Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 2 (2022)

Problema 1: Sean $\vec{F}$, $\vec{G}$ campos vectoriales $\mathbb{R}^3$ y ϕ, ψ funciones en el espacio $\mathbb{R}^3$. Utilizando las definiciones de los operadores en coordenadas cartesianas, demuestre las siguientes identidades vectoriales:

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

b) $\nabla \times (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \times \vec{F} + \phi(\nabla \times \vec{F})$

c) $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$

d) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

e) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$

f) $\nabla \cdot (\phi\vec{F}) = (\nabla\phi) \cdot \vec{F} + \phi(\nabla \cdot \vec{F})$

g) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

h) $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F}$

i) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

Problema 2: Considere las coordenadas esféricas definidas como

$$x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta), \quad z = \rho\cos(\phi),$$

donde $\rho \in [0, \infty), \phi \in [0, \pi]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

a) Muestre que son coordenadas curvilíneas ortogonales.

b) Describa las superficies coordenadas.

c) Calcule los factores de escala.

d) Calcule las correspondientes fórmulas de gradiente, rotor y divergencia.

Problema 3: Repita el problema anterior para las coordenadas esferoidales proladas definidas como

$$x = a\,\mathrm{senh}(\mu)\,\mathrm{sen}(\nu)\cos(\phi), \quad y = a\,\mathrm{senh}(\mu)\,\mathrm{sen}(\nu)\,\mathrm{sen}(\phi), \quad z = a\cosh(\mu)\cos(\nu),$$

donde $\mu \in [0, \infty), \nu \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Problema 4: Verfique que las identidades a) y b) del Problema 1 se satisfacen, también, en coordenadas esféricas.