Omar E. Ortiz

1 La ecuación del calor en dimensión 1

En esta sección revisamos la ecuación parabólica más simple, no por ello poco importante. Se trata de la *Ecuación del Calor* (o *Ecuación de difusión*), que describe varios fenómenos difusivos en física, tales como la distribución espacio-temporal de la temperatura en un medio conductor del calor.

En particular revisaremos ahora un ejemplo en una dimensión espacial. Sea $u(x,t)$ la temperatura de una varilla conductora de un material con difusividad $\kappa > 0$ constante. Dos fuentes térmicas mantienen los extremos de la varilla a temperatura cero, esto fija las condiciones de contorno para u, esto es $u(x=0,t)=0$ y $u(x=L,t)=0$. Una fuente controlada de calor, descripta por $f(x,t)$, le suministra calor a la varilla. La temperatura satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in [0,L], \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

Para resolver este problema debemos conocer, además de las condiciones de contorno (ya especificadas para este ejemplo), la temperatura de la varilla en $t=0$, esto es, la *Condición Inicial:* $u(x,t=0)=u_0(x)$.

El operador diferencial lineal en el miembro izquierdo de (1) consta de una derivada primera en la variable temporal y una parte espacial que es proporcional al Laplaciano en dimensión 1. Podemos entonces resolver este problema expandiendo dependencia espacial de la fuente y la solución en autofunciones del laplaciano con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas. Este problema de autovalores y autofunciones es un simple problema de Sturm-Liouville para el operador $L = -d^2/dx^2$. Las autofunciones y autovalores son (verificarlo)

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big), \qquad \frac{d^2 v_n}{dx^2} = \lambda_n\, v_n, \quad \lambda_n = -\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2 < 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

siendo la condición de ortonormalidad dada por el producto escalar de $L^2([0,L])$. Ahora bien, desarrollando la inhomogeneidad $f(x,t)$ y el dato inicial $u_0(x)$

en la base de autofunciones, tenemos

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) v_n(x), \qquad a_n(t) = (v_n, f(x,t)) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) f(x,t)\, dx \tag{2}$$

y

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n}\; v_n(x), \quad c_{0n} = (v_n, u_0). \tag{3}$$

Entonces, desarrollando la solución del problema,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) v_n(x), \tag{4}$$

cuyos coeficientes $c_n(t)$ queremos encontrar, e insertando los desarrollos (2) y (4) en la ecuación diferencial (1) tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{dc_n}{dt} - \kappa\lambda_n c_n\Big]\; v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) v_n(x).$$

Como ambos desarrollos deben coincidir coeficiente a coeficiente, y además $u(x,0) = u_0(x)$,

$$\frac{dc_n}{dt} - \kappa\lambda_n c_n = a_n(t), \quad c_n(0) = c_{0n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Las soluciones de estos problemas diferenciales ordinarios son

$$c_n(t) = e^{-\kappa|\lambda_n|t}\Big[c_{0n} + \int_0^t e^{\kappa|\lambda_n|s} a_n(s)\; ds\Big].$$

Finalmente, insertando estos coeficientes en (4) obtenemos la solución al problema.

No lo haremos aquí, pero puede demostrarse que, para todo $t > 0$, $u(x,t)$ es dos veces más diferenciable que f respecto a x y una vez respecto a t. Si, por ejemplo, f es C^∞ como función de x y t la solución $u(x,t)$ será C^∞ también. Es interesante notar que esto es así independientemente de la suavidad del dato inicial $u_0(x)$. Veamos esto en un caso simple. Supongamos que $f = 0$ (y por lo tanto C^∞), y supongamos que $u_0(x)$ es diferenciable a trozos con algunas discontinuidades. La solución hallada del problema es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} e^{-\kappa|\lambda_n|t} v_n(x).$$

Para $t = 0$ la solución reproduce el dato inicial; los coeficientes c_{0n} decaen lentamente cuando $n \to \infty$ por ser los coeficientes de Fourier de una función discontinua. Sin embargo para todo $t > 0$ los coeficientes de la expansión decaen exponencialmente rápido cuando $n \to \infty$, lo cual implica que la función es C^∞ como función de x (de hecho los coeficientes de la derivada cualquier orden, digamos de orden p, respecto de x son $c_{0n}\ (-\kappa\lambda_n)^p e^{-\kappa|\lambda_n|t}$ que también decaen exponencialmente rápido). La ecuación del calor con fuente suave, "suaviza" instantáneamente (para todo $t > 0$) cualquier dato inicial.

Por el contrario, si consideramos la ecuación del calor con el tiempo invertido, el comportamiento es catastrófico y en general la solución no existe para ningún $t > 0$. Por ejemplo para el mismo problema anterior, pero con el tiempo invertido, la ecuación es

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in [0,L], \qquad t \geq 0.$$

Pero entonces la solución sería igual a la anterior cambiando el signo de los λ_n, que serían positivos, y el signo de la fuente, tendríamos entonces

$$c_n(t) = e^{\kappa|\lambda_n|t}\Big[c_{0n} - \int_0^t e^{-\kappa|\lambda_n|s} a_n(s)\ ds\Big].$$

Para cada n los $c_n(t)$ divergen exponencialmente con t; solo si la solución constara de un número finito de términos existiría formalmente. Lo más importante de notar es que si la solución presenta una número infinito de modos, infinitos c_n no nulos en el desarrollo, como los $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ tendríamos, para todo $t > 0$, que los coeficientes divergen exponencialmente rápido con $n \to \infty$ y la sumatoria no converge; la solución no existe. En un caso real (datos iniciales realistas) siempre aparecen infinitos términos en el desarrollo (al menos como consecuencia de calcular la solución numéricamente, o como consecuencia de preparar un experimento donde el dato inicial no se puede controlar con total exactitud), por lo tanto este problema de la divergencia exponencial de los coeficientes con n está siempre presente.

Decimos que la ecuación del calor con tiempo invertido tiene un problema de Cauchy *"ill-posed"* o *mal condicionado.*

Las observaciones precedentes se generalizan, por supuesto, a otras ecuaciones parabólicas.

Los últimos comentarios enfatizan claramente que una ecuación parabólica describe procesos físicos que no respetan la inversión temporal, a diferencia de las ecuaciones que describen interacciones fundamentales en física (mecánica, electromagnetismo, cuántica) donde uno puede invertir el tiempo y retroceder con una solución hasta recuperar el dato inicial (simetría de inversión temporal). Las ecuaciones parabólicas, por el contrario, describen procesos físicos macroscópicos. La deducción de estas ecuaciones parabólicas involucra, además de interacciones (o leyes) fundamentales de la física, promedios estadísticos necesarios para constituir las mismísimas variables macroscópicas (temperatura, entropía, etc.) que rompen la simetría de inversión temporal.

2 Ecuación del calor general

Consideremos ahora la ecuación del calor en n dimensiones espaciales, sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = f(x,t), \qquad x = (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$, donde Δ es el operador Laplaciano. Buscamos soluciones $u(x,t) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Si imponemos condiciones de contorno sobre $\partial\Omega \times [0,\infty)$ tales que el Laplaciano sea autoadjunto, entonces el teorema espectral nos dice que disponemos de una base ortonormal de autofunciones reales $u_k(x)$, con autovalores $\lambda_k \leq 0$, en la que podemos desarrollar la inhomogeneidad f, el dato inicial $u_0(x)$ y la solución $u(x,t)$. El problema se puede resolver entonces en forma totalmente análoga al caso unidimensional del ejemplo anterior. Ilustramos con un ejemplo en dimensión 2.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación del calor con difusividad $\kappa > 0$ constante en un disco de radio R, con condición inicial $u(x,0) = 0$, con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas y con una fuente de calor puntual dada, en coordenadas polares, por

$$f(r,\theta) = f_0 \delta\Big(r - \frac{R}{2}\Big)\delta(\theta).$$

En el ejemplo 4 del apunte de ecuaciones elípticas calculamos las autofunciones del Laplaciano y sus autovalores

$$\begin{aligned} u^{(1)}_{m,n}(r,\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi} R^2 J_{m+1}(x_{m,n})} \ \sin(m\theta) \ J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R} r\Big) \\ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi} R^2 J_{m+1}(x_{m,n})} \ \cos(m\theta) \ J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{R} r\Big) \end{aligned}$$

con $\lambda_{m.n} = -(x^2_{m,n}/R^2)$. Tenemos

$$(u^{(1)}_{m.n}, f) = 0, \qquad a_{m,n} = (u^{(2)}_{m.n}, f) = \frac{2f_0}{\sqrt{\pi} R J_{m+1}(x_{m.n})} J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{2}\Big).$$

Debemos resolver las ecuaciones ordinarias

$$\frac{dc_{m,n}}{dt} - \kappa\lambda_{m,n} \ c_{m,n} = a_{m,n}, \qquad \text{con} \qquad c_{m,n}(0) = 0.$$

Las soluciones son

$$c_{m,n}(t) = -\frac{a_{m,n}}{\kappa\lambda_{m,n}}\big(1 - e^{\kappa\lambda_{m,n}t}\big) = \frac{2f_0 R}{\kappa x^2_{m,n}\sqrt{\pi} J_{m+1}(x_{m.n})} J_m\Big(\frac{x_{m,n}}{2}\Big)\Big(1 - e^{-\frac{\kappa x^2_{m,n}}{R^2}t}\Big).$$

y la solución completa del problema es

$$u(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n}(t) \ u^{(2)}_{m,n}(r,\theta).$$

Ejemplo 2: Queremos determinar la temperatura de una placa rectangular con difusividad térmica κ de lados a y b, que ubicamos en coordenadas Cartesianas en el plano en el dominio $0 \le x \le a$ y $0 \le y \le b$. Las caras con $x = 0$ y $x = a$ son mantenidas a temperaturas T_0 y T_1 respectivamente, mientras que las caras con $y = 0$ e $y = b$ están aisladas térmicamente. Todo el sistema se encuentra en equilibrio térmico (estado estacionario) para $t < 0$. En $t = 0$

se enciende una fuente que inyecta calor al sistema $f(x,y) = y$. Llamando $T(x,y,t)$ a la temperatura de la placa, el problema matemático es

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\, \Delta T = y, \qquad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

$$T(0,y,t) = T_0, \qquad T(a,y,t) = T_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,0,t) = \frac{\partial T}{\partial y}(x,b,t) = 0,, \tag{8}$$

$$T(x,y,0) = T_{eq}(x,y),, \tag{9}$$

donde T_{eq} es la temperatura del estado estacionario sin fuente de calor, es decir, la solución del problema independiente del tiempo con $f = 0$.

T_{eq} es solución de $\Delta T = 0$ con condiciones de contorno (7) y (8). Claramente una función lineal en x e independiente de y puede satisfacer la ecuación y las condiciones de contorno. Esto es

$$T_{eq}(x,y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{a} x.$$

Lo que conviene entonces para resolver nuestro problema es reformularlo en términos de una nueva variable $\phi(x,y,t)$ tal que

$$T(x,y,t) = T_{eq}(x,y) + \phi(x,y,t). \tag{10}$$

De esta forma resta resolver el problema, para ϕ con condiciones de contorno homogéneas y condición inicial cero

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \kappa\, \Delta \phi = y, \tag{11}$$

$$\phi(0,y,t) = \phi(a,y,t) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0,t) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,b,t) = 0, \tag{12}$$

$$\phi(x,y,0) = 0. \tag{13}$$

Para resolver este problema necesitamos en primer lugar encontrar las autofunciones del Laplaciano con condiciones de contorno (12). Dejo al lector que complete los cálculos intermedios de lo que sigue. Usando separación de variables $\phi = F(x)G(y)$ obtenemos

$$F_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

y

$$G_0 = \sqrt{\frac{1}{b}}; \quad G_m(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos\left(\frac{\pi m}{b} y\right), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Las autofunciones ortonormales del Laplaciano son entonces

$$u_{n,m}(x, y) = F_n(x)G_m(y), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

con autovalores

$$\lambda_{n,m} = -\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right).$$

Para resolver ahora el problema (11)–(13) desarrollamos la inhomogeneidad $f(x, y)$ en la base de las autofunciones

$$f(x, y) = y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{n,m} \; u_{n,m}(x, y). \tag{14}$$

Conviene expresar los coeficientes separadamente para $m = 0$ (desarrollo independiente de y) y para $m \geq 1$,[1]

$$f_{n,0} = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -\frac{ab^{3/2}}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

y

$$f_{n,m} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ o } m \text{ son pares} \\ -\frac{4\sqrt{2}a}{\sqrt{b}\pi^3 n m^2}, & \text{si } n \text{ y } m \text{ son impares} \end{cases}$$

Proponemos ahora una solución para la ecuación (11) desarrollada en la misma base

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{n,m}(t) \; u_{n,m}(x, y) \tag{15}$$

[1] Es interesante notar aquí que, dado que las condiciones de contorno son independientes de y, si la inhomogeneidad de nuestra ecuación fuera independiente de y (por ejemplo constante), la solución completa del problema sería función sólo de x y t; el problema se reduciría efectivamente a un problema en dimensión 1.

Insertando (15) y (14) en (11), y dada la unicidad de los desarrollos en la base de autofunciones, obtenemos problemas diferenciales ordinarios para los coeficientes $\phi_{n,m}(t)$

$$\frac{d\phi_{n,m}}{dt} - \kappa\lambda_{n,m}\ \phi_{n,m} = f_{n,m}, \qquad \phi_{n,m}(t=0) = 0.$$

Evidentemente las soluciones de estos problemas se anulan para los modos en que $f_{n.m} = 0$. Tenemos

$$\phi_{n,m}(t) = \frac{f_{n,m}}{\kappa\lambda_{n,m}}\Big(1 - e^{\kappa\lambda_{n,m}t}\Big).$$

La solución del problema original es entonces

$$T(x,y,t) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{a}x + \sum_{n\ \text{impar}} \frac{f_{n,0}}{\kappa\lambda_{n,0}}\Big(1 - e^{\kappa\lambda_{n,0}t}\Big)\sqrt{\frac{2}{ab}}\ \sin\Big(\frac{\pi n}{a}x\Big)$$
$$+ \sum_{n,m\ \text{impares}} \frac{f_{n,m}}{\kappa\lambda_{n,m}}\Big(1 - e^{\kappa\lambda_{n,m}t}\Big)\frac{2}{\sqrt{ab}}\ \sin\Big(\frac{\pi n}{a}x\Big)\cos\Big(\frac{\pi m}{b}y\Big).$$

Notar que $\kappa\ \lambda_{n,m} < 0$ para todo n, m y la solución decae exponencialmente a un nuevo estado estacionario.

Existencia y unicidad La técnica de solución de la ecuación de calor expandida en autofunciones del Laplaciano, siempre y cuando las condiciones de contorno sean tales que el Laplaciano sea autoadjunto y dispongamos por lo tanto del teorema espectral, claramente garantiza la existencia y unicidad de la solución de la ecuación del calor. Esto es por que la descomposición en la base ortonormal de autofunciones unívocamente determinan las ecuaciones ordinarias que deben satisfacer los coeficientes $c_n(t)$, las cuales a su vez, dada la condición inicial, tienen solución unívocamente determinada. Una prueba alternativa de unicidad, sin apelar a ninguna descomposición en autofunciones, puede realizarse a partir de una propiedad básica del Laplaciano llamada "Teorema del máximo". Esta prueba es simple e interesante, el lector interesado puede consultarla en el libro de Reula ([1], sección 14.2).

Por supuesto el estudio realizado aquí para la ecuación del calor se generaliza sin inconvenientes a problemas para otras ecuaciones parabólicas de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L(u) = f,$$

con condiciones de contorno para las cuales el operador elíptico L es autoadjunto y disponemos por lo tanto de un teorema espectral (es decir, de una base completa de autofunciones).

Referencias

[1] Oscar A. Reula, *Métodos Matemáticos de la Física*, Editorial de la Universidad Nacional de Córdoba, (2009).