Omar E. Ortiz

(Apunte basado en el libro de O. Reula. Ver bibliografía del curso)

1 Distribuciones

Las distribuciones son una generalización de funciones "clásicas" que permiten idealizar, y de esta manera simplificar notablemente, la descripción matemática de ciertas situaciones físicas. Por ejemplo, uno puede representar cargas eléctricas puntuales en electrostática, en vez de tener que lidiar con distribuciones sumamente concentradas en regiones muy pequeñas (comparadas con la escala donde nos interesa resolver cierto problema que involucra dichas cargas).

El espacio de las distribuciones tiene algunas propiedades interesantes, como ser cerrado bajo la operación diferenciación, cosa que no ocurre por ejemplo con el espacio funcional $L^2(\mathbb{R})$ (como se vio en un ejemplo anterior).

Vamos a definir el espacio de las distribuciones como un espacio dual. Para entender la idea pensemos en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ y su dual. Según el teorema de representaciones de Riesz, un elemento φ del dual de $L^2(\mathbb{R})$ puede pensarse como un $g \in L^2$ de manera que $\varphi(f) = \langle g, f \rangle$ para todo $f \in L^2$. Una función en L^2 es una función de cuadrado integrable y como tal debe decaer, cuando $|x| \to \infty$ como $|x|^{-\alpha}$ con $\alpha > 1/2$. En la descripción anterior, ambas funciones f y g son de cuadrado integrable y deben por lo tanto tener como mínimo el decaimiento mencionado. Supongamos ahora que mantenemos la definición de producto escalar (y la norma asociada), pero en vez de tomar la función f en $L^2(\mathbb{R})$ la tomamos en un subespacio más restrictivo, por ejemplo funciones f con decaimiento más rápido cuando $|x| \to \infty$, entonces podremos tomar funciones g con decaimiento a infinito mas lento de manera de mantener finito el producto escalar con f. Sin embargo las nuevas g no tendrán norma L^2 acotada, es decir pertenecerán a una espacio más grande que L^2. Resumiendo, si "achicamos" el espacio funcional de las f (por ejemplo a un subespacio estricto de $L^2(\mathbb{R})$), el correspondiente espacio dual se "agranda" admitiendo funciones que no están en $L^2(\mathbb{R})$. Si restringimos suficientemente el espacio de funciones f, los vectores en el espacio dual no serán funciones clásicas, sino funciones "generalizadas".

Para definir las distribuciones, consideremos el subespacio de $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, es decir el espacio de funciones de variable real, infinitamente diferenciables y de soporte compacto. Recordemos que el soporte de una función $f(x)$ es el subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ más chico que contiene al conjunto $\{x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \neq 0\}$, o bien, la clausura de este último conjunto.

Ejercicio 1: Muestre que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es no solo un espacio vectorial, sino además un álgebra con el producto usual de funciones. Halle el soporte de fg en términos de los soportes de f y g.

Ejemplo 1: Sabemos que las funciones analíticas, que estamos muy acostumbrados a manipular, no son de soporte compacto (piense por qué...). Es interesante poder escribir, en términos de funciones conocidas, una función infinitamente diferenciable de soporte compacto. A tal fin consideremos primero la función

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp(-1/x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

que es cero para los negativos y positiva para los positivos.

Ejercicio 2: Demostrar que $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Utilizando dos de tales funciones y una función C^∞ cualquiera podemos escribir una función en $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Por ejemplo si $p(x)$ es un polinomio, la función

$$f(x) = h(x+1)\ p(x)\ h(1-x)$$

es infinitamente diferenciable y tiene soporte $[-1, 1]$.

Lamentablemente $C_0^\infty(\mathbb{R})$ no es un espacio de Hilbert, pues con cualquier norma que adoptemos siempre podemos hacer una secuencia $\{f_n(x)\}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ que converja a una función que no es de soporte compacto.

Para poder definir continuidad de operadores sobre $C_0^\infty(\mathbb{R})$ daremos primero una definición de convergencia adaptada a $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Definición 1: La sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ de funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ converge a $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si

- Existe $K \subset \mathbb{R}$ compacto tal que el soporte de $\varphi_n(x)$ esta incluido en K para todo n.
- Las sucesiones $\{\varphi_n^{(p)}(x)\}$ de derivadas de orden p de la sucesión, convergen uniformemente en K a $\varphi^{(p)}$ para todo p. Es decir, dado p y $\varepsilon > 0$,

existe N tal que para todo $n > N$ se cumple

$$\sup_{x\in K} \{|\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x)|\} < \varepsilon.$$

Con esta definición de convergencia las sucesiones en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ convergen solo a funciones de soporte compacto y la convergencia es uniforme; el espacio funcional $C_0^\infty(\mathbb{R})$ se llama *espacio de funciones de prueba* y lo denotamos por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Podemos ahora definir continuidad de funcionales lineales sobre $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (o sea de elementos del dual).

Definición 2: Diremos que la funcional $F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) es continua en $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si para toda sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ convergente a φ se cumple que $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ cuando $n \to \infty$ (o sea: $\lim_{n\to\infty} F(\varphi_n) = F(\lim_{n\to\infty} \varphi_n)$.)

Esta definición de continuidad usa la noción de convergencia de sucesiones. En el caso de tener un espacio de Banach, con la noción de convergencia dada por la norma, la definición de continuidad recién dada coincide con la definición usual ε-δ.

Como con cualquier noción de continuidad, para ser verificada en el caso de una funcional lineal, es suficiente verificarla en un solo punto (en 0 por ejemplo); eso garantiza la continuidad en todos lados.

Ejercicio 3: demuestre las dos afirmaciones anteriores.

Definición 3: El espacio de funcionales lineales continuas $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}'$ (dual de $\mathcal{D}$) es llamado *espacio de distribuciones*.

Veamos algunos ejemplos importantes.

Ejemplo 2: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, La funcional T_f definida como

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\ dx, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

es una distribución. Para probarlo debemos probar que es continua (pues es obviamente lineal al estar definida mediante una integral), pero

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_K f(x)\ \varphi(x)\ dx\right| \leq \sup_{x\in K}\{|\varphi(x)|\}\ \left|\int_K |f(x)|\ dx\right|, \tag{2}$$

donde $K \subset \mathbb{R}$ es cualquier compacto que contiene al soporte de φ. Si tomamos una sucesión de funciones de prueba convergente a $\varphi = 0$ y elegimos K que contenga los soportes de toda la sucesión, entonces el lado derecho en (2) tiende a cero, que es el valor de la distribución T_f actuando sobre $\varphi = 0$; T_f es entonces continua en $\varphi = 0$ y por lo tanto continua en todos lados.

Ejemplo 3: Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, es decir una función de valor absoluto integrable (estrictamente hablando, en el sentido de Lebesgue). Entonces la T_f definida como en (1) es también una distribución.

Ejercicio 4: Probar la última afirmación.

Las distribuciones basadas en una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ como en el ejemplo anterior, se llaman *distribuciones regulares*.

En los dos ejemplos anteriores, las distribuciones se definen en base a funciones integrables. De hecho si dos funciones f y g tales son iguales en el sentido en que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \; dx = 0,$$

(o sea en el sentido de equivalencia de funciones en $L^1(\mathbb{R})$), dan origen a la misma distribución. En tal sentido existe una relación 1:1 entre las funciones f y las distribuciones T_f que originan, y es común decir directamente que las f son distribuciones, cuando en realidad se está pensando en la T_f asociada.

Ejemplo 4: *(La delta de Dirac)* Sea $a \in \mathbb{R}$ y T_a la funcional definida mediante

$$T_a(\varphi) = \varphi(a), \qquad \forall \; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Veamos que T_a es una distribución. Es lineal pues, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_a(\alpha\varphi + \psi) &= (\alpha\varphi + \psi)(a) \\ &= \alpha\varphi(a) + \psi(a) \\ &= \alpha T_a(\varphi) + T_a(\psi). \end{aligned}$$

Además es continua pues si $\{\varphi_n(x)\} \to 0$, entonces

$$T_a(\varphi_n) = \varphi_n(a) \to 0 = T_a(0).$$

No es difícil ver que esta distribución no es de la forma T_f para una f continua como el ejemplo 2, pues eligiendo apropiadamente las funciones de prueba, podemos ver que una tal f valdría cero en todos lados salvo en 0. Mas aún, tampoco existe una función integrable $f \in L^1$ que permita pensar a esta distribución como una distribución regular. Decimos entonces que esta distribución, llamada *delta de Dirac* es una *distribución irregular*. No obstante, existe una tradición en física, desde que Paul Dirac introdujo esta distribución, en pensar en una *función generalizada* $\delta(x)$ que integrada con la función de prueba evalúa a esta en cero, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\ dx = \varphi(0).$$

Esta expresión tiene solo sentido formal. No debe realmente tomarse como la integral de un producto de funciones; si puede pensarse a $\delta(x)$ como una función generalizada que utilizada bajo el símbolo de integración (con sus correspondientes propiedades) nos brinda una correcta aplicación de la distribución. Las distribuciones pueden usarse, por ejemplo, en el contexto de la ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 5: Consideremos un ejemplo muy sencillo de una partícula material de masa m que se mueve libremente en una dimensión, salvo por el hecho que recibe un impulso finito en un intervalo de tiempo despreciablemente corto. Tal situación se idealiza mediante una fuerza representada por una delta de Dirac. Digamos que nuestra partícula de masa m tiene, en $t = 0$, posición x_0 y velocidad v_0, y en $t = 1$ recibe in impulso instantáneo p_0. La 2a ley de Newton expresa

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = p_0\ \delta(t-1). \tag{4}$$

Pero, ¿cómo debe entenderse esta ecuación donde el lado derecho no es una función, sino una función generalizada?, pues bien, lo que tiene sentido es entender esta ecuación multiplicada por cualquier función de prueba que querramos e integrada

$$\int_{-\infty}^{\infty} m\frac{d^2x}{dt^2}\ \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_0\ \delta(t-1)\ \varphi(t)\ dt. \tag{5}$$

Esto, veremos más adelante, con cierta reescritura del lado izquierdo, es la forma débil de la ecuación. Pero para pensar en un sentido lo más clásico posible, notemos que la arbitrarierdad de la función de prueba $\varphi(t)$ tomando funciones con soporte estrictamente en $t < 1$, nos dice que la aceleración de la partícula es cero si $t < 1$. Análogamente, usando funciones de prueba con soporte estrictamente en $t > 1$, concluímos que la aceleración de la partícula es cero para $t > 1$. En ambos casos la solución es una $x(t)$ lineal. La solución de este problema será una función (clásica) continua (la trayectoria de la partícula), pero no suave, pues su derivada segunda es una función generalizada (la delta de Dirac). Para $t < 1$ las constantes de integración quedan determinadas por las condiciones iniciales. La solución es $x(t) = x_0 + v_0\, t$. Para $t > 1$ la solución es de la forma $x(t) = a + b\, t$. Para determinar la constante b utilizamos una función de prueba que valga 1 en $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$ para $\epsilon > 0$ pequeño. Así integrando (5) en $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$ y tomando límite para $\epsilon \to 0$ tenemos

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \Bigg|_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} = mb - mv_0 = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} p_0 \delta(t-1)\, dt = p_0.$$

por lo que $b = v_0 + p_0/m$. Luego, la continuidad en $t = 1$ implica $a = x_0 - p_0/m$. La solución es pues

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t, & t < 1 \\ x_0 - \frac{p_o}{m} + \left(v_0 + \frac{p_0}{m} \right) t, & t \geq 1. \end{cases}$$

Dos semi rectas unidas con un quiebre en $t = 1$.

Es claro que $\mathcal{D}'$ es una espacio vectorial (Dual de $\mathcal{D}$), definiendo la suma y producto por escalares de distribuciones en la forma usual

$$(\alpha T + P)(\varphi) = \alpha T(\varphi) + P(\varphi), \qquad T, P \in \mathcal{D}';, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

¿Tiene $\mathcal{D}'$ estructura de álgebra?, o ¿está bien definido el producto de distribuciones?. La respuesta es no. Sólo en casos muy especiales, esta bien definido el producto de distribuciones.

1.1 Derivada de una distribución

Notemos que si una distribución es regular, originada por una función f tal que $f'(x)$ existe y también pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, entonces f' define también una distribución regular que guarda una relación clara con la distribución de f, esto es

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx = -T_f(\varphi'). \tag{6}$$

Donde hemos usado que las funciones de prueba son infinitamente diferenciables, de manera que $\varphi'(x)$ también es una función de prueba, y de soporte compacto, y por lo tanto los términos de borde en la integración por partes son cero.

Como "identificamos" las funciones f con las distribuciones T_f que generan, la identidad anterior nos da un idea clara de cómo definir la derivada de cualquier distribución de manera consistente.

Definición 4: Dada $T \in \mathcal{D}'$ definimos su derivada $T' \in \mathcal{D}'$ mediante la identidad

$$T'(\varphi) = -T(\varphi'), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Dada la identidad (6), es claro que la derivada de una distribución regular generada por f es la distribución regular generada por f'; lo interesante es que la definición anterior se aplica a cualquier distribución. Es una definición generalizada de derivada que actuando sobre un elemento de $\mathcal{D}'$ nos da otro elemento de $\mathcal{D}'$. De esta forma logramos un espacio de funcionales cerrado bajo la diferenciación. Es claro que la derivación así definida es lineal, como toda derivación.

Ejercicio 5: Demuestre la última afirmación.

Además, en los casos muy especiales en que el producto de distribuciones está definido, puede verse que la diferenciación satisface la regla de Leibnitz.

Ejemplo 6: Si T_a es la distribución delta de Dirac, entonces

$$T_a'(\varphi) = -T_a(\varphi') = -\varphi'(a).$$

Si pensamos a T_a' como la distribución "generada" por δ' (la derivada de la delta de Dirac), la notación funciona como si pudiéramos integrar por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a)\varphi(x)\, dx = T_a'(\varphi) = -T_a(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi'(x)\, dx = -\varphi'(a).$$

Otra distribución de aparición frecuente es la *distribución de Heaviside* H_a que se define como, dado $a \in \mathbb{R}$,

$$H_a(\varphi) = \int_a^\infty \varphi(x)\ dx.$$

Esta distribución no es regular, pero suele pensarse como originada por la función escalón de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

que no es de valor absoluto integrable (no pertenece a $L^1(\mathbb{R})$). Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-a)\varphi(x)\ dx = \int_{a}^{\infty} \varphi(x)\ dx.$$

Calculemos la derivada de la distribución de Heaviside.

$$\begin{aligned} H_a'(\varphi) &= -H_a(\varphi') \\ &= -\int_a^{\infty} \varphi'(x)\ dx \\ &= -\big(\varphi(\infty) - \varphi(a)\big) \\ &= \varphi(a) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\ dx \end{aligned}$$

lo cual nos dice que la derivada de la distribución de Heaviside es precisamente la delta de Dirac. Si bien la función escalón (función generalizada) $\Theta(x)$ no es derivable en sentido clásico en cero (pues es discontinua!), su derivada en sentido distribucional existe y es precisamente la función generalizada $\delta(x)$.