a) Tenemos S dada por $z = \cos x \cos y$. Parametrizamos

$$\begin{aligned} s^1(x,y) &= x, \\ s^2(x,y) &= y, \\ s^3(x,y) &= \cos x \cos y, \end{aligned}$$

luego

$$\vec{s}(x,y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \cos x \cos y \vec{e}_z.$$

b) La métrica inducida es

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial u^j},$$

luego

$$\begin{aligned} g_{xx} &= (\vec{e}_x - \sin x \cos y \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x - \sin x \cos y \vec{e}_z) = 1 + \sin^2 x \cos^2 y, \\ g_{xy} &= (\vec{e}_x - \sin x \cos y \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_y - \cos x \sin y \vec{e}_z) = \sin x \cos x \sin y \cos y = g_{yx}, \\ g_{yy} &= (\vec{e}_y - \cos x \sin y \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_y - \cos x \sin y \vec{e}_z) = 1 + \cos^2 x \sin^2 y, \end{aligned}$$

o

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 x \cos^2 y & \sin x \cos x \sin y \cos y \\ \sin x \cos x \sin y \cos y & 1 + \cos^2 x \sin^2 y \end{pmatrix}.$$

El determinante de la métrica es

$$g = 1 + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y,$$

luego el diferencial de área escalar es

$$dA = \sqrt{1 + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y}\, dxdy.$$

El vector normal es

$$\vec{n} = (\vec{e}_x - \sin x \cos y \vec{e}_z) \times (\vec{e}_y - \cos x \sin y \vec{e}_z) = \sin x \cos y \vec{e}_x + \cos x \sin y \vec{e}_y + \vec{e}_z,$$

y el diferencial de área orientado es

$$d\vec{A} = \vec{n} dxdy.$$

c) El área del parche $x,y \in [-\pi,\pi]$ es

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy \sqrt{1 + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y} = 48.180,$$

mayor que $(2\pi)^2 = 39.478$, como era de esperar.

El flujo de $\vec{E} = E\vec{e}_z$ a través del parche es

$$\Phi = \iint_{\text{parche}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy = (2\pi)^2 E,$$

también como era de esperar.

d) La curva C se define como $x = y$, $z = \cos x \cos y$. Conviene parametrizarla como

$$
\begin{aligned}
u^1(t) &= x(t) = t, \\
u^2(t) &= y(t) = t,
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
\vec{c}(t) &= u^i(t)\frac{\partial\vec{s}}{\partial u^i} \\
&= x(t)(\vec{e}_x - \sin x(t)\cos y(t)\vec{e}_z) + y(t)(\vec{e}_y - \cos x(t)\sin y(t)\vec{e}_z) \\
&= x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y - (x(t)\sin x(t)\cos y(t) - y(t)\cos x(t)\sin y(t))\vec{e}_z \\
&= t\vec{e}_x + t\vec{e}_y - 2t\sin t\cos t\vec{e}_z.
\end{aligned}
$$

El largo de la curva es

$$
\ell = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\partial u^i}{\partial t}g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial t}}\,dt,
$$

con

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u^i}{\partial t}g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial t} &= (1+\sin^2 x(t)\cos^2 y(t)) + 2\sin x(t)\cos x(t)\sin y(t)\cos y(t) + (1+\cos^2 x(t)\sin^2 y(t)) \\
&= 2 + 4\sin^2 t\cos^2 t.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\ell = \int_0^{2\pi}\sqrt{2+4\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2+\sin^2(2t)}\,dt = 9.9095,
$$

mayor que $2\sqrt{2}\,\pi = 8.8858$, como era de esperar.