Siguiendo el Ejemplo 1.2.10 de las notas, y considerando a $\mathcal{A} = a\partial_x^2 - b\partial_x + c$ como un operador de $\{p_5(x)\}$ en $\{p_5(x)\}$, primero vemos su efecto sobre la base $\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}1 &= c,\\
\mathcal{A}x &= -b + cx,\\
\mathcal{A}x^2 &= 2a - bx + cx^2,\\
\mathcal{A}x^3 &= 6ax - 3bx^2 + cx^3,\\
\mathcal{A}x^4 &= 12ax^2 - 4bx^3 + cx^4,\\
\mathcal{A}x^5 &= 20ax^3 - 5bx^4 + cx^5.
\end{aligned}$$

Con esto podemos construir la matriz de componentes de $\mathcal{A}$ en ese par de bases, que queda

$$\left[\mathsf{A}\right]^j_{\ i} = \begin{pmatrix} c & -b & 2a & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & -2b & 6a & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & -3b & 12a & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & -4b & 20a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -5b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

El kernel de esta matriz es vacío a menos que $c = 0$, en cuyo caso
$\ker\mathsf{A} = \operatorname{span}\left\{(1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}\right\}$, o que además $b = 0$, en cuyo caso
$\ker\mathsf{A} = \operatorname{span}\left\{(1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}\right\}$. Por lo tanto $\ker\mathcal{A} = \emptyset$ si $c \neq 0$, $\ker\mathcal{A} = \operatorname{span}\{1\}$ si $c = 0$ y $b \neq 0$, y $\ker\mathcal{A} = \operatorname{span}\{1,x\}$ si $b = c = 0$. (si a también es cero, $\mathcal{A}$ es el operador nulo, y su kernel es trivialmente todo el espacio.)

La verificación consiste en aplicar $\mathcal{A}$ a un polinomio arbitrario

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5,$$

lo que da

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}p = {}& c\alpha_5 x^5 + (c\alpha_4 - 5b\alpha_5)x^4 + (20a\alpha_5 - 4b\alpha_4 + c\alpha_3)x^3\\
&+ (12a\alpha_4 - 3b\alpha_3 + c\alpha_2)x^2 + (6a\alpha_3 - 2b\alpha_2 + c\alpha_1)x + (2a\alpha_2 - b\alpha_1 + c\alpha_0),
\end{aligned}$$

y mostrar que no existe solución no trivial para los coeficientes α_i a menos que $c = 0$ o $b = c = 0$, y que en esos casos la solución no trivial corresponde a $p = \alpha_0$ y $p = \alpha_0 + \alpha_1 x$, respectivamente.

Ojo, esto no quiere decir que la ecuación diferencial

$$\mathcal{A}f = af'' - bf' + c = 0$$

no tenga solución, sólo que no tiene solución polinomial (de grado ≤ 5) a menos que $c = 0$ o $b = c = 0$.