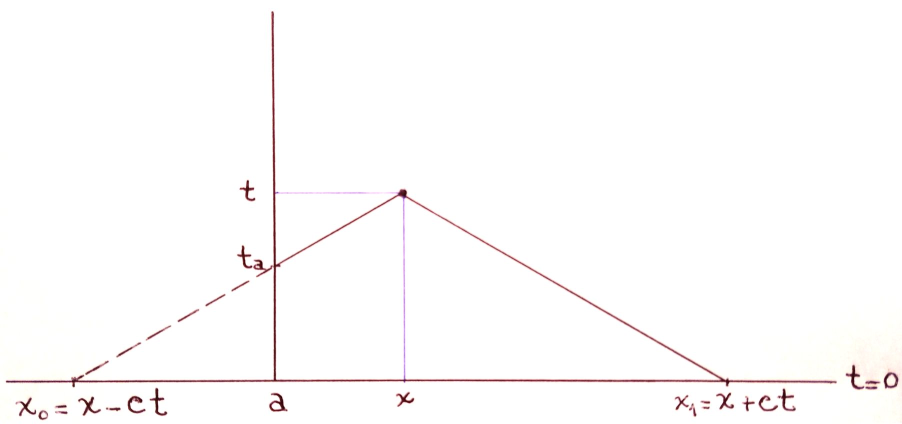


Figura 5: Solución en un punto interior $(x,t)$.

Pues, la información que llega desde la frontera llega desde el punto

$$x = a, \qquad t_a = t - \frac{x-a}{c},$$

y el valor de $U$ en dicho punto es, integrando (32) y usando (31)

$$U(a-ct_a) = -\frac{1}{2c}\int_0^{t_a} U'(a-cs)\,ds = -\frac{1}{2c}\int_0^{t-\frac{x-a}{c}} h_a(s)\,ds.$$

Así, la solución en el punto $(x,t)$ de la figura será de la forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U(x-ct) + V(x+ct), \\ &= U(a-ct_a) + V(x+ct), \\ &= -\frac{1}{2c}\int_0^{t-\frac{x-a}{c}} h_a(s)\,ds + V(x+ct). \end{aligned} \tag{33}$$

Un caso particular e importante es dar dato $h_a(t) = 0$, lo cual significa que no entran ondas (información) por esa frontera al dominio. En este caso, la condición (32) suele llamarse condición de *ondas salientes*, puesto que permite que la información saliente (parte $V$ de la solución) se escape del dominio, y no ingresa ninguna información al dominio a través de la frontera.

Con total analogía, si el dominio $D$ tiene una frontera del lado derecho, en $x = b$, podemos dar datos sobre la parte $V$ de la solución y no sobre la parte $U$ de la solución. Notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 2cV'(x + ct)$$

Por lo tanto, para especificar datos sobre esta frontera debemos dar una función $h_b(t)$ tal que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=b} = h_b(t). \tag{34}$$

Nuevamente la elección $h_b(t) = 0$ es llamada condición de ondas salientes por la frontera derecha.

Existen otras condiciones de contorno o borde posibles para la ecuación de ondas. Genéricamente proporcionan datos para combinaciones lineales de la solución, la parte de ondas entrantes, y la parte de ondas salientes al dominio. Para estudiar cuales de tales combinaciones lineales proporcionan existencia y unicidad de la solución es necesario recurrir a estudios de la *energía* de la solución, cosa que escapa al alcance de este curso. Mencionamos solamente un caso simple y de gran interés en física: las condiciones de borde de *reflexión total* de ondas o *rebote* en la frontera. Esto es, si asignamos a las ondas entrantes en la frontera izquierda $x = a$ exactamente el dato que proviene las ondas salientes en cada punto de la frontera, tendremos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{(a,t)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{(a,t)},$$

lo cual nos dice que la condición de reflexión para nuestra ecuación es la condición de Neumann homogénea,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0. \tag{35}$$

**Ejercicio 6:** Hallar la solución de la ecuación de ondas homogénea en la franja $(x, t) \in D = [0, 1] \times [0, \infty)$, con condiciones iniciales homogéneas, es decir

$$u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,$$

y con condiciones de contorno en la frontera izquierda (ver (32)) dadas por

$$h_0(t)=\begin{cases}1 & 0<t\le 1,\\ 0 & 1<t,\end{cases}$$

y condición de reflexión total sobre la frontera derecha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0$$

*Ayuda:* Determinar la solución en forma gráfica, es decir dividiendo el dominio en regiones convenientemente y pensando como se propagan los datos, no es necesario realizar cálculos analíticamente.

## 3 La ecuación de ondas en más de una dimensión

Las técnicas descriptas para resolver la ecuación de ondas en un dominio unidimensional acotado se generalizan al caso de más dimensiones espaciales. Nos limitaremos en este apunte a dar un ejemplo simple de la ecuación de ondas en un dominio acotado dos dimensional, utilizando las autofunciones del Laplaciano que ya calculamos en ejemplos anteriores.

**Ejemplo 4:** Consideremos un parche de tambor circular de radio $R$. Utilizaremos coordenadas polares $(r,\theta)$ en el plano con centro en el centro geométrico del parche.

La vibraciones del parche (apartamientos de la posición de equilibrio) están descriptas por la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,\theta,t)-c^2\Delta u(r,\theta,t)=0, \tag{36}$$

Con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas (el parche está fijo en el borde): $u(r=R,\theta,t)=0$. Supondremos en este ejemplo que el parche está en reposo para $t<0$ y en $t=0$ recibe un golpe puntual descentrado de manera tal que

$$u(r,\theta,0)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=V_0\;\delta\Big(r-\frac{R}{2}\Big)\delta(\theta). \tag{37}$$

Para resolver este problema utilizaremos la base de autofunciones del laplaciano en este dominio y con las condiciones de contorno dadas, que ya obtuvimos anteriormente, esto es

$$\begin{aligned} u^{(1)}_{m,n}(r,\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}R^2 J_{m+1}(x_{m,n})}\ \sin(m\theta)\ J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big) \\ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}R^2 J_{m+1}(x_{m,n})}\ \cos(m\theta)\ J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big) \end{aligned}$$

con $\Delta u^{(j)} = \lambda_{m,n} u^{(j)}$, donde $\lambda_{m.n} = -(x^2_{m,n}/R^2)$.

Proponiendo entonces una solución desarrollada en esta base, tenemos

$$u(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[b_{m,n}(t)\ u^{(1)}_{m,n}(r,\theta) + c_{m,n}(t)\ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta)\Big]. \tag{38}$$

Ahora bien, esta solución y su derivada temporal primera deben coincidir, respectivamente con los desarrollos de los datos iniciales,

$$\begin{aligned} u(r,\theta,0) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[b_{m,n}(0)\ u^{(1)}_{m,n}(r,\theta) + c_{m,n}(0)\ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta)\Big] = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{db_{m,n}}{dt}(0)\ u^{(1)}_{m,n}(r,\theta) + \frac{dc_{m,n}}{dt}(0)\ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta)\Big] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta), \end{aligned}$$

donde los coeficientes $a_{m,n}$ son (ver el Ejemplo 1 del apunte de EDP parabólicas),

$$a_{m,n} = \Big(u^{(2)}_{m.n}, V_0\ \delta\Big(r-\frac{R}{2}\Big)\delta(\theta)\Big) = \frac{2V_0}{\sqrt{\pi}R J_{m+1}(x_{m.n})} J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{2}\Big),$$

recordando que $x_{m,n}$ denota la $n$-ésima raíz de $J_m(x)$. Estas dos condiciones iniciales nos dicen entonces que

$$b_{m,n}(0) = 0, \quad c_{m,n}(0) = 0, \quad \frac{db_{m,n}}{dt}(0) = 0, \quad \frac{dc_{m,n}}{dt}(0) = a_{m,n}. \tag{39}$$

Ahora, insertando la propuesta de solución en la ecuación diferencial, y usando la unicidad de los desarrollos, obtenemos las ecuaciones ordinarias que deben satisfacer los coeficientes del desarrollo, es decir

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 b_{m,n}}{dt^2} + c^2 \frac{x_{m,n}^2}{R^2}\ b_{m,n}(t) = 0, \\ &\frac{d^2 c_{m,n}}{dt^2} + c^2 \frac{x_{m,n}^2}{R^2}\ c_{m,n}(t) = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Dadas las condiciones iniciales (39), las soluciones de estas ecuaciones son

$$b_{m,n}(t) = 0, \qquad c_{m,n}(t) = \frac{2V_0 J_m(x_{m,n}/2)}{\sqrt{\pi} c J_{m+1}(x_{m.n})}\ \sin\Big(\frac{c x_{m,n}}{R} t\Big).$$

Reemplazando estos coeficientes en (38) obtenemos la solución al problema.

## Referencias


[1] K.F. Riley, M.P. Hobson and S. J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, Third edition (2006).

[2] Guido A. Raggio, *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, revisadas, corregidas y aumentadas en 2017.*

[3] Oscar A. Reula, *Métodos Matemáticos de la Física*, Editorial de la Universidad Nacional de Córdoba, (2009).

[4] Enrique Zuazua, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad Autónoma de Madrid.
(`https://www.google.com/search?client=firefox-b-e&q=Zuaza%2C+ecuacioens+en+derivadas+parciales`).