

Curso Redes Complejas, La Plata, 2023, Clase 1^o

Juan I. Perotti*

Instituto de Física Enrique Gaviola (IFEG-CONICET),

Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina and

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,

Universidad Nacional de Córdoba, Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina

(Dated: September 4, 2023)

Introducción. Representación matemática y computacional de redes. Medidas y métricas. La estructura y función de redes reales.

I. NOTACIÓN

Utilizaremos letras minúsculas para denotar variables. Letras mayúsculas para denotar conjuntos o variables estocásticas. Denotaremos por $X_1 X_2 \dots X_n$ al producto cartesiano de los conjuntos X_1, X_2, \dots y X_n . Denotaremos por $(X \rightarrow Y)$ al conjunto de funciones de X en Y . De la misma manera, denotaremos por $(X_1 \dots X_n \rightarrow Y)$ a un conjunto de funciones multivariadas. Cuando X e Y son espacios vectoriales, denotaremos por $[X \rightarrow Y]$ al conjunto de funciones lineales de X en Y . Similarmente, cuando X_1, X_2, \dots, X_n son espacios vectoriales, denotaremos por $[X_1 \dots X_n \rightarrow Y]$ al conjunto de funciones multilineales de $X_1 \dots X_n$ en Y . Usaremos subíndices para enumerar vectores. Por ejemplo, $b_1, b_2, \dots, b_n \in X$ podrían denotar una base de X . Usaremos supraíndices para enumerar coordenadas. Por ejemplo, $v = \sum_i v^i b_i = v^i b_i$ podría denotar la descomposición lineal de un vector $v \in X$ en la base anterior. Además, en la última igualdad hemos introducido la notación de Einstein. A saber, asumimos una suma implícita cuando existe un subíndice y un supraíndice repetido. Denotamos por z^* al complejo conjugado de $z \in \mathbb{C}$. Denotamos variables aleatorias (o estocásticas) con letras mayúsculas X y valores correspondientes con correspondientes minúsculas x . El valor esperado de una variable aleatoria X lo denotamos por $\langle X \rangle$, o equivalentemente, y en un abuso de notación, $\langle x \rangle$. Denotamos por $P(X)$ la distribución de probabilidades asociada a una variable aleatoria X , y por $P(X = v)$ a la probabilidad de que X adopte el valor v . También definimos $P(x) := P(X = x)$.

II. GRAFOS

Un grafo es una tupla $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de elementos llamados nodos (o vértices) y E es un conjunto de conjuntos de dos elementos llamados links (o edges). Por ejemplo, $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ y $E = \{\{1, 3\}, \{2, 7\}, \dots\}$. Cada link representa una relación entre dos nodos. Así, el link $\{1, 3\}$ indica que los nodos 1 y 3 están relacionados.

Un grafo dirigido es similar a uno grafo común o no dirigido, pero con links representados por pares ordenados en vez de conjuntos de dos elementos, con el objetivo de atribuirles direcciones a las relaciones o links. Por ejemplo, en $E = \{(1, 3), (2, 7), (3, 1), \dots\}$, el link dirigido $(1, 3)$ representa una conexión que va desde el nodo 1 al nodo 3, mientras que el link $(3, 1)$ una conexión que va desde el nodo 3 al 1.

También existen multigrafos. En un multigrafo, el conjunto de links E no es un conjunto, sino que es un multiconjunto [1]. Es decir, E es un conjunto de elementos que pueden repetirse.

Ejercicio 1: **a)** Cuántas veces aparece el link $\{1, 3\}$ en $E = \{\{1, 3\}, \{2, 7\}, \{3, 1\}, \{1, 3\}\}$? **b)** De manera similar, cuántas veces aparece el link $(1, 3)$ en $E = \{(1, 3), (2, 7), (3, 1), (1, 3)\}$?

Los grafos anotados o decorados vienen equipados con funciones del tipo $f \in (V \rightarrow X)$ y $g \in (E \rightarrow Y)$, i.e. funciones como f que van desde el conjunto de nodos V a un conjunto arbitrario X y funciones como g que van desde el conjunto de links E a otro conjunto arbitrario Y . Cuando X e Y son $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , se suele llamar a G grafo pesado.

Ejercicio 2: Sea $G = (V, E)$ es un multigrafo decorado donde el link e aparece de manera repetida. Puede la función g adoptar un valor diferente en cada realización de e ?

III. REPRESENTACIONES MATRICIALES DE GRAFOS

Un multigrafo dirigido G puede representarse por una matriz a en donde la entrada a_{ij} representa el número de links existentes en G que van desde el nodo j al nodo i . En particular, $a_{ij} = 0$ indica que no existe link alguno

conectando a j con i . a se llama matriz de adyacencia de G . Siguiendo la notación matricial, es conveniente denotar a cualquier link $e \in E$ que conecta al nodo j con el nodo i por la expresión ij .

Los grafos pueden tener autolinks, a saber links que van de un nodo a si mismo. Matricialmente, esto quiere decir que existen entradas diagonales no nulas en la matriz de adyacencia, i.e. $a_{ii} > 0$.

Es conveniente representar un grafo no dirigido con un grafo dirigido utilizando links recíprocos. En términos matriciales, esto quiere decir que conviene representar un grafo no dirigido con una matriz de adyacencia simétrica, i.e. una matriz a en donde $a_{ij} = a_{ji}$ para cada $i, j \in V$. En particular, conviene asumir que el número de autolinks es par, i.e. que $a_{ii} = 2k$ para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. El fin de estas convenciones es puramente práctica. De esta manera, diversas fórmulas que involucran grafos pueden aplicarse tanto al caso dirigido como al caso no dirigido sin modificación alguna, o con modificaciones mínimas.

En un grafo decorado G , se puede remplazar la matriz de adyacencia a por una matriz w tal que $w_{ij} = g(ij)$ para cada link $ij \in E$ que conecta a j con i .

A. Que es una interacción?

Motivaremos ahora el uso de grafos para representar interacciones entre las componentes de un sistema. Consideremos una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector que especifica el estado del sistema para cada tiempo $t \in \mathbb{R}$ y posee componentes de componentes $x_i(t)$. Además, $f \in (\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^n)$ es una función vectorial no necesariamente lineal. Podemos representar la anterior EDO, utilizando un sistema de EDOs en términos de las componentes

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

En esta expresión, f_i no necesariamente es una función de todas las componentes x_1, \dots, x_n . Por ejemplo, para algún sistema f_1 puede depender de x_5, x_9 y x_n , mientras que f_2 de x_2 y x_3 , etc. Mientras que en otro sistema, f_1 puede depender de x_3 y f_2 de x_3, x_5 y x_{n-1} , etc. Estas relaciones de dependencias pueden representarse con un grafo dirigido. A saber, $a_{ij} = 1$ si f_i dependen de x_j , y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.

Si desarrollamos en serie a f_i en un entorno cercano a un valor $x \in \mathbb{R}^n$, obtenemos

$$\begin{aligned} f_i(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) &= f_i(x_1, \dots, x_n) + \\ &\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) dx_j + \dots \\ &= f_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_j w_{ij} dx_j + \dots \end{aligned}$$

donde la magnitud $dx^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ se asume relativamente pequeña y reconocemos en las expresiones

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

las entradas de una correspondiente matriz de adyacencia w_{ij} . Podemos interpretar la matriz w_{ij} cómo la representante de la estructura de interacciones entre las n componentes de un sistema cuya dinámica viene modelado por la EDO anteriormente descripta.

IV. OBSERVABLES Y MÉTRICAS

A. Grados

En lo que sigue llamaremos grafos a los grafos simples (i.e. no multigrafos) no dirigidos, digrafos a los grafos simples dirigidos, multigrafos a los multigrafos no dirigidos y multidigrafos a los multigrafos dirigidos.

Las observables más simples de un grafo, digrafo, multigrafo y multidigrafo son el número de nodos n y el número de links m . Son observables macroscópicas.

Luego podemos observar el grado de los nodos, i.e. el número de conexiones que cada nodo posee. Los grados son observables microscópicas. En el caso de un digrafo y un multidigrafo, el grado de entrada del nodo i es $k_i = \sum_j a_{ij}$. Y el grado de salida es $s_i = \sum_j a_{ji}$. Para un grafo y un multigrafo, $k_i = s_i$ y $2m = \sum_{ij} a_{ij} = \sum_i k_i = \sum_i s_i = \sum_{ij} a_{ji}$.

El grado medio de un grafo o un multigrafo es $\langle k \rangle = n^{-1} \sum_i k_i = 2m/n$. De la misma manera, el grado medio de entrada y el grado medio de salida de un digrafo y un multidigrafo son $\langle k \rangle = n^{-1} \sum_i k_i = m/n = n^{-1} \sum_i s_i = \langle s \rangle$. Notar que en este caso no hay un factor 2. Para un grafo y un digrafo, el grado máximo de un nodo es $k_i = q_i = z_i = n - 1$ si se omiten auto-conexiones, o $k_i = n + 1$ y $k_i = s_i = n$ si se permiten, respectivamente. Una cantidad muy estudiada es la distribución de grados, es decir el número n_k de nodos de un grafo que poseen grado k .

Un grafo o un digrafo se dice ralmente conectado (sparse) si $\langle k \rangle \sim 1$, en cuyo caso $m \sim n$. Y se dice densamente conectado si $\langle k \rangle \sim n$, en cuyo caso $m \sim n^2$. El grafo totalmente conectado posee $n(n-1)/2$ conexiones si no se consideran autolinks.

Ejercicio 3: a) Cuantas conexiones posee un grafo totalmente conectado si se consideran autolinks?

Ejercicio 3: b) Cuantas conexiones posee un digrafo totalmente conectado si se omiten y si se consideran autolinks?

Para un grafo sin autolinks, la densidad de conexiones es $\rho = m/\binom{n}{2} = \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{\langle k \rangle}{n-1}$. Para grafos raros $\rho \sim 1/n$ y para grafos densos $\rho \sim 1$.

B. Asortatividad

Supongamos que los nodos están divididos en clases. Sea c_i la clase del nodo i . Existe algún tipo de correlación entre las clases de nodos vecinos? Para responder dicha pregunta, se puede calcular el coeficiente

$$\phi_c(a) = \sum_{ij} a_{ij} \delta_{c_i c_j}$$

donde $\delta_{cc'} = 1$ si $c = c'$ y $\delta_{cc'} = 0$ en caso contrario. Luego, con el fin de comparar, podemos promediar dicho coeficiente sobre un ensamble A_a de redes de características similares a a

$$\langle \phi_c(a) \rangle = \sum_{a' \in A_a} P(a') \phi_c(a')$$

Por ejemplo, para un grafo no dirigido a , podemos considerar el ensamble de grafos que preservan el grado de los nodos de a , de manera que

$$P(a) = \prod_{ij} P(a_{ij})$$

$$P(a_{ij} = 1) \approx \frac{k_i k_j}{2m}$$

y

$$P(a_{ij} = 0) = 1 - P(a_{ij} = 1)$$

De este modo

$$\sum_{a' \in A} P(a') \left(\sum_{rs} a'_{rs} \right) = \sum_{a' \in A} \left(\prod_{ij} P(a'_{ij}) \right) \left(\sum_{rs} a'_{rs} \right) = \sum_{ij} \sum_{a_{ij} \in \{0,1\}} a'_{ij} P(a'_{ij}) = \sum_{ij} \frac{k_i k_j}{2m} = 2m$$

y

$$\langle \phi_c(a) \rangle \approx \sum_{ij} \frac{k_i k_j}{2m} \delta_{c_i c_j}$$

Luego

$$Q_c(a) := \phi_c(a) - \langle \phi_c(a) \rangle \approx \sum_{ij} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta_{c_i c_j}$$

Si esta cantidad es positiva, luego las clases de nodos vecinos tienden a coincidir más de lo que coinciden en una red elegida al azar. En este caso, la correlación se dice asortativa. Si por el contrario, es negativa, las clases de nodos vecinos tienden a diferir más de lo que difieren en una red elegida al azar, y la correlación se dice disasortativa.

A la cantidad $Q_c(a)$ se la suele “normalizar” dividiéndola por el máximo valor que puede alcanzar, i.e. se computa $\frac{Q_c(a)}{Q_{\max}(a)}$ donde

$$Q_{\max}(a) = \phi_{\max}(a) - \langle \phi_c(a) \rangle$$

donde a su vez $\phi_{\max}(a) = 2m$.

Esta idea también puede aplicarse a atributos cuantitativos, i.e. atributos especificados por un vector w de coordenadas $w_i \in \mathbb{R}$. En dicho caso,

$$\phi_w(a) = \sum_{ij} a_{ij} w_i w_j$$

En este caso, $\phi_{\max}(a) = \sum_{ij} k_i \delta_{ij} w_i w_j$, lo cual corresponde al caso en que todo link conecta nodos con atributos iguales, i.e. $w_i = w_j$ si $a_{ij} = 1$.

C. Caminos

Dos links son adyacentes si están conectados a un mismo nodo. Por ejemplo, los links ij y ri son links adyacentes gracias al nodo i . Por otro lado, los links ij y rs no son links adyacentes.

Un camino es una secuencia de links adyacentes. Por ejemplo, la secuencia ij, ir, rs es un camino de largo tres. En el caso de un digrafo, este camino es dirigido y lleva del nodo s , al nodo r y luego al nodo i .

El número de caminos de largo ℓ entre dos nodos i y j de un grafo descrito por una matriz de adyacencia a viene dado por

$$n_{\ell ij} = (a^\ell)_{ij}$$

donde la $\ell + 1$ potencia de a se calcula usando $(a^{\ell+1})_{ij} = \sum_r (a^\ell)_{ir} a_{rj}$. Notar que $n_{\ell ii}$ denota el número de loops de largo ℓ que pasan por i . Estos caminos pueden repetir nodos, i.e. no son self-avoiding.

D. Componentes conectadas

En un grafo, se dice que dos nodos i y j pertenecen a una misma componente si existe un camino que los conecte, i.e. si $n_{nij} > 0$. Esto define una relación de equivalencia entre pares de nodos, y por ende, un grafo puede dividirse en componentes. Cada componente es un grafo en si mismo.

Ejercicio 4: a) Cuál es el número máximo de componentes que puede tener un grafo de n nodos? Y el número mínimo?

Ejercicio 4: b) Cuántas componentes hay en el grafo de la figura 1?

En redes dirigidas existe la noción de componente fuertemente conectada. A saber, dos nodos i y j pertenecen a una misma componente fuertemente conectada si existe un camino dirigido desde i hacia j y un camino dirigido desde j hacia i . De esta manera, la información puede fluir llenando y viniendo entre ellos.

E. Geodésicas topológicas

Si dos nodos pertenecen a una misma componente, luego existe uno o varios caminos que los conectan. La distancia topológica entre dos nodos se define por

$$\ell_{ij} = \min \{ \ell : n_{\ell ij} > 0 \}$$

donde adoptamos la convención $\min \{ \} = \infty$, de manera que dos nodos en componentes distintas están a una distancia topológica infinita. Pueden existir varios caminos de distancia mínima entre dos nodos. Cada uno de ellos constituye una geodésica topológica entre los nodos.

Ejercicio 5: Cuál es la distancia topológica entre los nodos 1 y 3 del grafo de la figura 1? Y la distancia topológica entre los nodos 2 y 8?

El diámetro de un grafo es la distancia topológica más grande que existe de entre todos los pares de nodos del mismo

$$\ell_{\max} = \max_{ij} \ell_{ij}$$

y es una medida global. Otra medida global de caracter similar es la distancia topologica promedio $\langle \ell \rangle = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{ij} \ell_{ij}$.

F. Coeficiente de clustering

El coeficiente de clustering c_i asociado a un nodo i da una idea de cuan loopy es un grafo a nivel local. Es la fracción del número de pares de vecinos de i conectados entre si sobre el número de pares de vecinos de i . Para un grafo sin autolinks

$$c_i = \frac{\frac{1}{2} \sum_{jr} a_{ij} a_{ir} a_{jr}}{\frac{1}{2} \sum_{jr} a_{ij} a_{ir}} = \frac{k_i t_i}{k_i(k_i - 1)} = \frac{t_i}{k_i - 1}$$

donde $\frac{1}{2} t_i$ es el número de pares de vecinos de i conectados entre si (o triángulos) y $\frac{1}{2} k_i(k_i - 1)$ es el máximo posible. A nivel global, se suele utilizar el promedio $\langle c \rangle = n^{-1} \sum_i c_i$. Una definición alternativa a nivel global considera el número de triángulos sobre el número de triples conectados.

G. Centralidades

Una cuestión muy estudiada es la importancia o *centralidad* de los nodos de una red. Diversas medidas topológicas se han desarrollado con el objetivo de cuantificar esta idea.

1. Degree centrality

La más simple consiste en rankear los nodos por su grado, asumiendo que un nodo es más importante cuanto más conectado esté. Por ejemplo, algunas personas tiene mas de 100 millones de seguidores en twitter, mientras que la mayoría tienen unas pocas

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_most-followed_Twitter_accounts

El paper más citado posee poco mas de 300 mil citas, mientras que el promedio es ~ 10 [2]

<https://www.nature.com/news/the-top-100-papers-1.16224>

2. Eigenvector centrality

Si bien la conectividad de un nodo es importante, también es importante tener en cuenta, no sólo cuantos vecinos tiene un nodo, sino también cuán importantes son los vecinos. Esta idea es capturada por la *eigenvector centrality*. Considerando una red descrita por una matriz de adyacencia a , partimos de una centralidad inicial uniformemente distribuida, i.e. $x_i(0) = 1$ para todo i . Luego actualizamos las centralidades usando

$$x_i(t+1) = \sum_j a_{ij} x_j(t)$$

Esta forma de actualizar las centralidades refuerza la centralidad del nodo i en base a la centralidad de sus vecinos. Tras t pasos, obtenemos (en notación matricial)

$$x(t) = a^t x(0)$$

donde a^t es la t -ésima potencia de a . Cómo las entradas de a son positivas, los autovalores de a son no negativos. Si v_1, \dots, v_n son los autovectores de a y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ los correspondientes autovalores, podemos escribir

$$x(0) = c^i v_i$$

y, por ende,

$$x(t) = a^t(c^i v_i) = c^i a^t v_i = \sum_i c^i \lambda_i^t v_i = \lambda_1^t \sum_i c^i \frac{\lambda_i^t}{\lambda_1^t} v_i$$

Para una red totalmente conectada, $\lambda_i/\lambda_1 < 1$ para todo $i > 1$ y, por ende

$$x(t) \rightarrow \lambda_1^t v_1$$

para $t \rightarrow \infty$. En otras palabras, el vector de centralidades es proporcional al autovector asociado al autovalor más grande. Obviando un factor común de proporcionalidad, la misma información puede obtenerse de resolver

$$a x = \lambda_1 x$$

i.e., la centralidad del nodo i viene dada por

$$x_i = \lambda_1^{-1} \sum_j a_{ij} x_j$$

3. Katz centrality

La eigenvector centrality en general exhibe problemas indeseables en redes dirigidas. A saber, sólo los nodos en las componentes fuertemente conectadas reciben una centralidad no nula. Para abordar este problema, L. Katz propone la siguiente modificación

$$x = \alpha a x + v$$

donde v_i representa una pequeña cantidad de centralidad que el nodo i recibe gratis. Despreciando una constante de proporcionalidad común a todos los nodos, la propuesta de Katz admite solución

$$x = (1 - \alpha a)^{-1} v$$

Para $\alpha \rightarrow 0$, todos los nodos presentan la misma centralidad. A medida que α aumenta, las centralidades se vuelven menos equitativa y eventualmente presentan una divergencia cuando $\alpha \rightarrow \lambda_1$. Para valores de $\alpha > \lambda_1$, aparecen centralidades negativas. La elección de un valor óptimo para α es un tema de discusión.

4. Page rank centrality

En eigenvalue y Katz centrality, la importancia que un nodo aporta a sus vecinos es independiente de cuantos vecinos este tenga. Esta característica no siempre es razonable. Por ejemplo, en el caso de una cita, Katz parece razonable. Sin embargo, en una red social, un individuo puede prestarle poca atención a cada uno de sus contactos si tiene muchos. De la misma manera, una pagina web puede redirigir pocos navegantes a una página específica (asumiendo que todas son de importancias similares), si apunta a una gran cantidad de ellas. Una alternativa similar a Katz centrality que incorpora una compensación por el número de vecinos, es la propuesta por Larry Page, uno de los fundadores de Google, y se la conoce como Page-Rank centrality. Formalmente, la centralidad del nodo i según Page-Rank viene dada por

$$x_i = \alpha \sum_j \frac{1}{k_j} a_{ij} x_j + v_i$$

Matricialmente,

$$x = \alpha a d^{-1} x + v$$

donde $d_{ij} = k_i \delta_{ij}$.

5. Betweenness centrality

La betweenness centrality de un nodo i se define

$$x_i = \sum_{jr} \frac{n_{ijr}}{n_{jr}}$$

donde n_{jr} es el número de geodésicas topológicas que conectan el nodo j con el nodo r , mientras que n_{ijr} es el número de dichas geodésicas que pasan por i . La idea es cuantificar cuanto se afecta la comunicación de la red al remover el nodo i .

V. REDES EMPÍRICAS

A. ¿Que es un sistema complejo?

La noción de complejidad no está precisamente definida. Sin embargo, podemos identificar algunas de sus características. Típicamente, la complejidad se diferencia de patrones regulares y/o patrones fuertemente aleatorios, ya que estos pueden entenderse o al menos describirse usando relativamente pocas palabras y/o ecuaciones. Los sistemas complejos, sin embargo, inherentemente incorporan accidentes aleatorios que se agregan a su estructura de manera funcional [3]. Como resultado, el efecto conjunto de estos accidentes generalmente no pueden describirse de manera reduccionista, salvo ciertas características universales que diversos sistemas complejos suelen exhibir.

B. ¿Que es una red compleja?

Existe una gran variedad de sistemas en la naturaleza que pueden ser asociados con grafos representando relaciones entre entidades. Por ejemplo, sistemas de muchas componentes interactuantes. No todos estos sistemas y/o grafos asociados presentan características de complejidad. Por ejemplo, las interacciones entre los átomos y moléculas de sólidos comunmente se representan usando grillas. Las grillas constituyen un tipo de red de interacciones que pueden describirse repitiendo un patrón regular, y por ende tendemos a no asociarlas con la noción de red compleja. En el otro extremo están las redes de Erdős-Rényi, en donde n nodos se conectan de forma totalmente aleatoria. Más precisamente, cada par de nodo de una red de Erdős-Rényi se conecta independientemente con probabilidad p . Un ensamble de redes de Erdős-Rényi carece de estructura alguna y por ende no es complejo. Para describir un ensamble tal, basta con informar el número de nodos que poseen sus redes y la conectividad p con las que se generan.

Además de las tradicionales estructuras de interacciones que se usan en física, existe una gran variedad de tipo de redes: sociales, biológicas, tecnológicas, económicas, de infraestructura, etc. Existen varias páginas web que ofrecen datasets de redes complejas. Aquí citamos algunas de las más importantes:

<https://icon.colorado.edu/#!/networks>
<https://snap.stanford.edu/data/>
<https://networkrepository.com>
<http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/>
<http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/data/>
<https://toreopsahl.com/datasets/>
<https://www.complex-networks.net/datasets.html>
<https://networks.skewed.de/>
<http://konect.cc/networks/>

Como ejemplos específicos extraídos de la última página web de la lista. Tenemos a Zachary's Karate Club, una red de 36 nodos y 78 links representando relaciones de amistad en un club de karate. La red trófica de Chesapeake Bay representando relaciones 170 tróficas entre 39 especies. La red "HIV" representando 41 contactos sexuales entre 40 individuos involucrados en la propagación temprana del virus. Esta red es la que da origen al término "paciente cero". La red "Dolphins" representando 159 relaciones de amistad entre 62 delfines de una bahía de Nueva Zelanda. La red "Bible" que representa 16401 co-ocurrencias entre 1773 sustantivos en la versión KJV de la biblia. La red neuronal del C. Elegans representando 4296 conexiones neuronales entre 297 neuronas del sistema nervioso del gusano. La red "Yeast" representando 2277 interacciones proteína-proteína observadas en el proteoma de la levadura *Saccharomyces Cerevisiae*. La red "Euroroads" representa 1417 caminos conectando 1174 ciudades de Europa. La

red “Linux Sources” representa 213954 dependencias entre 30837 archivos del código fuente del S.O. Linux. La red “WordNet” representa 656999 relaciones gramaticales entre 146005 palabras del inglés. La red de actores “Actors”, representa 1470404 participaciones de 383640 actores en 127823 películas. La red “Notre Dame” representa 1497134 hiperlinks entre 325729 páginas web del sitio web de la Universidad de Notre Dame. La red “Youtube friendships” indicando 2987624 relaciones de amistad entre 1134890 usuarios de Youtube. La red “UK domain (2007)” representa 3301876564 hiperlinks entre 105153952 sitios web con el dominio .uk.

1. Small-world

En los 60s, un psicólogo experimental llamado Stanley Milgram realizó el siguiente experimento. Envío 96 paquetes a personas elegidas aleatoriamente de la guía telefónica de la ciudad de Omaha situada en Nebraska. Cada paquete describía el propósito del experimento e incluía instrucciones en donde se pedía a los destinatarios que reenviasen el paquete con el objetivo de que eventualmente llegue a una persona en particular (amigo de Milgram) que vivía en Boston Massachusetts, a más de 1000 millas de Omaha. Las instrucciones sólo indicaban el nombre, la dirección y la ocupación del amigo de Stanley en Boston, e instruía a los destinatarios reenviar el paquete a conocidos suyos con la esperanza de aumentar las chances de que los paquetes eventualmente llegen al destinatario final en Boston, luego de que los nuevos destinatarios repitan el proceso. De los 96 paquetes, sólo 18 llegaron al amigo de Milgram en Boston, pero intervinieron en promedio 6 destinatarios por paquete. No es increíble? De los más de 100 millones de personas en USA, sólo bastaron ≈ 6 intermediarios para que los paquetes llegen a su destino final.

El resultado del experimento de Milgram puede explicarse de la siguiente manera. La red de contactos de personas no se parece a una grilla 2D, en donde el número de personas que un individuo puede eventualmente contactar crece cuadráticamente con la distancia topológica, i.e. $n \sim \ell^2$. Más bien, se parece a un *arbol*, en donde el número de personas contactables crece exponencialmente, i.e. $n \sim k^\ell$. Así, si una persona promedio tiene $k \sim 10$ contactos, tras $\ell = 6$ intermediarios podrá contactar a $10^6 = 1$ millon de personas.

Técnicamente, se puede ver que $n \sim k^\ell$ corresponde al límite $n \sim \ell^d$ para $d \rightarrow \infty$. En otras palabras, podemos decir que la topología de una red en la que $n \sim k^\ell$, se asemeja a la de una grilla de dimensión finita. La mayoría de las redes complejas que se observan en la naturaleza presentan esta característica de *mundo-pequeño* o *small-world*, afectando significativamente el comportamiento de los sistemas asociados [4].

Ejercicio 5: Encuentre 5 redes complejas en el sitio web **konect** que Uds. crea exhiben la propiedad de mundo pequeño. Encuentre al menos una que no lo haga y argumente porqué cree Uds. que no lo hace.

2. Scale-free

En los 60's Derek de Solla Price observó que la distribución del número de citas que reciben los papers se asemeja a una distribución de Pareto, [5] i.e.

$$P(k > x) \sim x^{-\gamma+1}$$

para $x \gg 1$. Posteriormente, esta interesante característica topológica es confirmada a fines de los 90's en un sampleo de la estructura de conexiones de la internet [6] y en un sampleo de la WWW [7].

Aunque las distribuciones de grados de la mayoría de las redes complejas no son estrictamente leyes de potencias [8], es interesante observar que una gran variedad de ellas exhiben al menos distribuciones de cola larga.

Ejercicio 6: Explore el sitio web **konect** y encuentre 5 redes complejas que exhiban una distribución de grados de cola larga o incluso ley de potencias. Encuentre otras 5 que no lo hagan y argumente porqué cree Uds. que no lo hacen.

Una consecuencia importante de la presencia de una distribución de grados de cola larga es la existencia de hubs, i.e. nodos con un grado ordenes de magnitud mayor que la media, $k_{\text{hub}} \gg \langle k \rangle$. Esto suele impactar dramáticamente el comportamiento de fenómenos asociados a la red. Por ejemplo, la propagación de epidemias cambia dramáticamente cuando la red de contactos posee hubs, respecto de cuando no lo hace.

Appendix A: Geometría I

Sea X un conjunto arbitrario. Una función $d \in (X^2 \rightarrow \mathbb{R})$ se llama distancia métrica si: *i)* $d(x, y) \geq 0$, *ii)* $d(x, y) = 0$ sii $x = y$, *iii)* $d(x, y) = d(y, x)$ y *iv)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Equipado con d , el conjunto X se vuelve un espacio

Ejercicio B.1: Pruebe la unicidad de la descomposicion de la suma directa, i.e. prube que si $s+r = s'+r' \in S \oplus R$ con $s, s' \in S$ y $r, r' \in R$, luego $s = s'$ y $r = r'$.

Sean X e Y dos espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . El conjunto $XY = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ equipado con la operación

$$(x, y) + c(x', y') := (x + cx', y + cy')$$

definida para todo $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ y $c \in \mathbb{F}$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} . Los conjuntos $X\{0\} = \{(x, 0) : x \in X, 0 \in Y\}$ y $\{0\}Y = \{(0, y) : 0 \in X, y \in Y\}$ son subespacios de XY . Como $X\{0\} + \{0\}Y = XY$ y $X\{0\} \cap \{0\}Y = \{(0, 0)\}$, luego

$$XY = X\{0\} \oplus \{0\}Y$$

Por simplicidad, denotamos a este espacio vectorial $X \oplus Y$.

4. Transformaciones lineales e isomorfismos

Considerar espacios vectoriales X e Y sobre \mathbb{C} . Una función lineal $f \in [X \rightarrow Y]$ se llama transformación lineal, y operador lineal en el caso particular en que $Y = X$. La imagen $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ de f es un subespacio $\text{rng } f$ de Y llamado range de f . El conjunto $\text{krn } f := \{x : f(x) = 0, x \in X\}$ es un subespacio de X llamado kernel de f . El rank de f es la dimensión del range de f , i.e. $\text{rnk } f := \dim(\text{rng } f)$. El null de f es la dimensión del kernel de f , i.e. $\text{nll } f := \dim(\text{krn } f)$. El teorema nullity-rank asegura que $\text{nll } f + \text{rnk } f = \dim Y$.

Una transformación lineal biyectiva se llama isomorfismo lineal. El conjunto de los isomorfismos entre X e Y se denota por $[X \leftrightarrow Y]$. Si existe un isomorfismo lineal $f \in [X \leftrightarrow Y]$, luego X e Y se dicen isomorfos, lo cual formalmente se denota por $X \cong Y$. Cuando $X \cong Y$, luego $\dim X = \dim Y$. Si f es un isomorfismo lineal, luego $\text{rnk } f = 0$. Ejemplo, un espacio vectorial X sobre \mathbb{F} de dimensión $n = \dim X$ es isomorfo a \mathbb{F}^n , i.e. $X \cong \mathbb{F}^n$. Otro ejemplo, \mathbb{Q} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión 1, y \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} de dimensión infinita. De manera similar, \mathbb{F} es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} de dimensión infinita.

Ejercicio B.2: Pruebe las anteriores aseveraciones.

5. Espacio dual

El conjunto $X^! := [X \rightarrow \mathbb{C}]$ de las funciones lineales de X en \mathbb{C} es un espacio vectorial llamado dual de X . Si $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base de X , luego el conjunto $B^! = \{b^1, \dots, b^n\} \subset X^!$ tal que $b^i(b_j) = \delta_j^i$ es una base de $X^!$ llamada la base dual de B . Como corolario, $\dim X^! = \dim X$. Más aún, si $f = f_i b^i$ es la descomposición lineal de un $f \in X^!$ arbitrario en la base B^* , luego $f(b_i) = (f_j b^j)(b_i) = f_j b^j(b_i) = f_j \delta_i^j = f_i$. Se puede ver que $X^{!!} := (X^!)^! \cong X$, i.e. el dual del dual es isomorfo al espacio original.

6. Producto tensorial

Sean X, Y, Z espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{F} . Sea T un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y sea $t \in [XY \rightarrow T]$ una transformación bilineal. Luego, el par (T, t) es un producto tensorial de X e Y , si para cada transformación bilineal $f \in [XY \rightarrow Z]$ donde Z es arbitrario, existe una única transformación lineal $h \in [T \rightarrow Z]$ tal que $h(t(x, y)) = f(x, y)$ para todo $x, y \in XY$. Esquemáticamente,

$$\begin{array}{ccc} XY & \xrightarrow{t} & T \\ & \searrow f & \downarrow \exists h \\ & & Z \end{array}$$

Si existe otro producto tensorial (T', t') de X e Y , luego existe un isomorfismo lineal $\psi \in [T \leftrightarrow T']$ tal que $\psi(t(x, y)) = t'(x, y)$ para todo $x, y \in XY$. En otras palabras, el producto tensorial entre X e Y es único módulo isomorfismos. Por ende, podemos denotar a T por $X \otimes Y$ y a $t(x, y)$ por $x \otimes y$. Notar que $(x + cx') \otimes y = t(x + cx', y) = t(x, y) + ct(x', y) = x \otimes y + cx' \otimes y$ y, análogamente, $x \otimes (y + cy') = t(x, y + cy') = t(x, y) + ct(x, y') = x \otimes y + cx \otimes y'$. Si $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ es una base de X y $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ es una base de Y , luego $A \otimes B := \{b_1 \otimes a_1, \dots, b_1 \otimes a_m, \dots, b_n \otimes a_1, \dots, b_n \otimes a_m\}$ es

una base de $X \otimes Y$. Se puede probar el siguiente isomorfismo $(X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z)$, el cuál qpermite establecer las siguientes identidades $(x \otimes y) \otimes z \leftrightarrow x \otimes (y \otimes z) =: x \otimes y \otimes z$ para todo $x \in X$, $y \in Y$ y $z \in Z$. En otras palabras, el producto tensorial es asociativo, por lo que podemos denotar por $X \otimes Y \otimes Z$ a $(X \otimes Y) \otimes Z$ y a $X \otimes (Y \otimes Z)$.

Sean X_1, \dots, X_n espacios vectoriales sobre \mathbb{C} . Se puede probar que $[X_1 \dots X_n \rightarrow \mathbb{C}] \cong X_1^! \otimes \dots \otimes X_n^!$, i.e. el conjunto de transformaciones multilineales es isomorfo al producto tensorial de los duales de los dominios. Como corolario, $[X_1^! \dots X_n^! \rightarrow \mathbb{C}] \cong X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ puesto que $X_i^! \cong X_i$. En particular, $[X^{!p} X^q \rightarrow \mathbb{C}] \cong X \otimes \dots \otimes X \otimes X^! \otimes \dots \otimes X^! =: \otimes^p X \otimes^q X^!$, donde la última igualdad constituye una abreviación. Decimos que $\otimes^p X \otimes^q X^!$ constituye el espacio vectorial de tensores p veces contravariantes y q veces covariantes.

Si $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ es base de X y $B^! = \{b^1, \dots, b^n\}$ es base de $X^!$, luego $B \otimes B^! := \{b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_p} \otimes b^{j_1} \otimes \dots \otimes b^{j_q}\}$ constituye una base de $\otimes^p X \otimes^q X^!$. De esta manera, cualquier $t \in \otimes^p X \otimes^q X^!$ admite la descomposición lineal

$$t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_p} \otimes b^{j_1} \otimes \dots \otimes b^{j_q}$$

7. Norma, producto interno y ortonormalización

Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Una función $X \ni v \rightarrow |v| \in \mathbb{R}$ se denomina norma si, para todo $v, u \in X$ y $c \in \mathbb{C}$, satisface:

- i) $|v| \geq 0$,
- ii) $|v| = 0$ sii $v = 0$,
- iii) $|cv| = |c||v|$, y
- iv) $|v + u| \leq |v| + |u|$.

Una norma induce una distancia métrica $d(v, u) = |v - u|$ que además satisface:

- i) $d(v + w, u + w) = d(v, u)$, y
- ii) $d(cv, cu) = |c|d(v, u)$.

Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Una función $X^2 \ni v, u \rightarrow v.u \in \mathbb{C}$ se llama producto interno positivo definido y hermitiano si, para todo $v, u, w \in X$ y $c \in \mathbb{C}$, satisface:

- i) $v.(u + cw) = v.u + c v.w$,
- ii) $v.v \geq 0$,
- iii) $v.v = 0$ sii $v = 0$, y
- iv) $v.u = (u.v)^*$.

Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{C} equipado con un producto interno positivo definido y hermitiano. Una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de X se dice ortonormal si $b_i.b_j = \delta_{ij} \in \mathbb{R}$. El algoritmo de Gram-Schmidt transforma una base arbitraria $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ en una base ortonormal.

8. Isomorfismos musicales

Dado $u \in X$, el mapeo $X \ni v \rightarrow u.v \in \mathbb{C}$ define un elemento de $X^!$. El teorema de Riesz asegura que para cada $f \in X^!$, existe un único vector $u \in X$ tal que $v \rightarrow f(v) = v \rightarrow u.v$ para todo $v \in X$. Luego, existe una biyección entre X y $X^!$ en donde se puede asociar un único $v \in X$ denotado por f^\sharp para cada $f \in X^*$ y, análogamente, existe un único $f \in X^*$ denotado por v^\flat para cada $v \in X$. El mapeo $X \ni v \rightarrow v^\flat \in X^!$ es antilineal puesto que $(v + cu)^\flat(w) = (v + cu).w = (w.(v + cu))^* = (w.v + c w.u)^* = (w.v)^* + c^*(w.u)^* = v.w + c^* u.w = v^\flat(w) + c^* u^\flat(w)$ para todo $v, u, w \in X$ y $c \in \mathbb{C}$. El mapeo $X^! \ni f \rightarrow f^\flat \in X$ es el inverso del mapeo anterior, y por ende, también es antilineal. Notar que $(v^\flat)^\sharp = v$ y $(f^\flat)^\sharp = f$ para todo $v \in X$ y $f \in X^!$.

Gracias al teorema de representación de Riesz, a un producto interno sobre X se asocia un producto interno sobre $X^!$. A saber, $f.g := f^\sharp.g^\sharp$ para todo $f, g \in X^!$. Notar que $v^\flat.u^\flat = (v^\flat)^\sharp.(u^\flat)^\sharp = v.u$.

9. Métrica

Cuando X es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} equipado con un producto interno definido positivo y hermitiano, la función $X^2 \ni v, u \rightarrow v.u \in \mathbb{C}$ no es un tensor en $\otimes^2 X^*$, ya que es antilineal en el primer argumento.

Cuando X es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , la condición *iv*) del producto interno se reduce a $v.u = u.v$ para todo $v, u \in X$ y la función $X^2 \ni v, u \rightarrow g(v, u) := v.u \in \mathbb{R}$ se convierte en un tensor $m \in \otimes^2 X^*$ llamado tensor métrico o simplemente métrica. Si $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ es una base de X , se tiene

$$m_{ij} := m(b_i, b_j) = b_i.b_j = b_i^b(b_j)$$

por lo que $b_i^b(b_j) = m_{ij}b^j$. Luego

$$m_{ij} = b_i.b_j = b_i^b.b_j^b = (m_{ir}b^r).(m_{js}b^s) = m_{ir}m_{js}(b^r.b^s) =: m_{ir}m_{js}m^{rs}$$

donde hemos introducido las coordenadas $m^{rs} := b^r.b^s = \tilde{m}(b^i, b^j)$ del tensor $\tilde{m} \in \otimes^2 X$ en la base dual $B^!$, definido por $X^{!2} \ni f, g \rightarrow \tilde{m}(f, g) := f.g \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} m_{ij} &= m_{ir}\delta^r_j = m_{ir}m^{rs}m_{sj} \\ m_{ir}(\delta^r_j - m^{rs}m_{sj}) &= 0 \end{aligned}$$

Cómo $m(v, v) = 0$ sii $v = 0$, esto sólo puede ocurrir si y solo si

$$\delta^r_j = m^{rs}m_{sj}$$

En otras palabras, el tensor \tilde{m} determina una transformación inversa al tensor métrico m . En notación de Einsten, los coeficientes m_{ij} y m^{ij} permiten subir y bajar índices, puesto que si $f^\sharp = f^\sharp b_i$, luego

$$f^\sharp m_{ij} = f^\sharp(b_i.b_j) = (f^\sharp b_i).(b_j) = f^\sharp.b_j = f(b_j) = (f_s b^s)(b_j) = f_s \delta^s_j = f_j$$

y de manera análoga, si $v^b = v^b_i b^i$ luego $v^b_i m^{ij} = v^j$.

Ejercicio B.3: Pruebe esta última aseveración.

10. Complexificación

Los espacios complejos son algebraicamente cerrados y los reales no. Por ejemplo, hay operadores lineales sobre espacios reales que poseen autovalores complejos. Por ende, es preferible desarrollar el algebra lineal sobre espacios complejos que sobre espacios reales. Sin embargo, sólo hemos considerado métricas sobre espacios reales. Esto es así porque $v, u \rightarrow v.u$ no es un tensor cuando el producto interno es hermitiano. A continuación exponemos una forma de extender un espacio real a un espacio complejo, de manera que la métrica sobre el espacio real se extienda a un producto hermitiano el espacio complejo.

La complexificación extiende un espacio vectorial X sobre \mathbb{R} a un espacio vectorial Y sobre \mathbb{C} . La idea es darle sentido a la operación $(a + ib)v = av + ibv$ para $a, b \in \mathbb{R}$ y $v \in X$. Cómo *iv* no tiene sentido, puesto que v pertenece a un espacio vectorial real, la operación antes mencionada tiene que pensarse como una suma formal que asocia $av + ibv$ a un par $(av, bv) \in X^2$. Más aún, hay que darle sentido a la operación $(a + ib)(v + iw) = av - bw + i(av + bw)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $v, w \in X$. Estas consideraciones motivan la siguiente definición.

La complexificación de X es un conjunto $Y = X^2$ equipado con las operaciones

$$Y^2 \ni (v, u), (v', u') \rightarrow (v, u) + (v', u') := (v + v', u + u') \in Y$$

$$\mathbb{C}Y \ni (a + ib), (v, u) \rightarrow (a + ib)(v, u) := (av - bu, au + bv) \in Y$$

para todo $(v, u) \in Y$, $(v', u') \in Y$ y $a + ib \in \mathbb{C}$. Se puede ver que Y es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .

Ejercicio B.4: Pruebe que la anterior definición satisface los axiomas de espacio vectorial.

La anterior definición captura adecuadamente el algebra de un espacio vectorial complejo. Por ejemplo, Notar que

$$\mathbb{C}Y \ni i(v, u) = (-u, v) \in Y$$

lo cual corresponde a $i(v + iu) = -u + iv$. Análogamente,

$$i^2(v, u) = i(-u, v) = (-v, -u) = -(v, u)$$

corresponde a $i^2(v + iu) = i(iv + i^2u) =$ Notar que se puede asociar i con un operador lineal C sobre Y definido por

$$C(v, u) := (-u, v)$$

llamado operador flip. También se suele considerar el operador conjugación

$$J(u, v) := (u, -v)$$

Una métrica $X^2 \ni v, u \rightarrow (v, u) \in \mathbb{R}$ sobre X induce un producto interno definido positivo y hermitiano sobre Y

$$Y^2 \ni (v, u), (v', u') \rightarrow (v, u).(v', u') := (v, v') + (u, u') + i(v, u') - i(u, v') \in \mathbb{C}$$

Ejercicio B.5: Pruebe que la anterior definición satisface los axiomas de producto interno hermitiano sobre Y .

Conviene reformular la complexificación en términos de una notación más amigable. Denotando $X \setminus \{0\}$ por X , $\{0\}X$ por jX y $(v, u) \in Y$ por $v + ju$, se tiene que $Y = X \oplus jX$, que

$$(v + ju) + (v' + ju') = (v + v') + j(u + u')$$

que

$$(a + ib)(v + ju) = (av - bu) + j(au + vb)$$

y que

$$(v + ju).(v' + ju') = (v, v') + (u, u') + i(v, u') - i(u, v')$$

De esta forma, si identificamos sintácticamente j con i , recuperamos el álgebra tradicional de espacios vectoriales complejos. Por ejemplo $v.(ju') = i(v, u')$ tras la identificación corresponde a $v.(iu') = i(v, u')$ lo cual es correcto. De manera similar $(ju).v' = -i(u, v')$ que tras la identificación corresponde a $(iu).(v') = -i(u, v')$ que también es correcto. Cabe resaltar que, en estas expresiones, los términos a la izquierda de las igualdades representan productos internos sobre Y , y los términos de la derecha a productos internos sobre X .

* juan.perotti@unc.edu.ar

- [1] Del inglés multiset.
- [2] R. Adler, J. Ewing, and P. Taylor, Citation Statistics, Statistical Science **24**, 1 (2009).
- [3] M. Gell-Mann, *The quark and the jaguar: adventures in the simple and the complex* (W. H. Freeman, New York, 1994).
- [4] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks, nature **393**, 440 (1998).
- [5] D. J. D. S. Price, Networks of scientific papers: The pattern of bibliographic references indicates the nature of the scientific research front., Science **149**, 510 (1965).
- [6] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos, On power-law relationships of the internet topology, ACM SIGCOMM computer communication review **29**, 251 (1999).
- [7] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási, Diameter of the world-wide web, nature **401**, 130 (1999).
- [8] A. D. Broido and A. Clauset, Scale-free networks are rare, Nature communications **10**, 1017 (2019).