Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física II

Guía N° 6 (2022)

Problema 1: Verificar que

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \psi(s,\tau)\ ds\ d\tau.$$

satisface el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi(x,t), \qquad u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

con dato inicial cero.

Problema 2: Resolver la ecuación $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ con las siguientes condiciones:

a) $u(x,0) = 0$ y $u_t(x,0) = \sin x$

b) $u(x,0) = e^x$ y $u_t(x,0) = \cos x$

Problema 3: Probar que si los datos iniciales $f(x)$ y $g(x)$ tienen soporte compacto, o decaen junto con sus derivadas primeras suficientemente rápido a cero cuando $|x| \to \infty$, y el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =& 0, \qquad u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\\ u(x,0) =& f(x),\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) =& g(x).\end{aligned}$$

conserva la energía de la solución. *Sugerencia:* Muestre que la derivada de $E(t)$ respecto al tiempo es cero, y por lo tanto $E(t) = E(0)$ para todo $t > 0$.

Problema 4: Resolver el problema de las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogenea de longitud L si:

a) Los extremos de la cuerda estan fijos rígidamente.

b) los extremos de la cuerda estan libres. Es decir, $\dfrac{du}{dx} = 0$ en los extremos de la cuerda. Esto tiene lugas cuando los extremos de la cuerda están sujetos mediante anillos (de masas despreciables), que se deslizan sin rozamiento sobre barras paralelas.

Problema 5: Defina la Energía para el problema

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u : [0,L]\times[0,\infty) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\\ &u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \qquad \text{(datos iniciales)}\\ &u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0, \qquad \text{(condiciones de contorno)}\end{aligned}$$

y muestre que esta es constante en el tiempo.

Problema 6: Condidere el problema para la cuerda de guitarra, igual al anterior salvo por la introducción de una pequeña disipación, representada mediante un término de derivada temporal primera. La ecuación diferencial es entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad 0 < \gamma < \frac{2\pi c}{L}.$$

Resuelva el problema. Muestre que la solución y su energía en este caso decaen con el tiempo. ¿Con qué ley temporal?

Problema 7: Hallar a solución de la ecuación de ondas homogénea en la franja $(x,t) \in D = [0,1] \times [0,\infty)$, con condiciones iniciales homogéneas, es decir

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$$

y con condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t) = h_0(t). \tag{1}$$

en la frontera $x = 0$ con

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1, \\ 0 & 1 < t, \end{cases}$$

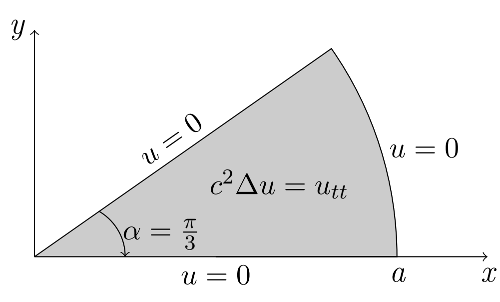
y condición de reflección

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

sobre la frontera $x = 1$.

Problema 8: Resuelva la ecuación de ondas, $c^2 \Delta u = u_{tt}$, para una membrana circular de radio R con el borde fijo sabiendo que $u(r,\theta,0) = 0$ y $u_t(r,\theta,0) = r\,\mathrm{sen}(3\theta)$.

Problema 9: Resolver la ecuación de onda de una membrana en forma de cuña que se encuentra inicialmente en reposo con las condiciones de borde tal como muestra la figura. En $t = 0$ la membrana tiene la forma $f(r,\theta,0) = r\sin(6\theta)$.



Problema 10: Considere la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 \Delta u$ en el interior de una esfera de radio a tal que $u = u(r,t)$.

a) Discuta una transformación de tipo $u = r^\alpha \psi$ para reducir esta ecuación a la ecuación del onda usual.

b) Resuelva la ecuación anterior que satisface las conidicones $u(r = a, t) = 0$, $u(r, 0) = \beta$ y $u_t(r, 0) = 0$, donde β es una constante.

Problema 11: Cierta cuerda de largo L cuya densidad es variable está tensada por sus extremos que están fijos y sus desplazamientos u (respecto de la posición de equilibrio) están bien modelados por la ecuación (de onda)

$$u_{tt} = c^2(1 + \epsilon x)^2 u_{xx} \ , \quad 0 < x < L \ ,$$

donde $\epsilon > 0$. Determine los modos de esta cuerda.
Sugerencia: Use la transformación de variables $y := 1 + \epsilon x$ para reescribir la ecuación.