Métodos Matemáticos de la Física II

Omar E. Ortiz

FAMAF, UNC

29 de marzo de 2022

El Operador Adjunto

Repasar los conceptos: Producto escalar y normas en un espacio vectorial; procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt; operadores acotados y no acotados.

Producto escalar: Cuando en un espacio vectorial esta provisto de un producto escalar su estructura geométrica es más rica y haciendo uso del producto escalar pueden simplificarse notablemente muchos cálculos.

Sea V un espacio vectorial complejo con producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$. Recordemos que asociado a este producto escalar tenemos la norma $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$.

Ortogonalidad: $\vec{u},\vec{v} \in V$ se dicen ortogonales si $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$.

Dada una base de base cualquiera de V siempre podemos ortonormalizarla con el procedimiento de Gram-Schmidt, entonces siempre existe una base ortonormal para V.

Sea $\{\hat{e}_i\}$ una base ortonormal de V. Es decir,

$$\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Nota: Un producto escalar puede verse como un mapa antilineal $\varphi : V \to V^*$, pues dado $\vec{v} \in V$, $\varphi(\vec{v}, \ ) = \langle \vec{v}, \ \rangle$ es un mapa lineal de V en $\mathbb{C}$.

En particular cada vector $\hat{e}_i$ de la base ortonormal es mapeado al correspondiente covector $\hat{e}^i$ de la cobase, en símbolos: $\varphi(\hat{e}_i, \ ) = \langle \hat{e}_i, \ \rangle = \hat{e}^i$.

Ejercicio: Convénzase que esto es así, y muestre además que si la base en V no es ortonormal la última afirmación es falsa.

Componentes: Sea $\vec{v} \in V$. Las componentes de $\vec{v}$ en una base ortonormal son muy simples de calcular, ya que si $\vec{v} \in V$, entonces $v^i = \hat{e}^i(\vec{v}) = \langle \hat{e}_i, \vec{v} \rangle$.

En lo que sigue explicitaremos las sumatorias.

Identidad de Parseval: si $\vec{u}, \vec{v} \in V$ están expresados en la base ortonormal,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i,j} \langle u^i \hat{e}_i, v^j \hat{e}_j \rangle = \sum_{i,j} \bar{u}^i v^j \, \langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \sum_i \bar{u}^i v^i.$$

En particular, para la norma de un vector se tiene la *Identidad de Parseval:*

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_i |u^i|^2.$$

Lo dicho hasta ahora vale para cualquier dimensión de V (finita o infinita).

Sea ahora $A : V \to V$ un operador lineal ($A \in \mathcal{L}$). En lo que sigue necesitaremos que A sea un operador acotado, es decir que tenga norma finita. Como vimos hace algunas clases, esto es siempre cierto si V tiene dimensión finita. Por simplicidad, supondremos de ahora en más que $\dim(V) = n$ (dimensión finita).

Definición: Un operador $B \in \mathcal{L}$ que satisface

$$\langle B(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, A(\vec{v}) \rangle, \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Se llama operador *Adjunto* de A.

Puede verse que el operador adjunto siempre existe. Para ver esto es conveniente pensar en las componentes de estos operadores, o lo que es lo mismo, en su representación matricial.

Sea $\{\hat{e}_i\}$ una base ortonormal de V. Las componentes de un operador A en dicha base son

$$A^i_j = \hat{e}^i(A(\hat{e}_j)) = \langle \hat{e}_i, A(\hat{e}_j) \rangle.$$

Las componentes del operador adjunto en la base ortonormal serán

$$\begin{aligned} B^i_j &= \langle \hat{e}_i, B(\hat{e}_j) \rangle \\ &= \overline{\langle B(\hat{e}_j), \hat{e}_i \rangle} \\ &= \overline{\langle \hat{e}_j, A(\hat{e}_i) \rangle} = \overline{A^j_i}. \end{aligned}$$

En la última línea aparecen las componentes de A conjugadas y con los índices de filas y columnas intercambiados. Es decir, la matriz del operador B (adjunto de A) es la matriz del operador A transpuesta y conjugada.

Nota: En dimensión finita esto basta como prueba de que el operador adjunto existe. En dimensión infinita, sin embargo, pudiera haber problemas de convergencia (pues estamos pensando los operadores através de su representación matricial) y por eso se necesita que A sea acotado.

Notación: Denotamos con A^* al operador adjunto de A.

Ejercicio: Mostrar que $A^{**} = A$ y que si $a \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathcal{L}$, entonces $(aA + B)^* = \bar{a}A^* + B^*$,

Notemos que: $(AB)^* = B^*A^*$ pues, para todo $\vec{u},\ \vec{v} \in V$,

$$\begin{aligned}
\langle (AB)^*(\vec{u}), \vec{v} \rangle &= \langle \vec{u}, (AB)(\vec{v}) \rangle \\
&= \langle \vec{u}, A(B(\vec{v})) \rangle \\
&= \langle A^*(\vec{u}), B(\vec{v}) \rangle \\
&= \langle B^*(A^*(\vec{u})), \vec{v} \rangle \\
&= \langle (B^*A^*)(\vec{u}), \vec{v} \rangle.
\end{aligned}$$

Algunas definiciones

Por simplicidad en la notación omitiremos en lo que sigue los paréntesis de evaluación $A(\vec{v}) = A\vec{v}$. Utilizando el concepto de operador adjunto definimos.

Definiciones: Sea $A \in \mathcal{L}$.

- A es "autoadjunto" si $A^* = A$.
- A es "Unitario" si $A^{-1} = A^*$.
- A es "Normal", si conmuta con su adjunto, es decir si $A^*A = AA^*$.

Todos estos tipos de operadores son muy importantes por sus propiedades. Lo primero que podemos notar es que los operadores autoadjuntos y los operadores unitarios son casos particulares de operadores normales.

Ejercicio: Probar la afirmación anterior.

Teorema principal

Todos estos operadores tienen su contrapartida matricial, para lo cual basta pensar que el espacio vectorial es $\mathbb{C}^n$ y el producto escalar es el Euclídeo.

Teorema: $A \in \mathcal{L}$ es normal si y solo si tiene un conjunto completo de autovectores ortonormales.

No vamos demostrar este teorema. Aclaremos que "conjunto completo" significa que hay tantos autovectores como la dimensión del espacio vectorial. Una versión matricial del teorema sería: A es una matriz cuadrada que conmuta con su transpuesta conjugada si y solo si existe una matriz de cambio de base unitaria P ($P^{-1} = P^*$ y cuyas columnas son los autovectores ortonormales de A) que lleva a A a forma diagonal.

Aunque el teorema anterior vale para operadores autoadjuntos y para operadores unitarios, es instructivo probar algunas propiedades de los mismos sin apelar a él.

Operadores Autoadjuntos

La primer propiedad de los operadores autoadjuntos es que todos sus autovalores son reales.

Veamos, si λ es autovalor de A y $\vec{v}$ es un autovector correspondiente, tenemos $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Entonces, usando el producto escalar

$$\langle \vec{v}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda \|\vec{v}\|^2 \tag{1}$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, A^*\vec{v} \rangle &= \langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \overline{\langle \vec{v}, A\vec{v} \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \|\vec{v}\|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, si A es autoadjunto los miembros izquierdos de (1) y (2) son iguales y por lo tanto los derechos también. Así $\lambda \|\vec{v}\|^2 = \bar{\lambda} \|\vec{v}\|^2$ y λ es real, pues $\|\vec{v}\| \neq 0$.

Ejemplo: En Mecánica Cuántica que las cantidades medibles (llamadas "observables") están representadas por operadores autoadjuntos justamente por que los posibles valores de una medición son los autovalores del observable, que son cantidades reales.

Supondremos de ahora en más que todos los autovectores de A están normalizados.

Otra propiedad importante de un operador autoadjunto es que autovectores que corresponden a autovalores distintos son ortogonales. Para ver esto, sean λ_1 y λ_2 autovalores de A con autovectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ respectivamente. Tenemos:

$$\langle \vec{u}_2, A\vec{u}_1 \rangle = \langle A\vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle \qquad (A \text{ autoadjunto})$$
$$\lambda_1 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = \lambda_2 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle \qquad (\lambda_2 \text{ real})$$

Asi, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ implica $\langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = 0$.

Notemos que si $\vec{u}_{i1}, \ldots, \vec{u}_{is}$ son autovectores del mismo autovalor λ_i, la anterior igualdad no implica nada. Sin embargo como el subespacio generado por estos autovectores es invariante de A, podemos elegirlos ortonormales (ortonormalizando con Gram Schmidt por ejemplo). En definitiva todos los autovectores de A son, o pueden elegirse como un conjunto ortonormal.

Si bien estamos trabajando en general con espacios complejos. Es de particular relevancia en física el caso de matrices reales simétricas (y por lo tanto autoadjuntas). Pensemos que $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial y A es real simétrica, entonces sus autovalores son reales y tiene un conjunto completo de autovectores reales ortonormales. La matriz de cambio de base P unitaria es entonces real (tales matrices se llaman "ortogonales") y la transformación de semejanza: P^tAP lleva A a su forma diagonal.

Operadores Unitarios

La propiedad fundamental de los operadores unitarios es que preservan el producto escalar. Es decir, si U es unitario

$$\langle U\vec{u}, U\vec{v}\rangle = \langle U^* U\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle, \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Consecuentemente: $\|U\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

Claramente si U es unitario, U^* también lo es y por el teorema principal, si U es unitario existe siempre una base ortonormal de autovectores de U.

En la versión matricial, si U es una matriz unitaria, existe otra matriz unitaria P tal que P^*UP es diagonal.

Ejemplo: En mecánica cuántica, la evolución temporal de un estado es llevada a cabo mediante un operador unitario.