Métodos Matemáticos de la Física II

Omar E. Ortiz

FAMAF, UNC

Córdoba, 2022

Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

Una ecuación en derivadas parciales de orden p es una ecuación que expresa una relación funcional entre una función incógnita, digamos $u(x^1, \ldots, x^n)$, sus derivadas parciales de orden menor o igual a p y las coordenadas x^j de cierto espacio. Genéricamente puede escribirse en la forma

$$F\left(x^1, \ldots, x^n, u, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x^j}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k}, \ldots\right) = 0.$$

La Funcional F es en general una relación no lineal entre sus variables. En el caso más general, la incógnita u es un conjunto o tupla de campos tensoriales sobre el espacio y los valores de F son otra tupla de campos tensoriales.

Ejemplos Importantes:

1. En el espacio Euclídeo 3D, en coordenadas cartesianas (x, y, z), la *ecuación de Laplace* es

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

y la *ecuación de Poisson* es

$$\Delta u = \rho,$$

donde ρ es una fución dada. Estas dos ecuaciones constituyen el paradigma de ecuaciones elípticas (que definiremos en breve).

2. La *ecuación de ondas* en el espacio-tiempo Newtoniano

$$\Delta u = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

donde la constante c es la velocidad de propagación de las ondas. Esta ecuación puede escribirse en otras dimensiones espaciales y constituye el paradigma de ecuación hiperbólica.

3. La *ecuación de difusión* o *ecuación del calor* en el espacio-tiempo Newtoniano

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u,$$

donde κ es la difusividad del fenómeno en cuestión. Este es el paradigma de ecuaciones parabólicas.

4. La *ecuación de Schrödinger* de la mecánica cuántica en el espacio tiempo Newtoniano, para una partícula de masa m es

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + Vu,$$

donde V es la función potencial, $\hbar$ la consante de Planck.

Mas Ejemplos

Los ejemplos anteriores son todos EDP lineales y pueden ser escritos para una simple función escalar (F toma valores reales o complejos). Otros ejemplos importantes son

5. Las *ecuaciones de Maxwell*. En el espacio-tiempo de Minkowski (en un referencial globalmente inercial)

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \\ \partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]} &= 0, \end{aligned}$$

   donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético (antisimétrico) y j^μ es el cuadrivector corriente de carga. Para fuentes presecriptas, estas ecuaciones son también lineales, pero no escalares, F toma valores tensoriales.

6. Las *ecuaciones de Navier-Stokes* que describen un fluido viscoso incompresible, en el espacio-tiempo Newotiano son

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^j}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^j}{\partial x^k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x^j} &= \nu \Delta u^j, \\ \frac{\partial u^j}{\partial x^i} &= 0, \end{aligned}$$

   donde u^j es la velocidad del fluido, P es la presión del mismo (ambas funciones incógnitas), ρ su densidad constante y ν su viscosidad. Este último ejemplo es no lineal, pues la incógnita u^j y sus derivadas parciales primeras aparecen multiplicadas en un término. La funcional F toma valores de un vector y un escalar.

Teoría de EDP

- Las EDP pueden ser lineales de coeficientes constantes, lineales de coeficientes variables, cuasi lineales y no lineales generales, de acuerdo al comportamiento de la funcional F con respecto a u y sus derivadas parciales. En física son en general cuasi lineales o más simples.
- Teoría muy incompleta en general. Casos más completos: lineales coeficientes constantes, escalar de primer orden (no lineales).

Problema de Cauchy. Genéricamente hablando, el problema de Cauchy de una EDP es un problema que, además de la ecuación misma, provee de un conjunto de condiciones necesarias y suficientes, sobre una hipersuperficie, para que exista una única solución en un entorno de dicha hipersuperficie.

Ecuación escalar de primer orden

Lectura recomendada: Reula, sección 11.2.

Caso cuasi lineal (incluye al lineal, por supuesto). Es una ecuación para una función incógnita $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de la forma

$$a^1(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x^1} + a^2(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x^2} + \cdots + a^n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x^n} = b(x,u), \tag{1}$$

donde x representa a las n coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y las funciones coeficientes $a^i(x,u)$ y $b(x,u)$ son funciones suaves (típicamente diferenciables) en algún entorno $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Para este tipo de ecuaciones el problema de Cauchy está bien entendido, el problema de existencia y unicidad de la solución (el cálculo de la solución) se reduce a un problema para un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), más un problema de inversión en $\mathbb{R}^n$.
Bosquejo de la idea. Conviene pensar el problema de (1) en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde "vive" el gráfico de la solución u. Esto es, pensamos en la función

$$f(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) = x^{n+1} - u(x^1, \ldots, x^n)$$

donde u es una solución de la ecuación que satisface $u(x_0^1, \ldots, x_0^n) = u_0$. De esta manera, la superficie de nivel (hipersuperficie) $f = 0$ será $x^{n+1} = u(x)$ (gráfico de dicha solución), y se denomina *superficie integral de la ecuación*.

Consideremos ahora el campo vectorial

$$V = a^1(x)\,\hat{e}_1 + \cdots + a^n(x)\,\hat{e}_n + b(x)\,\hat{e}_{n+1}.$$

La derivada de la función f a lo largo de este campo vectorial es

$$V^j \partial_{x^j} f = -a^1 \partial_{x^1} u - \cdots - a^n \partial_{x^n} u + b(x),$$

por lo tanto, evaluado sobre la superficie $f = 0$, en donde u es una solución de la ecuación, esta derivada da cero. Es decir, la superficie solución es constante a lo largo de las curvas integrales de V. Obtendríamos el mismo resultado con un campo vectorial proporcional a V. Las direcciones de V son las *Direcciones Características* de la ecuación, y las curvas integrales de V son las *Curvas Características*.

Por la teoría de EDO, es claro que por cada punto de la superficie integral, pasa una única curva integral del campo V, es decir una única curva característica. La determinación de tales curvas requiere integrar el sistema de EDO

$$\frac{dx^j}{dt} = V^j, \qquad j = 1, \ldots, n+1. \tag{2}$$

Tomemos ahora una superficie ($n-1$-dimensional) S_0, que llamaremos *superficie inicial*, contenida en la superficie solución tal que el campo V no sea en ningún lado tangente a esta superficie. Parametrizamos esta superficie con parámetros $s^1, s^2, \ldots, s^{n-1}$. Dicha parametrización es

$$(x_0^1(s), x_0^2(s), \ldots, x_0^n(s), u(x_0^1(s), \ldots, u(x_0^n(s)). \tag{3}$$

Integrando desde cada punto de la superficie inicial S_0 el sistema (2) obtenemos un mapa que lleva los puntos iniciales de (3) a los puntos $(x^1(s,t),\dots,x^n(s,t),x^{n+1}(s,t))$ sobre la superficie solución. Si podemos invertir el mapa de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, $(x^1(s,t),\dots,x^n(s,t))$ de manera de obtener $(s^1(x^1,\dots,x^n),\dots,s^{n-1}(x^1,\dots,x^n),t(x^1,\dots,x^n))$, entonces tenemos una solución de nuestra ecuación dada por

$$u(x^1,\dots,x^n)=x^{n+1}(s(x),t(x)),$$

con dato de Cauchy $u(x_0^1,\dots,x_0^n)=u_0$.

La integración del sistema de EDO siempre se puede hacer. Está garantizado por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones ordinarias, al menos localmente (es decir, en un intervalo alrededor de $t=0$, posiblemente pequeño).

La invertibilidad del mapa en $\mathbb{R}^n$ está garantizada por el teorema de la función inversa (por la condición de que la superficie inicial no sea tangente a V en ningún punto), aunque solo en casos especiales podemos hacer la inversión analíticamente (siempre podemos numéricamente!).

Veremos un par de ejemplos sencillos resueltos por este método (*método de las características*).

Ejemplo 1

Resolvamos el problema de Cauchy

$$c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(x,0) = h(x),$$

donde c es una constante y $h(x)$ una función diferenciable dada.

Solución: El espacio donde vive la superficie solución de la ecuación es $\mathbb{R}^3$. La superficie solución es $z - u(x,y) = 0$. Parametrizamos la "curva inicial" con s: $x_0 = s$, $y_0 = 0$, $z_0 = h(s)$. A partir de esta curva en $\mathbb{R}^3$ integramos el campo de direcciones características:

$$V = c\,\hat{i} + 1\,\hat{j} + 0\,\hat{k}.$$

Obtenemos

$$x = ct + s, \qquad y = t, \qquad z = h(s).$$

Invertimos, o sea despejamos (s,t) en función de (x,y),

$$s = x - cy, \qquad t = y,$$

y la solución buscada es entonces

$$u(x,y) = z = h(s) = h(x - cy).$$

Que claramente satisface la ecuación y dato inicial.

Ejemplo 2

Resolver el problema cuasi lineal

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(x,0) = -x.$$

Determine además en qué región del plano x, y (que contenga la superficie inicial) existe la solución.
Solución: Nuevamente en $\mathbb{R}^3$, $z - u(x,y) = 0$. La curva inicial parametrizada con s es $(x_0 = s, y_0 = 0, z_0 = -s)$. El campo de direcciones características depende ahora de u que es z. Este es

$$V = u\,\hat{i} + 1\,\hat{j} + 0\,\hat{k} = z\,\hat{i} + 1\,\hat{j} + 0\,\hat{k}.$$

Integrando la tercer componente obtenemos $z = -s$, la segunda $y = t$, y la primera $x = -st + s = s(1-t)$. Invirtiendo, tenemos

$$t = y, \qquad s = \frac{x}{1-y},$$

Entonces la solución es

$$u(x,y) = z = -s = -\frac{x}{1-y} = \frac{x}{y-1}.$$

Verificar que esta solución satisface la ecuación y las condiciones iniciales.
Claramente esta solución existe en la región $(x,y) \in (-\infty,\infty) \times (-\infty,1)$.

Ejercicio

Resolver el problema lineal de coeficientes variables, para $x > 0$,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(x, y = 0) = g(x),$$

mediante el método de las características.