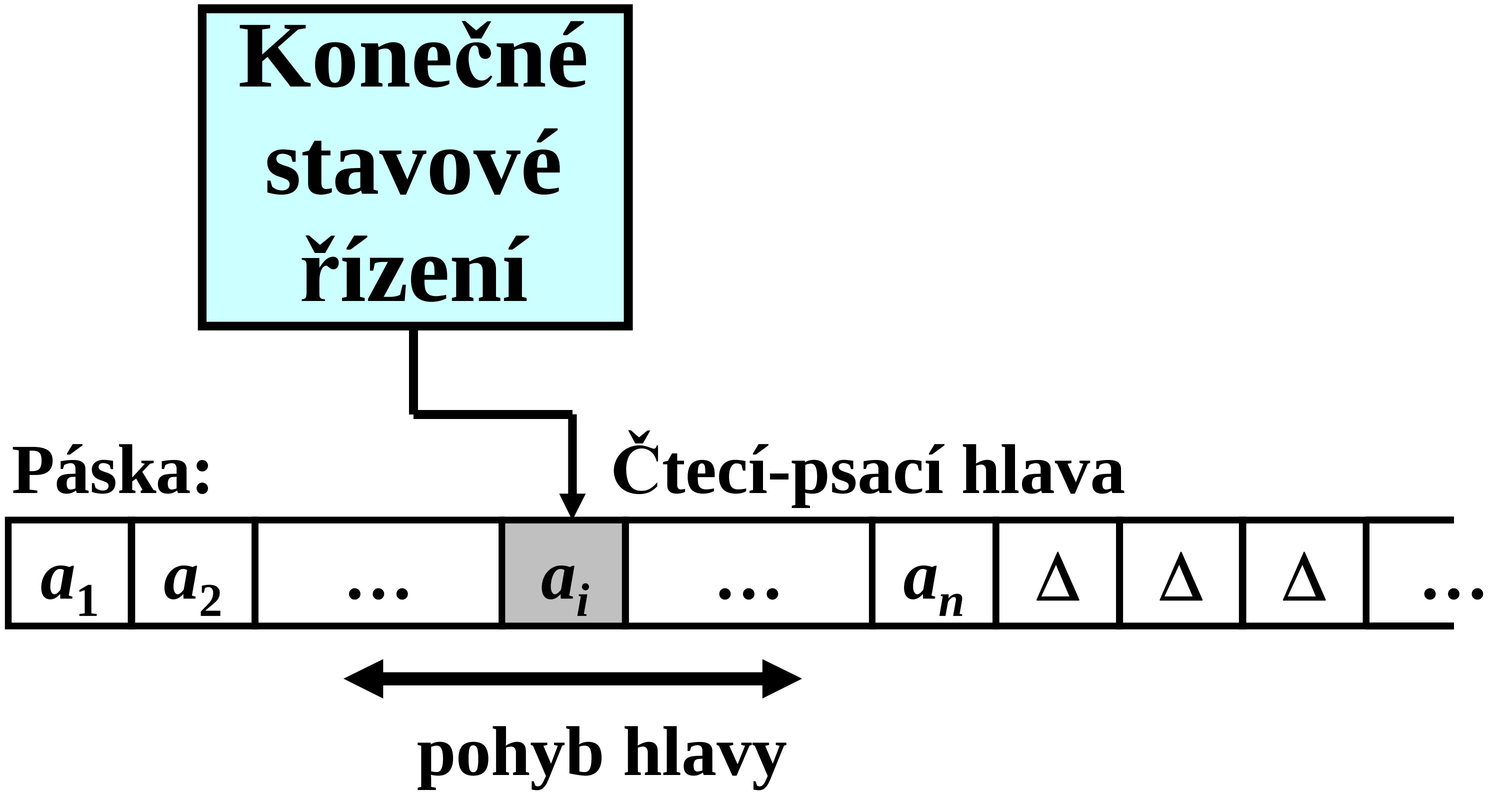
Kapitola XIII. Jazyky složitější než bezkontextové

Alan Turing (1912 – 1954)

Turingovy stroje (TS)

Myšlenka: Výpočetní model s největší sílou



Poznámka: Δ = prázdné políčko

Turingovy stroje: Definice

Definice: *Turingův stroj* (TS) je šestice

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F), \text{ kde}$$

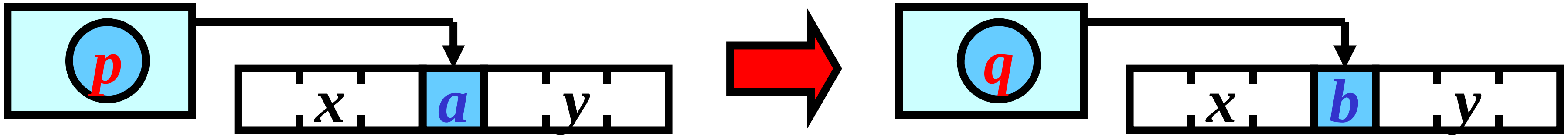
- Q je *konečná množina stavů*
- Σ je *vstupní abeceda*
- Γ je *pásková abeceda*; $\Delta \in \Gamma$; $\Sigma \subseteq \Gamma$
- R je *konečná množina pravidel* tvaru: $pa \rightarrow qbt$, kde $p, q \in Q$, $a, b \in \Gamma$, $t \in \{S, R, L\}$
- $s \in Q$ je *počáteční stav*
- $F \subseteq Q$ je množina *koncových stavů*

Matematická poznámka:

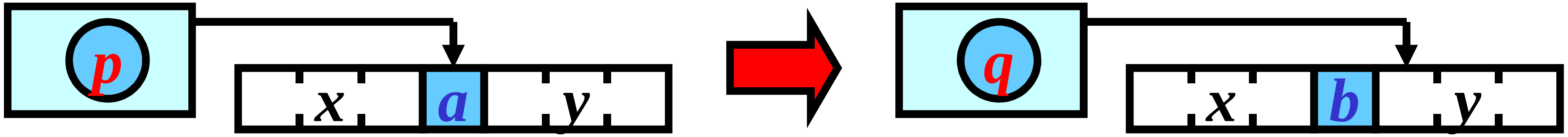
- Čistě matematicky, R je relace z $Q \times \Gamma$ do $Q \times \Gamma \times \{S, R, L\}$
- Místo relačního zápisu $(\boldsymbol{pa}, \boldsymbol{qbt}) \in R$ zapisujeme $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbt} \in R$

Interpretace pravidel

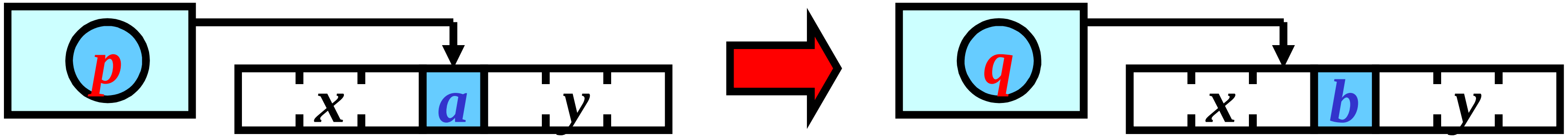
- $pa \rightarrow qbS$: Pokud je aktuální stav p a čtecí hlava ukazuje na symbol a, přepiš na pásce a na b, změň aktuální stav z p na q a čtecí hlavu ponech na **stejném políčku**.



- $pa \rightarrow qbR$: Pokud je aktuální stav p a čtecí hlava ukazuje na symbol a, přepiš na pásce a na b, změň aktuální stav z p na q a posuň čtecí hlavu o jedno políčko **vpravo**.



- $pa \rightarrow qbL$: Pokud je aktuální stav p a čtecí hlava ukazuje na symbol a, přepiš na pásce a na b, změň aktuální stav z p na q a posuň čtecí hlavu o jedno políčko **vlevo**.



Grafická reprezentace

q označuje stav $q \in Q$

$\to s$ označuje počáteční stav $s \in Q$

f označuje koncový stav $f \in F$

$p \xrightarrow{a/b,\ S} q$ označuje $pa \to qbS \in R$

$p \xrightarrow{a/b,\ R} q$ označuje $pa \to qbR \in R$

$p \xrightarrow{a/b,\ L} q$ označuje $pa \to qbL \in R$

Turingův stroj: Příklad 1/2

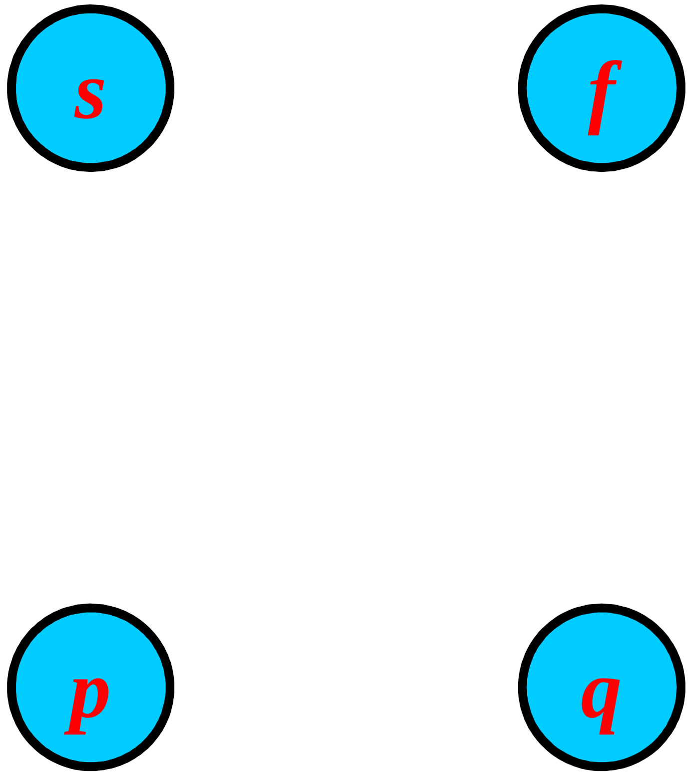
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

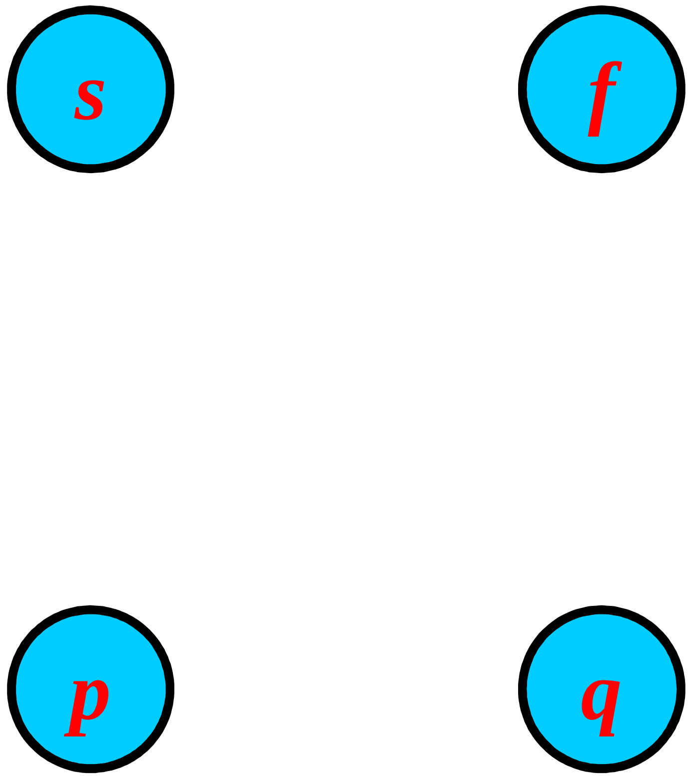
- $Q = \{$**s**, **p**, **q**, **f**$\}$;



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

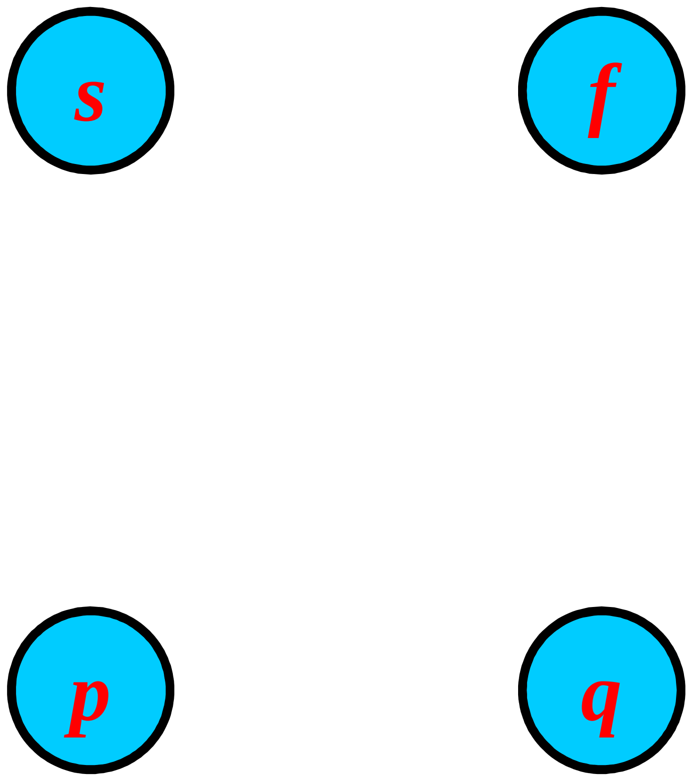
- $Q = \{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{f}\}$;
- $\Sigma = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$;



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

- $Q = \{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{f}\}$;
- $\Sigma = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$;
- $\Gamma = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \Delta\}$;

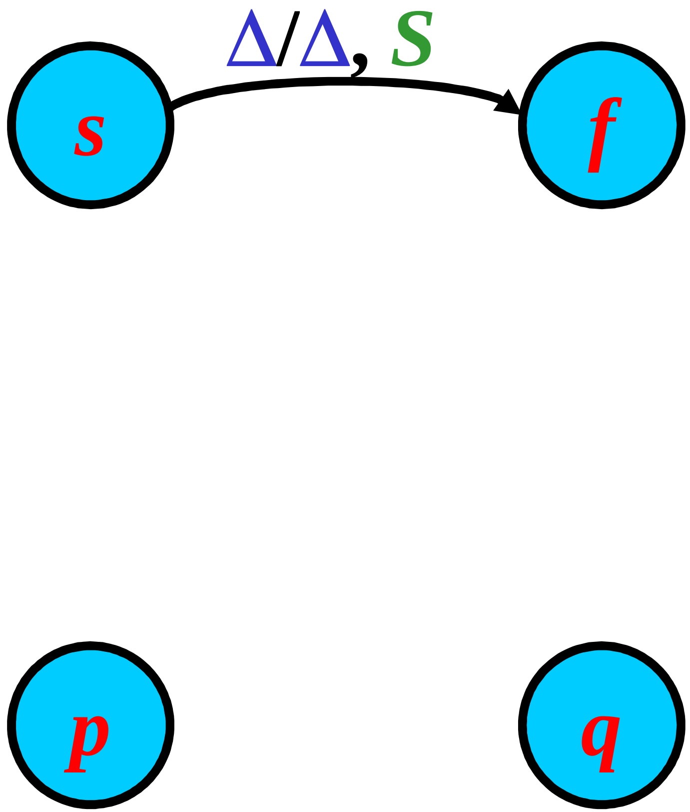


Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$

kde:

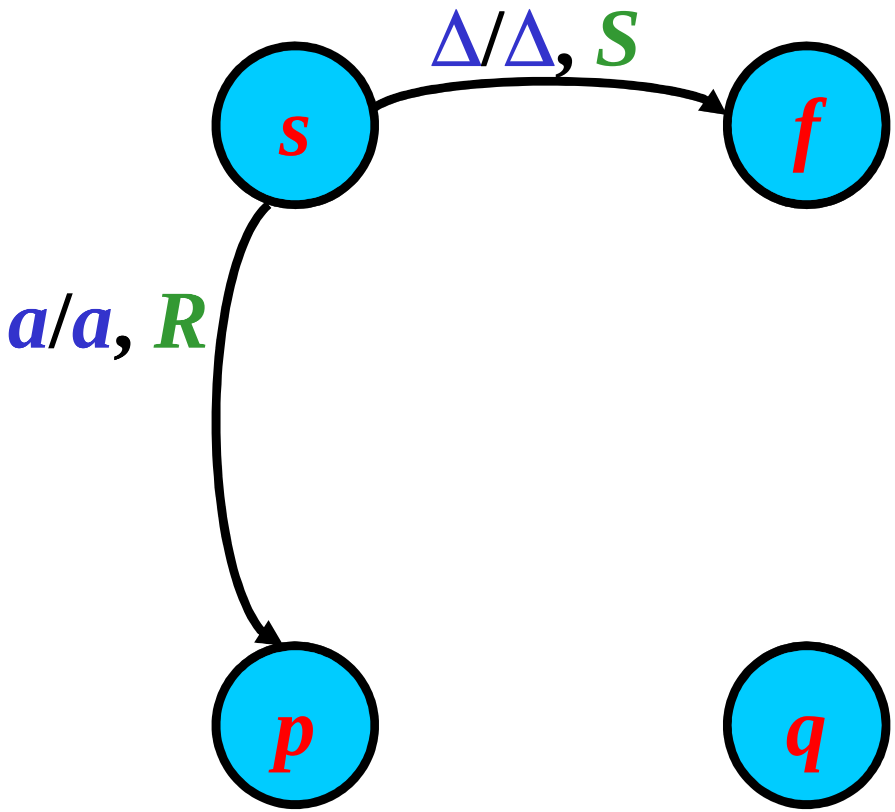
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S$,



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

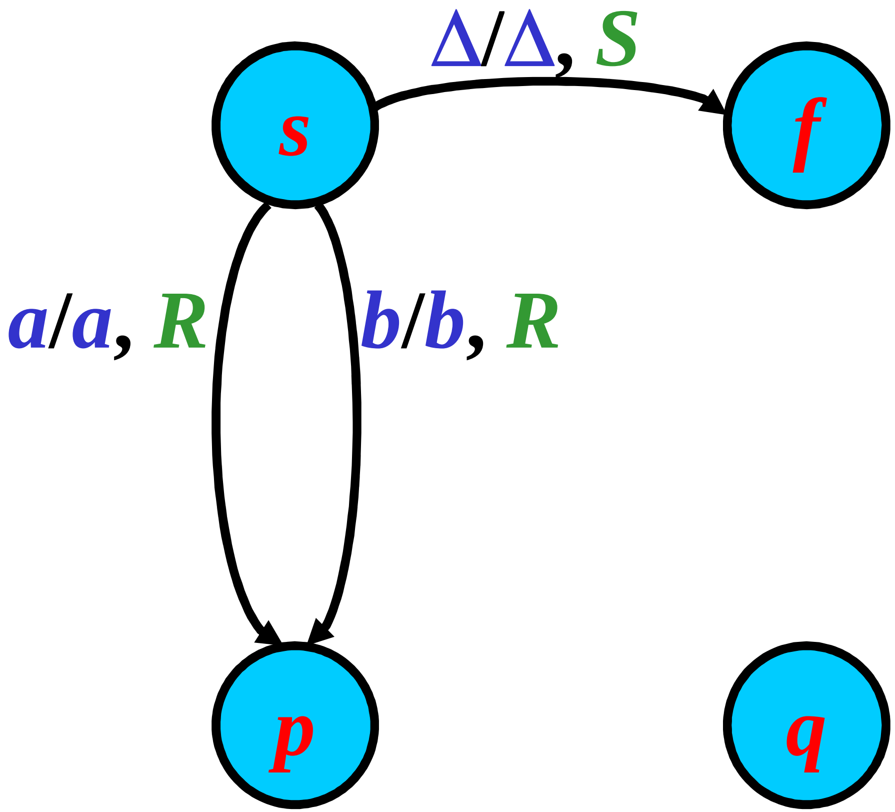
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
  $sa \rightarrow paR,$



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

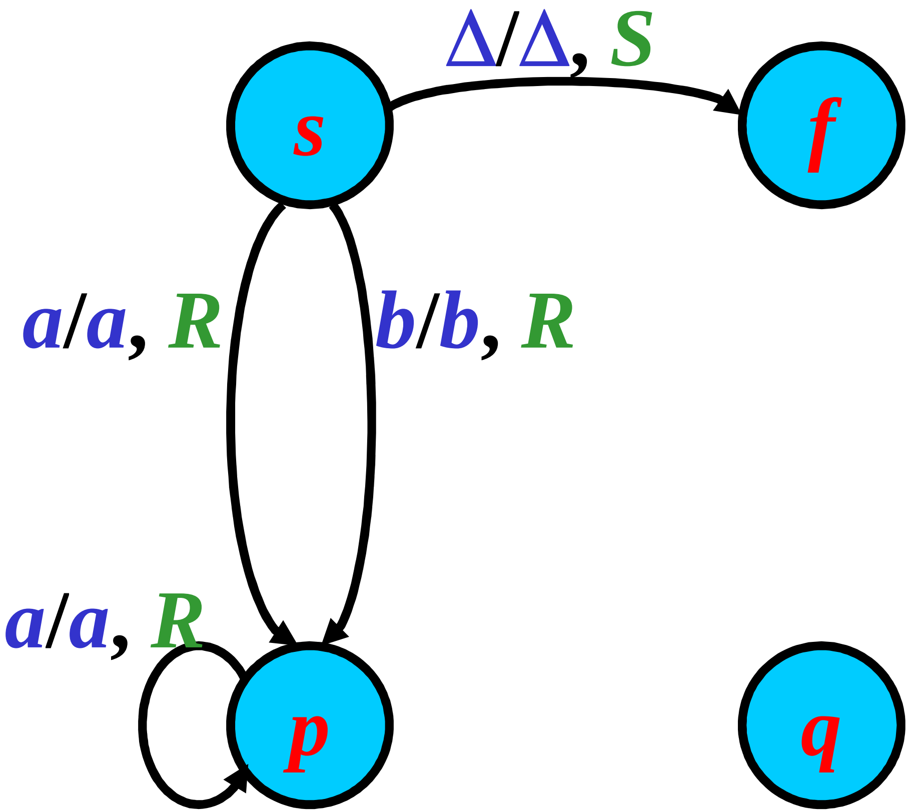
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
  $sa \rightarrow paR,$
  $sb \rightarrow pbR,$



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

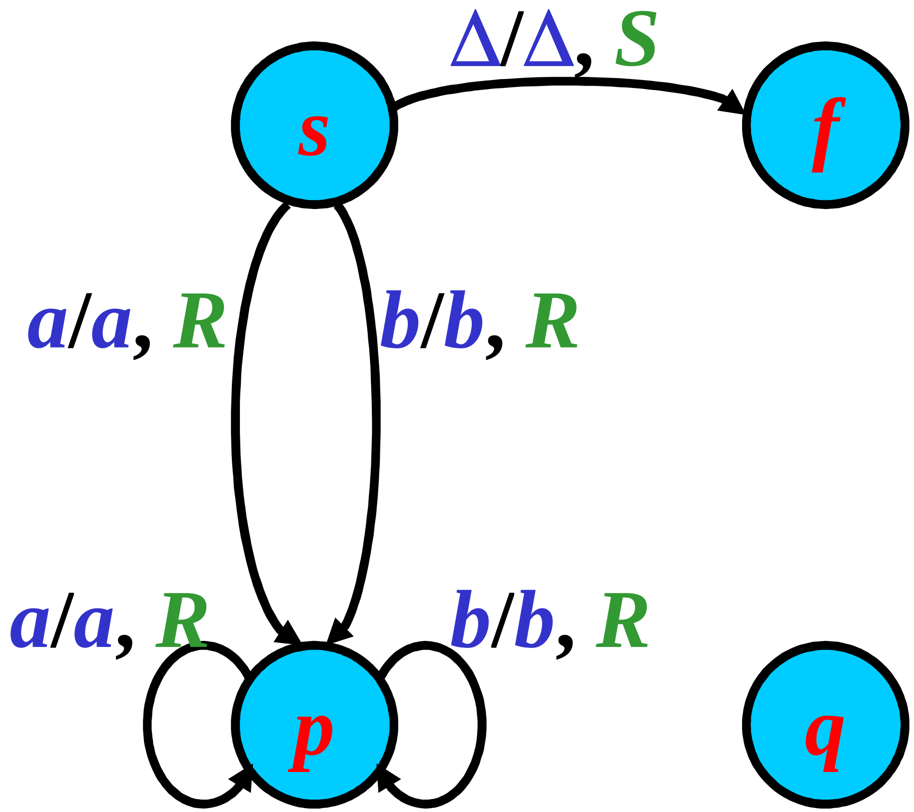
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
  $sa \rightarrow paR,$
  $sb \rightarrow pbR,$
  $pa \rightarrow paR,$



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

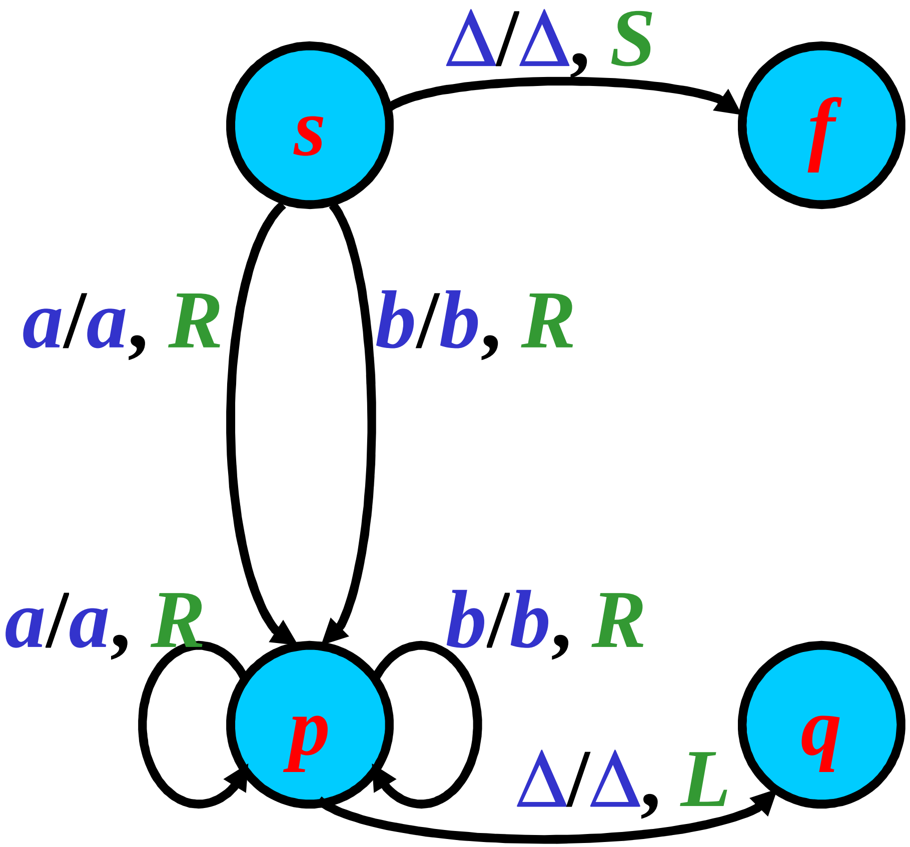
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
  $sa \rightarrow paR,$
  $sb \rightarrow pbR,$
  $pa \rightarrow paR,$
  $pb \rightarrow pbR,$



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

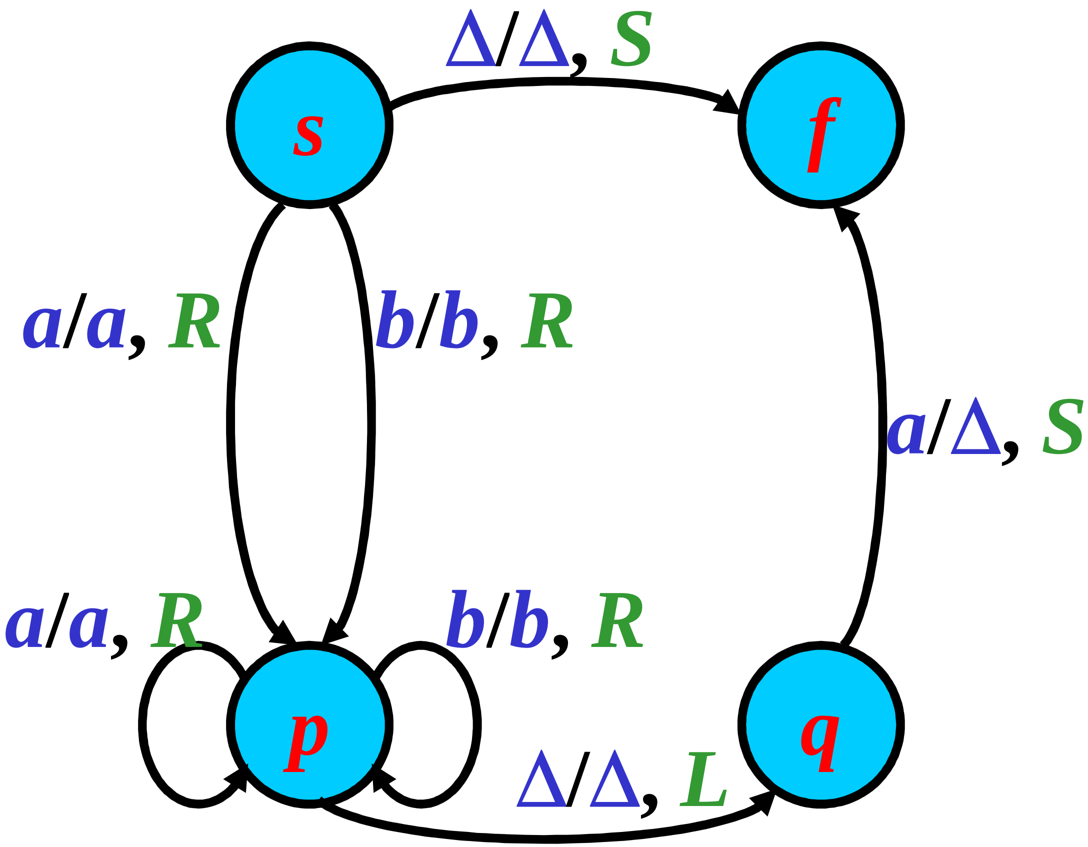
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
  $sa \rightarrow paR,$
  $sb \rightarrow pbR,$
  $pa \rightarrow paR,$
  $pb \rightarrow pbR,$
  $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

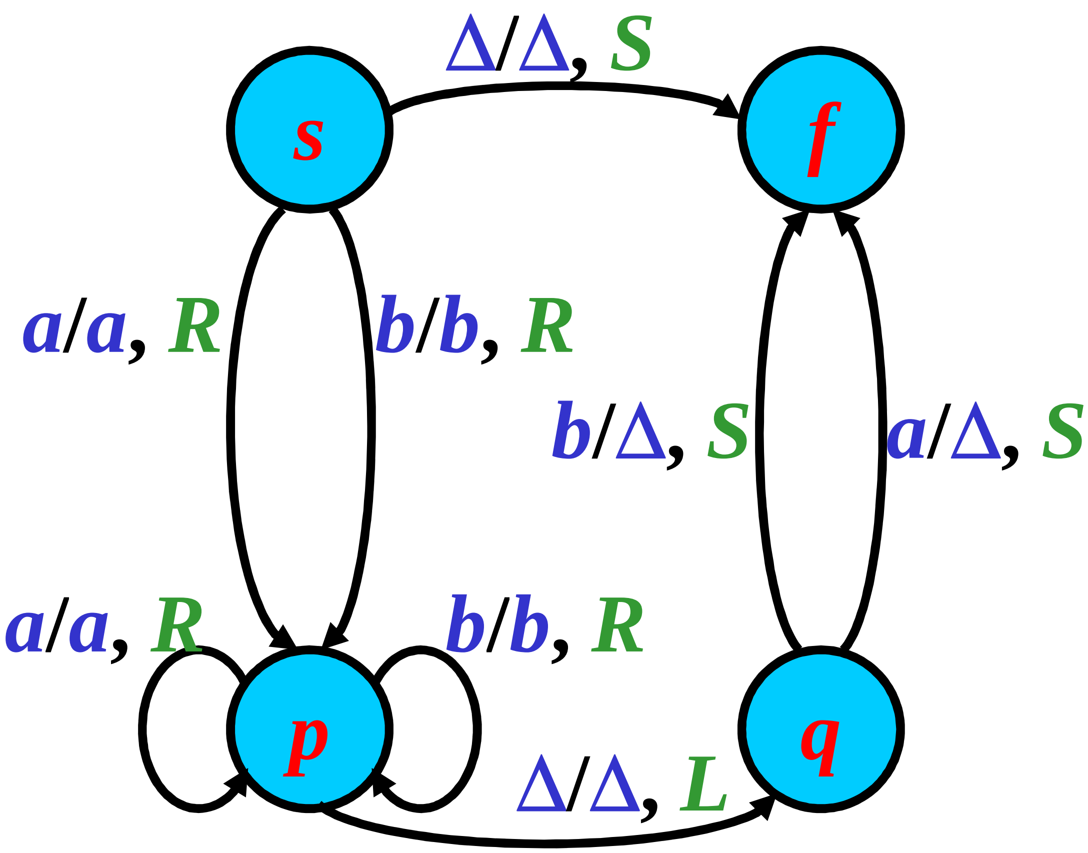
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
$sa \rightarrow paR,$
$sb \rightarrow pbR,$
$pa \rightarrow paR,$
$pb \rightarrow pbR,$
$p\Delta \rightarrow q\Delta L,$
$qa \rightarrow f\Delta S,$



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

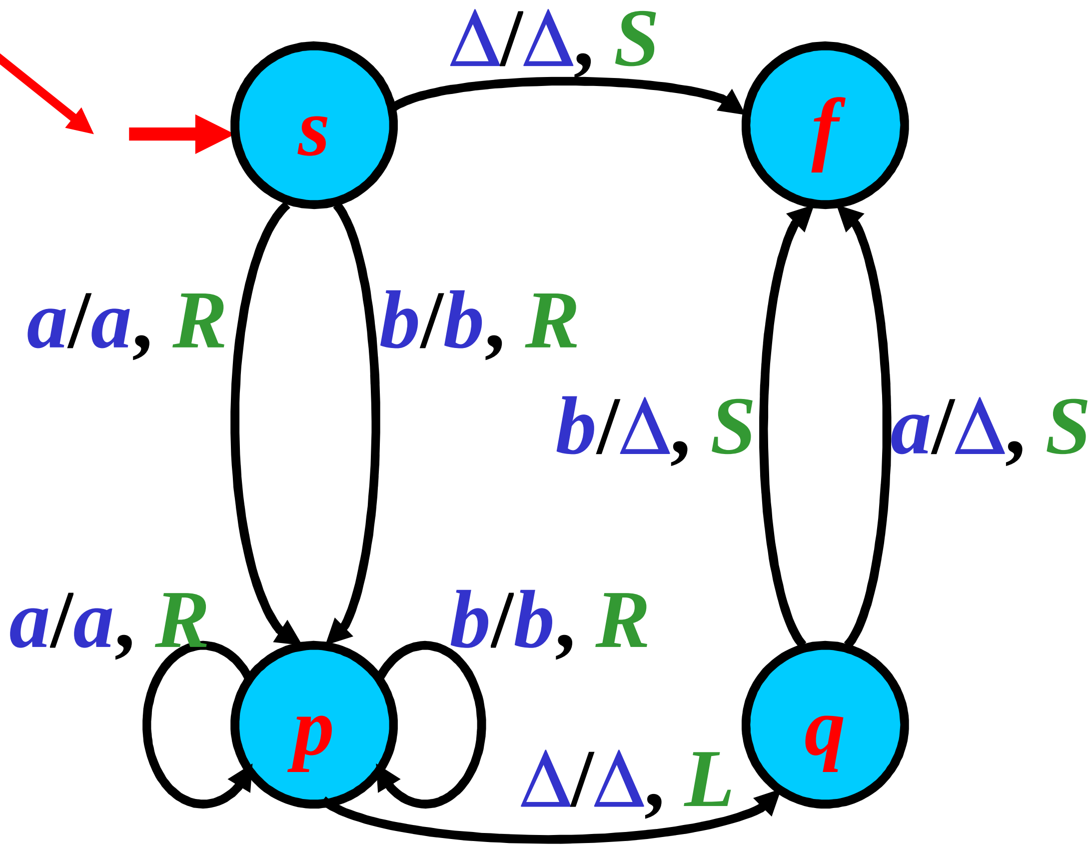
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \to f\Delta S,$
  $sa \to paR,$
  $sb \to pbR,$
  $pa \to paR,$
  $pb \to pbR,$
  $p\Delta \to q\Delta L,$
  $qa \to f\Delta S,$
  $qb \to f\Delta S\}$



Turingův stroj: Příklad 1/2

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

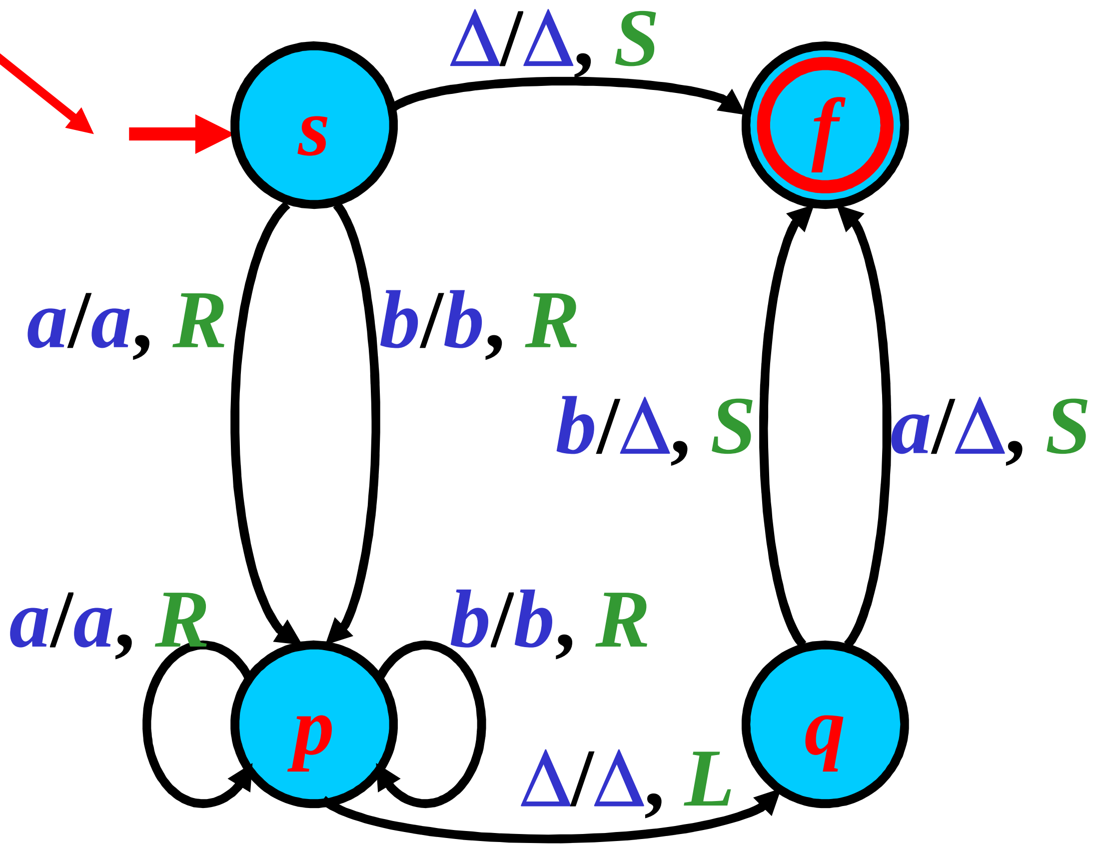
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
  $sa \rightarrow paR,$
  $sb \rightarrow pbR,$
  $pa \rightarrow paR,$
  $pb \rightarrow pbR,$
  $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$
  $qa \rightarrow f\Delta S,$
  $qb \rightarrow f\Delta S\}$



Turingův stroj: Příklad 1/2

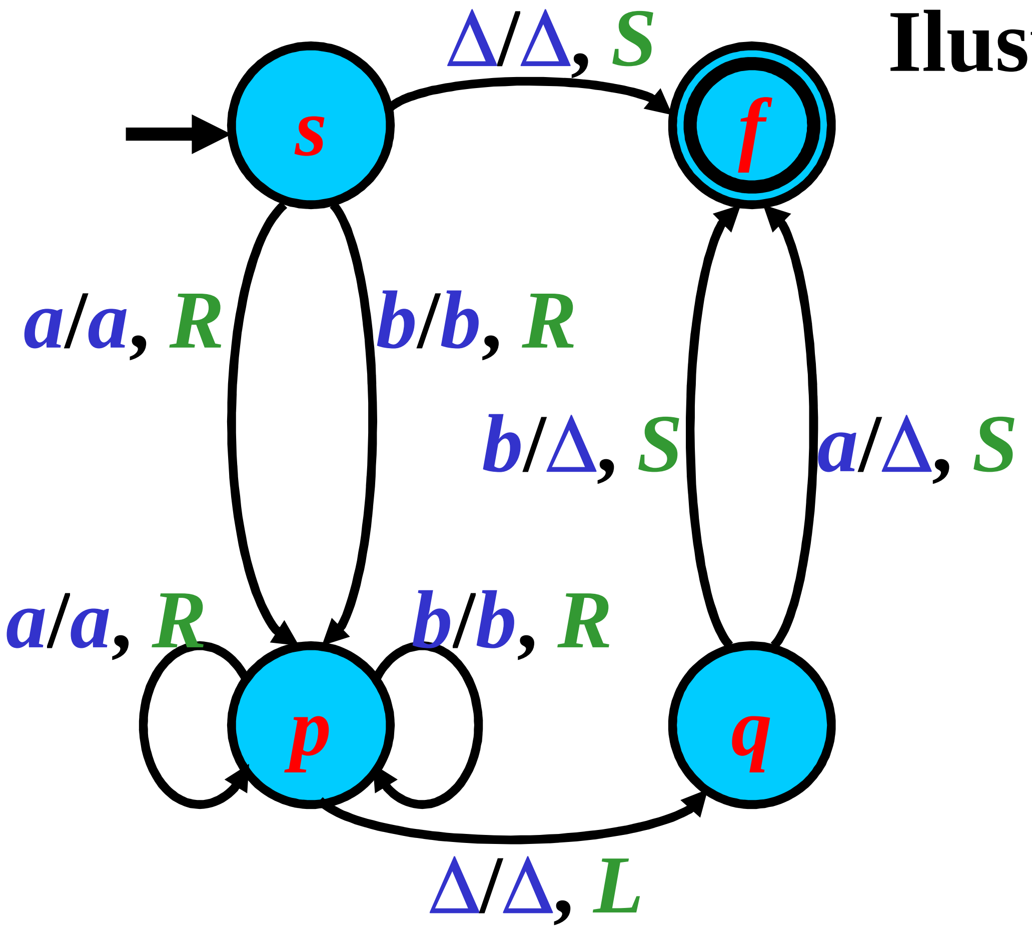
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$
kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{a, b, \Delta\}$;
- $R = \{s\Delta \rightarrow f\Delta S,$
  $sa \rightarrow paR,$
  $sb \rightarrow pbR,$
  $pa \rightarrow paR,$
  $pb \rightarrow pbR,$
  $p\Delta \rightarrow q\Delta L,$
  $qa \rightarrow f\Delta S,$
  $qb \rightarrow f\Delta S\}$
- $F = \{f\}$



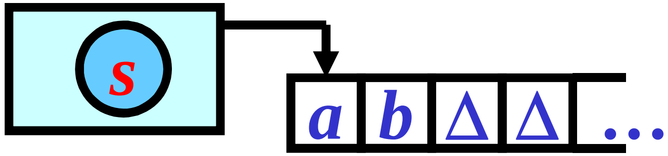
Turingův stroj: Příklad 1/2

TS ***M***:



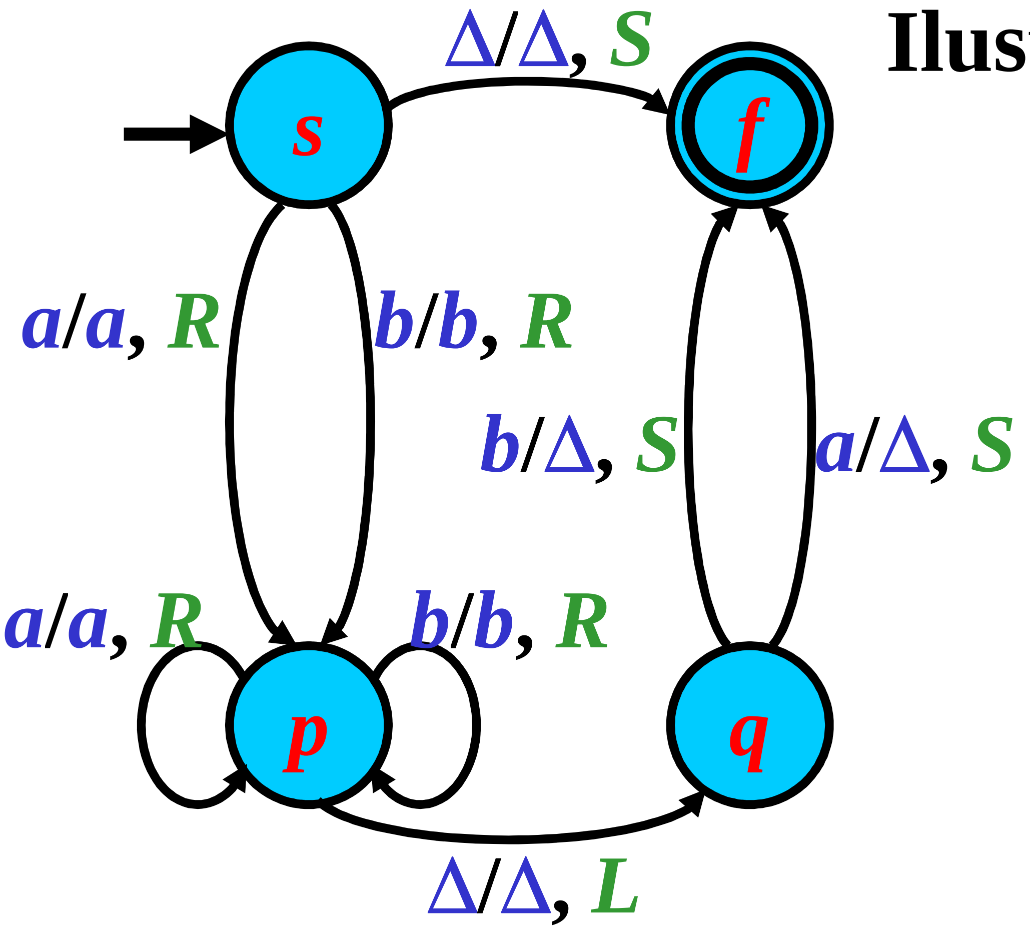
Pozn.: *M* smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ:

Ilustrace:



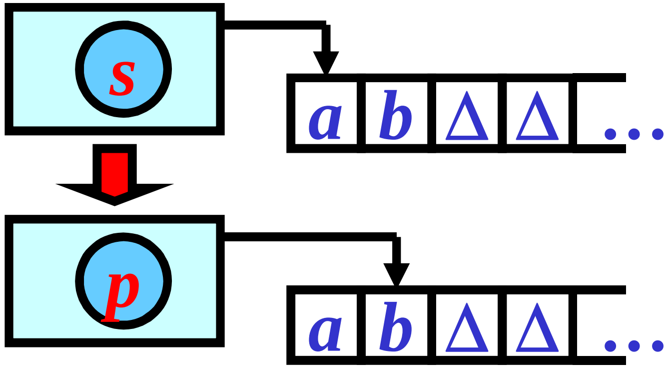
Turingův stroj: Příklad 1/2

TS ***M***:



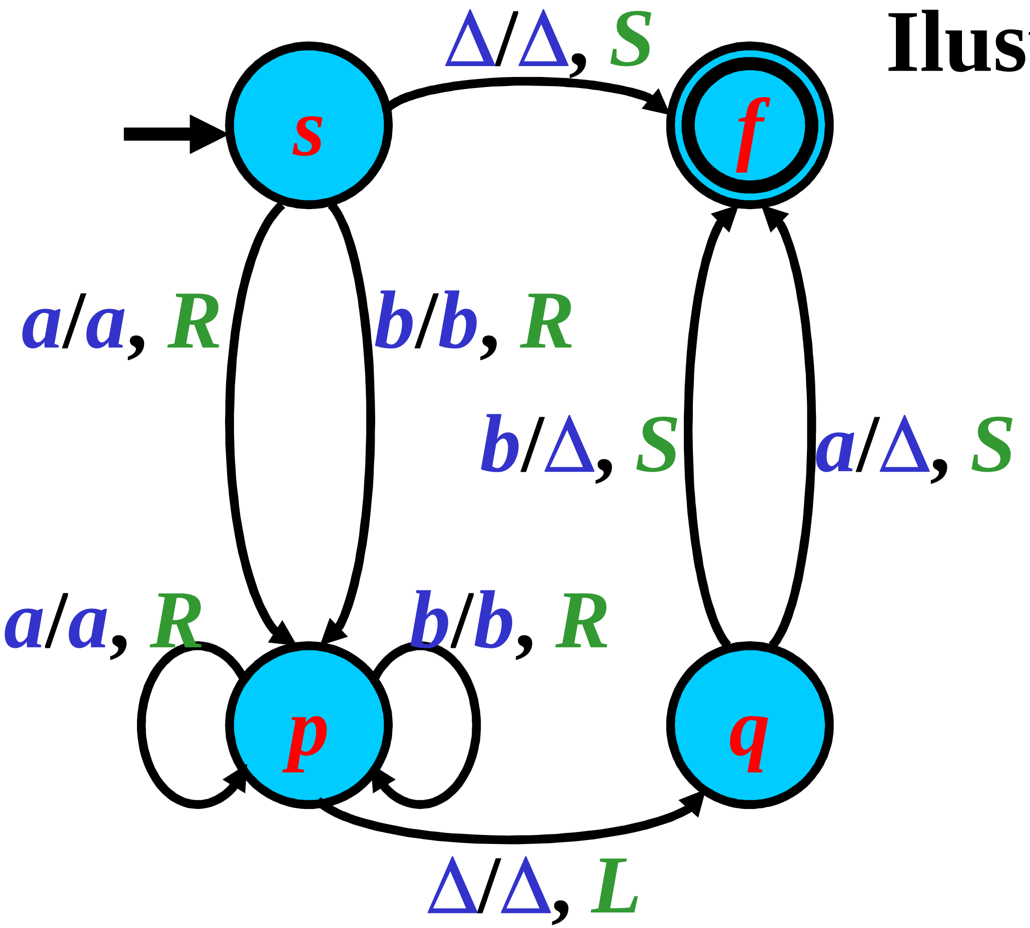
Pozn.: *M* smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ:

Ilustrace:



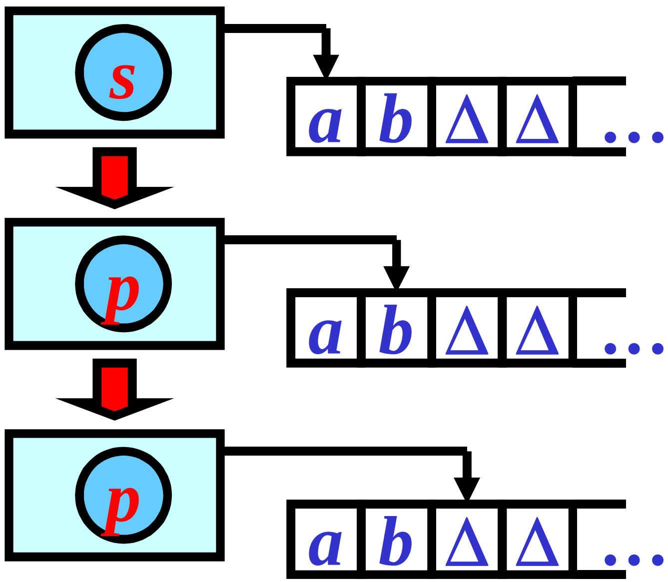
Turingův stroj: Příklad 1/2

TS ***M***:



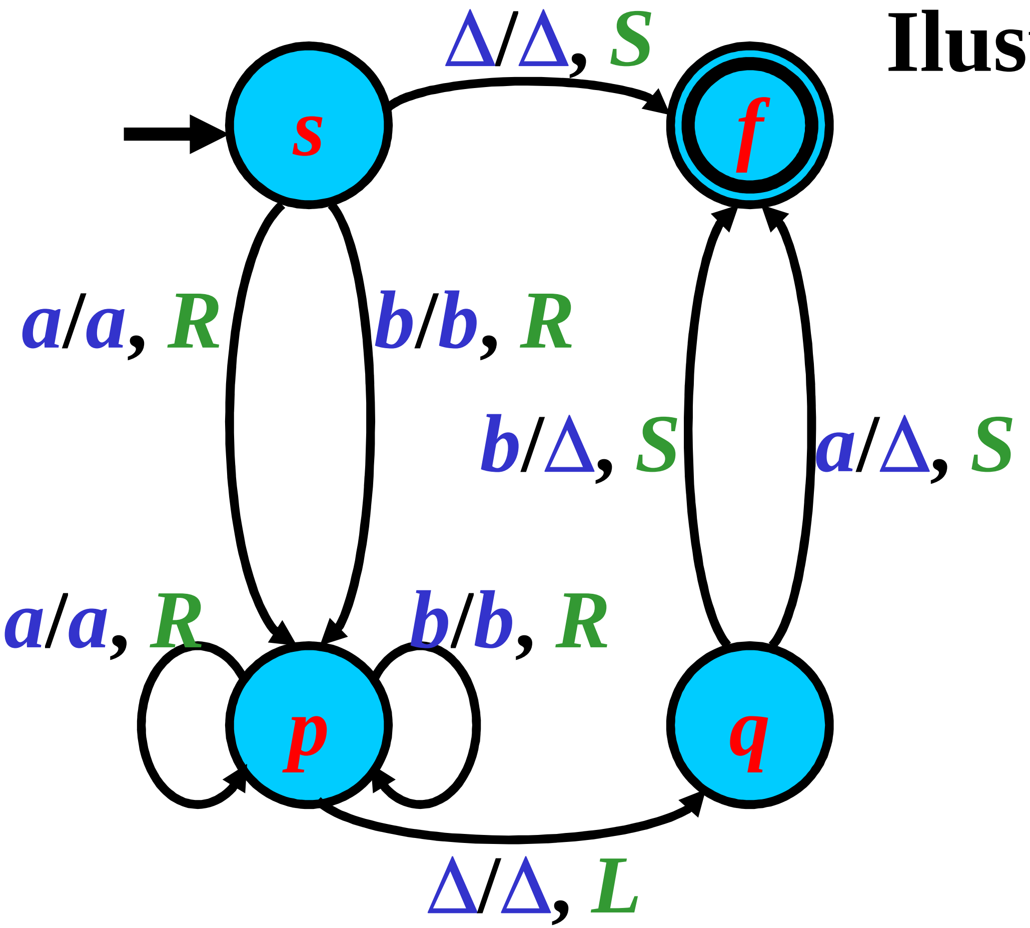
Pozn.: *M* smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ:

Ilustrace:



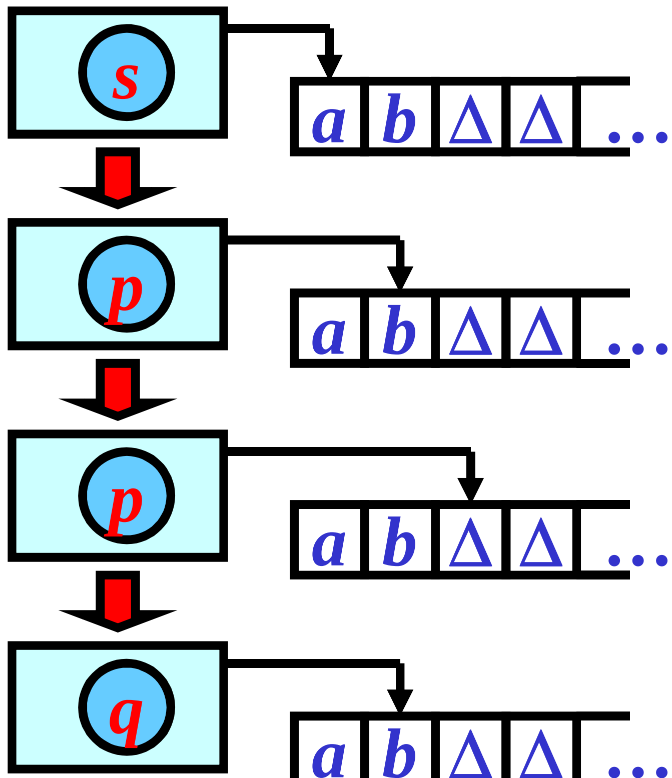
Turingův stroj: Příklad 1/2

TS ***M***:



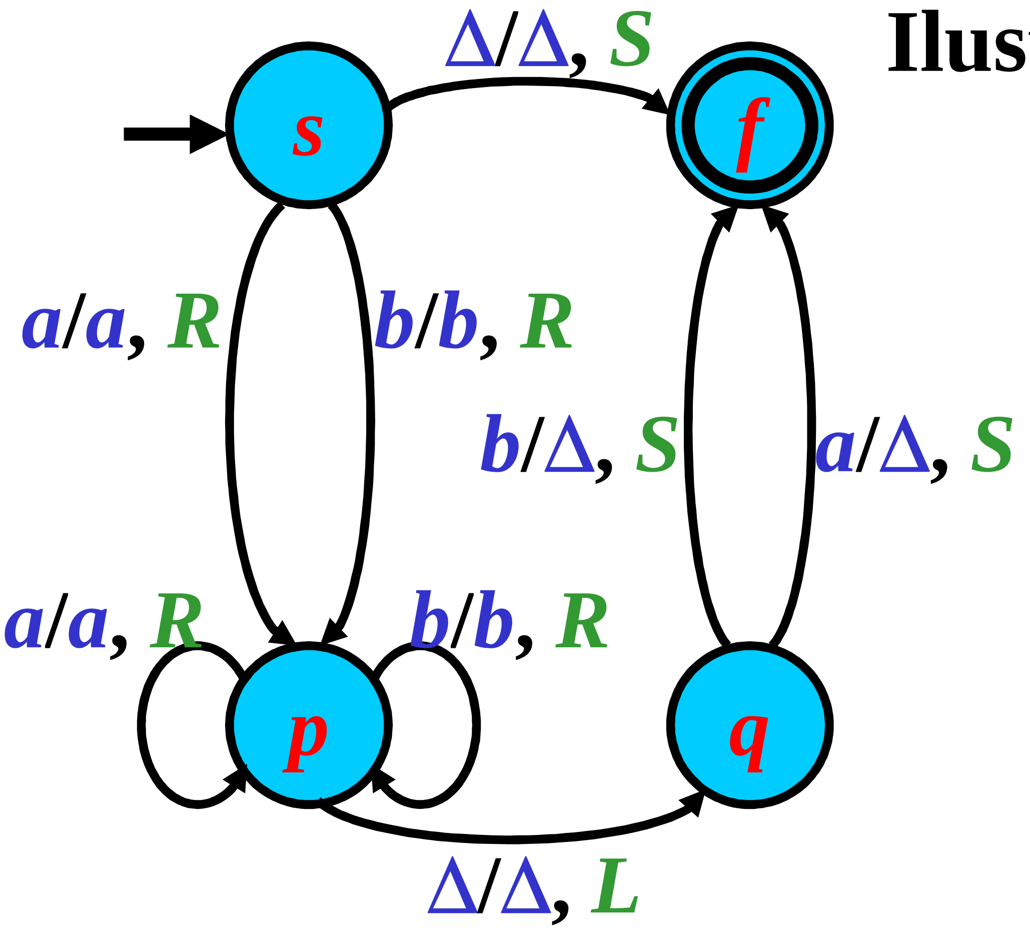
Pozn.: *M* smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ:

Ilustrace:



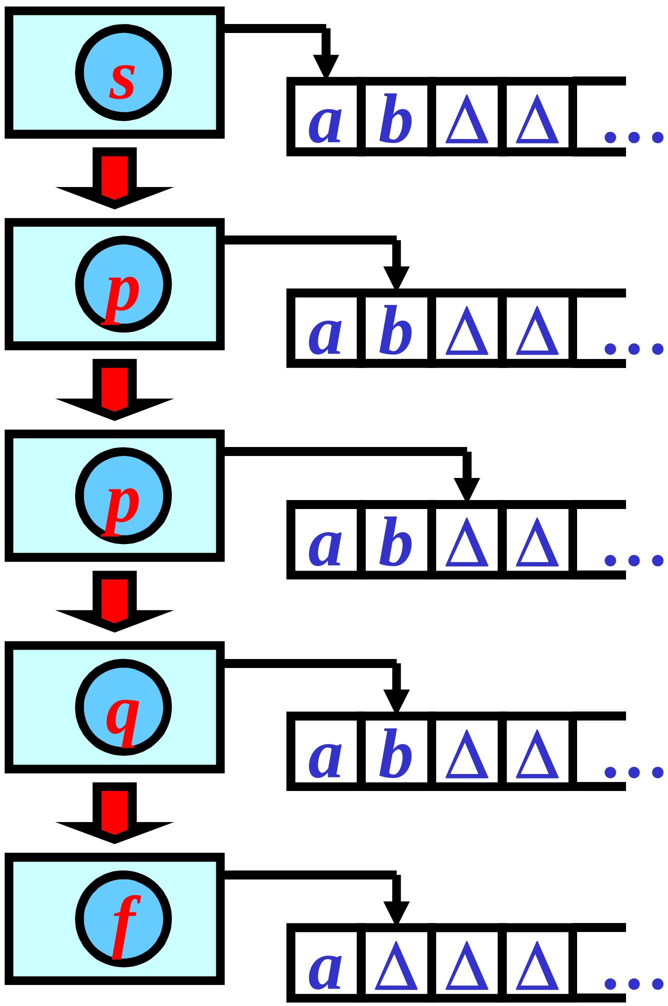
Turingův stroj: Příklad 1/2

TS ***M***:



Pozn.: *M* smaže symbol před prvním výskytem symbolu Δ:

Ilustrace:

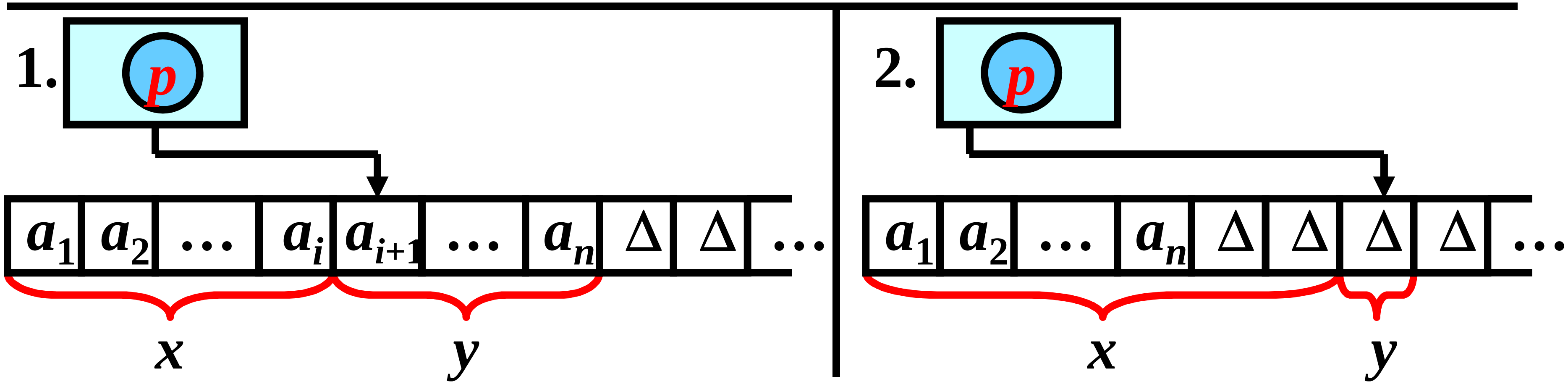


Konfigurace TS

Myšlenka: Instance popisu TS

Co vše musí být v konfiguraci popsáno?

1) Aktuální stav **2)** Obsah pásky **3)** Pozice hlavy



Konfigurace xpy

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS.

Konfigurace TS M je řetězec $\chi = xpy$, kde

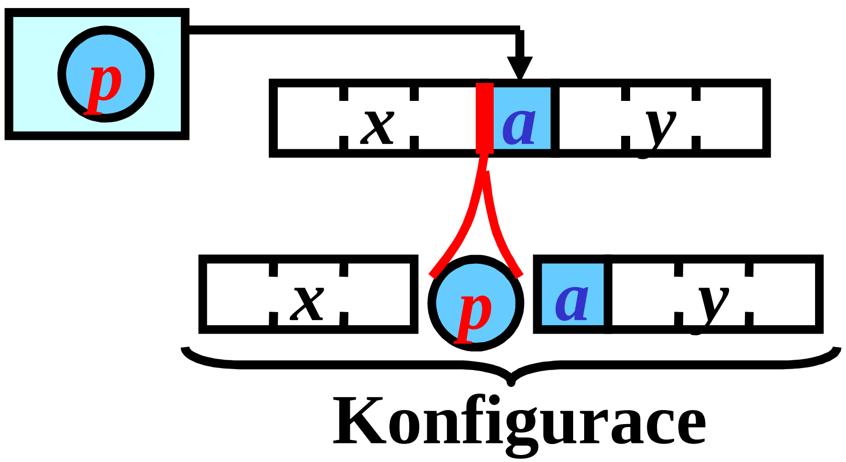
$x \in \Gamma^*$, $p \in Q$, $y \in \Gamma^*(\Gamma - \{\Delta\}) \cup \{\Delta\}$.

Stacionární přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *stacionární přechod* z χ do χ' použitím *r*, zapsáno $\chi \vdash_S \chi'$ [*r*] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_S \chi'$ pokud:

$$\chi = \boldsymbol{xpay},\ \ \chi' = \boldsymbol{xqby} \text{ a } r\text{: } \boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbS} \in R$$

Ilustrace:



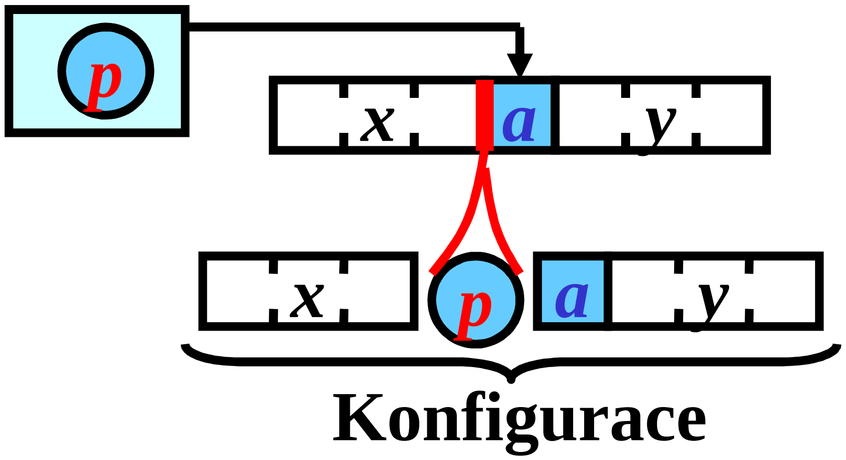
Stacionární přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *stacionární přechod* z χ do χ' použitím *r*, zapsáno $\chi \vdash_S \chi'$ [*r*] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_S \chi'$ pokud:

$$\chi = \boldsymbol{xpay},\ \ \chi' = \boldsymbol{xqby} \text{ a } r\text{: } \boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbS} \in R$$

Ilustrace:

Pravidlo: $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbS}$

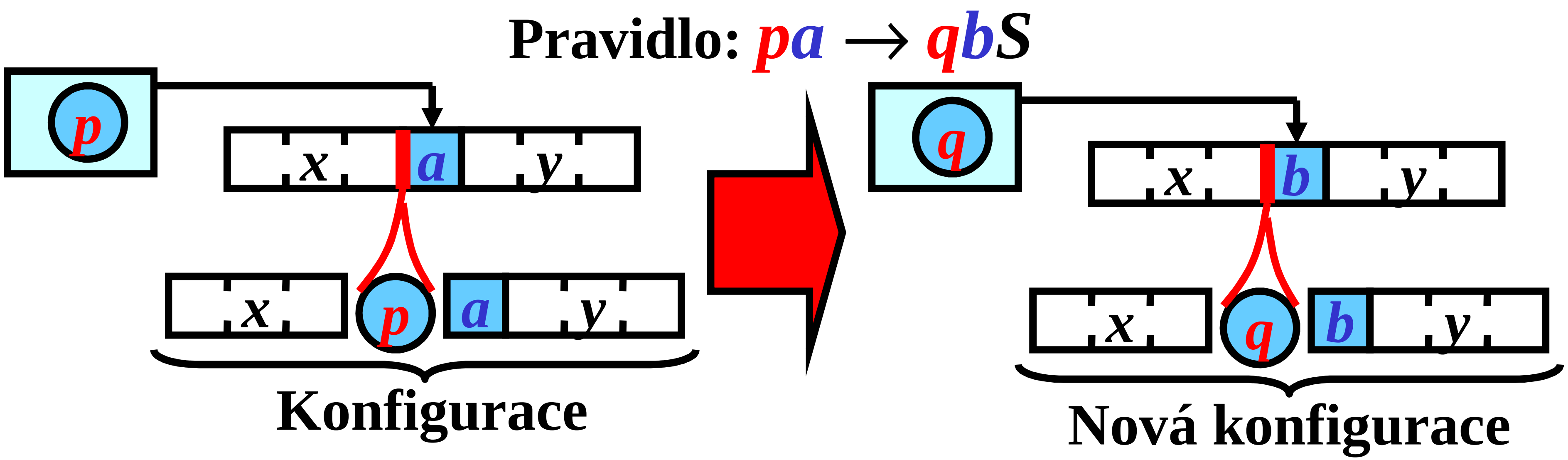


Stacionární přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *stacionární přechod* z χ do χ' použitím *r*, zapsáno $\chi \vdash_S \chi'$ [*r*] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_S \chi'$ pokud:

$$\chi = xpay,\ \ \chi' = xqby \text{ a } r: pa \rightarrow qbS \in R$$

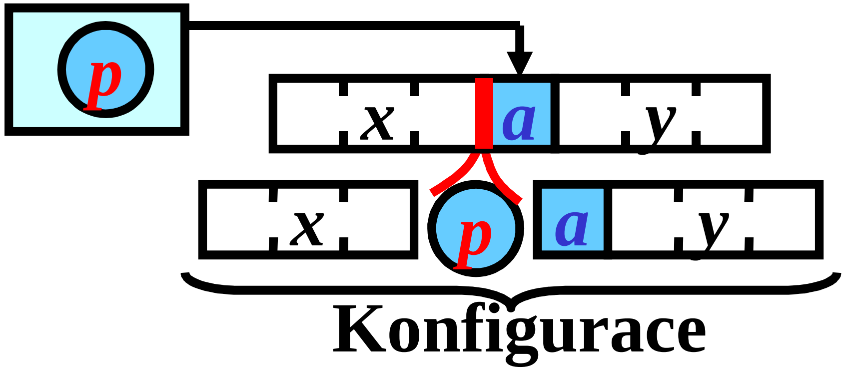
Ilustrace:



Pravý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím *r*, zapsáno $\chi \vdash_R \chi'$ [*r*] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = \boldsymbol{xpay}$, *r*: $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbR} \in R$ a současně:

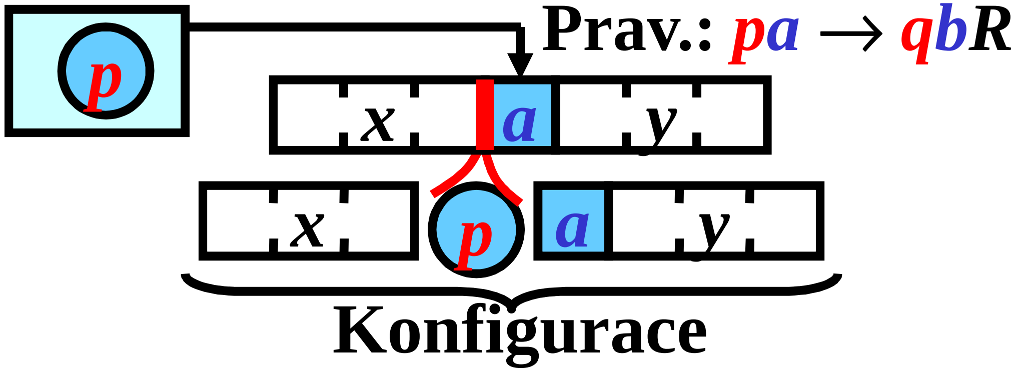
(1) $\chi' = \boldsymbol{xbqy}$, $y \neq \varepsilon$ **nebo**
(2) $\chi' = \boldsymbol{xbq}\Delta$, $y = \varepsilon$



Pravý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_R \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = \boldsymbol{xpay}$, r: $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbR} \in R$ a současně:

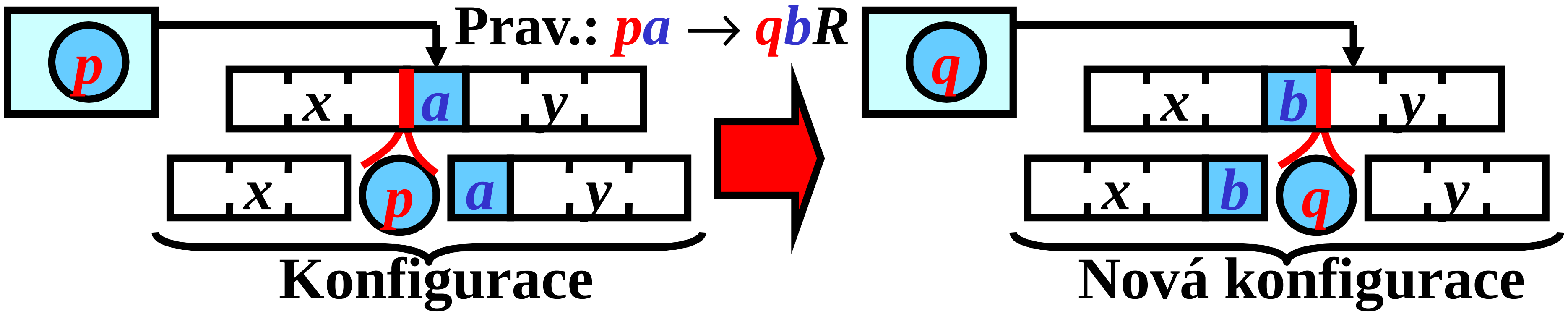
(1) $\chi' = \boldsymbol{xbqy}$, $y \neq \varepsilon$ **nebo**
(2) $\chi' = \boldsymbol{xbq}\Delta$, $y = \varepsilon$



Pravý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_R \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, r: $pa \rightarrow qbR \in R$ a současně:

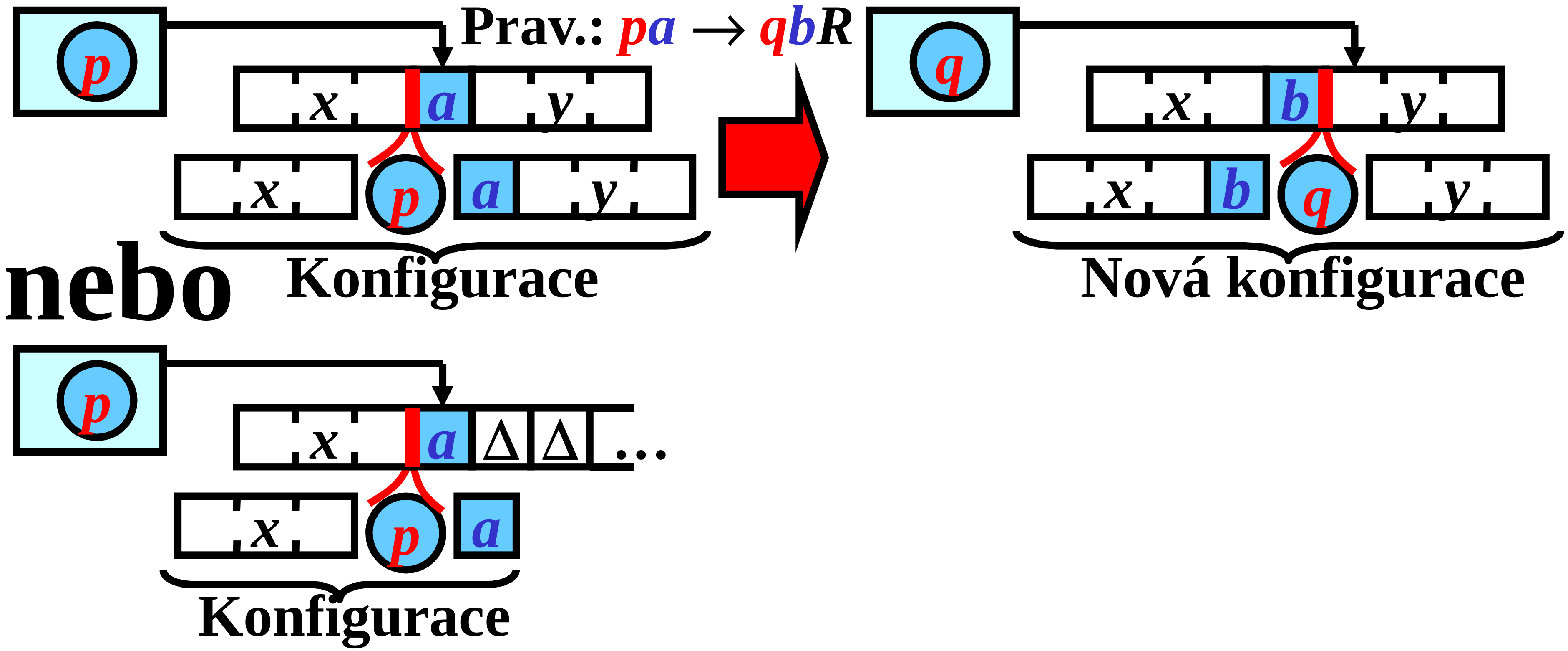
(1) $\chi' = xbqy$, $y \neq \varepsilon$ **nebo**
(2) $\chi' = xbq\Delta$, $y = \varepsilon$



Pravý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím *r*, zapsáno $\chi \vdash_R \chi'$ [*r*] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: χ = ***xpay***, *r*: ***pa*** → ***qbR*** ∈ *R* a současně:

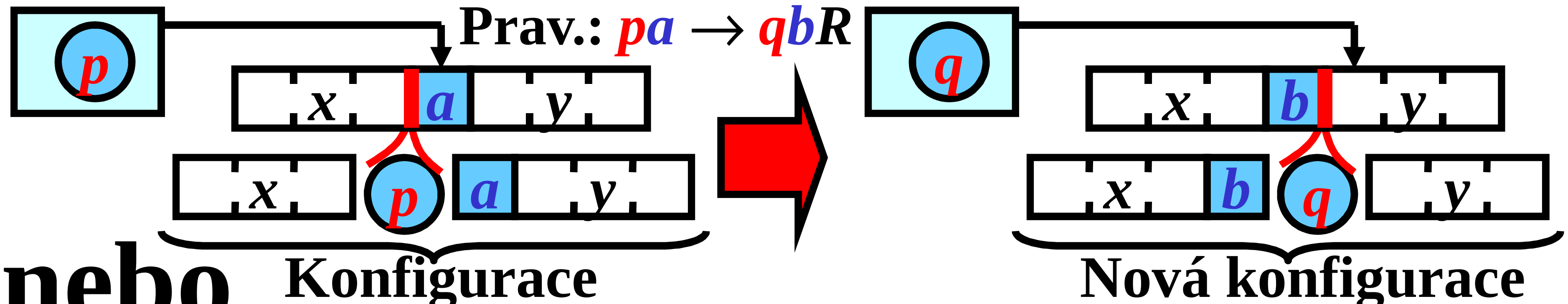
(1) χ' = ***xbqy***, *y* ≠ ε **nebo**
(2) χ' = ***xbq***Δ, *y* = ε



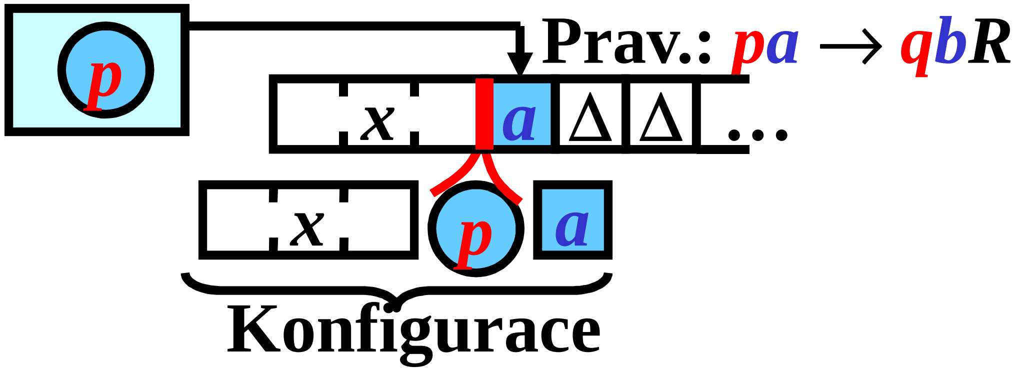
Pravý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_R \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, r: $pa \rightarrow qbR \in R$ a současně:

(1) $\chi' = xbqy$, $y \neq \varepsilon$ **nebo**
(2) $\chi' = xbq\Delta$, $y = \varepsilon$



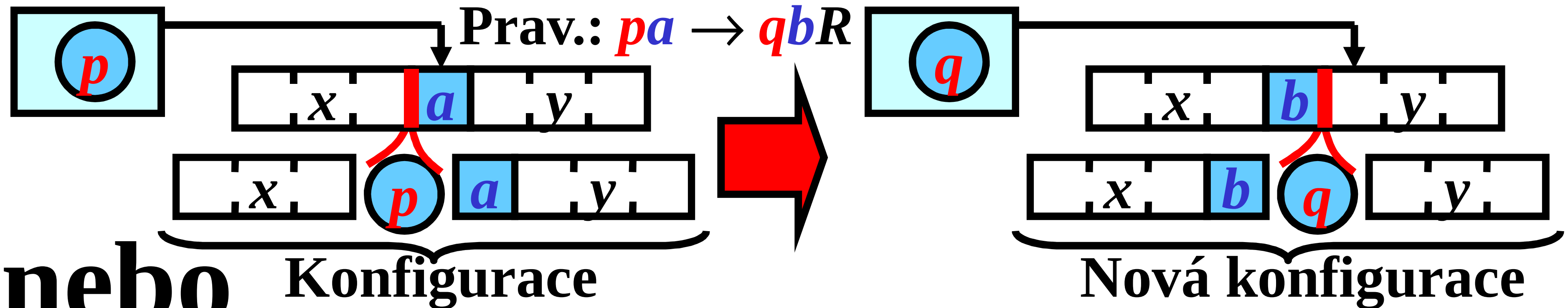
nebo



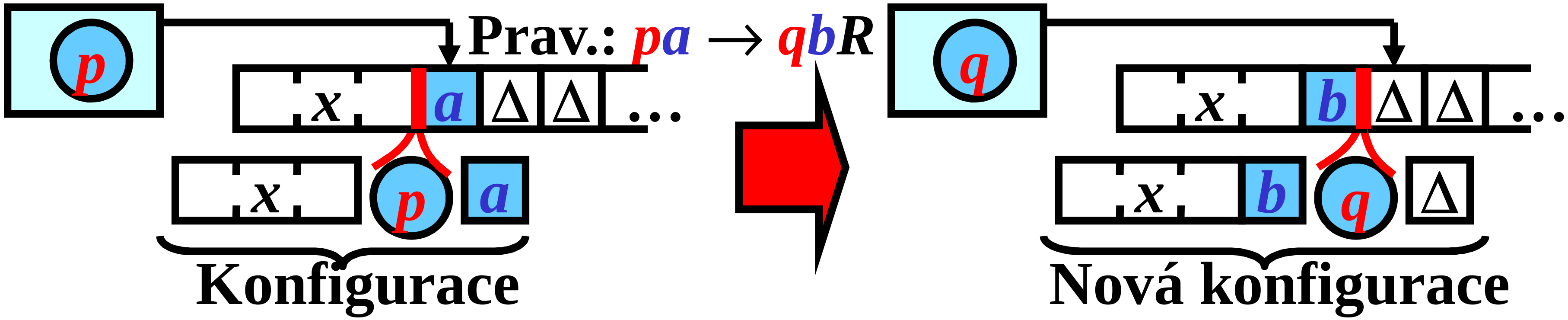
Pravý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *pravý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_R \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_R \chi'$, pokud: $\chi = xpay$, r: $pa \rightarrow qbR \in R$ a současně:

(1) $\chi' = xbqy$, $y \neq \varepsilon$ **nebo**
(2) $\chi' = xbq\Delta$, $y = \varepsilon$



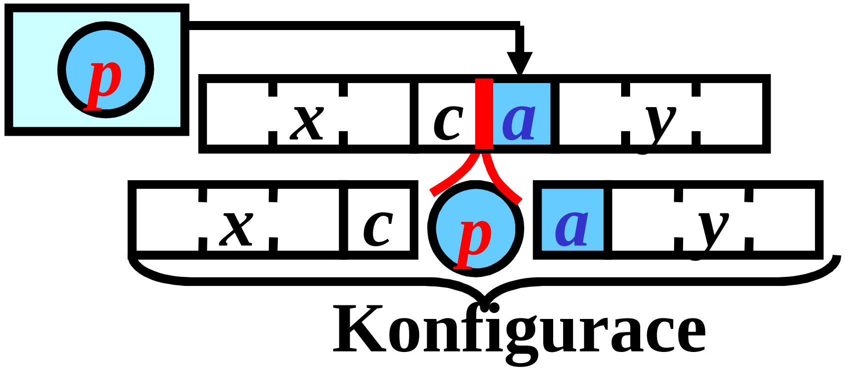
nebo



Levý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím *r*, zapsáno $\chi \vdash_L \chi'$ [*r*] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

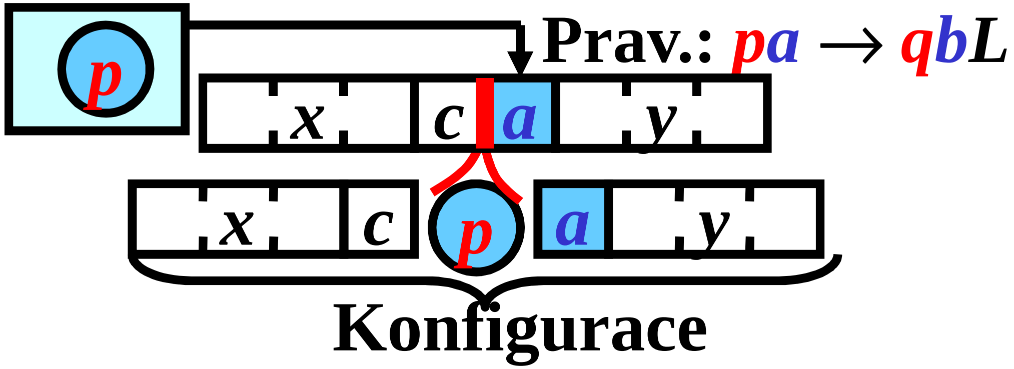
(1) $\chi = \boldsymbol{xcpay}$, $\chi' = \boldsymbol{xqcby}$, $y \neq \varepsilon$ or $\boldsymbol{b} \neq \Delta$, $r{:}\,\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbL} \in R$ **nebo**
(2) $\chi = \boldsymbol{xcpa}$, $\chi' = \boldsymbol{xqc}$, $r{:}\ \boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{q\Delta L} \in R$



Levý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_L \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

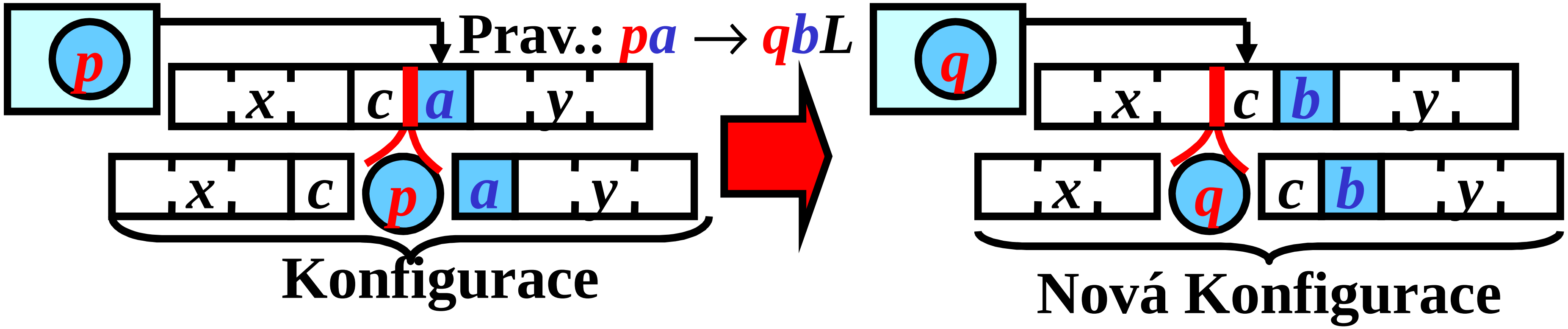
(1) $\chi = \boldsymbol{xcpay}$, $\chi' = \boldsymbol{xqcby}$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, r: $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbL} \in R$ **nebo**
(2) $\chi = \boldsymbol{xcpa}$, $\chi' = \boldsymbol{xqc}$, r: $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{q\Delta L} \in R$



Levý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím *r*, zapsáno $\chi \vdash_L \chi'$ [*r*] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

(1) $\chi = \boldsymbol{xcpay}$, $\chi' = \boldsymbol{xqcby}$, $y \neq \varepsilon$ or $\boldsymbol{b} \neq \Delta$, $r{:}\,\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbL} \in R$ **nebo**
(2) $\chi = \boldsymbol{xcpa}$, $\chi' = \boldsymbol{xqc}$, $r{:}\ \boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{q\Delta L} \in R$

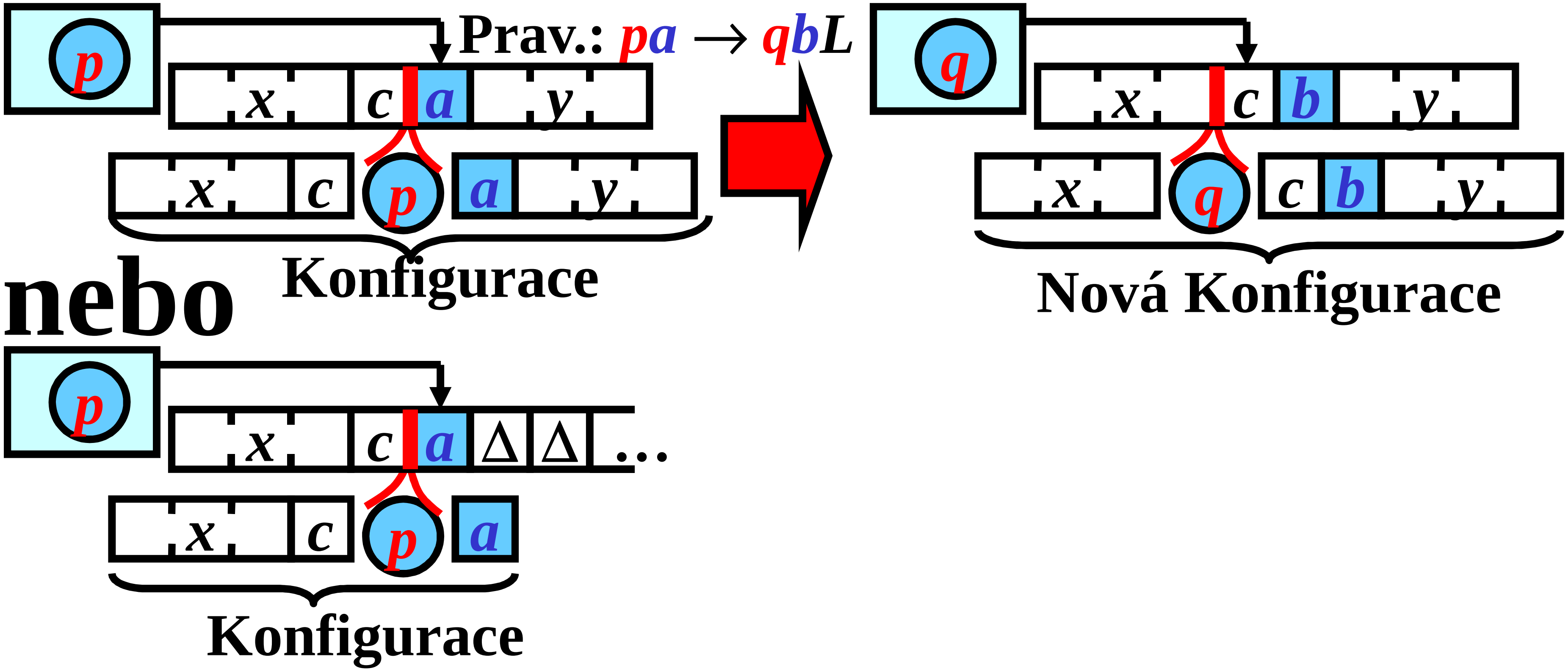


Levý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_L \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

(1) $\chi = \mathbf{xcpay}$, $\chi' = \mathbf{xqcby}$, $y \neq \varepsilon$ or $\mathbf{b} \neq \Delta$, r: $\mathbf{pa} \rightarrow \mathbf{qbL} \in R$ **nebo**

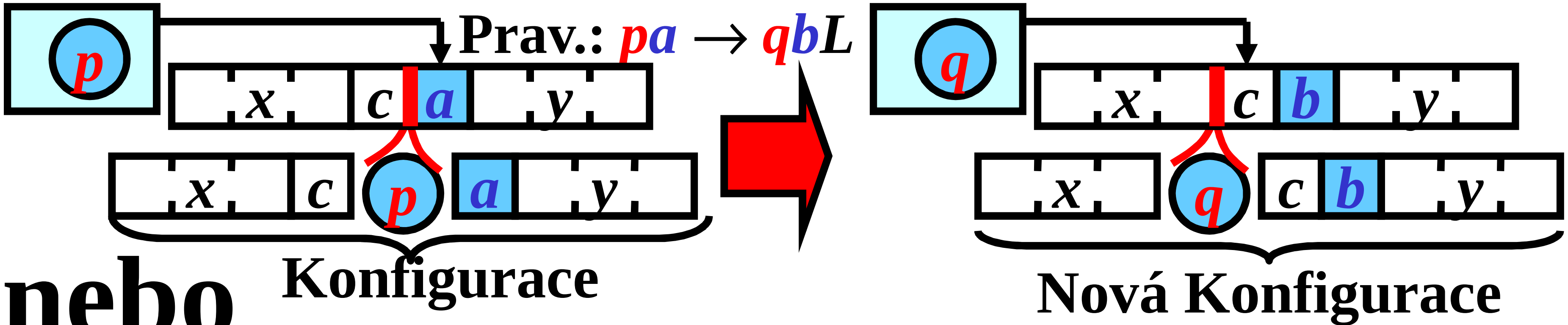
(2) $\chi = \mathbf{xcpa}$, $\chi' = \mathbf{xqc}$, r: $\mathbf{pa} \rightarrow \mathbf{q\Delta L} \in R$



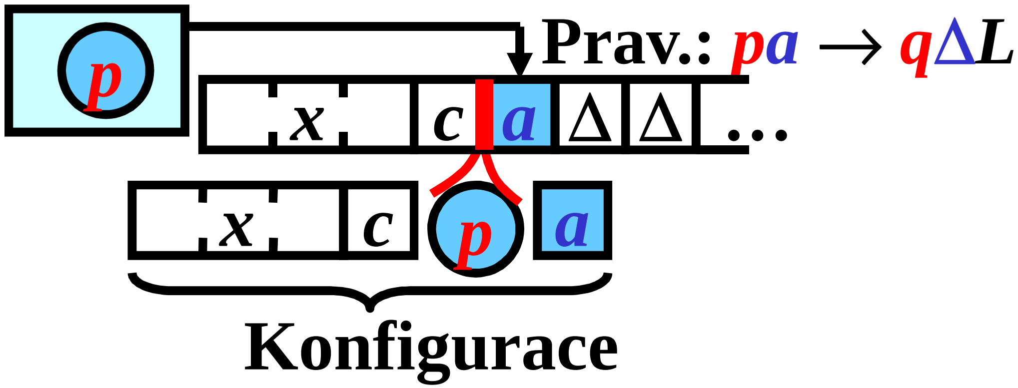
Levý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_L \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

(1) $\chi = xcpay$, $\chi' = xqcby$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $r{:}\, pa \rightarrow qbL \in R$ **nebo**
(2) $\chi = xcpa$, $\chi' = xqc$, $r{:}\, pa \rightarrow q\Delta L \in R$



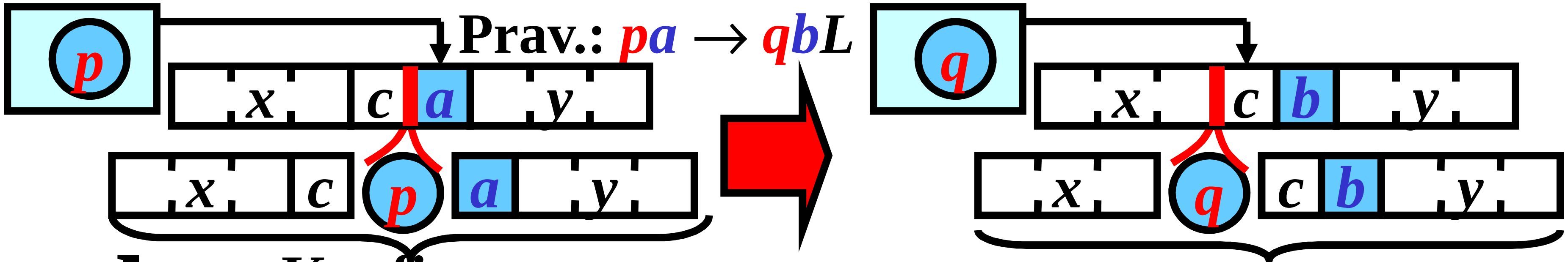
nebo



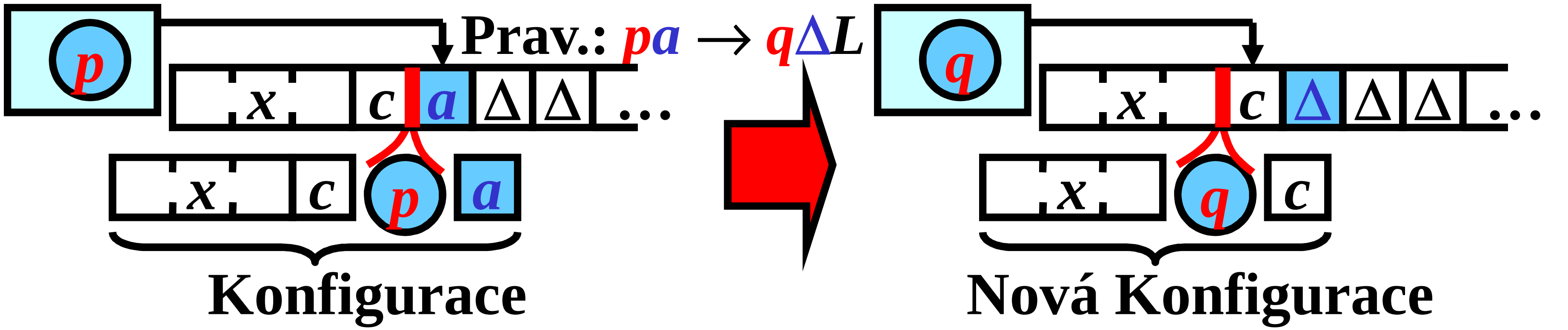
Levý přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS M. Potom M může provést *levý přechod* z χ do χ' použitím r, zapsáno $\chi \vdash_L \chi'$ [r] nebo zjednodušeně $\chi \vdash_L \chi'$ pokud:

(1) $\chi = xcpay$, $\chi' = xqcby$, $y \neq \varepsilon$ or $b \neq \Delta$, $r{:}\,pa \rightarrow qbL \in R$ **nebo**
(2) $\chi = xcpa$, $\chi' = xqc$, $r{:}\; pa \rightarrow q\Delta L \in R$



nebo



Přechod

Definice: Nechť χ, χ' jsou dvě konfigurace TS *M*. Potom *M* může provést *přechod* z χ do χ' použitím ***r***, zapsáno $\chi \vdash \chi'$ [***r***] nebo zjednodušeně $\chi \vdash \chi'$ pokud: $\chi \vdash_X \chi'$ [***r***] pro nějaké $X \in \{S, R, L\}$.

Sekvence přechodů 1/2

Myšlenka: několik výpočetních kroků po sobě

Definice: Nechť χ je konfigurace. *M* provede *nula přechodů* z χ do χ; zapisujeme:

$$\chi \vdash^{0} \chi \; [\varepsilon] \text{ nebo zjednodušeně } \chi \vdash^{0} \chi$$

Definice: Nechť $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n$ je sekvence přechodů konfigurací pro $n \geq 1$ a $\chi_{i-1} \vdash \chi_i \; [r_i]$, $r_i \in R$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, což znamená:

$$\chi_0 \vdash \chi_1 \; [r_1] \vdash \chi_2 \; [r_2] \ldots \vdash \chi_n \; [r_n]$$

Pak *M* provede *n-přechodů* z χ_0 do χ_n; zapisujeme:

$\chi_0 \vdash^{n} \chi_n \; [r_1 \ldots r_n]$ nebo zjednodušeně $\chi_0 \vdash^{n} \chi_n$

Sekvence přechodů 2/2

Pokud $\chi_0 \vdash^n \chi_n$ [ρ] pro nějaké $n \geq 1$, pak

$$\chi_0 \vdash^+ \chi_n \ [\rho].$$

Pokud $\chi_0 \vdash^n \chi_n$ [ρ] pro nějaké $n \geq 0$, pak

$$\chi_0 \vdash^* \chi_n \ [\rho].$$

Příklad: Uvažujme:

$\boldsymbol{apbc} \vdash \boldsymbol{aqac}$ [**1**: $\boldsymbol{pb} \to \boldsymbol{qaS}$] a

$\boldsymbol{aqac} \vdash \boldsymbol{acrc}$ [**2**: $\boldsymbol{qa} \to \boldsymbol{rcR}$].

Potom, $\boldsymbol{apbc} \vdash^2 \boldsymbol{acrc}$ [**1 2**],

$\boldsymbol{apbc} \vdash^+ \boldsymbol{acrc}$ [**1 2**],

$\boldsymbol{apbc} \vdash^* \boldsymbol{acrc}$ [**1 2**]

TS jako model pro přijímání jazyků

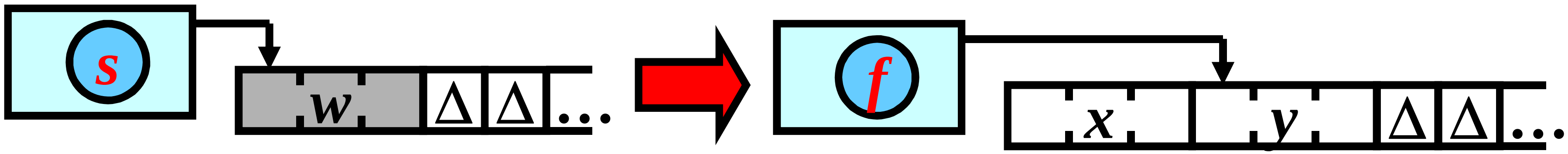
Myšlenka: *M* přijímá řetězec *w*, pokud provede sekvenci přechodů ze stavu *s* do koncového stavu

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS.
Jazyk přijímaný TS M, $L(M)$, je definován:

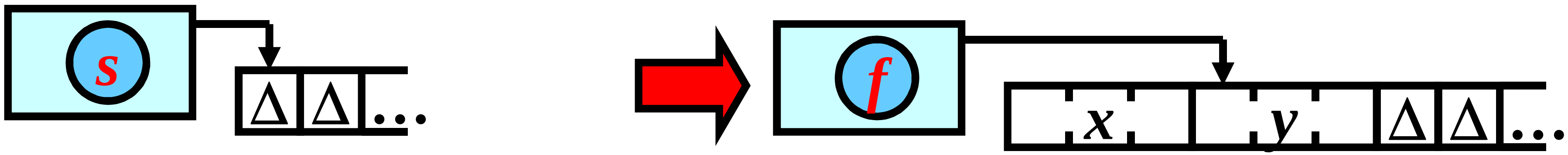
$$L(M) = \{w\colon w \in \Sigma^*, \mathbf{s}w \vdash^* x\mathbf{f}y;\ x, y \in \Gamma^*, f \in F\} \cup \{\varepsilon\colon \mathbf{s}\Delta \vdash^* x\mathbf{f}y;\ x, y \in \Gamma^*, f \in F\}$$

Ilustrace:

- **Pro $w \neq \varepsilon$:**

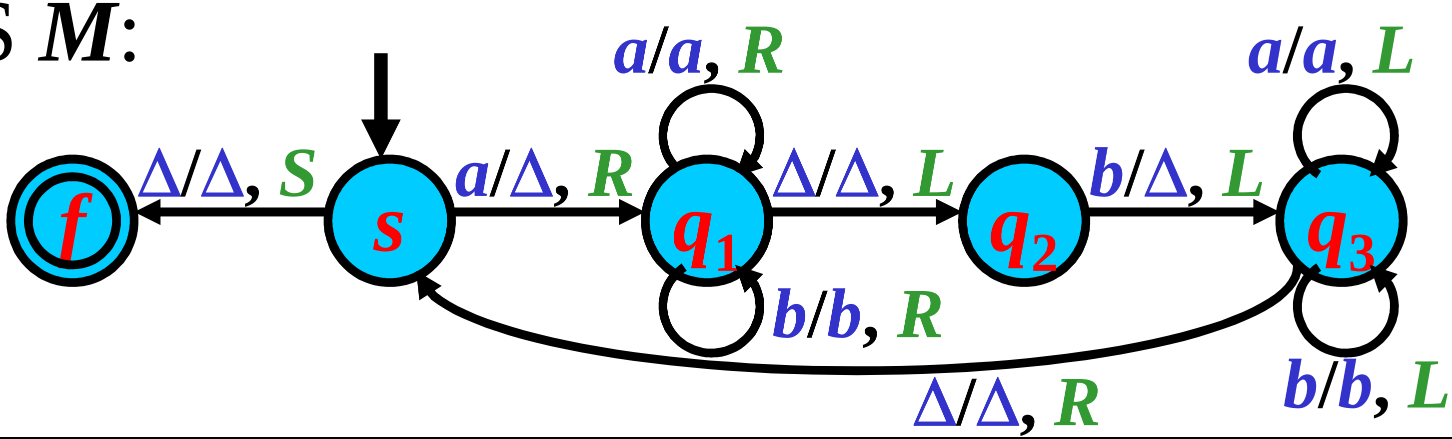


- **Pro $w = \varepsilon$:**



TS jako model pro přijímání jazyků: Příklad

TS M:



$saabb \vdash \Delta q_1 abb \vdash \Delta a q_1 bb \vdash \Delta ab q_1 b \vdash \Delta abb q_1 \Delta \vdash \Delta ab q_2 b$
$\vdash \Delta a q_3 b \vdash \Delta q_3 ab \vdash q_3 \Delta ab \vdash \Delta sab \vdash \Delta\Delta q_1 b \vdash \Delta\Delta q_1 b$
$\vdash \Delta\Delta b q_1 \Delta \vdash \Delta\Delta q_2 b \vdash \Delta q_3 \Delta \vdash s\Delta \vdash f\Delta$

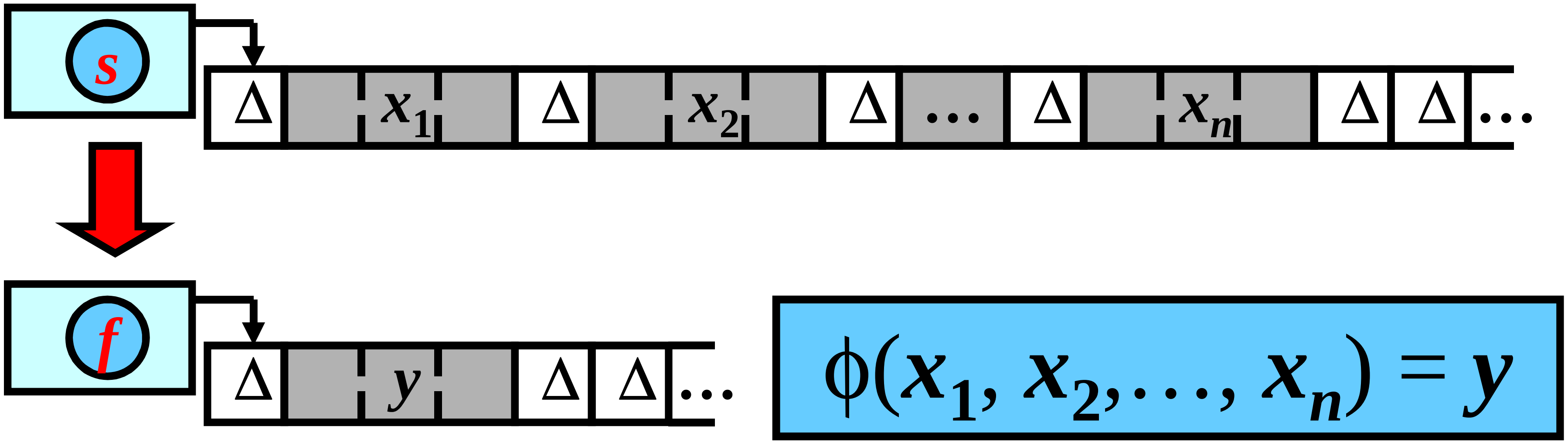
Celkově: $aabb \in L(M)$

Pozn.: $L(M) = \{a^n b^n: n \geq 0\}$

TS jako výpočetní model

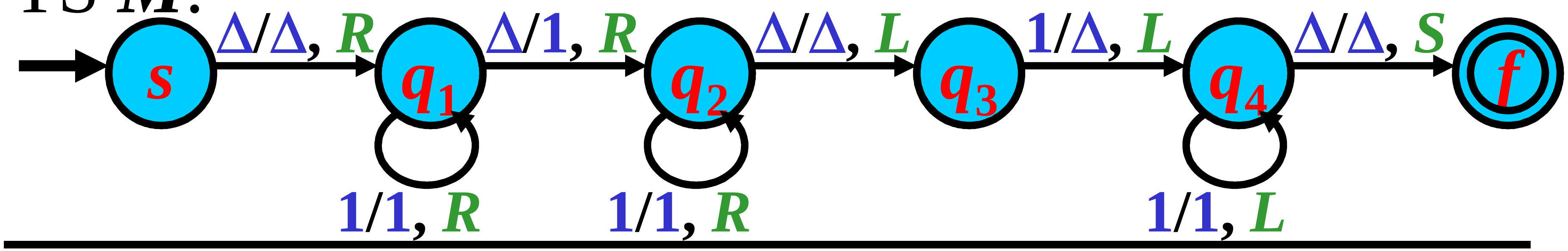
Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS. TS M vyčísluje *n-nární funkci* ϕ následujícím způsobem: $s\Delta x_1\Delta x_2\ldots\Delta x_n \vdash^* f\Delta y$, kde $f \in F$ **právě tehdy, když** $\phi(x_1, x_2,\ldots, x_n) = y$.

Illustrace:



TS jako výpočetní model: Příklad

TS M:



$s\Delta 11\Delta 11 \vdash \Delta q_1 11\Delta 11 \vdash \Delta 1 q_1 1\Delta 11 \vdash \Delta 11 q_1 \Delta 11 \vdash \Delta 111 q_2 11$
$\vdash \Delta 1111 q_2 1 \vdash \Delta 11111 q_2 \Delta \vdash \Delta 1111 q_3 1 \vdash \Delta 111 q_4 1$
$\vdash \Delta 11 q_4 11 \vdash \Delta 1 q_4 111 \vdash \Delta q_4 1111 \vdash q_4 \Delta 1111$
$\vdash f\Delta 1111$

Celkově: $\phi(11, 11) = 1111$

Pozn.: $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, kde

- $x_1 = 1^a$ reprezentuje přirozené číslo a
- $x_2 = 1^b$ reprezentuje přirozené číslo b

Deterministický TS (DTS)

Myšlenka: Deterministický TS může provést z každé konfigurace maximálně jeden přechod

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, s, F)$ je TS. M je *deterministický TS*, pokud pro každé pravidlo tvaru $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbt} \in R$ platí, že množina $R - \{\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{qbt}\}$ neobsahuje žádné pravidlo s levou stranou $\boldsymbol{pa}$.

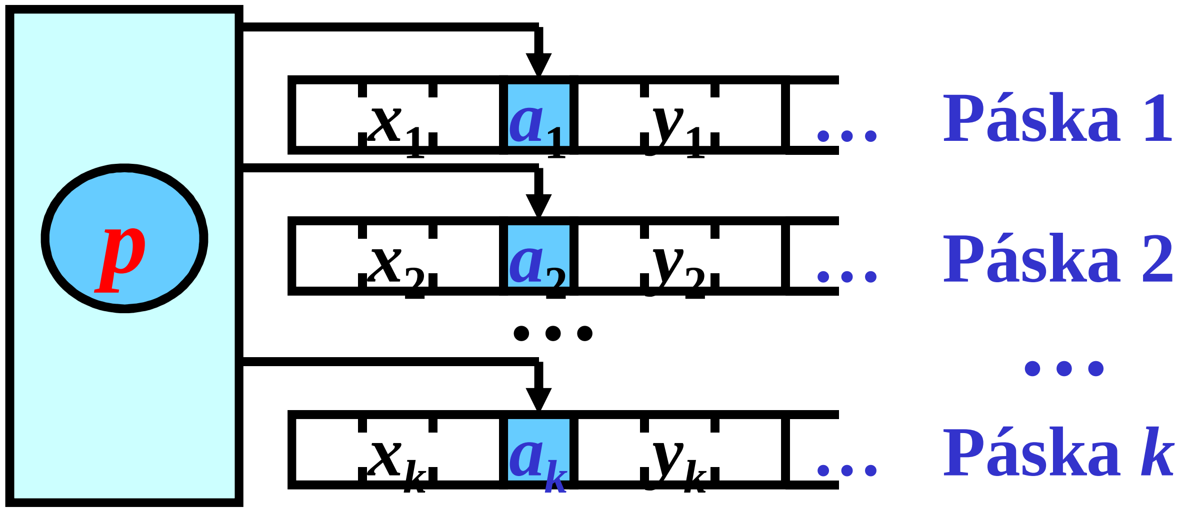
Tvrzení: Pro každý TS M existuje ekvivalentní DTS M_d.

Důkaz: Viz str. 634 v knize [Meduna: Automata and Languages]

k-páskový Turingův stroj

Myšlenka: Turingův stroj s „*k*“ páskami

Ilustrace:



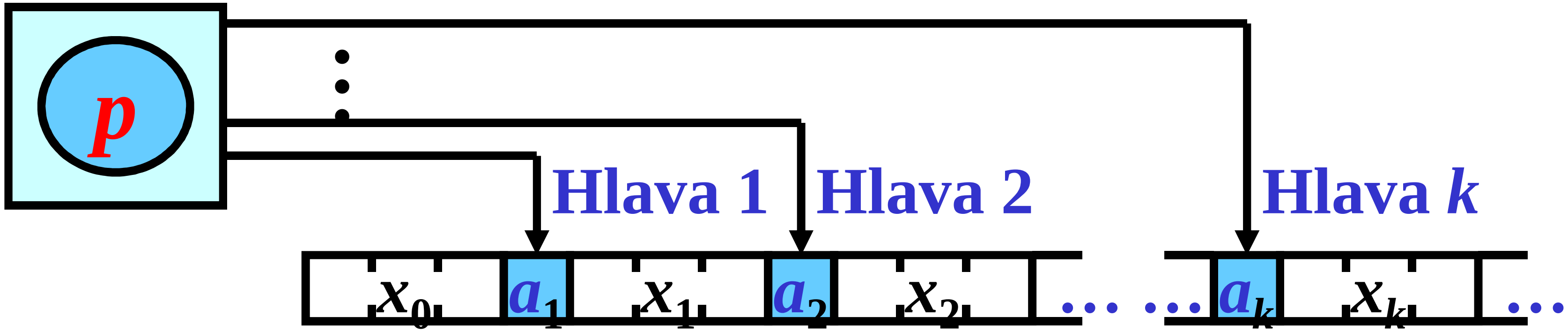
Tvrzení: Pro každý k-páskový TS M_p existuje ekvivalentní TS M.

Důkaz: Viz str. 662 v knize [Meduna: Automata and Languages]

k-hlavý Turingův stroj

Myšlenka: Turingův stroj s „*k*“ hlavami

Ilustrace:



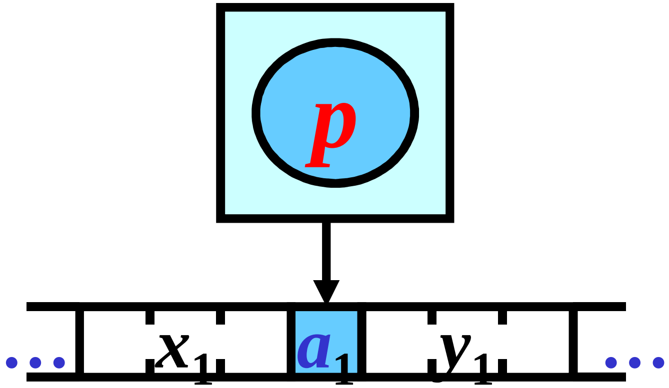
Tvrzení: Pro každý *k*-hlavý TS M_h existuje ekvivalentní TS *M*.

Důkaz: Viz str. 667 v knize [Meduna: Automata and Languages]

TS s oboustranně nekonečnou páskou

Myšlenka: Turingův stroj s páskou, která je nekonečná směrem doleva i doprava

Ilustrace:



Tvrzení: Pro každý TS s oboustranně nekonečnou páskou M_o existuje ekvivalentní TS M.

Důkaz: Viz str. 673 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Zakódování Turingova stroje

Myšlenka: Popis Turingova stroje pomocí řetězce obsahující nuly a jedničky

- Předpokládejme, že TS M má tvar $M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, q_0, \{q_1\})$,

kde: $\boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{q_1}, \dots, \boldsymbol{q_m}\}$, $\Gamma = \{\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$ tak, že: $\boldsymbol{a_0} = \Delta$

- Nechť δ je zobrazení z $(\boldsymbol{Q} \cup \Gamma \cup \{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}\})$ do $\{0, 1\}^*$,

definováno:

$$\delta(S) = 01,\ \delta(L) = 001,\ \delta(R) = 0001,$$
$$\delta(q_i) = 0^{i+1}1 \text{ pro všechna } i = 0 \dots m,$$
$$\delta(a_i) = 0^{i+1}1 \text{ pro všechna } i = 0 \dots n$$

- Pro každé r: $pa \rightarrow qbt \in R$ definujeme:

$$\delta(r) = \delta(p)\delta(a)\delta(q)\delta(b)\delta(t)1$$

- Nechť $R = \{r_0, r_1, \dots, r_k\}$. Potom

$$\delta(M) = 111\delta(r_0)\delta(r_1)\dots\delta(r_k)1 \text{ je zakódování TS } M$$

Zakódování Turingova stroje: Příklad

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, R, q_0, \{q_1\})$, kde

$Q = \{\boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{q_1}\}$; $\Sigma = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$; $\Gamma = \{\Delta, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$;

$R = \{\mathbf{1}\text{: } \boldsymbol{q_0 a_1} \to \boldsymbol{q_0 a_2 R}, \mathbf{2}\text{: } \boldsymbol{q_0 a_2} \to \boldsymbol{q_0 a_1 R}, \mathbf{3}\text{: } \boldsymbol{q_0}\Delta \to \boldsymbol{q_1}\Delta \boldsymbol{S}\}$

Určeme: Zakódování TS M, $\delta(M)$.

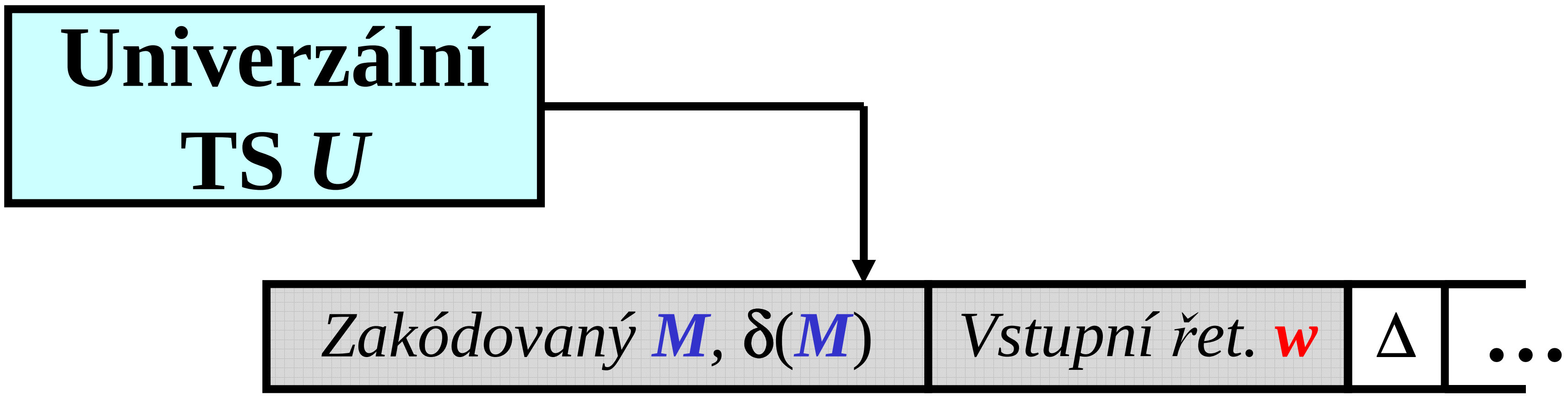
$\delta(\boldsymbol{S}) = \mathbf{01}$, $\delta(\boldsymbol{L}) = \mathbf{001}$, $\delta(\boldsymbol{R}) = \mathbf{0001}$,
$\delta(\boldsymbol{q_0}) = \mathbf{01}$, $\delta(\boldsymbol{q_1}) = \mathbf{001}$,
$\delta(\Delta) = \mathbf{01}$, $\delta(\boldsymbol{a_1}) = \mathbf{001}$, $\delta(\boldsymbol{a_2}) = \mathbf{0001}$.

$$\begin{aligned}
\delta(\boldsymbol{M}) &= 111\delta(1)\delta(2)\delta(3)1 \\
&= 111\delta(q_0)\delta(a_1)\delta(q_0)\delta(a_2)\delta(R)1 \\
&\qquad \delta(q_0)\delta(a_2)\delta(q_0)\delta(a_1)\delta(R)1 \\
&\qquad \delta(q_0)\delta(\Delta)\delta(q_1)\delta(\Delta)\delta(S)11 \\
&= \mathbf{1110100101000100011} \\
&\quad\ \mathbf{0100010100100011} \\
&\quad\ \mathbf{0101001010111}
\end{aligned}$$

Univerzální Turingův stroj

Myšlenka: Univerzální TS může odsimulovat libovolný DTS

Ilustrace:



Pozn.: Univerzální TS přečte zakódování TS ***M*** a vstupní řetězec ***w*** na pásce a pak odsimuluje přechody, které by prováděl TS ***M*** se vstupním řetězcem ***w***.

Neomezené gramatiky: Definice

Myšlenka: Zobecnění BKG

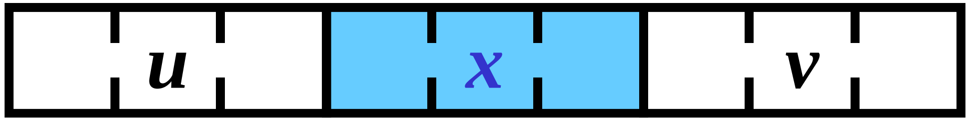
Definice: *Neomezená gramatika* (NG) je čtveřice $G = (N, T, P, S)$, kde
- N je abeceda *neterminálů*
- T je abeceda *terminálů*, přičemž $N \cap T = \emptyset$
- P je konečná množina *pravidel* tvaru $\boldsymbol{x \to y}$, kde $\boldsymbol{x \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*, y \in (N \cup T)^*}$
- $S \in N$ je *počáteční neterminál*

Matematická poznámka k pravidlům:
- Čistě matematicky, P je relace z $(N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ do $(N \cup T)^*$
- Místo relačního zápisu $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in P$ zapisujeme pravidla $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \in P$

Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

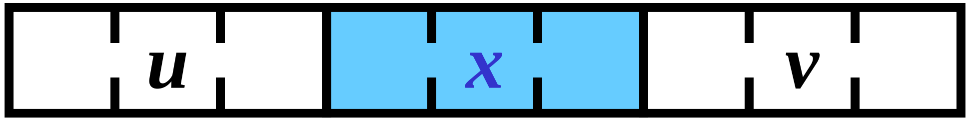
Definice: Nechť $G = (N, T, P, S)$ je NG. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (N \cup T)^*$ a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} \in P$. Potom, $\boldsymbol{uxv}$ *přímo derivuje* $\boldsymbol{uyv}$ za použití $\boldsymbol{p}$ v G, zapsáno $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}$ [$\boldsymbol{p}$] nebo zjednodušeně $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}$.



Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

Definice: Nechť $G = (N, T, P, S)$ je NG. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (N \cup T)^*$ a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \in P$. Potom, $\boldsymbol{uxv}$ *přímo derivuje* $\boldsymbol{uyv}$ za použití $\boldsymbol{p}$ v G, zapsáno $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}$ [$\boldsymbol{p}$] nebo zjednodušeně $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}$.



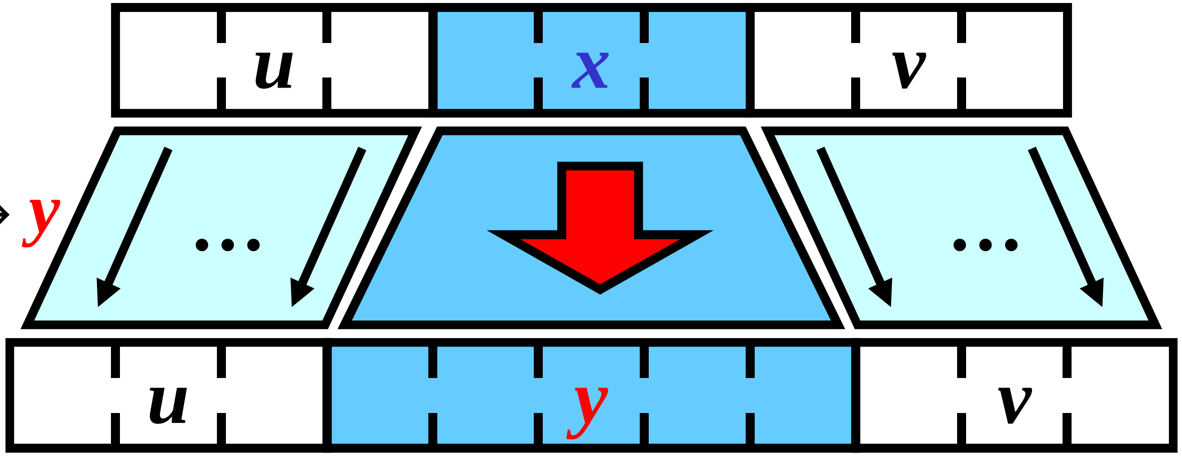
Pravidlo: $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$

Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

Definice: Nechť $G = (N, T, P, S)$ je NG. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (N \cup T)^*$ a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} \in P$. Potom, $\boldsymbol{uxv}$ *přímo derivuje* $\boldsymbol{uyv}$ za použití $\boldsymbol{p}$ v G, zapsáno $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}\ [\boldsymbol{p}]$ nebo zjednodušeně $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}$.

Pravidlo: $x \rightarrow y$

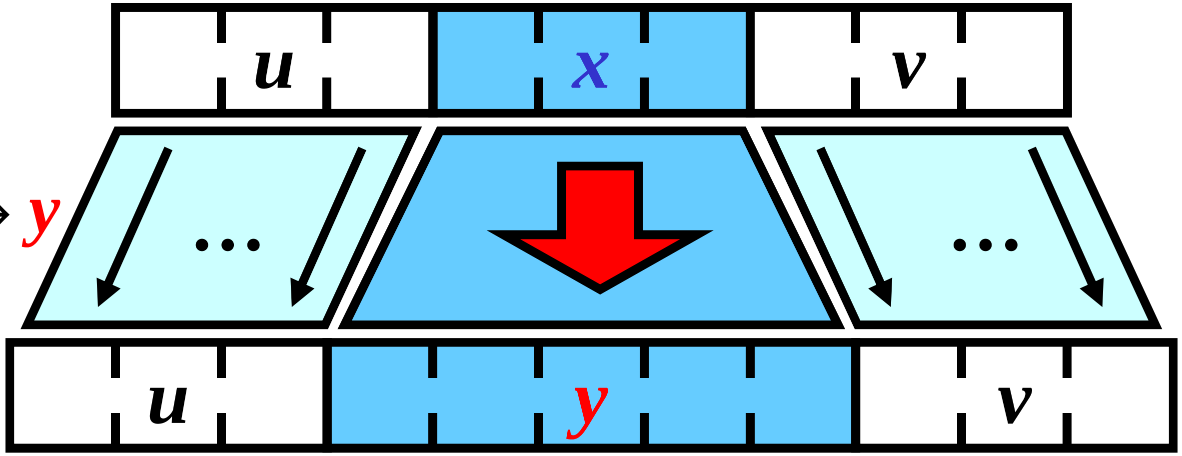


Derivační krok

Myšlenka: Změna řetězce použitím pravidla

Definice: Nechť $G = (N, T, P, S)$ je NG. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (N \cup T)^*$ a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} \in P$. Potom, $\boldsymbol{uxv}$ *přímo derivuje* $\boldsymbol{uyv}$ za použití $\boldsymbol{p}$ v G, zapsáno $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}\ [\boldsymbol{p}]$ nebo zjednodušeně $\boldsymbol{uxv} \Rightarrow \boldsymbol{uyv}$.

Pravidlo: $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$



Pozn.: $\Rightarrow^n, \Rightarrow^+, \Rightarrow^*$ a $L(G)$ je definováno stejně jako u bezkontextových gramatik.

Neomezená gramatika: Příklad

$G = (N, T, P, S)$, kde $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a\}$

$P = \{$ 1: $S \to ASB$, 2: $S \to a$,
3: $Aa \to aaA$, 4: $AB \to \varepsilon$ $\}$

$S \Rightarrow a$ [2]

$S \Rightarrow A\underline{S}B$ [1] $\Rightarrow \underline{Aa}B$ [2] $\Rightarrow aa\underline{AB}$ [3] $\Rightarrow aa$ [4]

$S \Rightarrow A\underline{S}B$ [1] $\Rightarrow AA\underline{S}BB$ [1] $\Rightarrow A\underline{Aa}BB$ [2] $\Rightarrow$
$\underline{Aa}aABB$ [3] $\Rightarrow aa\underline{Aa}ABB$ [3] $\Rightarrow$
$aaaaA\underline{AB}B$ [3] $\Rightarrow aaaa\underline{AB}$ [4] $\Rightarrow aaaa$ [4]

$\vdots$

Pozn.: $L(G) = \{a^{2^n} : n \geq 0\}$

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky

Definice: Nechť L je jazyk. L je *rekurzivně vyčíslitelný jazyk*, pokud existuje Turingův stroj M takový, pro který platí: $L = L(M)$.

Tvrzení: Pro každou NG G existuje TS M, pro který platí: $L(G) = L(M)$.

Důkaz: Viz str. 714 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Pro každý TS M, existuje NG G, pro kterou platí: $L(M) = L(G)$.

Důkaz: Viz str. 715 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Závěr: Fundamentální modely pro rekurzivně vyčíslitelné jazyky jsou:

1) Neomezené gramatiky **2) Turingovy stroje**

Kontextová gramatika (KG)

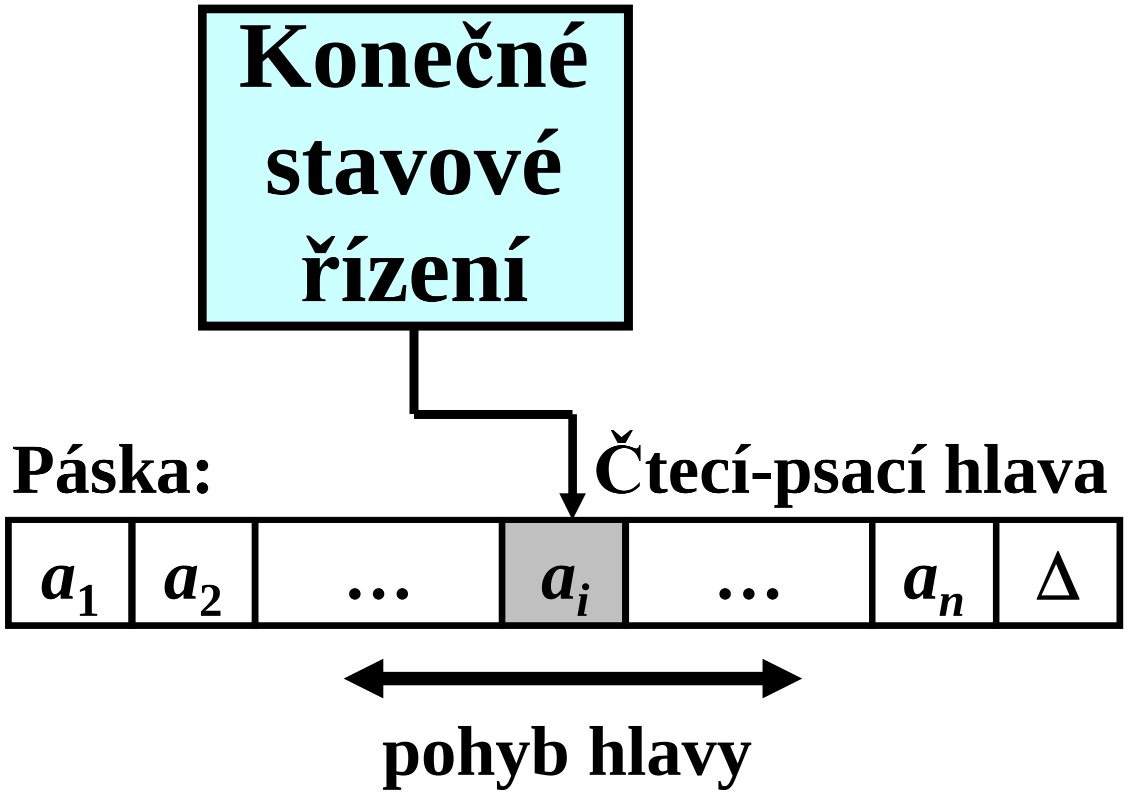
Myšlenka: Omezení NG

Definice: Nechť $G = (N, T, P, S)$ je neomezená gramatika. G je *kontextová gramatika* (KG), pokud každé pravidlo $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} \in P$ splňuje podmínku: $|\boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{y}|$.

Pozn.: $\Rightarrow$, $\Rightarrow^n$, $\Rightarrow^+$, $\Rightarrow^*$ a $L(G)$ je definováno stejně jako u neomezených gramatik.

Lineárně ohraničené automaty

Myšlenka: Turingův stroj s omezenou páskou na délku vstupního řetězce

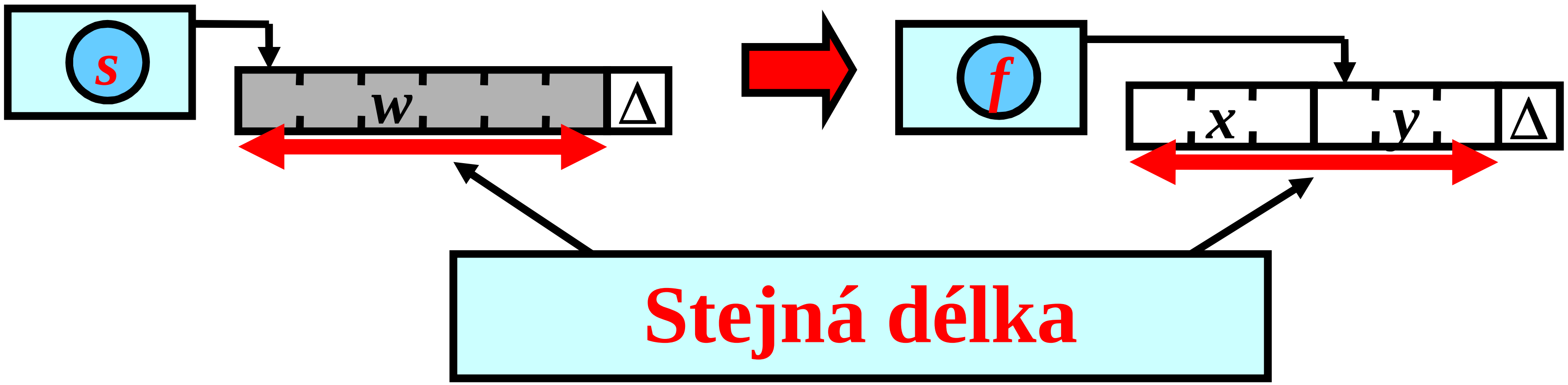


Lineárně ohraničené automaty: Definice

Myšlenka: Se vstupním řetězcem *w* je páska omezena na pouze |*w*| políček

Definice: *Lineárně ohraničený automat* (LOA) je TS, který nemůže žádným pravidlem prodloužit pásku.

Ilustrace:



Kontextové jazyky

Definice: Nechť L je jazyk. L je *kontextový jazyk*, pokud existuje lineárně ohraničený automat M takový, pro který platí: $L = L(M)$.

Tvrzení: Pro každou KG G existuje LOA M, pro který platí: $L(G) = L(M)$.

Důkaz: Viz str. 732 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Pro každý LOA M, existuje KG G, pro kterou platí: $L(M) = L(G)$.

Důkaz: Viz str. 734 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Závěr: Fundamentální modely pro kontextové jazyky jsou:

1) Kontextové gramatiky
2) Lineárně ohraničené automaty

Pravé lineární gramatiky: Definice

Myšlenka: BKG, ve které má každé pravidlo na pravé straně pouze řetězec terminálů následovaný max. jedním neterminálem

Definice: Nechť $G = (N, T, P, S)$ je BKG. G je *pravá lineární gramatika* (PLG), pokud každé pravidlo $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{x} \in P$ splňuje: $\boldsymbol{x} \in T^* \cup T^*N$.

Příklad:

$G = (N, T, P, S)$, kde $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b\}$

$P = \{1: S \rightarrow aS,\ 2: S \rightarrow aA,\ 3: A \rightarrow bA,\ 4: A \rightarrow b\}$

- $S \Rightarrow a\underline{A}$ [2] $\Rightarrow ab$ [4]
- $S \Rightarrow a\underline{S}$ [1] $\Rightarrow aa\underline{A}$ [2] $\Rightarrow aab$ [4]
- $S \Rightarrow a\underline{A}$ [2] $\Rightarrow ab\underline{A}$ [3] $\Rightarrow abb$ [4]

$\vdots$

Pozn.: $L(G) = \{a^m b^n : m, n \geq 1\}$

Gramatiky pro regulární jazyky

Tvrzení: Pro každou PLG G existuje KA M, pro který platí: $L(G) = L(M)$.

Důkaz: Viz str. 575 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Pro každý KA M existuje PLG G, pro kterou platí: $L(M) = L(G)$.

Důkaz: Viz str. 583 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Závěr: Gramatiky pro regulární jazyky jsou

Pravé lineární gramatiky

Gramatiky: Shrnutí

Jazyky	Gramatiky	Tvar pravidel $x \rightarrow y$
Rekurzivně vyčíslitelné	Neomezené	$x \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ $y \in (N \cup T)^*$
Kontextové	Kontextové	$x \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ $y \in (N \cup T)^*$, $\lvert x \rvert \leq \lvert y \rvert$
Bezkontextové	Bezkontextové	$x \in N$ $y \in (N \cup T)^*$
Regulární	Pravé lineární	$x \in N$ $y \in T^* \cup T^* N$

Zobecňování

Specializování

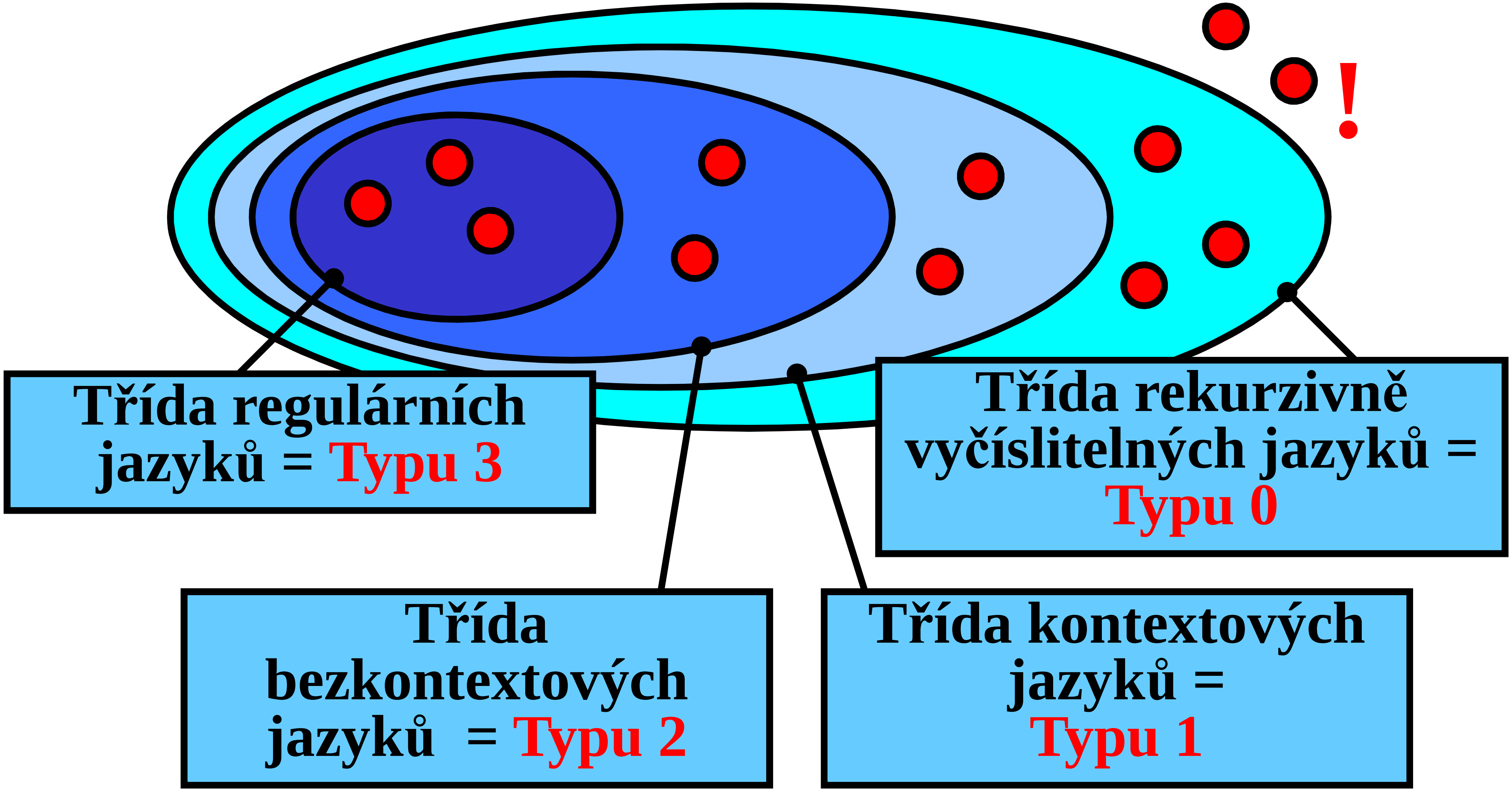
Automaty: Shrnutí

Jazyky	Přijímací model
Rekurzivně vyčíslitelné	Turingův stroj
Kontextové	Lineárně ohraničený automat
Bezkontextové	Zásobníkový automat
Regulární	Konečný automat

Zobecňování

Specializování

Chomského hierarchie



$$\text{Typ } 3 \subset \text{Typ } 2 \subset \text{Typ } 1 \subset \text{Typ } 0$$

Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou {0, 1}, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{\delta(M): M \text{ je DTS}, \delta(M) \in L(M)\}$

Illustrace:

TS *M*

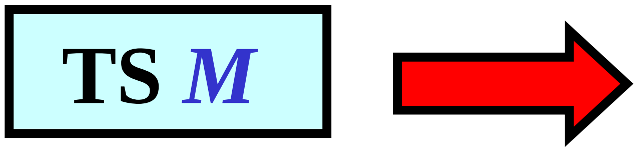
Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou {0, 1}, který obsahuje řetězec δ(*M*), právě tehdy když DTS *M* přijímá δ(*M*).

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{\delta(M): M \text{ je DTS}, \delta(M) \in L(M)\}$$

Illustrace:



Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou {0, 1}, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{\delta(M)\text{: } M \text{ je DTS}, \delta(M) \in L(M)\}$

Illustrace:

TS *M* → **Zakódování TS *M*:**
$\delta(M) = \mathbf{1110\ldots1}$

Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou {0, 1}, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{\delta(M) \colon M \text{ je DTS}, \delta(M) \in L(M)\}$$

Illustrace:

TS *M*

Zakódování TS *M*:

$\delta(M) =$ **1110…1**

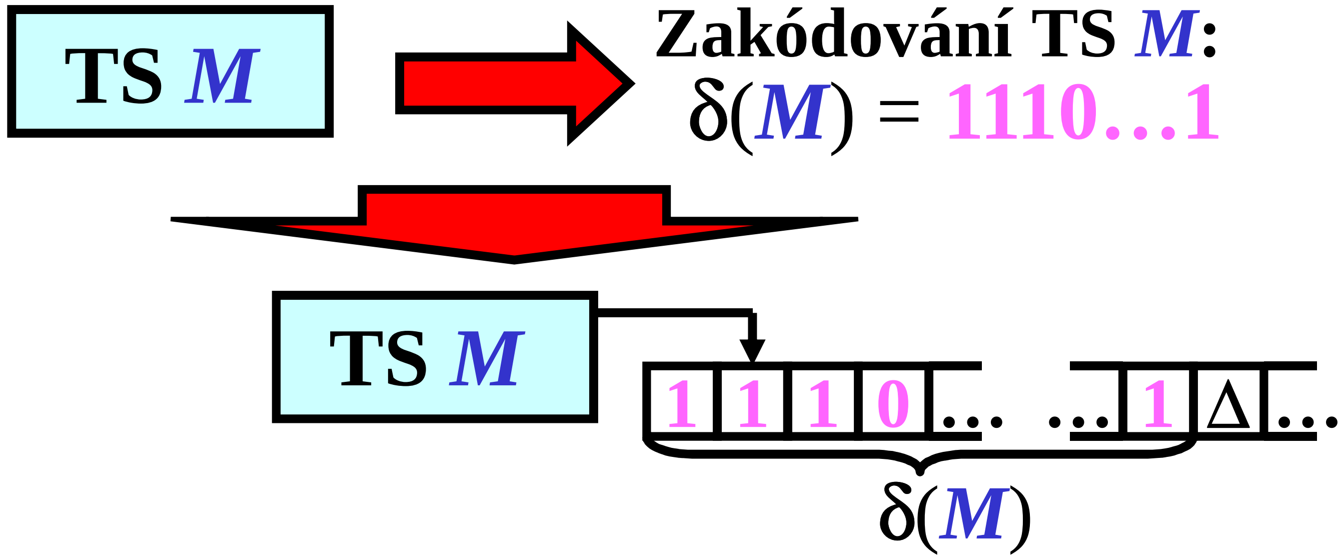
Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou {0, 1}, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{\delta(M): M \text{ je DTS}, \delta(M) \in L(M)\}$

Illustrace:



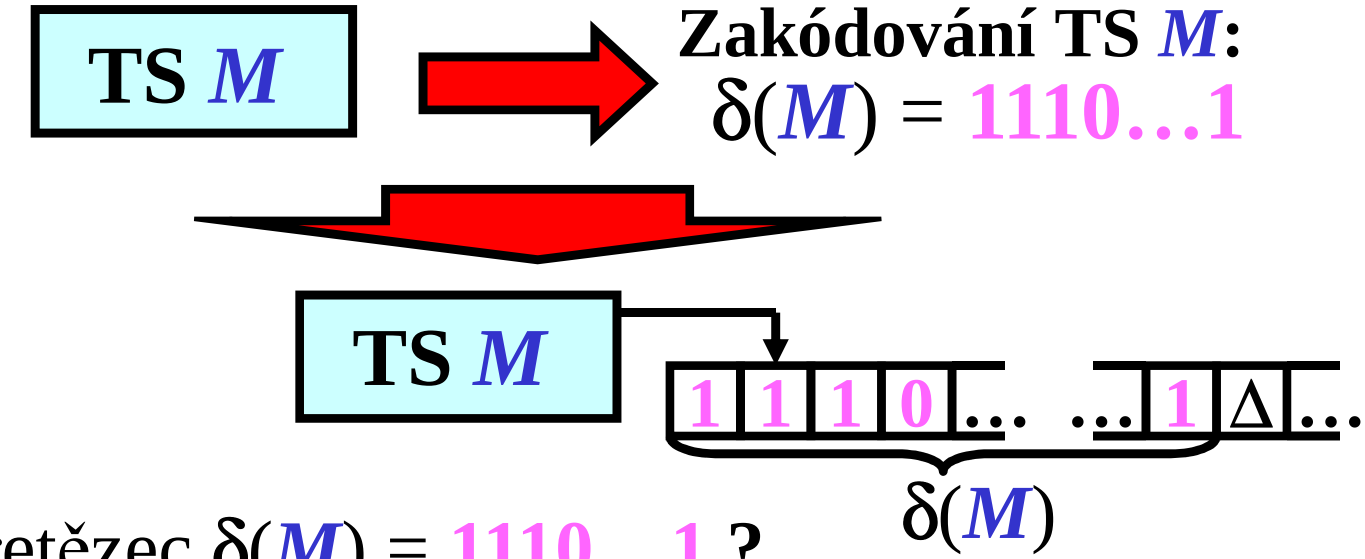
Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou {0, 1}, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{\delta(M): M \text{ je DTS}, \delta(M) \in L(M)\}$$

Illustrace:



• Přijímá TS M řetězec $\delta(M)$ = 1110…1 ?

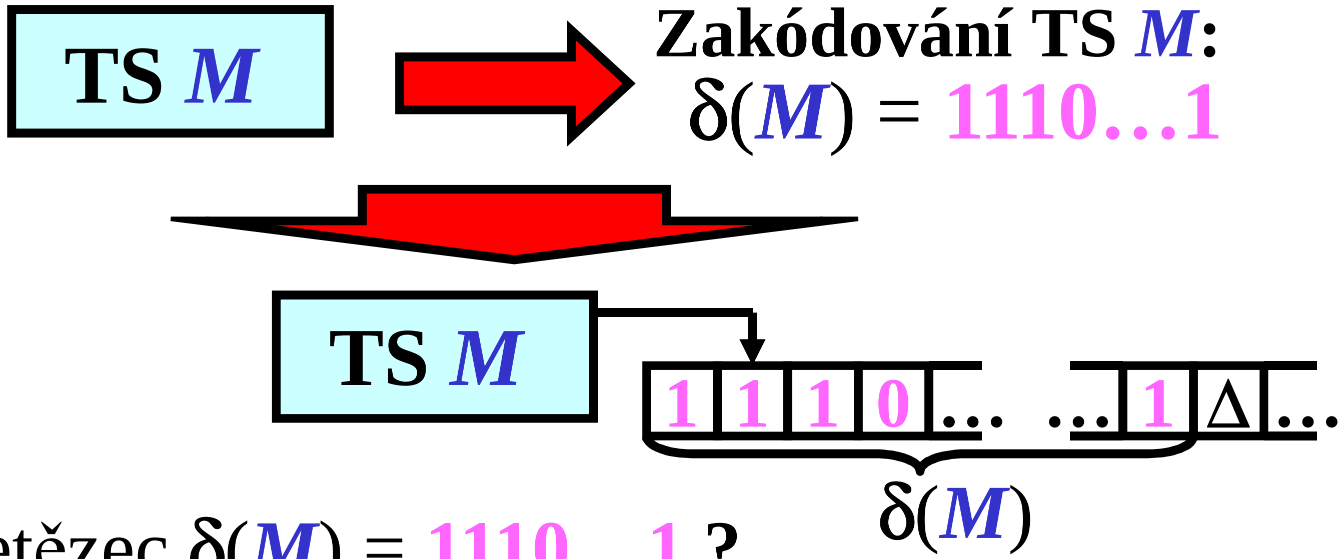
Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 1/2

Myšlenka: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je jazyk nad abecedou {0, 1}, který obsahuje řetězec $\delta(M)$, právě tehdy když DTS M přijímá $\delta(M)$.

Definice:

$$L_{\text{PřijmeSámSebe}} = \{\delta(M): M \text{ je DTS}, \delta(M) \in L(M)\}$$

Illustrace:



• Přijímá TS M řetězec $\delta(M) = 1110\ldots1$?

ANO → $\delta(M) \in L_{\text{PřijmeSámSebe}}$

NE → $\delta(M) \notin L_{\text{PřijmeSámSebe}}$

Jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ 2/2

Tvrzení: $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$ je přijímán nějakým TS.

Důkaz (myšlenka):

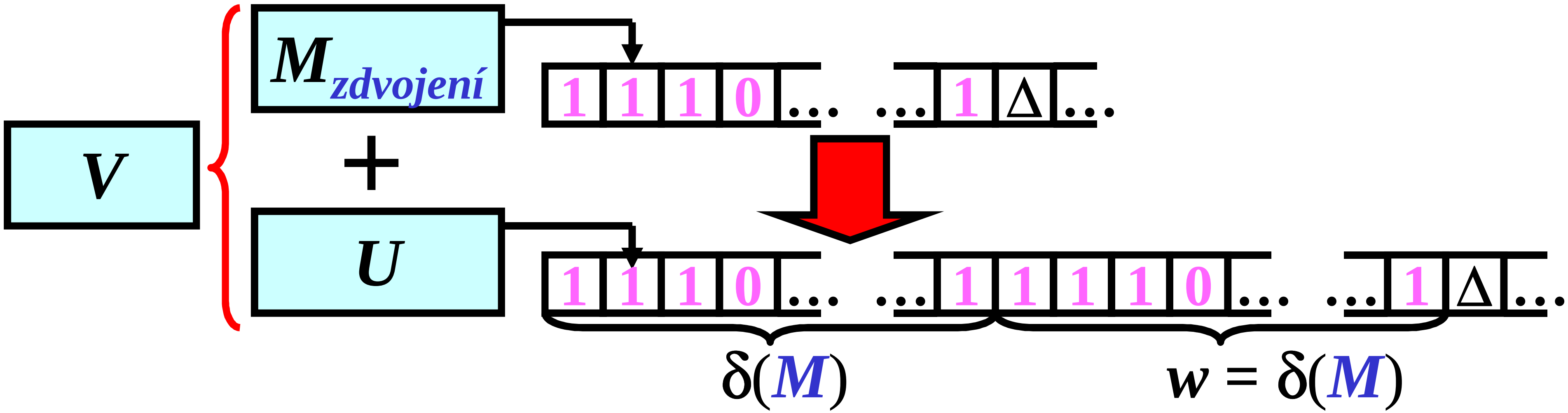
- Sestrojme DTS V, který:

1) Zdvojí vstupní řetězec na pásce $w = \delta(M)$ na $\delta(M)\delta(M)$

2) Odsimuluje činnost univerzálního TS U.

- Potom, $L(V) = L_{\text{PřijmeSámSebe}}$, tedy tvrzení platí.

Ilustrace:



Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS M

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS ***M*** →

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS M ⇒ **Zakódování TS** M**:**

$\delta(M) = 1110\ldots1$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

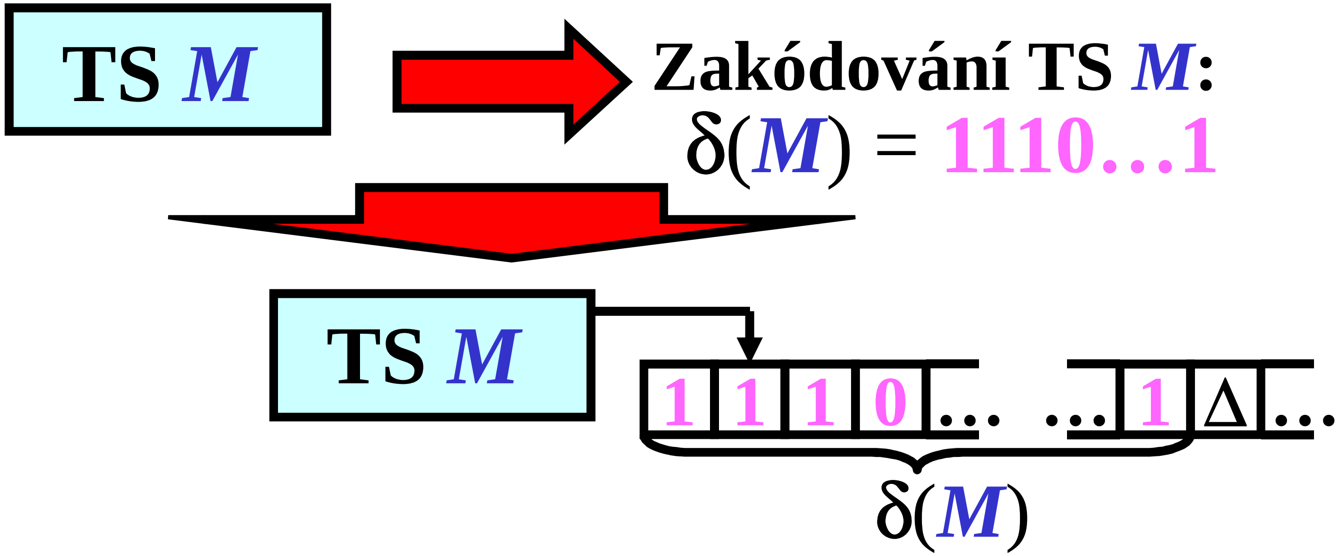
TS *M* ⇒ **Zakódování TS *M*:**
$\delta(M) = 1110\ldots1$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

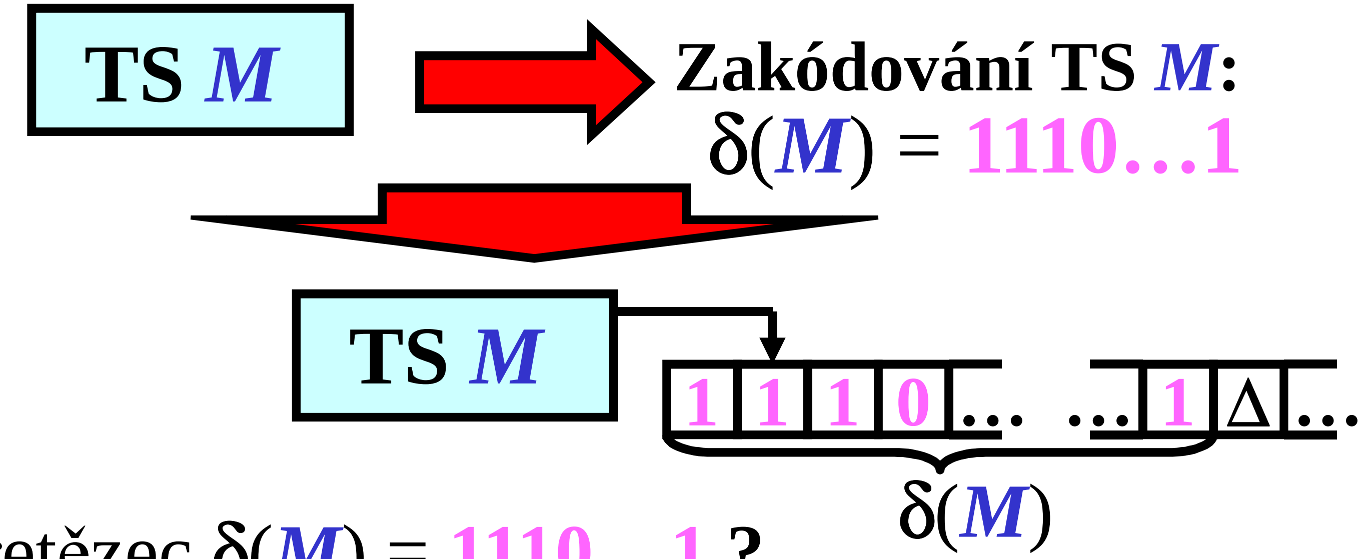


Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$



- Přijímá TS *M* řetězec δ(*M*) = 1110…1 ?

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 1/3

Myšlenka: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \overline{L_{\text{PřijmeSámSebe}}}$

Definice:

$$L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{0, 1\}^* - L_{\text{PřijmeSámSebe}}$$

TS *M* → **Zakódování TS *M*:** $\delta(M) = 1110\ldots1$

TS *M*

1	1	1	0	…	…	1	Δ	…

$\underbrace{1110\ldots1}_{\delta(M)}$

- Přijímá TS *M* řetězec $\delta(M) = 1110\ldots1$?

ANO: $\delta(M) \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$

NE: $\delta(M) \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 2/3

Tvrzení: $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ **není** přijímám žádným TS.

Důkaz (sporem):

- Předpokládejme, že $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ je přijímán nějakým TS.
  Uvažujme následující nekonečnou tabulku:

Všechny TS

M_i	$m_i = \delta(M_i)$	*PřijmeSámSebe*(M_i)
M_1	**111001001001101**	**Ano**
M_2	**1110101011100101**	**Ne**
M_3	**11100100010100010010 01**	**Ano**
⋮	⋮	⋮

Pozn.:

- ***PřijmeSámSebe***(M_i) = **Ano** **pokud** $m_i \in L(M_i)$
  Ne **pokud** $m_i \notin L(M_i)$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\boldsymbol{m_i} : \boldsymbol{m_i} \notin L(\boldsymbol{M_i}), i = 1, \ldots\}$
- Nechť $L(\boldsymbol{M_k}) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\boldsymbol{m_i} : \boldsymbol{m_i} \notin L(\boldsymbol{M_i}), i = 1, \ldots\}$
- Nechť $L(\boldsymbol{M_k}) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ne** implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\boldsymbol{m_i} : \boldsymbol{m_i} \notin L(\boldsymbol{M_i}),\ i = 1, \ldots\}$
- Nechť $L(\boldsymbol{M_k}) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ne** implikuje

$\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

$\boldsymbol{m_k} \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

$\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$

spor

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\boldsymbol{m_i} : \boldsymbol{m_i} \notin L(\boldsymbol{M_i}), i = 1, \dots\}$
- Nechť $L(\boldsymbol{M_k}) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ne** implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$

  spor

- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ano** implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\boldsymbol{m_i} : \boldsymbol{m_i} \notin L(\boldsymbol{M_i}), i = 1, \ldots\}$
- Nechť $L(\boldsymbol{M_k}) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ne** implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$

  spor

- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ano** implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$

  spor

Jazyk $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ 3/3

- **Poznámka:** $L_{\text{NepřijmeSámSebe}} = \{\boldsymbol{m_i} : \boldsymbol{m_i} \notin L(\boldsymbol{M_i}), i = 1, \ldots\}$
- Nechť $L(\boldsymbol{M_k}) = L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$
- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ne** implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$

  spor
- ***PřijmeSámSebe***$(\boldsymbol{M_k})$ = **Ano** implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \in L(\boldsymbol{M_k})$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ implikuje

  $\boldsymbol{m_k} \notin L(\boldsymbol{M_k})$

  spor
- $L_{\text{NepřijmeSámSebe}}$ není tedy přijímán žádným TS $\boldsymbol{M_k}$

Rozhodnutelné jazyky

Myšlenka: Rozhodnutelné jazyky jsou přijímány TS, které vždy zastaví

Definice: Nechť L je jazyk. Pokud existuje DTS M, který vždy zastaví a pro který platí $L = L(M)$, potom L je *rozhodnutelný jazyk*.

Tvrzení: Třída rozhodnutelných jazyků je uzavřena vůči doplňku.

Důkaz: Viz str. 693 v knize [Meduna: Automata and Languages]

Tvrzení: Třída rekurzivně vyčíslitelných jazyků **není** uzavřena vůči doplňku.

Důkaz: Viz jazyk $L_{\text{PřijmeSámSebe}}$

Další hierarchie jazyků