Curso Redes Complejas, La Plata, 2023, Clase 4º

Juan I. Perotti*
Instituto de Física Enrique Gaviola (IFEG-CONICET),
Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina and
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,
Universidad Nacional de Córdoba, Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina
(Dated: September 8, 2023)

Hipergrafos. Complejos simpliciales. Cálculo diferencial discreto.

I. OVERVIEW DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL CONTÍNUO

A. Algebra tensorial

Dado un espacio vectorial V, el espacio vectorial

$$\oplus_k \otimes^k V := (\otimes^1 V) \oplus (\otimes^2 V) \oplus ...\oplus$$

se llama algebra tensorial.

B. Producto exterior

El producto exterior es una especialización del producto tensorial que permite generar el subespacio de tensores antisimétricos.

Consideremos el producto tensorial $\otimes^k V$ de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Sea $\{b_1, ..., b_n\}$ una base de V. Luego, para cada todo tensor $t \in \otimes^k V$, existen únicos coeficientes $t^{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ tales que

$$t = t^{i_1 \dots i_k}\, b_{i_1} \otimes ... \otimes b_{i_k} \tag{1}$$

puesto que $\{b_{i_1} \otimes ... \otimes b_{i_k} : i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}\}$ es una base de $\otimes^k V$.

El operador antisimetrización

$$A \in [\oplus_k \otimes^k V \to \oplus_k \otimes^k V]$$

se define por

$$A(t) = \frac{1}{k!} \epsilon^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} t^{i_1 \dots i_k}\, b_{j_1} \otimes ... \otimes b_{j_k}$$

para cualquier tensor t como el de la Ec. 2 donde $\epsilon^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$ es igual a 1 si $j_1 ... j_k$ es una permutación par de $i_1 ... i_k$, es igual a -1 si es una permutación impar, y es igual a 0 en cualquier otro caso.

El producto exterior (o producto wedge) entre dos tensores $t \in \otimes^q V$ y $s \in \otimes^p V$ se define por

$$t \wedge s = \frac{(q+p)!}{q!p!} A(t \otimes s) \in \otimes^{p+q} V$$

Se puede ver que

$$t \wedge s = (-1)^{pq}\, s \wedge t$$

Además, se puede ver asociativo

$$(t \wedge s) \wedge r = t \wedge (s \wedge r) =: t \wedge s \wedge r$$

i.e. que el producto exterior es asociativo.

Notar que

$$b_{i_1} \wedge ... \wedge b_{i_k} = k! A(b_{i_1} \otimes ... \otimes b_{i_k})$$

Luego,

$$A(t) = t^{i_1 \dots i_k} A(b_{i_1} \otimes ... \otimes b_{i_k}) = \frac{1}{k!} t^{i_1 \dots i_k} \, b_{i_1} \wedge ... \wedge b_{i_k}$$

Sea $B_k := \{b_{i_1} \wedge ... \wedge b_{i_k} \,:\, i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}\}$. Denotamos por $\wedge^k V$ al espacio vectorial generado por B_k. Crucialmente, se puede ver que si $\mathsf{dim}\, V = n$, luego $\mathsf{dim}(\wedge^k V) = \binom{n}{k}$ para $k = 0, 1, ..., n$ y $\mathsf{dim}(\wedge^k V) = 0$ para $k > n$. Llamamos algebra exterior de V al espacio vectorial $\oplus_k \wedge^k V := (\wedge^0 V) \oplus (\wedge^1 V) \oplus ... \oplus (\wedge^n V)$. Claramente, la imagen de A es $\oplus_k \wedge^k V$ y $B := \cup_{k=0}^{n} B_k$ es una base de $\oplus_k \wedge^k V$. Además, $\mathsf{dim} \oplus_k \wedge^k V = 2^n$.

C. Variedad diferencial

Una variedad de dimensión n es un conjunto M equipado con un atlas de dimensión n. Un atlas es un conjunto de funciones $A = \{\psi_1, \psi_2, ...\}$ llamadas mapas. Cada mapa $\psi_i \in (U_i \ni p \leftrightarrow x = \psi_i(p) \in \mathbb{R}^n)$ establece un sistema de coordenadas sobre $U_i \subseteq M$. Crucialmente, todo punto $p \in M$ pertenence a alguna intersección del dominio de dos mapas, i.e. para cada p existe al menos un par de mapas ψ_i e ψ_j en A tal que $p \in U_i \cap U_j$.

La variedad se dice diferenciable si el mapa $\psi_i \circ \psi_j^{-1} \in (\mathbb{R}^n \leftrightarrow U_i \cap U_j \leftrightarrow \mathbb{R}^n)$ es diferenciable para cada par de mapas ψ_i e ψ_j del atlas A.

De ahora en adelante consideraremos variedades infinitamente diferenciables compuestas por un atlas con un sólo mapa ψ que establece un sistema de coordenadas $M \ni p \leftrightarrow x = \psi(p) \in \mathbb{R}^n$. Tener en cuenta que este atlas no es adecuado en general, pero lo adoptamos por simplicidad notacional.

D. Campo escalar

Dada una variedad M, un campo escalar es una función $f \in (M \to \mathbb{R})$. Claramente, el conjunto $(M \to \mathbb{R})$ de los campos escalares es un espacio vectorial.

E. Derivación

Sea X un conjunto. Claramente, $(X \to \mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Decimos que un operador lineal $d \in [(X \to \mathbb{R}) \to (X \to \mathbb{R})]$ es una derivación si satisface la regla de Leibniz

$$d(fg) = d(f)\, g + f\, d(g)$$

Notar que el conjunto de operadores derivación es un spacio vectorial, pues los operadores derivación son operadores lineales por definición.

F. Derivada direccional

Sean V un espacio vectorial. Claramente $f \in (V \to \mathbb{R})$ es un espacio vectorial. La llamada derivada direccional $f_u \in (V \to \mathbb{R})$ de f en la dirección de $u \in V$ queda definida por el límite

$$f_u(v) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(v + \epsilon u) - f(v)}{\epsilon}$$

para todo $v \in V$.

Para cada $u \in V$, sea $\partial_u \in [(V \to \mathbb{R}) \to (V \to \mathbb{R})]$ el operador lineal tal que

$$(\partial_u(f))(v) := f_u(v)$$

para todo $v \in V$.

Claramente, el conjunto $V^\circ := \{\partial_u : u \in V\}$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 1: Convénzase que los operadores ∂_u son operadores derivación.

Ejercicio 2: Convénzase que $V \ni u \to \partial_u \in V^\circ$ es un isomorfismo.

Para cada $v, u \in V$ sea $\partial_{vu} \in [(V \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}]$ tal que

$$\partial_{vu}(f) = (\partial_u(f))(v)$$

Claramente, el conjunto $V_v^\circ := \{\partial_{vu} : u \in V\}$ es un espacio vectorial. Los operadores derivación ∂_{vu} nos permiten calcular la derivada direccional $f_u(v) = \partial_{vu}(f)$ en la dirección u y evaluada en v de una función arbitraria $f \in (V \to \mathbb{R})$.

Ejercicio 3: Convénzase que, para cada $v \in V$, la transformación $V \ni u \to \partial_{vu} \in V_v^\circ$ es un isomorfismo.

G. Espacio tangente

Para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n)_x^\circ$ de correspondientes operadores derivación ∂_{xy} definidos para cada $y \in \mathbb{R}^n$. Usaremos estos espacios $(\mathbb{R}^n)_x^\circ$ para definir espacios tangentes sobre M.

Recordemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial y que disponemos del mapa $\psi \in (M \to \mathbb{R}^n)$ que establece una biyección $M \ni p \leftrightarrow x = \psi(p) \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $f \in (M \to \mathbb{R})$ podemos asociar una única $\hat{f} \in (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ dada por

$$\hat{f}(x) := f(\psi^{-1}(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Esto nos permite introducir, para cada $p \in M$, los operadores derivación $\partial_{px} \in [(M \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}]$ definidos por

$$\partial_{px}(f) := \partial_{\psi(p),x}(\hat{f})$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Correspondientemente, para cada $p \in M$, esto nos permite introducir el espacio vectorial

$$M_p^\circ := \{\partial_{px} : x \in \mathbb{R}^n\}$$

llamado espacio tangente a M en p.

Ejercicio 4: Convénzase que, para cada $p \in M$, la transformación $\mathbb{R}^n \ni x \to \partial_{px} \in M_p^\circ$ es un isomorfismo.

Ejercicio 5: Sea $\{b_1, ..., b_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Muestre que, para cada $p \in M$, el conjunto $\{\partial_{pb_1}, ..., \partial_{pb_n}\}$ es una base de M_p°.

Ejercicio 6: Muestre que, si $x = x^i b_i$, luego $\partial_{px} = x^i \partial_{pb_i}$.

H. Espacio cotangente

Para cada $p \in M$, denotemos por M_p^* al espacio dual de M_p°. Llamamos a M_p^* el espacio cotagente a M en p.

Recordemos que si $\{b_1, ..., b_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, luego $\{\partial_{pb_1}, ..., \partial_{pb_n}\}$ es una base de M_p°. Denotemos por $\{\partial^{pb_1}, ..., \partial^{pb_n}\}$ a la correspondiente base dual. Entonces

$$\partial^{pb_i}(\partial_{pb_j}) = \delta^i{}_j$$

por definición.

I. Campos tensoriales

Un campo tensorial k veces contravariante y q veces covariante es una función diferenciable $f \in (M \in p \to f(p) \in \otimes^k M_p^\circ \otimes^q M_p^*)$. Esto quiere decir que existen funciones $f^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_q} \in (M \to \mathbb{R})$ tales que

$$f(p) = f^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_q}(p)\, \partial^{pb_{j_1}} \otimes ... \otimes \partial^{pb_{j_q}} \otimes \partial_{pb_{i_1}} \otimes ... \otimes \partial_{pb_{i_k}}$$

También llamamos a f un campo (k,q)-tensorial. Denotamos por $M^{\circ *}_{k,q}$ al conjunto de los campos (k,q)-tensoriales. Claramente, $M^{\circ *}_{k,q}$ es un espacio vectorial. Finalmente, llamamos algebra tensorial al espacio vectorial

$$M^{\circ *} := \oplus_{k,q} M^{\circ *}_{k,q}$$

J. Formas

Una k-forma es un campo tensorial k-veces covariante y antisimétrico. Esto quiere decir que existen funciones diferenciables $f_{i_1...i_k} \in (M \to \mathbb{R})$, tales que

$$f(p) = \frac{1}{k!} f_{i_1...i_k}(p) \partial^{pb_{i_1}} \wedge ... \wedge \partial^{pb_{i_k}}$$

Denotamos por M_k^* al conjunto de las k-formas sobre M. Notar que M_k^* es un espacio vectorial. Luego,

$$M^* := M_0^* \oplus M_1^* \oplus ... \oplus M_n^*$$

es el espacio vectorial de las formas sobre M. En particular, notar que $M_0^* = (M \to \mathbb{R})$, i.e. un campo escalar es una 0-forma.

K. Campos vectoriales

Una q-vector es un campo tensorial q-veces contravariante y antisimétrico. Esto quiere decir que existen funciones diferenciables $v^{i_1...i_k} \in (M \to \mathbb{R})$, tales que

$$v(p) = \frac{1}{k!} v_{i_1...i_k}(p) \partial_{pb_{i_1}} \wedge ... \wedge \partial_{pb_{i_k}}$$

Denotamos por M_k° al conjunto de los k-vectores sobre M. Notar que M_k° es un espacio vectorial. Luego,

$$M^\circ := M_0^\circ \oplus M_1^\circ \oplus ... \oplus M_n^\circ$$

es el espacio vectorial de los multivectores sobre M.

L. Derivada exterior

El operador derivada exterior $d = d_0 \oplus d_1 \oplus ... \oplus d_n \in M^*$ donde $d_k \in [M_k^* \to M_{k+1}^*]$ se define por

$$(d_k f)(p) := \frac{1}{k!} f_{j,i_1...i_k}(p)\, \partial^{pb_j} \wedge \partial^{pb_{i_1}} \wedge ... \wedge \partial^{pb_{i_k}}$$

donde

$$f_{j,i_1...i_k} := \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \left(f_{i_1...i_k} \circ \psi^{-1} \right) \right) \circ \psi$$

En particular, notar que si consideramos la función o 0-forma $g \in (M \to \mathbb{R})$ tal que $g(p) = x^i$ para todo $p \in M$, luego

$$g_{j,}(p) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \delta^i{}_j$$

para todo $p \in M$, y por ende

$$(dg)(p) = \partial^{pb_j}$$

Es por esta razón es que denotamos por dx^i a la 1-forma h tal que $h(p) = \partial^{pb_i}$. Con esto en mente, podemos escribir

$$f = \frac{1}{k!} f_{i_1...i_k}\, dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

y, de manera similar,

$$d_k f = \frac{1}{k!} f_{j,i_1...i_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

En otras palabras, tenemos que $\{dx^1, ..., dx^n\}$ es una base de M_1^*.

$$dx^i(\partial_j) = \delta^i{}_j$$

Ejercicio ...: Usando resultados anteriores, muestre que $d^2 = 0$.

M. El teorema generalizado de Stokes

El teorema generalizado de Stokes dice que, si M es una variedad orientable y w es una forma arbitraria, luego

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w$$

donde ∂M es el borde de M. Nos preguntamos, aquí, como se define la integral de una forma?

N. Métrica

Una métrica sobre M_1° es una 2-forma g que satisface las propiedades de producto interno en cada $p \in M$. Es decir, para cada $p \in M$ y vectores $v, w \in M_1^\circ$, la métrica g actúa según

$$g_p(v, w) = g_{ij} v^i w^j$$

donde g_{ij} son las componentes de g en la base $\{\partial^{pb_1}, ..., \partial^{pb_n}\}$ y v^i y w^j las componentes de v y w en la base $\{\partial_{pb_1}, ..., \partial_{pb_n}\}$ respectivamente.

La métrica g sobre M_1° induce una métrica $\tilde{g}$ sobre M_1^* vía los isomorfismos musicales. De esta manera, para cada $p \in M$ y $f, h \in M_1^*$ la metrica inducida actua según

$$\tilde{g}_p(f, h) = g^{ij} f_i h_j$$

donde g^{ij} son las componentes de $\tilde{g}$ en la base $\{\partial_{pb_1}, ..., \partial_{pb_n}\}$ y f_i y h_j las componentes de f y h en la base $\{\partial^{pb_1}, ..., \partial^{pb_n}\}$ respectivamente.

O. El operador estrella de Hodge

Recordemos que $\mathsf{dim}\, M_n^* = 1$. Por ende, toda forma $f \in M_n^*$ es una combinación lineal de $dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n$. En particular, decimos que $w \in M_n^*$ es una forma de volumen si $w(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. En otras palabras, si w nunca cambia de signo en M.

El operador estrella de Hodge $\star \in [M^* \to M^*]$ permite definir productos internos *globales*. Se define como la extensión lineal de las siguientes condiciones

$$\star(dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) = \epsilon_{i_1 ... i_k i_{k+1} ... i_n}\, dx^{i_{k+1}} \wedge ... \wedge dx^{i_n}$$

Para k-formas f, h y 0-forma u arbitrarias, satisface las siguientes propiedades

$$\star(f) \wedge h = \star(h) \wedge f$$

$$\star(uf) = u \star (f)$$

$$\star(\star(f)) = (-1)^{k(n-k)} f$$

$$\star(\star(\star(\star(f)))) = f$$

y

$$f \wedge \star(f) = 0$$

sólo si $f = 0$. Crucialmente,

$$f.h := \frac{1}{w} f \wedge \star(h)$$

define un producto interno punto a punto sobre M. Aquí

$$w = \star(1)$$

es la n-forma que representa el diferencial de volumen. Con esta construcción, podemos definir un producto interno global sobre k-formas. A saber

$$f \diamond h := \int_M f \wedge \star(h) = \int_M w\,(f.h)$$

P. El operador gradiente

Consideremos un producto interno sobre M_1^* y, por ende, un producto interno inducido sobre M_1°. Consideremos, además, una 0-forma $f \in (M \to \mathbb{R}) = M_0^*$. Claramente, $df \in M_1^*$. Luego, el teorema de Riesz nos dice que existe un 1-tensor $\tilde{f} \in M_1^\circ$ tal que

$$(df)(\partial_x) = \tilde{f}.\partial_x$$

para todo $\partial_x \in M_1^\circ$. Luego, el gradiente se define como el operador lineal $\nabla \in [M_0^* \to M_1^\circ]$ tal que $\nabla f = \tilde{f}$ para todo $f \in M_0^*$.

II. CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL DISCRETO

A. Complejos simpliciales

Un conjunto K de subconjuntos de $\{0, 1, 2, ..., n\}$ es un complejo simplicial si para todo conjunto $s \in K$, y todo subconjunto no vacío $r \subseteq s$, luego $r \in K$.

Sea K_k el conjunto de subconjuntos de K con $k+1$ elementos. Llamamos k-simplices a los elementos de K_k. Así, un 0-simplex es un conjunto de la forma $\{i_0\}$ y representa un nodos, un 1-simplex de la forma $\{i_0, i_1\}$ y representa un links, un 2-simplex es de la forma $\{i_0, i_1, i_2\}$ y representa un triángulo, un 3-simplex es de la forma $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ y representa un tetraedro, y así. Notar que todos los casos $i_j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ para todo $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Cualquier subconjunto no vacío de un k-simplex s es una cara r de s. Una cara maximal de un k-simplex s es un $(k-1)$-simplex. Por ejemplo, una cara maximal de un link, es un nodo. Una cara maximal de un triángulo, es un link. Una cara maximal de un tetraedro es un triángulo, y así. Todo k-simplex posee k caras maximales.

B. Espacio vectorial libre

Sea X un conjunto. El conjunto $F_X := (X \to \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

Ejercicio X: Pruebe la anterior afirmación.

Para cada $x \in X$, sea $\delta_x \in F_X$ tal que

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Luego, $\{\delta_x : x \in X\}$ es una base de F_X

Ejercicio XXX: Pruebe la anterior afirmación.

La noción de espacio vectorial libre nos permite *convertir* un conjunto arbitrario en un espacio vectorial.

C. Cadenas

El espacio vectorial libre $C := F_K$ obtenido de un complejo simplicial se llama complejo de cadenas. Un vector c en C se llama cadena. Si s es un k-simplex de K, luego e_s es una k-cadena. El conjunto

$$\{e_s : s \in K\}$$

constituye una base de C. Luego, para toda cadena $c \in C$ existen únicos coeficientes $c^s \in \mathbb{R}$ tales que

$$c = c^s e_s$$

Notar que

$$C = C_0 \oplus C_1 \oplus ... \oplus C_n$$

Crucialmente

$$\mathsf{dim} C_k \leq \binom{n}{k}$$

Luego,

$$\mathsf{dim}\, C = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{dim}\, C_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Haciendo una analogía con el caso contínuo, las cadenas hacen las veces de k-tensores.

D. Cocadenas

El dual C^* de C se llama el complejo de cocadenas de K. Sus elementos f se llaman cocadenas. El dual C_k^* de C_k se llama el complejo de k-cocadenas de K. Sus elementos se llaman k-cocadenas. Notar que

$$C^* = C_0^* \oplus C_1^* \oplus ...C_n^*$$

y que $\mathsf{dim}\, C_k^* = \mathsf{dim}\, C_k$. Denotamos por $\{e^s : s \in K\}$ a la base de C^*, i.e. la base dual de la base $\{e_s : s \in K\}$ de C. Luego

$$e^s(e_r) = \delta^s{}_r$$

por definición. Además, para toda cocadena $f \in C^*$ existen únicos coeficientes $f_s \in \mathbb{R}$ tales que

$$f = f_s e^s$$

Haciendo una analogía con el caso contínuo, las k-cocadenas hacen las veces de k-formas. En particular, podemos pensar a las 0-cocadebas como funciones en los nodos, lo que representaría el análogo de campos escalares. De manera similar, podemos pensar a las 1-cocadenas como funciones en los links, lo que representaría el análogo de campos vectoriales. Las 2-cocadenas como funciones en los triángulos, lo que representaría campos tensoriales de orden 2, y así.

E. Operador borde

Al revés de como ocurre en el contínuo, en el discreto definimos la estructura de antrimetrización sobre las cadenas (tensores). Luego, la estructura de antisimetrización es heredada por las cocadenas (formas). Este enfoque permite formalizar la noción de borde orientado.

Recordemos que un k-simplex tiene k-caras maximales. El operador borde $\partial \in [C \to C]$ se define como la extensión lineal de su acción sobre k-cadenas. Más precisamente, el operador borde satisface

$$\partial := \partial_0 \oplus \partial_1 \oplus ...\partial_n$$

donde, $\partial_k \in [C \to C]$ aplicado a una k-cadena e_s retorna una combinación lineal de las cadenas correspondientes a sus caras maximales. Más precisamente, para cualquier k-simplex $s = \{i_0, i_1, ..., i_k\}$ donde $i_0 < i_1 < ... < i_k$, se tiene que

$$\partial_k(e_{\{i_0,...,i_k\}}) := \sum_{r=0}^{k} (-1)^r e_{\{i_0,...,i_{r-1},i_{r+1},...,i_k\}} \tag{2}$$

Por otro lado $\partial_k(C_q) := \{0\}$ si $k \neq q$. En otras palabras $\partial_k(C) = \partial_k(C_k) \subseteq C_{k-1}$ y $\partial_0 = 0$. Crucialmente, de las anteriores consideraciones se puede deducir que $\partial^2 = 0$.

F. Orientación

El signo de $(-1)^r$ de la Ec. 2 se llama la orientación inducida por el k-simplex $\{i_0, i_1, ..., i_k\}$ a su cara maximal $\{i_0, ..., i_{r-1}, i_{r+1}, ..., i_k\}$. Dos simplices r y s son adyacentes si comparten una cara t en común. Si r y s son dos k-simplices, a lo sumo pueden tener un $(k-1)$-simplex t como cara común. Cuando la tienen, se dice que r y s están orientados de manera compatible si inducen la orientación opuesta sobre t. Un complejo simplicial K se dice orientable si no posee pares de simplices con orientaciones incompatibles.

G. El operador coborde

El operador coborde $d \in [C^* \to C^*]$ se define por

$$d := d_0 \oplus d_1 \oplus ... \oplus d_n$$

donde

$$(d_k(f))(c) := f(\partial_{k+1}(c))$$

para cada $f \in C^*$ y $c \in C$. Notar que $d_k(C^*_q) = \{0\}$ si $k \neq q$ y $d_k(C^*) = d_k(C^*_k) \subseteq C^*_{k+1}$. Crucialmente, de las anteriores consideraciones se puede deducir que $d^2 = 0$.

El operador coborde d del discreto, es el análogo al operador derivada exterior (también conocido como operador diferencial) del contínuo.

H. Producto interno y operador de Hodge

Un producto interno sobre C es una función bilineal en $[C^2 \to \mathbb{R}]$ tal que el mapa

$$c, c' \to c.c$$

satisface las propiedades de producto interno. Dado el producto interno, podemos definir el operador estrella de Hodge.

I. Operador coborde dual

Dado un producto interno sobre C y el correspondiente producto interno inducido sobre C^*, el operador coborde dual d^* se define como el adjunto del operador coborde d. Es decir

$$d^*(f).g := f.d(g)$$

para todo $f, g \in C^*$. En particular, se puede ver que

$$d^* = d^*_0 \oplus d^*_1 \oplus ... \oplus d^*_n$$

donde

$$d^*_k(f).g := f.d_k(g)$$

para todo $f, g \in C^*$. Notar que $d^*_k(C^*_q) = \{0\}$ si $q \neq k+1$, $d^*_k(C^*) = d^*_k(C^*_{k+1}) \subseteq C^*_k$ y $d^*_0 = 0$.

J. Cohomología

Consideremos operadores lineales $a \in [V \to W]$ y $b \in [U \to V]$ tales que $a \circ b = 0$. Luego

$$\mathsf{rng}\, b \subseteq \mathsf{krn}\, a$$

Cómo consecuencia, el operador laplaciano de Hodge

$$L := a^* a + b b^*$$

satisface

$$\mathsf{krn}\, L = \mathsf{krn}\, a \cap \mathsf{krn}\, b^*$$

Esto permite la descomposición de Hodge

$$V = \mathsf{rng}\, a^* \oplus \mathsf{krn}\, L \oplus \mathsf{rng}\, b$$

Esto quiere decir que para cada $v \in V$, existen únicos $w \in W$, $v' \in V$ y $u \in U$ tales que

$$v = a^*(w) + v' + b(u)$$

En el contexto de la geometría diferencial discreta, identificamos a con d_k y b con d_{k-1}, ya que $d_k \circ d_{k-1} = 0$, y como consecuencia, el laplaciano de Hodge adopta la forma

$$L = d^*d + dd^*$$

* juan.perotti@unc.edu.ar