REDES NEURONALES 2025

Trabajo Práctico 1: El modelo de neuronas de Izhikevich

Importante:

a) Entreguen el práctico enviando un email a las cuentas:

- `francisco.tamarit@unc.edu.ar`,
- `juan.perotti@unc.edu.ar`, y
- `tristan.osan@unc.edu.ar`.

y a las **cuentas de email de sus compañeros**. Todos los profes y todos los compañeros de trabajo debemos recibir el email de entrega.

El *Subject* del email tiene que decir:

`Redes Neuronales 2025 - entrega TP1`

b) Sólo se aceptan trabajos prácticos en formato `.pdf`. Si desean, también pueden adjuntar la *notebook* con los programas y las simulaciones como archivo aparte.

c) El práctico no debe superar las cuatro (4) páginas.

Formato: Usando la guía 6 de prácticos como referencia, realice un informe detallado de los resultados obtenidos. El informe debe estar escrito utilizando la siguiente estructura:

a) **Título**: Escriba un título claro y conciso que represente el contenido del trabajo, por ejemplo: *"Simulación numérica del modelo de neuronas de Izhikevich"*.

b) **Autores**: Indiquen el nombre completo de todos los autores del trabajo.

c) **Resumen / Abstract**: Redacte un párrafo breve (5–10 líneas) que sintetice el objetivo del trabajo, la metodología (por ejemplo, simulación del modelo de Izhikevich mediante el método de Euler o Euler–Maruyama) y los principales resultados obtenidos.

d) **Introducción**: Presente el contexto general del trabajo. Explique brevemente qué es una neurona artificial, por qué el modelo de Izhikevich es relevante en neurociencia computacional y cite bibliografía fundamental (por ejemplo, el paper original de Izhikevich). Señale claramente el objetivo del informe.

e) **Teoría**: Describa el modelo matemático de Izhikevich. Escriba las ecuaciones diferenciales que lo definen:

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}04v^2 + 5v + 140 - u + I, \quad \frac{du}{dt} = a(bv - u),$$

con la condición de reseteo:

$$\text{si } v \geq 30\,\text{mV}, \quad \Rightarrow \begin{cases} v \leftarrow c, \\ u \leftarrow u + d. \end{cases}$$

Explique brevemente qué representan las variables v, u y los parámetros a, b, c, d.

f) **Resultados**: Incluya aquí las figuras de sus simulaciones. En particular, no olvide:

- Añadir leyendas que describan qué se muestra en cada figura y en cada caso (por ejemplo: "**Figura 1:** Evolución temporal del potencial de membrana $v(t)$ para parámetros a, b, c, d típicos de una neurona de tipo espiga regular.").
- Mencionar cada figura (referenciando el número correspondiente) en el texto principal, describiendo los resultados observados. (por ejemplo: "En la Figura 1, se observa que el potencial de membrana exhibe un disparo si ...").

g) **Discusión**: Analice los resultados obtenidos. Mencione si las simulaciones reproducen correctamente los distintos tipos de disparo neuronal (regular spiking, fast spiking, bursting, etc.). Señale posibles fuentes de error numérico y la importancia del modelo en estudios de dinámica neuronal.

h) Agradecimientos (opcional): Si corresponde, mencione a docentes, compañeros u organismos que colaboraron en el trabajo.

i) Referencias: No olvide incluir citas y referencias bibliográficas en la introducción. Éstas, típicamente se mencionan en la introducción.

Puede encontrar un draft con la estructura en formato LaTeX en overleaf:

`https://www.overleaf.com/read/qwctszcmgpkn#ed2041`

El modelo de neuronas de Izhikevich

El modelo de Izhikevich (ver refs. [1, 2]) es una simplificación del conocido modelo que Hodgkin y Huxley introdujeron en 1952 (ver ref. [3]) para describir el comportamiento del potencial de disparo de una neurona.

El modelo se describe mediante el siguiente sistema de EDOs bidimensionales de primer orden:

$$\dot{v}(t) = g_2 v^2(t) + g_1 v(t) + g_0 - u(t) + I(t), \quad (1)$$

$$\dot{u}(t) = b(cv(t) - u(t)), \quad (2)$$

junto con el mecanismo de reseteo del potencial:

$$v(t) \leftarrow v_-, \quad (3)$$

$$u(t) \leftarrow u(t) + \Delta u, \quad (4)$$

el cual emula el disparo neuronal cuando se satisface la condición $v(t) \geq v_+$.

En estas ecuaciones, g_2, g_1, g_0, v_-, v_+, b, c y Δu son parámetros del modelo. La corriente de entrada $I : \mathbb{R} \ni t \mapsto I(t) \in \mathbb{R}$ representa la excitación externa de la neurona.

Primera parte

1) Integre el modelo de Izhikevich usando el método RK4 en el intervalo $t \in [0, 10]$. Considere los siguientes valores de parámetros (pero pruebe variaciones para los distintos casos):

- $g_2 = 0{,}04$
- $g_1 = 5$
- $g_0 = 140$
- $v_- = -65$
- $v_+ = 30$
- $b = 0{,}02$
- $c = 0{,}2$
- $\Delta u = 2$

La corriente de entrada es:

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 10, \\ 10, & t \geq 10. \end{cases}$$

Condiciones iniciales:

- $v(0) = -70$
- $u(0) = cv(0)$

Utilice un paso de integración $h = 0{,}1$.

2) Grafique la solución.

3) Reproduzca, aproximadamente, los últimos ocho paneles de la figura 2 del paper [1].
Para ello, utilice la siguiente tabla de parametrización:

Caso	b	c	v_-	Δu	I
RS	0,02	0,2	-65	8	I_1
IB	0,02	0,2	-55	4	I_1
CH	0,02	0,2	-50	2	I_1
FS	0,1	0,2	-65	2	I_1
TC1	0,02	0,25	-65	0,05	I_2
TC2	0,02	0,25	-65	0,05	I_3
RZ	0,1	0,26	-65	2	I_4
LTS	0,02	0,25	-65	2	I_1

Las funciones I_1, I_2, I_3, I_4 se definen como en el enunciado.

Segunda parte (opcional): Red de neuronas de Izhikevich

El método de Euler–Maruyama

Nos interesa resolver una Ecuación Diferencial Estocástica (SDE) de la forma

$$dX_t = f(X_t, t)\, dt + g(X_t, t)\, dW_t \tag{1}$$

donde, para cada $t \in \mathbb{R}$, las variables X_t, W_t son estocásticas con soporte en $\mathbb{R}$, y $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones relativamente arbitrarias. Como función de t, asumimos que W_t describe un proceso de Wiener. Es decir, asumimos que

1) W_t es una variable estocástica normalmente distribuida de valor esperado $\langle W_t \rangle = 0$ y varianza $\langle (W_t - \langle W_t \rangle)^2 \rangle = \langle W_t^2 \rangle = wt$ para algún $w \geq 0$, y
2) las variables estocásticas $W_{t+s} - W_s$ (caminatas futuras) y W_s (caminatas pasadas) son estadísticamente independientes para todo $t \geq 0$ y $s \leq t$.

Nos interesa resolver la Ec. (1) en un intervalo $t \in [0, T]$ para una condición inicial $X_0 = x_0$.

El método de Euler–Maruyama provee una aproximación $Y_t \approx X_t$ para $t \in \{0, \tau, 2\tau, \ldots, T\}$ donde $\tau = T/N$ para algún $N \gg 1$ fijo, y viene dado por la cadena de Markov

$$Y_{t+\tau} = Y_t + f(Y_t, t)\, \tau + g(Y_t, t)\, w\sqrt{\tau}\, \mathcal{N} \tag{2}$$

donde $Y_0 = x_0$ y $\mathcal{N}$ es una variable aleatoria normalmente distribuida de valor esperado 0 y varianza 1.

Caso multidimensional

El caso multidimensional es de la forma

$$dX_t = f(X_t, t)\, dt + g(X_t, t)\, dW_t \tag{4}$$

donde $X_t, f(X_t, t) \in \mathbb{R}^d$, $g(X_t, t) \in \mathbb{R}^{d\times m}$ y $W_t \in \mathbb{R}^m$ para $d, m \in \mathbb{N}$.

En componentes,

$$dX_{it} = f_i(X_t, t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(X_t, t)\, dW_{jt} \tag{5}$$

Luego, la aproximación de Euler–Maruyama toma la forma

$$Y_{i,t+\tau} = Y_{it} + f_i(Y_t, t)\, \tau + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(Y_t, t)\, w_j \sqrt{\tau}\, \mathcal{N}_j \tag{6}$$

donde $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_m$ son variables aleatorias independientes, normalmente distribuidas, de valor esperado 0 y varianza 1.

Red neuronal de Izhikevich

El modelo de neurona de Izhikevich es una Ecuación Diferencial Ordinaria (ODE), por lo que no hay estocasticidad.

Para simular una red, Izhikevich propone acoplar un sistema de neuronas con señales de ruido, tornando la ODE en una SDE. Concretamente, propone acoplar n_e neuronas excitatorias y n_i neuronas inhibitorias mediante una matriz de interacciones a_{ij} con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ para $n := n_e + n_i$ utilizando la ODE

$$\dot{v}_i(t) = g_2 v_i^2(t) + g_1 v_i(t) + g_0 - u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Theta(v_j(t)) \tag{7}$$

$$\dot{u}_i(t) = b_i\big(c_i v_i(t) - u_i(t)\big) \tag{5}$$

donde $I_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Theta(v_j(t))$ representa el input externo afectando a la neurona i. Considerando valores r_{ij} tomados aleatoria e independientemente de la distribución uniforme en $[0, 1]$, se utiliza $a_{ij} = \frac{1}{2} r_{ij}$ para todo i y $j = 1, \ldots, n_e$ (i.e., señales provenientes de neuronas excitatorias) y $a_{ij} = -r_{ij}$ para todo i y $j = n_e + 1, \ldots, n$ (i.e., señales provenientes de neuronas inhibitorias). Aquí, la función escalón de Heaviside, la cual satisface $\Theta(x) = 1$ si $x > 0$ y $\Theta(x) = 0$ en caso contrario, es utilizada para normalizar la señal de disparo de las neuronas de entrada.

El disparo de la i-ésima neurona se implementa aplicando la condición de reseteo

$$v_i(t) \leftarrow v_{i-} \tag{8}$$

$$u_i(t) \leftarrow u_i(t) + \Delta u_i \tag{6}$$

cuando $v_i(t) \geq v_{i+}$.

Los valores de los parámetros para las variables excitatorias son $b_i = 0{,}02$, $c_i = 0{,}2$, $v_{i-} = -64 + 15 r_i^2$ y $\Delta u_i = 8 - 6 r_i^2$, donde r_i es la realización de una variable aleatoria definida uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Mientras que para las variables inhibitorias son $b_i = 0{,}02 + 0{,}08 r_i$, $c_i = 0{,}25 - 0{,}05 r_i$, $v_{i-} = -65$ y $\Delta u_i = 2$. Esto introduce heterogeneidad en el sistema, y la idea es que el límite $r_i = 0$ corresponde a neuronas que disparan regularmente, mientras que $r_i = 1$ a neuronas *parloteantes*.

Luego, Izhikevich incorpora un ruido estocástico $dW_i(t)$ a la señal de entrada $I_i(t)$, de modo que el sistema de ODEs se transforma en un sistema de SDEs en donde las variables $v_i(t)$ y $u_i(t)$ se convierten en variables estocásticas $V_i(t)$ y $U_i(t)$, respectivamente. De esta manera, en la aproximación de Euler–Maruyama, la Ec. (7) adopta la forma

$$dV_{it} = \Big(g_2 V_{it}^2 + g_1 V_{it} + g_0 - U_{it} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Theta(V_{jt})\Big)\,dt + dK_{it} \tag{9}$$

$$dU_{it} = b_i(c_i V_{it} - U_{it})\,dt. \tag{7}$$

donde dK_{it} representa el ruido estocástico Gaussiano $dW_i(t)$ anteriormente mencionado. Los valores dK_{it} se obtienen de la distribución Gaussiana de media 0 y desviación estándar igual a 5 para $i = 1, \ldots, n_e$ e igual a 2 para $i = n_e{+}1, \ldots, n$.

Obviando el reseteo de la Ec. (7), el sistema de SDEs de la Ec. (9) corresponde al sistema de la Ec. (5) cuando:

1) $X_{it} = V_{it}$,
2) $X_{i+n,t} = U_{it}$,
3) $f_i(X_t, t) = g_2 X_{it}^2 + g_1 X_{it} + g_0 - X_{i+n,t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Theta(X_{jt})$,
4) $f_{i+n}(X_t, t) = b_i\big(c_i X_{it} - X_{i+n,t}\big)$,

para todo $i = 1, \ldots, n$, y que

$$g_{ij}(X_t, t) = \begin{cases} 5, & i = j \leq n_e, \\ 2, & n_e < i = j \leq n, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{8}$$

de manera que

$$dK_{it} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(X_t, t)\,dW_{jt}$$

donde dW_{jt} es una variable aleatoria tomada de la distribución Gaussiana de media 0 y varianza 1 para todo tiempo t y neurona $j = 1, \ldots, n$.

Sustitución de la función escalón

En el apartado solicitado (parte 2 del ejercicio), la función escalón de Heaviside Θ se reemplaza por la función

$$z(v) = \frac{87 + v}{450} - 0{,}0193.$$

Resumen de tareas solicitadas en la segunda parte

1) Adapte el código en Matlab del paper de Izhikevich a código en Python.

2) Acomode el código anterior a la teoría mencionada reemplazando la función escalón Θ de Heaviside por la función

$$z(v) = \frac{87 + v}{450} - 0{,}0193.$$

3) Reproduzca la figura 3 del paper. Sugerencia: compartimentabilice el código en funciones, identificando las distintas componentes mencionadas en la teoría.

Referencias

[1] Eugene M. Izhikevich. Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(6):1569–1572, 2003.

[2] Eugene M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting.* MIT Press, 2006.

[3] Alan L. Hodgkin and Andrew F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*, 117(4):500–544, 1952.

Referencias (en línea)

- `https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Maruyama_method`
- `https://ipython-books.github.io/134-simulating-a-stochastic-differential-equation/`
- `https://github.com/mattja/sdeint/blob/master/sdeint/integrate.py`
- `https://diffeq.sciml.ai/stable/tutorials/sde_example/`