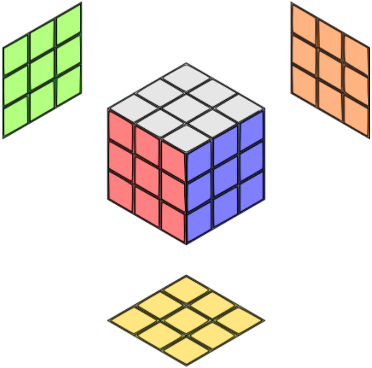
Il cubo di Rubik (e come risolverlo)

Stefano Angeleri, Alessandro Menti, Mattia Zago

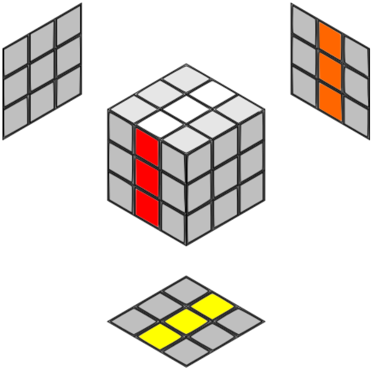
Alcune definizioni

- Considereremo un cubo 3×3
- Ogni faccia (*side*) ha un colore standard a essa associato (vedi figura)
- Ognuno dei nove pezzi di ogni faccia è detto *facelet*
- Il cubo ha 3 colonne/righe (*columns*/*rows*), 3 colonne laterali (*lateral columns*), 4 angoli (*corners*) e 8 spigoli (*edges*)



Alcune definizioni

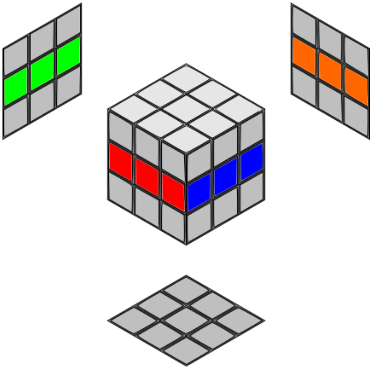
- Considereremo un cubo 3×3
- Ogni faccia (*side*) ha un colore standard a essa associato (vedi figura)
- Ognuno dei nove pezzi di ogni faccia è detto *facelet*
- Il cubo ha 3 colonne/righe (*columns*/*rows*), 3 colonne laterali (*lateral columns*), 4 angoli (*corners*) e 8 spigoli (*edges*)



Colonna

Alcune definizioni

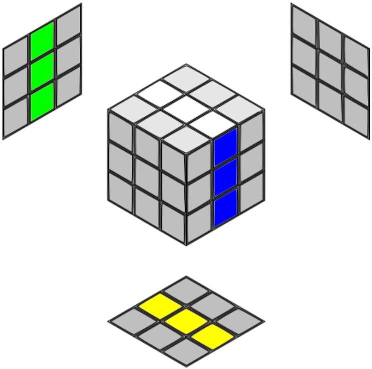
- Considereremo un cubo 3×3
- Ogni faccia (*side*) ha un colore standard a essa associato (vedi figura)
- Ognuno dei nove pezzi di ogni faccia è detto *facelet*
- Il cubo ha 3 colonne/righe (*columns*/*rows*), 3 colonne laterali (*lateral columns*), 4 angoli (*corners*) e 8 spigoli (*edges*)



Riga

Alcune definizioni

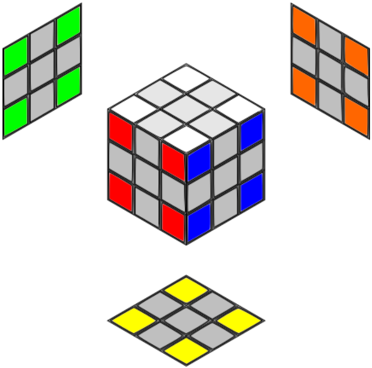
- Considereremo un cubo 3×3
- Ogni faccia (*side*) ha un colore standard a essa associato (vedi figura)
- Ognuno dei nove pezzi di ogni faccia è detto *facelet*
- Il cubo ha 3 colonne/righe (*columns*/*rows*), 3 colonne laterali (*lateral columns*), 4 angoli (*corners*) e 8 spigoli (*edges*)



Colonna laterale

Alcune definizioni

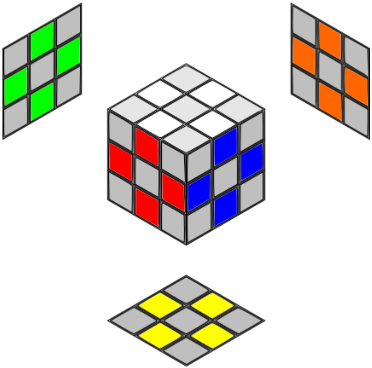
- Considereremo un cubo 3×3
- Ogni faccia (*side*) ha un colore standard a essa associato (vedi figura)
- Ognuno dei nove pezzi di ogni faccia è detto *facelet*
- Il cubo ha 3 colonne/righe (*columns*/*rows*), 3 colonne laterali (*lateral columns*), 4 angoli (*corners*) e 8 spigoli (*edges*)



Angolo

Alcune definizioni

- Considereremo un cubo 3×3
- Ogni faccia (*side*) ha un colore standard a essa associato (vedi figura)
- Ognuno dei nove pezzi di ogni faccia è detto *facelet*
- Il cubo ha 3 colonne/righe (*columns*/*rows*), 3 colonne laterali (*lateral columns*), 4 angoli (*corners*) e 8 spigoli (*edges*)



Spigolo

Il problema

Riarrangia il cubo (ruotando righe, colonne e/o colonne laterali) finché tutte le facelet su ogni faccia non hanno lo stesso colore.

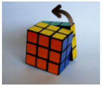
Notazione di Singmaster

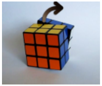
- Ogni faccia è descritta da una lettera: **F** (Front), **B** (Back), **U** (Up), **D** (Down), **L** (Left), **R** (Right)
- Ogni mossa può essere vista come una rotazione di un quarto di giro di una faccia in senso orario (N.B.: si assume che il solutore abbia la faccia di fronte a sé): **U** = ruota la faccia "Up" di un quarto di giro in senso orario
- Il simbolo $'$ indica una rotazione in senso antiorario
- Le rotazioni di righe/colonne/colonne laterali centrali sono denotate da **M** (*middle* — livello fra L e R), **E** (*equator* — livello fra U e D), **S** (*standing* — livello fra F e B)
- Per denotare le rotazioni del cubo si usano altre lettere: **X** (rotazione su R), **Y** (rotazione su U), **Z** (rotazione su F)

Notazione di Singmaster


F

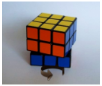

F'


B


B'


U


U'


D


D'


L

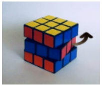

L'


R


R'


M

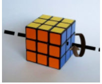

M'

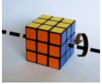

E

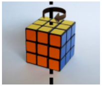

E'

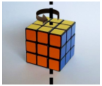

S

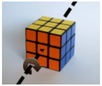

S'

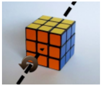

X


X'


Y


Y'


Z


Z'

Il nostro modello

- Il cubo è memorizzato in un oggetto `RubikCubeModel`
- Ogni faccia è memorizzata in un array 2×2; le righe/colonne sono numerate dall'alto verso il basso e da sinistra a destra (supponendo che il solutore abbia la faccia di fronte)
- `getSide` determina la faccia che in tale momento ha il colore dato
- `getFace` recupera il colore di una facelet
- Altri metodi autoesplicativi: `get3DEdge` (per gli angoli), `get3DEdgeFacelet` (facelet di un angolo), `getCorner`, `getCornerFacelet`
- Metodi `rotate*` per ruotare il cubo
- Test standard: `isInStandardConfiguration`, `isWithSaneColors`, `isSolved`, `isCornerInPlace`, `isCornerInPlaceMaybeFlipped`, `isEdgeInPlace`, `isEdgeInPlaceMaybeFlipped`

Mosse di Singmaster

- Sono state implementate le mosse standard di Singmaster
- Ogni mossa (per motivi di astrazione) è una sottoclasse di `Move`
- Il costruttore accetta come parametri il modello del cubo (in modo che il cubo originale rimanga inalterato) e un parametro `reversed` (per sapere se la mossa è diretta o inversa)
- Per applicare una mossa, basta crearla e chiamare `perform`/`reverse`:

```
(new B(m, reversed)).perform();
```

- Ogni mossa genera un evento per comunicare i cambiamenti all'interfaccia

Strategie di risoluzione

- Sono sottoclassi di `ResolutionStrategy`
- Accettano un cubo (`RubikCubeModel`) e restituiscono una lista di mosse da eseguire per risolvere il problema (`getNextMoves`)

Pathfinding

- Possiamo rappresentare i possibili svolgimenti di una partita con un grafo i cui nodi sono la configurazione del cubo in un dato momento; due nodi sono collegati se e solo se ci si può recare da una configurazione a un'altra con una sola mossa
- L'idea alla base della maggior parte degli algoritmi di risoluzione del cubo è quella di trovare un cammino su tale albero avente origine nella radice (configurazione iniziale) e che termini nel cubo risolto

A*

- Mantengo due liste: una *(open list)* che contiene i nodi ancora da valutare, un'altra *(closed list)* per i nodi già valutati
- Fisso una funzione *costo* per ogni nodo: esso deve essere, intuitivamente, tanto minore quanto minore è il "disordine" rispetto al cubo risolto
- Calcolo per ogni nodo N un indice

  $$f(N) = g(N) + h(N)$$

  dove $g(N)$ è il costo minimo dei nodi nella closed list e $h(N)$ è una stima del costo del nodo N (*euristica*)
- A ogni passo sposto il nodo considerato dalla open alla closed list (ad eccezione del caso in cui $g(N)$ diminuisca) e genero i suoi successori (tenendo traccia di tale legame)
- Al termine, estraendo il nodo con il minimo $f(N)$ e seguendo i genitori ho la sequenza di mosse cercata (al contrario)

A*

```
A*(N, goalNode)
openList = {N}
closedList = ∅
g(N) = 0
f(N) = h(N)
while openList ≠ ∅
    currentNode = Extract-Min-f(openList)
    if currentNode == goalNode
        path = ⟨currentNode⟩
        while currentNode.parent ≠ nil
            currentNode = currentNode.parent
            Append(path, currentNode)
        return path
    openList = openList ∩ {currentNode}
    closedList = closedList ∪ {currentNode}
    for ogni nodo N′ vicino di currentNode
        if currentNode ∉ closedList
            tentativeG = g(currentNode) + Distance(currentNode, N′)
            if N′ ∉ openList o tentativeG < g(N′)
                N′.parent = currentNode
                g(N′) = tentativeG
                f(N′) = g(N′) + h(N′)
                if N′ ∉ openList
                    openList = openList ∪ N′
error "Nessuna soluzione trovata"
```

IDA*

- A* ha un difetto: richiede di esplorare tutto l'albero
- Non fattibile per il cubo di Rubik ($\sim 4,3 \times 10^{19}$ configurazioni possibili!)
- Basta non analizzare i rami per cui non crediamo di ottenere risultati
- IDA* fa questo: per ogni nodo, se $f(N)$ è maggiore di un certo valore limite che fissiamo, pota il ramo

IDA*

```
IDA*(N, goalNode)
IDABound = h(N)
while true
    t = search(N, 0, IDABound, goalNode)
    if t == found
        return found
    if t == ∞
        return not-found
    IDABound = t
```

IDA*

```
search(N, g, IDABound, goalNode)
f(N) = g + h(N)
if f > IDABound
    return f(N)
if N == goalNode
    return found
min = ∞
for ogni nodo N' vicino di N
    t = search(N', g + cost(N, N'), IDABound)
    if t == found
        return found
    if t < min
        min = t
return min
```

Fissare un'euristica

- Rimane il problema di stabilire una buona $h(N)$
- Preferibilmente tale da soddisfare le seguenti proprietà:

ammissibile: per ogni nodo, $h(N)$ è minore o uguale del costo effettivo per raggiungere N (per cui A* non restituisce mai una soluzione subottimale)

consistente: vale 0 in un nodo obiettivo e preserva una disuguaglianza triangolare: per ogni nodo N con figlio D, $h(N) \leq h(D) + \text{costo path da } N \text{ a } D$ (così in A*, ogni volta in cui esamino un nodo, so già che il costo per raggiungerlo è il minimo possibile; non devo ricalcolarlo se trovo un path a costo minore)

- Nota: un'euristica consistente è automaticamente ammissibile

L'algoritmo di Thistletwaite

- Thistletwaite scoprì che era possibile dividere le configurazioni in cinque gruppi a seconda delle mosse da usare per risolvere il cubo:

$$
\begin{aligned}
G_0 &= \langle L, R, F, B, U, D \rangle \\
G_1 &= \langle L, R, F, B, U^2, D^2 \rangle \\
G_2 &= \langle L, R, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle \\
G_3 &= \langle L^2, R^2, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle \\
G_4 &= \{1\}
\end{aligned}
$$

- Si noti che ogni gruppo è chiaramente incluso nel precedente e che l'ultimo gruppo comprende il cubo risolto
- Idea: portare il cubo da una configurazione risolubile con tutte le mosse possibili (primo gruppo) in una risolubile solamente con mosse appartenenti al secondo gruppo, quindi al terzo...

L'algoritmo di Thistletwaite

- Implementazione originaria: *lookup tables* di notevoli dimensioni calcolate a mano (!)
- Esaminando le configurazioni possibili si può ricavare un buon coefficiente euristico

L'algoritmo di Thistletwaite e l'euristica

- Idea: partire dalla distanza di Manhattan tra lo spigolo/l'angolo esaminato e quelli nella posizione standard con i medesimi colori, quindi applicare opportuni fattori correttivi (ad es. incrementare il coefficiente se lo spigolo/angolo è molto vicino alla posizione corretta)
- Gli incrementi sono decisi sperimentalmente e/o aiutandosi con le tabelle viste in precedenza
- Si veda il metodo `getHeuristicCoefficient` in `IDAStar.java`

L'algoritmo a due fasi di Kociemba

- Osservazione: dato un cubo risolto, quelli ottenibili non usando le mosse R, R', L, L', F, F', B o B' mantengono invariati l'orientamento di spigoli e angoli (tale gruppo si denota con $G_{K1} = \langle U, D, R^2, L^2, F^2, B^2 \rangle$)
- Prima fase: si riconduce il cubo a uno di quelli appartenenti a G_{K1} con IDA* e un'euristica h_1 (nell'implementazione di Kociemba questa è implementata con una lookup table che consente un lookahead fino a 12 mosse). I cubi sono descritti da triple (orientamento angoli, orientamento spigoli, posizioni spigoli UD senza tener conto dell'ordine) che sono pari a $(0,0,0)$ se e solo tali cubi appartengono a G_{K1}.

L'algoritmo a due fasi di Kociemba

- Seconda fase: usando solo mosse di G_{K1} si permutano spigoli e angoli per ottenere la disposizione corretta
- Si adottano triple (permutazione angoli, permutazione spigoli, coordinate spigoli UD); $(0,0,0)$ se il cubo è risolto
- Depth-first search o IDA* (a seconda dei limiti di memoria/spazio su disco)

L'algoritmo a due fasi di Kociemba

Alcuni solutori e spiegazioni approfondite:
`http://kociemba.org/cube.htm`

L'algoritmo di Singmaster

- Risolve il cubo "per strati" in diverse fasi:
  1. si sposta la faccia bianca in alto
  2. si posizionano prima gli spigoli e poi gli angoli del livello superiore
  3. si posizionano gli spigoli del livello centrale
  4. si completa il livello inferiore
- Ampio uso di mosse del tipo $ABA'B'$ (sposto uno spigolo/angolo lasciando invariati gli altri)
- Molto lineare