

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 3 (2022)

**Problema 1:** Sea la norma  $l^p$ :

$$\|u\|_{l^p} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} |u^j|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

- a) Probar que está bien definida.
- b) Probar que el subconjunto de sucesiones con norma  $l^p$  finita está contenido en el subconjunto de las sucesiones con norma  $l^q$  finita si  $p < q$ .

**Problema 2:** Sea la norma  $L^p$ :

$$\|u\|_{L^p} = \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Probar que vale la desigualdad

$$\|uv\|_{L^s} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}, \quad \text{para } s^{-1} = p^{-1} + q^{-1}.$$

*Sugerencia:* Utilizar la desigualdad de Hölder para la función  $(uv)^s$ .

**Problema 3:** Pruebe que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

satisface la desigualdad triangular. A tal fin utilice la desigualdad de Schwarz.

**Problema 4:** Probar que si  $T : X \rightarrow Y$  es lineal ( $X$  e  $Y$  son espacios de Banach) entonces  $T$  es continua en todo punto de  $X$  si y solo si  $T$  es continua en cero.

**Problema 5:** Considere el espacio de sucesiones infinitas de números complejos, pero limitado a las que tienen norma  $l^2$  finita. Sea  $\hat{e}_i \in l^2$  la sucesión que tiene un 1 en el  $i$ -ésimo lugar y cero en todos los restantes. Pruebe que definiendo estos elementos de  $l^2$  para  $i = 1, 2, \dots$  el conjunto  $B = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots\} \subset l^2$  es una base ortonormal de  $l^2$ .

**Problema 6:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable y  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots\}$  una base ortonormal. Pruebe que si  $x \in H$ ,

a)  $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \hat{e}_j, x \rangle \hat{e}_j.$

b) Identidad de Parseval:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \hat{e}_j, x \rangle|^2.$$

**Problema 7:** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_N\}$  un conjunto ortonormal (no necesariamente una base). Pruebe que

a) Identidad de Pitágoras. Si  $x \in H$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^N |\langle \hat{e}_j, x \rangle|^2 + \|x - \sum_{j=1}^N \langle \hat{e}_j, x \rangle \hat{e}_j\|^2.$$

b) Desigualdad de Bessel. Si  $x \in H$

$$\sum_{j=1}^N |\langle \hat{e}_j, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Problema 8:** Muestre que  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  no es solo un espacio vectorial, sino además un álgebra con el producto usual de funciones. Halle el soporte de  $fg$  en términos de los soportes de  $f$  y  $g$ .

**Problema 9:** Demostrar que  $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ , donde

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp(-1/x^2) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

**Problema 10:** Muestre que en el caso de tener un espacio de Banach, con la noción de convergencia dada por la norma, la definición de continuidad de una funcional coincide con la definición usual  $\varepsilon$ - $\delta$ . Muestre además que como con cualquier noción de continuidad, para ser verificada en el caso de una funcional lineal, es suficiente verificarla en un solo punto y eso garantiza la continuidad en todos lados.

**Problema 11:** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y sea  $T_f$  la funcional definida como:

$$T_f(\varphi) = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)dx,$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Mostrar que  $T_f$  es una distribución.

**Problema 12:** Pensando a la Ddelta de Dirac como una función generalizada, pruebe las siguientes propiedades:

a)  $\int_{-a}^b \delta(t)dt = 1$ , para  $a, b > 0$ .

b)  $\int \delta(t-a)dt = 1$ , si el rango de integración incluye a  $t = a$ .

c)  $\delta(t) = \delta(-t)$ .

d)  $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ .

e)  $t^n\delta(t) = 0$ , con  $n > 0$ .

f)  $\delta(h(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|h'(t_i)|}$ , donde  $t_i$  son todos los valores de  $t$  para los cuales  $h(t) = 0$ .

g)  $h(t)\delta'(t-a) = h(a)\delta'(t-a) - h'(a)\delta(t-a)$

**Problema 13:** Demostrar que la derivada de una distribución es lineal.

**Problema 14:** Sea

$$h(x) = \begin{cases} \exp(x+1), & \text{si } x < -1 \\ x^4, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{si } \pi/2 \leq x \end{cases}$$

calcule las dos primeras derivadas de  $f$  en el sentido distribucional.

**Problema 15:** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi$  y  $\psi$  dos funciones de prueba. Considere la distribución definida como

$$T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

- a) Muestre que  $\sin(ax)\delta'(x) = -a\delta(x)$ , con  $a \in \mathbb{R}$
- b) Demuestre que  $(\phi\psi)' = \phi'\psi + \phi\psi'$  en el sentido distribucional.
- c) Utilizando los incisos anteriores, muestre que  $\frac{d^2}{dx^2}[H(x)\sin(ax)] = a\delta(x) - H(x)a^2\sin(ax)$ , donde  $H(x)$  es la función escalón.

**Problema 16:** Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = \delta(x^2 - 3x + 2), \quad u(x) \in \mathbb{R},$$

donde  $\gamma > 0$  y  $\delta(x)$  es la Delta de Dirac. Utilizando Transformada de Fourier halle la solución  $u(x)$  suponiendo que es una función que decrece rápidamente cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .