Omar E. Ortiz

1 Clasificación de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

Es interesante que existen diversas clasificaciones para las ecuaciones en derivadas parciales. El universo de las EDP y sus problemas asociados puede dividirse en categorías de acuerdo a criterios de linealidad vs. no linealidad, en función de la dependencia temporal o no de las soluciones, etc.

Quizá la forma más general, y más moderna, de hacer tal clasificación es al estilo de la que propone Reula en su libro[1], que consiste en escribir la ecuación o sistema de ecuaciones como una ecuación de primer orden para una tupla de campos; generalizar el concepto de características a tal ecuación y en función de esas características definir las categorías o tipos de ecuaciones.

Con la intención de simplificar la clasificación, describiremos aquí una clasificación simplificada (clásica) que hará énfasis en las ecuaciones escalares, reales, cuasilineales de segundo orden, de crucial importancia en física. Por supuesto esta clasificación está contenida en (es consistente con) la más general.

Una ecuación en derivadas parciales *cuasilineal de segundo orden* para una función $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$a^{ij}(x,u,\partial u)\partial_i\partial_j u + f(x,u,\partial u) = 0, \tag{1}$$

donde se sobreentiende sumatoria sobre los índices repetidos $(i,j = 1,2,\ldots,n)$; denotamos con ∂_i la derivada parcial respecto de x^i, $x = (x^1,\ldots,x^n)$, ∂u denota genéricamente las derivadas parciales primeras de u y la función f, de valores reales, puede ser no lineal en sus argumentos. Los coeficientes a^{ij} de los términos de segundo orden de la ecuación son las componentes de un tensor real, simétrico tipo (2,0) sobre $\mathbb{R}^n$. A los fines de la clasificación vamos a pensar en a^{ij} simplemente como una matriz $n \times n$ simétrica (la matriz de coeficientes en la base coordenada $\{\partial/\partial x^j\}$ de $\mathbb{R}^n$).

El primer término en (1), que contiene todas las derivadas de orden mayor de la ecuación, se llama *parte principal* de la ecuación. Como a^{ij} es real y simétrica, sus autovalores son reales y en este caso, no sólo dependen del punto en $\mathbb{R}^n$, sino también de la solución u. La clasificación que introduciremos depende de los autovalores de a^{ij} y por lo tanto, será función del punto y la solución.

Definición. Diremos que la ecuación (1) es

- *Elíptica* en $(x, u, \partial u)$, si todos los autovalores de a^{ij} son no nulos y tienen el mismo signo.
- *Hiperbólica* en $(x, u, \partial u)$, si a^{ij} tiene autovalores positivos y autovalores negativos, pero no nulos.
- *Parabólica* en $(x, u, \partial u)$, si a_{ij} tiene uno o mas autovalores nulos y el resto del mismo signo.

Nota. El caso más frecuente de ecuación hiperbólica en física es aquel donde exactamente uno de los autovalores de a_{ij} tiene signo opuesto a los demás, y el caso más frecuente de ecuación parabólica es aquel donde exactamente uno de los autovalores es cero.

Si a_{ij} es una función diferenciable de sus argumentos entonces la teoría de perturbaciones (de operadores o matrices en dimensión finita) garantiza que los autovalores de a_{ij} son funciones continuas del punto $(x, u, \partial u)$ (ver [2]), y por lo tanto, aquellos que son no nulos, no cambiarán de signo en un entorno de punto en cuestión. Esto garantiza que si una ecuación es elíptica o hiperbólica en un punto, lo es en un entorno abierto del mismo. En particular, si la solución u de nuestra ecuación es continuamente diferenciable, entonces los autovalores de a^{ij} serán funciones continuas de x, y el tipo elíptico o hiperbólico de la ecuación, para dicha solución, no cambiará en un entorno del punto $x \in \mathbb{R}^n$. Las ecuaciones lineales con coeficientes constantes tienen a^{ij} constante; no cambian nunca de tipo.

La ecuación (1) se dice *semi lineal* cuando a^{ij} es función de x, pero independiente de la solución. Como a^{ij} es real y simétrica, es diagonalizable con un cambio de base coordenada. Si la ecuación es elíptica o hiperbólica en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, existe una transformación de coordenadas en un entorno de x que lleva la parte principal de la ecuación a forma diagonal.

2 Ecuaciones elípticas

Siendo más específicos de lo que fuimos antes, se llama *Problema de Cauchy*, para la ecuación (1), al problema que especifica datos iniciales en una hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$ de manera tal que la solución del problema exista y sea única en un entorno de la hipersuperficie inicial. El problema de Cauchy resulta exitoso (es decir, dar datos en una hipersuperficie inicial y obtener existencia y unicidad), por ejemplo, para las ecuaciones escalares de primer orden y para las ecuaciones hiperbólicas. No resulta sin embargo exitoso para las ecuaciones elípticas.

Una ecuación elíptica es una ecuación que no describe situaciones físicas con evolución temporal. Por ejemplo, es elíptica la ecuación que describe las deformaciones de un parche de tambor en situación estática al aplicarle una fuerza constante (las vibraciones de un parche de tambor (situación dinámica) son descriptas por una ecuación hiperbólica). Desde el punto de vista físico, es claro que para un parche de tambor el problema está bien planteado si se especifica que el borde del parche (frontera de la región del plano que ocupa el parche) está fija. Es decir, necesitamos especificar la solución (y en otras situaciones similares, alguna derivada de la solución) sobre la frontera de la región de interés.

Las condiciones que especifican la solución o algunas de sus derivadas sobre la frontera de la región donde interesa determinar la misma se llaman en general *condiciones de contorno*. Este es el tipo de condiciones que se necesita especificar para que una ecuación elíptica tenga solución. A continuación especificaremos algunas de estas condiciones con precisión.

Para simplificar el tratamiento tomaremos como modelo de ecuaciones elípticas a las ecuaciones de Laplace y Poisson en $\mathbb{R}^n$. Los resultados enunciados serán aplicables a ecuaciones elípticas muy generales como especificaremos más adelante.

Consideremos la Ecuación de Poisson para $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\Delta u = f, \tag{2}$$

donde $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ es el operador de Laplace y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función dada. También es de interés en física el problema *semi lineal,* donde f depende de la solución u, pero por ahora pensaremos en el caso lineal.

Supongamos que $D \subset \mathbb{R}^n$ es una región acotada tal que su frontera ∂D es suave y sea la $f : D \to \mathbb{R}$ una función dada. El *Problema de Dirichlet* para (2) consiste en, dados los valores de la solución en el borde $u|_{\partial D} = \phi_0$, hallar la solución u.

La suavidad necesaria para f y ϕ_0 serán explicitadas más adelante.

Otro problema de interés en física es como el anterior pero reemplazando la condición de contorno por una condición mixta, es decir, especificando en el borde ∂D una relación lineal entre el valor de u y su derivada normal a la frontera, esto es $(ku + \hat{n} \cdot \nabla u)|_{\partial D} = 0$, donde $\hat{n}$ es el vector normal unitario a la frontera ∂D.

Finalmente es también de interés en física el *Problema de Neumann* para (2), análogo al anterior, pero especificando en el borde los valores de la derivada normal de u, esto es $\hat{n} \cdot \nabla u = \phi_1$ con $\phi_1 : \partial D \to \mathbb{R}$ una función dada. Es inmediato ver que la solución al problema de Neumann está definida a menos de una constante aditiva, es decir la solución u no está unívocamente determinada, pues solo estamos imponiendo condiciones sobre derivadas de u (tanto la ecuación como las condiciones de borde). De hecho, si sumamos una constante arbitraria a una dada solución obtenemos otra solución para exactamente el mismo problema de Neumann[1]. Por otro lado, es importante notar que la función ϕ_1 no puede darse de manera totalmente arbitraria, pues su valor medio está relacionado con la inhomogeneidad. Para ver esto notemos que

$$\int_{\partial D} \phi_1 \, dS = \int_{\partial D} \nabla u \cdot \hat{n} \, dS = \int_D \Delta u \, dV = \int_D f \, dV,$$

donde usamos el Teorema de Gauss. Debemos por lo tanto restringir las ϕ_1 a aquellas que satisfacen

$$\int_{\partial D} \phi_1 \, dS = \int_D f \, dV. \tag{3}$$

Pueden probarse teoremas de existencia y unicidad para los tres problemas recién enunciados para la ecuación (2). Respecto a la regularidad de la solución es intuitivo pensar que, suponiendo que las funciones dato de contorno ϕ_0 o ϕ_1 tienen la regularidad necesaria, dada una inhomogeneidad

[1]Una constante es solución al problema con $f = 0$ y $\phi_1 = 0$.

f obtendremos una solución u con un grado de diferenciabilidad dos veces mayor (la ecuación deriva dos veces la solución para resultar en la función f).

Un teorema de existencia, unicidad y regularidad básico es sin duda el correspondiente al problema de Dirichlet con fuente infinitamente diferenciable, que damos a continuación sin demostración.

Teorema 1 *Si $f \in C^\infty(D)$ y $\phi_0 \in C^\infty(\partial D)$, entonces existe una única solución u para el problema de Dirichlet de* (2) *y además $u \in C^\infty(D)$.*

Claramente, si $f = 0$ (ecuación de Laplace), la única solución del problema de Dirichlet homogéneo ($\phi_0 = 0$) es $u = 0$.

Ilustramos ahora este teorema con un ejemplo sencillo en 3 dimensiones.

Ejemplo 1: Resolvamos el problema de Dirichlet homogéneo cuando el dominio D es la región esférica de radio R centrada en el origen

$$\Delta u = -a_0 r^2, \qquad u(r = R) = 0.$$

O sea $f(r, \theta, \phi) = -a_0 r^2$ y la condición de contorno de Dirichlet es homogénea ($\phi_0 = 0$). Ambas, f y ϕ_0 son funciones C^∞ (pasar f a coordenadas Cartesianas para verificarlo). Entonces, según el teorema anterior, existe una única solución $u \in C^\infty(D)$ (también esfericamente simétrica). Escribiendo la ecuación en coordenadas esféricas tenemos

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2 \partial_r u\big) = -a_0 r^2,$$

Integrando obtenemos

$$u(r) = -\frac{a_0}{20} r^4 - \frac{C}{r} + B,$$

donde C y B son constantes de integración. La regularidad de la solución ($u \in C^\infty(D)$) implica que $C = 0$, y la condición de contorno de Dirichlet homogénea nos dice que $B = \frac{a_0 R^4}{20}$. Por lo tanto, la solución única y suave del problema es

$$u = \frac{a_0}{20}\big(R^4 - r^4\big), \qquad r \leq R,$$

que es esfericamente simétrica. Esta solución se puede escribir en Coordenadas Cartesianas donde se verifica que es C^∞.

Para enunciar teoremas de existencia, unicidad y regularidad más generales (por ejemplo cuando las funciones involucradas no son infinitamente diferenciables) deberíamos desarrollar una teoría básica de espacios de Sobolev sobre dominios compactos $H^m(D)$, que generalizan los definidos en el Ejemplo 10 del apunte sobre espacios de Hilbert. No tenemos oportunidad en este curso de desarrollar esta teoría (el lector interesado puede recurrir al libro de Reula [1]). Diremos simplemente que tales espacios $H^p(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, pueden definirse para cualquier índice p real, no solamente entero, e incluso para índices negativos (por ejemplo donde pertenecen funciones generalizadas como la delta de Dirac). Por supuesto cuando p es un entero no negativo, la definición de estos espacios nos dice que la función y todas sus derivadas parciales hasta orden p son funciones de cuadrado integrable. Resultados importantes de dicha teoría son los llamados teoremas de embedding (de Sobolev y otros autores), que establecen una relación de inclusión entre distintos espacios funcionales. Como ejemplo, mencionamos la inclusión $H^p(D) \subset C^m(D)$ válida cuando $p > m + n/2$. Es decir en dimensión $n = 3$, por ejemplo, las funciones en $H^2(D)$ (o sea funciones con derivadas segundas de cuadrado integrable) son funciones continuas pues pertenecen a $C^0(D)$.

Damos en la sección siguiente una formulación del problema de Poisson más general que la del teorema 1 importante en aplicaciones en física.

2.1 Problema débil de Dirichlet para la ecuación (2)

Es de interés en muchas situaciones en física poder resolver un problema de contorno como, por ejemplo, la ecuación diferencial (2) con condiciones de contorno apropiadas y donde la fuente no es una función continua, pudiendo ser incluso una función generalizada como la delta de Dirac. En tales situaciones la función solución puede no ser dos veces diferenciable y por lo tanto la ecuación diferencial, tal como está escrita, no tiene el significado clásico al que estamos acostumbrados. En estos casos se recurre a la *formulación débil* del problema en cuestión, que es una formulación matemática precisa de tales situaciones. En esta sección daremos simplemente un ejemplo importante de tal formulación: el problema débil para la ecuación (2) con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas.

Consideremos el problema de Dirichlet antes enunciado para un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ con frontera ∂D suave a trozos y con condiciones de contorno homogéneas $\phi_0 = 0$. En este dominio tenemos definidas las funciones de prueba infinitamente diferenciables y de soporte compacto en D, $\varphi(x) \in C_0^\infty(D)$. Supongamos que u es una solución suave de nuestro problema. Multiplicando (2) por $\bar{\varphi}$ e integrando en D, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_D \bar{\varphi} f \; dV &= \int_D \bar{\varphi} \Delta u \; dV \\
&= \int_D \nabla \cdot \big(\bar{\varphi} \nabla u \big) \; dv - \int_D \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla u \; dV \\
&= \int_{\partial D} \bar{\varphi} \nabla u \cdot \hat{n} \; dS - \int_D \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla u \; dV,
\end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de Gauss en la tercera línea. Ahora, como φ es cero en la frontera (al igual que todas sus derivadas), la identidad anterior se reduce a

$$\int_D \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla u \; dV = - \int_D \bar{\varphi} f \; dV. \tag{4}$$

Notemos ahora que el lado derecho de la ecuación integral (4) es finito bajo condiciones bastante generales para f. Por ejemplo, si $f \in L_1(D)$ es decir si es de módulo integrable, si $f \in L_2(D)$, o incluso si f es una función generalizada que define una distribución (como la delta de Dirac). En base a esto podemos olvidarnos del problema de contorno para la ecuación clásica (2) y buscar directamente que una solución u, que se anule en la frontera ∂D, perteneciente a un espacio funcional (de Hilbert, pues es muy deseable en la teoría poseer un producto escalar en el espacio solución) que sea solución de la ecuación (4). En nuestro ejemplo, el espacio funcional apropiado es el $H_0^1(D)$ (es decir el espacio de Sobolev, de funciones con módulo al cuadrado integrable y derivadas primeras con módulo al cuadrado integrable, que se hacen cero en la frontera). La ecuación (4) con soluciones en $H_0^1(D)$ es precisamente la *formulación débil* del problema de Dirichlet homogéneo para la ecuación de Poisson. Una función $u \in H_0^1(D)$ es una solución de este problema débil, si satisface (4) para toda $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Notemos que no es necesario siquiera que la diferencial primera de u sea continua. Análogamente pueden definirse soluciones débiles para los otros problemas.

Ilustramos este problema débil con un ejemplo muy similar al anterior, pero donde la fuente no es continua.

Ejemplo 2: Resolvamos ahora el problema

$$\Delta u = -\frac{a_0}{r}, \qquad u(r=R) = 0.$$

Las derivadas de f no existen en el origen (de hecho la función no es siquiera continua allí), sin embargo es de módulo integrable (y de módulo cuadrado integrable),

$$\|f\|_{L_1(D)} = \int d\Omega \int_0^R r^2 \frac{|a_0|}{r}\ dr = 4\pi|a_0|\frac{R^2}{2} < \infty,$$

por lo que debe existir una solución en sentido débil. Para $r > 0$ las funciones son suaves y tenemos, dada la simetría esférica de todo el problema,

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\big(r^2\partial_r u\big) = -\frac{a_0}{r}.$$

Integrando una vez

$$r^2\partial_r u = -\frac{a_0}{2}r^2 + C. \tag{5}$$

Para que se satisfaga la ecuación débil la constante de integración C debe ser cero como mostramos a continuación. La ecuación (4) es

$$\int d\Omega \int_0^R r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r} dr = -\int d\Omega \int_0^R r^2\ \bar{\varphi}\ \Big(-\frac{a_0}{r}\Big) dr$$

o sea, usando (5),

$$\int d\Omega \int_0^R \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r}\Big(-\frac{a_0}{2}r^2 + C\Big)\ dr = \int d\Omega \int_0^R \bar{\varphi}\ a_0 r\ dr$$

Integrando en r en el miembro izquierdo

$$\int d\Omega\Big[\Big(-\frac{a_0}{2}\ r^2\ \bar{\varphi}\Big)\Big|_0^R + \int_0^R \bar{\varphi}\ a_0 r\ dr\Big] + C\int d\Omega\big[\bar{\varphi}(R) - \bar{\varphi}(0)\big] = \int d\Omega \int_0^R \bar{\varphi}\ a_0 r\ dr.$$

El término de borde en el miembro izquierdo se anula pues $\varphi(R) = 0$; la integral sin resolver de ambos lados se cancela, y usando nuevamente $\varphi(R) = 0$, lo único que sobrevive de la ecuación es $-4\pi C\bar{\varphi}(0) = 0$. Como la ecuación débil vale para toda función de prueba φ resulta $C = 0$.

Entonces, integrando una vez más la (5), tenemos

$$u = -\frac{a_0}{2}r + B.$$

La condición de contorno $u(R) = 0$ determina la constante de integración $B = a_0 R/2$ y la solución única del problema débil es

$$u = \frac{a_0}{2}(R - r).$$

Esa solución es claramente más regular que f; es continua, pero no es diferenciable en el origen.

2.2 Teorema espectral para el Laplaciano

Daremos a continuación, sin prueba, un teorema espectral para el operador de Laplace. Este resultado es fundamental para disponer una base en un espacio funcional de Hilbert donde expandir las soluciones de muchas EDP, no sólo elípticas.

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. El problema de autovalores para el Laplaciano consiste en encontrar autovalores λ y sus correspondientes autofunciones u, con condiciones de contorno dadas para u sobre ∂D. Consideremos por ejemplo el problema de autovalores con condiciones de Dirichlet homogéneas sobre ∂D, esto es

$$\Delta u = \lambda u, \qquad u|_{\partial D} = 0.$$

Es fácil ver que Δ es autoadjunto en el espacio $H_0^1(D)$, es decir, funciones con derivada primera de cuadrado integrable y soporte compacto en D. Haremos el cálculo en tres dimensiones para usar el teorema de la divergencia estándar de Cálculo, aunque tal teorema tiene su versión en $\mathbb{R}^n$ también y el resultado vale en $\mathbb{R}^n$). Sean $u, v \in H_0^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$, suave a trozos u acotado. Entonces

$$\begin{aligned}
(u, \Delta v) &= \int_D \bar{u}\Delta v \; dV \\
&= \int_D \nabla \cdot \big(\bar{u}\nabla v\big) \; dV - \int_D \nabla\bar{u} \cdot \nabla v \; dV \\
&= \int_{\partial D} \bar{u}\nabla v \cdot \hat{n} \; dS - \int_D \nabla\bar{u} \cdot \nabla v \; dV, \\
&= -\int_D \nabla\bar{u} \cdot \nabla v \; dV = -(\nabla u, \nabla v).
\end{aligned}$$

Donde usamos el Teorema de Gauss en la tercer línea y las condiciones de contorno en la última. El producto escalar de los gradientes es finito, pues ambas funciones tienen derivada primera de cuadrado integrable. Notemos ahora que comenzando con $(\Delta u, v)$ en la primera línea llegamos exactamente al mismo resultado, pues $(\Delta u, v) = \overline{(v, \Delta u)} = -\overline{(\nabla v, \nabla u)} = -(\nabla u, \nabla v)$. De manera que hemos probado

$$(u, \Delta v) = (\Delta u, v),$$

y el Laplaciano es autoadjunto como operador sobre $H_0^1(D)$ con condiciones de Dirichlet homogéneas. Exactamente el mismo cálculo es válido si las condiciones de contorno son de Neumann homogéneas, es decir cuando $\nabla u \cdot \hat{n} = 0$ sobre ∂D.

Como el Laplaciano es autoadjunto ya sabemos que sus autovalores son reales y sus autovectores (autofunciones) pueden siempre elegirse ortogonales.[2] Más aún, es directo ver que los autovalores son no positivos. Usando el cálculo anterior, si u es un autovector en $H_0^1(D)$ con autovalor λ,

$$\lambda \|u\|^2 = (u, \lambda u) = (u, \Delta u) = -\|\nabla u\|^2 \leq 0.$$

Podemos además notar que si las condiciones de contorno para u son de Dirichlet homogéneas los autovalores de Δ son estrictamente negativos (convénzase de que esto es así), mientras que si las condiciones de borde son de Neumann homogéneas, el autovalor cero está permitido.

Es cierto además que las autofunciones u pueden siempre elegirse de valores reales, es decir $u : D \to \mathbb{R}$, pues si encontramos una autofunción compleja con autovalor λ, su compleja conjugada también será autofunción con idéntico autovalor. Entonces mediante combinaciones lineales vemos que la parte real de u y la parte imaginaria son autofunciones reales con autovalor λ.

Finalmente damos el enunciado del teorema espectral para el Laplaciano en $H_0^1(D)$, sin demostración. Una vez más, los lectores interesados pueden acudir al libro de Reula[1]

Teorema 2 (Espectral para el Laplaciano) *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ acotado, entonces el Laplaciano, como operador sobre $H_0^1(D)$ tiene un conjunto numerable de autovalores reales, cuyas autofunciones constituyen una base ortonormal de $H_0^1(D)$.*

[2]Son ortogonales cuando pertenecen a autovalores distintos, si pertenecen al mismo autovalor pueden ortonormalizarse.

Ejemplo 3: Sea D la región rectangular $[0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$. Si consideramos condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas sobre D, el Laplaciano $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ tiene autofunciones

$$u_{k,l}(x,y) = \frac{4}{ab} \sin\big(\frac{k\pi}{a}x\big) \sin\big(\frac{l\pi}{b}y\big), \qquad k,l = 1,2,3,\dots$$

con autovalores

$$\lambda_{k,l} = -\Big(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\Big)\pi^2.$$

La expansión de una función $f(x,y)$ sobre D es simplemente la expansión de f en serie de Fourier con extensión impar en x e y

$$f(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{k,l}\ u_{k,l}(x,y),$$

con

$$c_{k,l} = (u_{k,l}, f) = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b \sin\big(\frac{k\pi}{a}x\big) \sin\big(\frac{l\pi}{b}y\big)\ f(x,y)\ dy.$$

Ejercicio 1: Verificar las autofunciones, autovalores y fórmula del producto escalar dados anteriormente.

2.3 Ecuación de Poisson

Supongamos que queremos resolver la ecuación de Poisson, sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, esto es, dada $f : D \to \mathbb{R}$, buscamos ϕ tal que

$$\Delta\phi = f, \qquad \text{con} \quad \phi = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial D.$$

Supongamos que conocemos las autofunciones u_n y sus correspondientes autovalores λ_n, entonces, podemos expandir f en dicha base y expresar la solución u también como una expansión en dicha base. Es decir,

$$f = \sum_n c_n\ u_n, \qquad \text{y} \qquad \phi = \sum_n a_n\ u_n.$$

Pero

$$\Delta\phi = \sum_n a_n\ \lambda_n\ u_n = \sum_n c_n\ u_n.$$

Estas dos expansiones en la misma base ortonormal serán iguales si todos sus coeficientes son iguales, por lo tanto $a_n \, \lambda_n = c_n$ para todo n y la solución buscada es

$$\phi = \sum_n \frac{c_n}{\lambda_n} \, u_n.$$

Cabe por supuesto la pregunta, ¿Cómo hacemos para encontrar las autofunciones del Laplaciano?. Pues bien, en algunos sistemas de coordenadas en particular, y cuando D es razonablemente "simple", podemos usar por ejemplo separación de variables para encontrar las autofunciones y autovalores.

En situación general, el dominio D puede ser muy complicado o puede que tengamos nuestro problema expresado en coordenadas que no admiten separación de variables. Sabemos que la base ortonormal de autofunciones del Laplaciano existe, aunque no sepamos calcular explícitamente las autofunciones. En tal caso podemos siempre recurrir al cálculo numérico para calcular las autofunciones (si bien no todas, las necesarias para alcanzar la precisión deseada). Si nuestro problema es encontrar la solución a un problema de Poisson, podemos calcular directamente la solución del problema sin pasar por las autofunciones. Un buen método numérico para este tipo de problemas, particularmente en dominios complicados, es el método de *Elementos Finitos*.

2.4 Separación de variables para el Laplaciano

La *Separación de variables* es un método que propone resolver un problema diferencial en varias dimensiones mediante soluciones que sean superposición de productos de funciones de una variable; una para cada coordenada del problema. Lo ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo 4: Supongamos que deseamos conocer las deformaciones de un parche de tambor circular de radio R que tiene aplicada una fuerza constante f. Los apartamientos $u(x, y)$ respecto de la situación de equilibrio ($u = 0$, cuando no hay fuerzas aplicadas sobre el parche) satisfacen en problema

$$\Delta u = f, \qquad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial D.$$

donde el dominio es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Claramente conviene plantear este problema en coordenadas polares en el plano (r, θ). Nuestro verdadero trabajo consiste en resolver el problema de autovalores y autovectores para el Laplaciano. Luego, resolvemos el problema del parche con el esquema del Ejemplo 4.

Autovalores y autofunciones. Buscamos las autofunciones del Laplaciano con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas. El Laplaciano de u es

$$\Delta u(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Planteando separación de variables $u = X(r)Y(\theta)$ en la ecuación de autovalores-autofunciones tenemos

$$Y\frac{1}{r}\big(rX'\big)' + X\frac{1}{r^2}Y'' = \lambda XY,$$

donde las derivadas se convirtieron en ordinarias y las denotamos con una prima. Multiplicando por r^2 y dividiendo por XY tenemos

$$\frac{r}{X}\big(rX'\big)' + \frac{Y''}{Y} = \lambda\ r^2, \tag{6}$$

pero cada término del lado izquierdo depende de una sola coordenada. Variando por ejemplo el valor de θ sólo el segundo término del miembro izquierdo puede variar. Para mantener la igualdad entonces cada término del miembro izquierdo debe ser constante separadamente. Para θ, dada la periodicidad del problema, tenemos

$$Y'' = \text{const.}Y$$

cuyas soluciones, con periodicidad 2π, son $Y(\theta) = \{\sin(m\theta), \cos(m\theta),\ m = 0, 1, 2, \dots\}$. Insertando cualquiera de estas soluciones en la ecuación (6) y multiplicando por X/r tenemos

$$\big(rX'\big)' - \frac{m^2}{r}X = \lambda\ r\ X. \tag{7}$$

Este es claramente un problema de Sturm-Liouville (con $p(r) = -r$, $q(r) = -m^2/r$ y $\rho(r) = r$), donde las condiciones de contorno para X están dadas por $X(r = R) = 0$ (condición de Dirichlet homogénea en el borde de D). El origen ($r = 0$) es frontera para el problema de Sturm-Liouville, pero corresponde a un punto interior del dominio físico. En principio, lo único que queremos pedir allí es que la solución no diverja, si es que buscamos soluciones clásicas (regulares) en D, que sería lo natural para un parche de tambor. Al resolver este problema de Sturm-Liouville obtendremos una secuencia discreta de funciones X juntamente con la secuencia de autovalores λ.

Multiplicando (7) por r y usando que $\lambda < 0$, escribimos $\lambda = -\alpha^2$ y la ecuación queda

$$r^2 X'' + rX' + \big(\alpha^2 r^2 - m^2\big)X = 0,$$

finalmente, haciendo un cambio de variable $s = \alpha r$, obtenemos la ecuación

$$s^2 \frac{d^2X}{ds^2} + s\frac{dX}{ds} + \big(s^2 - m^2\big)X = 0,$$

que reconocemos como la ecuación de Bessel. Las soluciones de esta ecuación, obtenidas por ejemplo como series mediante el método de Frobenius, que son no divergentes en el origen son las funciones de Bessel $J_m(s)$, tenemos entonces $X = J_m(\alpha r)$. Cada J tiene infinitas raíces que podemos numerar con n,

$$J_m(x_{m,n}) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

En nuestro problema, los valores de α que garantizan la condición homogénea en el borde son entonces $\alpha = x_{m,n}/R$. Obtenemos

$$X_{m,n}(r) = J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La ortogonalidad de las autofunciones de Sturm-Liouville nos dice que

$$\int_0^R J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big) J_m\Big(\frac{x_{m,n'}}{R}r\Big) r\ dr = 0, \quad \text{si} \quad n \neq n'.$$

Además, recordemos la condición de normalización

$$\int_0^R \Big[J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big)\Big]^2 r\ dr = \frac{1}{2}R^2 J_{m+1}(x_{m,n}).$$

Consultar, por ejemplo, el libro de Riley-Hobson-Bence [3], Sección 18.5 por más detalles sobre las funciones de Bessel.

Cada par de valores (m, n) tiene asociado un autovalor del Laplaciano

$$\lambda_{m,n} = -\frac{x_{m,n}^2}{R^2}, \tag{8}$$

que tiene degeneración 2, pues a cada par (m,n) corresponden dos autofunciones que, previas a la normalización, son

$$J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big)\ \sin(m\theta), \qquad \text{y} \qquad J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big)\ \cos(m\theta).$$

Finalmente, las autofunciones normalizadas que corresponden a $\lambda_{m,n}$ son

$$\begin{aligned} u^{(1)}_{m,n}(r,\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}R^2 J_{m+1}(x_{m,n})}\ \sin(m\theta)\ J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big) \\ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}R^2 J_{m+1}(x_{m,n})}\ \cos(m\theta)\ J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R}r\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

y el producto escalar respecto del cual estas autofunciones son ortonormales es, claramente,

$$(u,v) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\ \bar{u}(r,\theta)v(r,\theta)\ dr.$$

2.5 Problemas elípticos más generales

Los resultados anteriores de existencia y unicidad de soluciones, y el teorema espectral, fueron discutidos y enunciados pensando en el operador Laplaciano y sobre dominios $D \subset \mathbb{R}^n$ acotados. El Laplaciano es el operador elíptico por excelencia, y en coordenadas Cartesianas es de coeficientes constantes (el caso más simple posible). ¿Qué sucede si tenemos una ecuación basada en un operados elíptico más general?, o si tenemos una ecuación elíptica en una dominio no acotado (por ejemplo todo $\mathbb{R}^2$ o todo $\mathbb{R}^3$)?. Puede verse que los resultados anteriores se generalizan bajo ciertas restricciones. Describiremos brevemente algunas de estas generalizaciones.

Supongamos que tenemos ahora, en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, un operador L elíptico, de coeficientes variables, de la forma

$$L(u) = \partial_j\big(a^{jk}(x)\partial_k u + b^j(x)u\big) - b^j(x)\partial_j u + c(x)u \tag{10}$$

donde el campo tensorial $a^{jk}(x)$, el campo vectorial $b^j(x)$ y el campo escalar $c(x)$ son reales y suaves sobre D. Notemos que este operador no está escrito en la forma dada al principio del capítulo, pero claramente puede llevarse a esa forma, pues

$$L(u) = a^{jk}(x)\partial_j\partial_k u + \big(\partial_j a^{jk}(x)\big)\partial_k u + \big(\partial_j b^j(x)\big)u + c(x)u.$$

Los tres últimos términos constituyen la f del operador en la ecuación (1). La ventaja de escribirlo en la forma (10) es que es simple probar que es es autoadjunto con condiciones de Dirichlet homogéneas, de Neumann homogéneas o mixtas sobre ∂D.

Ejercicio 2: Restringiéndose al caso 3-dimensional, o sea $D \subset \mathbb{R}^3$ probar que (10) es autoadjunto para las condiciones de contorno mencionadas en $H_0^1(D)$.

Entonces los problemas elípticos de Laplace y Poisson formulados para el operador (10) con $c(x) \geq 0$, con las condiciones de contorno mencionadas, también poseen teoremas de existencia, unicidad y regularidad análogos a los enunciado anteriormente para el Laplaciano. También tenemos un teorema espectral para el operador (10) totalmente análogo al dado antes para el Laplaciano.

Otro sentido en el que es útil generalizar los resultados anteriores es cuando el dominio D no es acotado, por ejemplo si deseamos resolver la ecuación de Poisson todo el espacio, o hacia afuera de una región compacta en vez de hacia adentro. En este caso también se generalizan los resultados de existencia y unicidad y las condiciones de contorno se reemplazan por condiciones de decaimiento en infinito. Por ejemplo, si queremos resolver la ecuación de Poisson en todo $\mathbb{R}^n$ (o hacia afuera de una región compacta) usando Transformada de Fourier y la identidad de Plancherel, necesitamos $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, lo cual impone cierto decaimiento de f en infinito. Usando coordenadas esféricas generalizadas $(r, \phi_1, \phi_2, ...)$ en $\mathbb{R}^n$ tenemos

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int d\Omega^{n-1} \int_0^\infty r^{n-1}\ |f(r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})|^2\ dr < \infty.$$

por lo que f debe decaer por lo menos en la forma

$$|f| \leq \frac{C}{r^\alpha}, \qquad \alpha > \frac{n}{2}, \quad \text{cuando} \quad r \to \infty.$$

En este caso la ecuación de Poisson tendrá solución única y la solución decaerá asintóticamente a cero cuando $r \to \infty$.

Ejemplo 5: *(Electrostática o Gravedad Newtoniana).*
Supongamos que queremos calcular una función potencial en todo el espacio debida a una densidad (de carga o masa) $f(\vec{x})$. Absorbiendo todas las constantes del caso en μ_0, en algún sistema de unidades apropiado, nuestro

problema es

$$\Delta u = -\mu_0 f(\vec{x}), \tag{11}$$

donde $f(\vec{x}) \geq 0$, decae a a cero en infinito como se indicó antes. Una forma conveniente de resolver este problema es usar Transformada de Fourier. Transformando la ecuación

$$-k^2 \hat{u} = -\mu_0 \hat{f}(\vec{k}), \qquad k^2 = |\vec{k}|^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{\hat{f}(\vec{k})}{k^2}\, d^3k, \\ &= \frac{\mu_0}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2} \Big[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} f(\vec{x}')\, d^3x' \Big]\, d^3k, \\ &= (-\mu_0) \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}') \Big[-\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{k^2}\, d^3k \Big]\, d^3x', \end{aligned}$$

La expresión entre corchetes es la *Función de Green* del problema,

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{k^2}\, d^3k.$$

Genéricamente hablando, la función de Green es una función (posiblemente generalizada) que permite expresar la solución de la ecuación como integral de la fuente. En otras palabras $G(\vec{x}, \vec{x}')$ define una distribución que actuando sobre la fuente nos da la solución del problema. Calculemos la función de Green usando coordenadas esféricas en el espacio dual, elegimos el eje polar alineado con el vector $\vec{x} - \vec{x}'$. De esta forma

$$\begin{aligned}
G(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{k^2}\; d^3k \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\pi} \sin(\theta) \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos(\theta)}}{k^2}\; d\theta \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \int_0^{\pi} e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos(\theta)} \sin(\theta)\; d\theta \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^{1} e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|s}\; ds \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{k|\vec{x}-\vec{x}'|} \sin(k|\vec{x}-\vec{x}'|)\; dk \\
&= -\frac{1}{2\pi^2|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\; dt \\
&= -\frac{1}{4\pi}\; \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.
\end{aligned}$$

La solución del problema es entonces,

$$u(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{x}, \vec{x}')\; (-\mu_0 f(\vec{x}'))\; d^3x' = \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} f(\vec{x}')\; d^3x'.$$

Por ejemplo, para una masa puntual ubicada en $\vec{x}_0$, $f(\vec{x}') = -m_0\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0)$, entonces

$$u(x) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\; \frac{m_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|},$$

donde se observa el decaimiento de la solución.

Referencias

[1] Oscar A. Reula, *Métodos Matemáticos de la Física*, Editorial de la Universidad Nacional de Córdoba, (2009).

[2] Tosio Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, “Classics in Mathematics”, Springer (1980).

[3] K.F. Riley, M.P. Hobson and S. J. Bernce, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, Third edition (2006).