Kapitola XI.
Vlastnosti regulárních jazyků

Pumping lemma pro RJ

Myšlenka: Pumping lemma ukazuje nekonečné iterace některých podřetězců v řetězcích v RJ.

• Nechť L je RJ. Pak existuje $k \geq 1$ takové, že:
pokud $z \in L$ a $|z| \geq k$, **pak** existuje u,v,w: $z = uvw$,
1) $v \neq \varepsilon$ **2)** $|uv| \leq k$ **3)** pro každé $m \geq 0$, $uv^mw \in L$

Příklad: pro RV $r = ab^*c$, $L(r)$ je ***regulární.***
Pro tento jazyk existuje $k = 3$ takové, že **1)**, **2)** a **3)** platí.

Pumping lemma pro RJ

Myšlenka: Pumping lemma ukazuje nekonečné iterace některých podřetězců v řetězcích v RJ.

• Nechť L je RJ. Pak existuje $k \geq 1$ takové, že:
pokud $z \in L$ a $|z| \geq k$, **pak** existuje u,v,w: $z = uvw$,
1) $v \neq \varepsilon$ **2)** $|uv| \leq k$ **3)** pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L$

Příklad: pro RV $r = ab^*c$, $L(r)$ je ***regulární.***
Pro tento jazyk existuje $k = 3$ takové, že **1)**, **2)** a **3)** platí.

• pro $z = abc$: $z \in L(r)$ a $|z| \geq 3$:

$$\underset{u}{a}\,\underset{v}{b}\,\underset{w}{c}$$

$v \neq \varepsilon$, $|uv| = 2 \leq 3$

$uv^0w = ab^0c = ac \in L(r)$
$uv^1w = ab^1c = abc \in L(r)$
$uv^2w = ab^2c = abbc \in L(r)$
$\vdots$

Pumping lemma pro RJ

Myšlenka: Pumping lemma ukazuje nekonečné iterace některých podřetězců v řetězcích v RJ.

• Nechť L je RJ. Pak existuje $k \geq 1$ takové, že:
pokud $z \in L$ a $|z| \geq k$, **pak** existuje u,v,w: $z = uvw$,
1) $v \neq \varepsilon$ **2)** $|uv| \leq k$ **3)** pro každé $m \geq 0$, $uv^mw \in L$

Příklad: pro RV $r = ab^*c$, $L(r)$ je ***regulární.***
Pro tento jazyk existuje $k = 3$ takové, že **1)**, **2)** a **3)** platí.

• pro $z = abc$: $z \in L(r)$ a $|z| \geq 3$: $uv^0w = ab^0c = ac \in L(r)$

$\underset{u}{a}\,\underset{v}{b}\,\underset{w}{c}$

$uv^1w = ab^1c = abc \in L(r)$
$uv^2w = ab^2c = abbc \in L(r)$
⋮

$v \neq \varepsilon$, $|uv| = 2 \leq 3$

• pro $z = abbc$: $z \in L(r)$ a $|z| \geq 3$: $uv^0w = ab^0bc = abc \in L(r)$

$\underset{u}{a}\,\underset{v}{b}\,\underbrace{bc}_{w}$

$uv^1w = ab^1bc = abbc \in L(r)$
$uv^2w = ab^2bc = abbbc \in L(r)$
⋮

⋮

$v \neq \varepsilon$, $|uv| = 2 \leq 3$

Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:

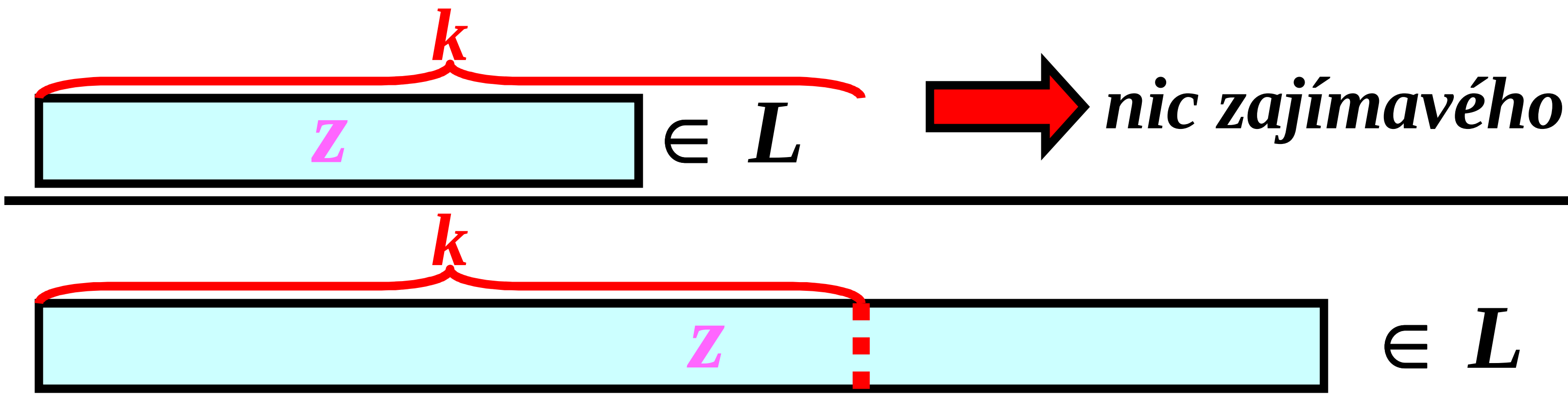
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:

$$\overbrace{\boxed{\quad z \quad}}^{k} \in L \quad \Rightarrow \quad \textit{nic zajímavého}$$

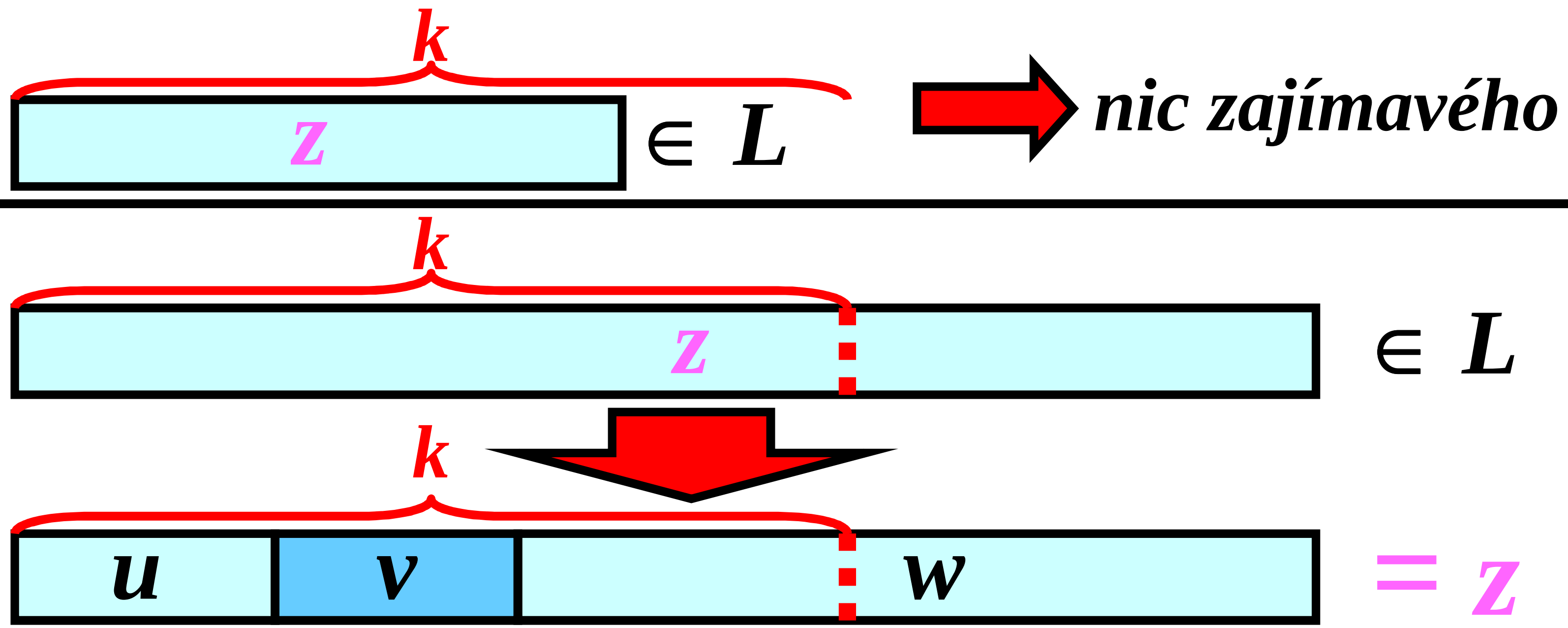
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



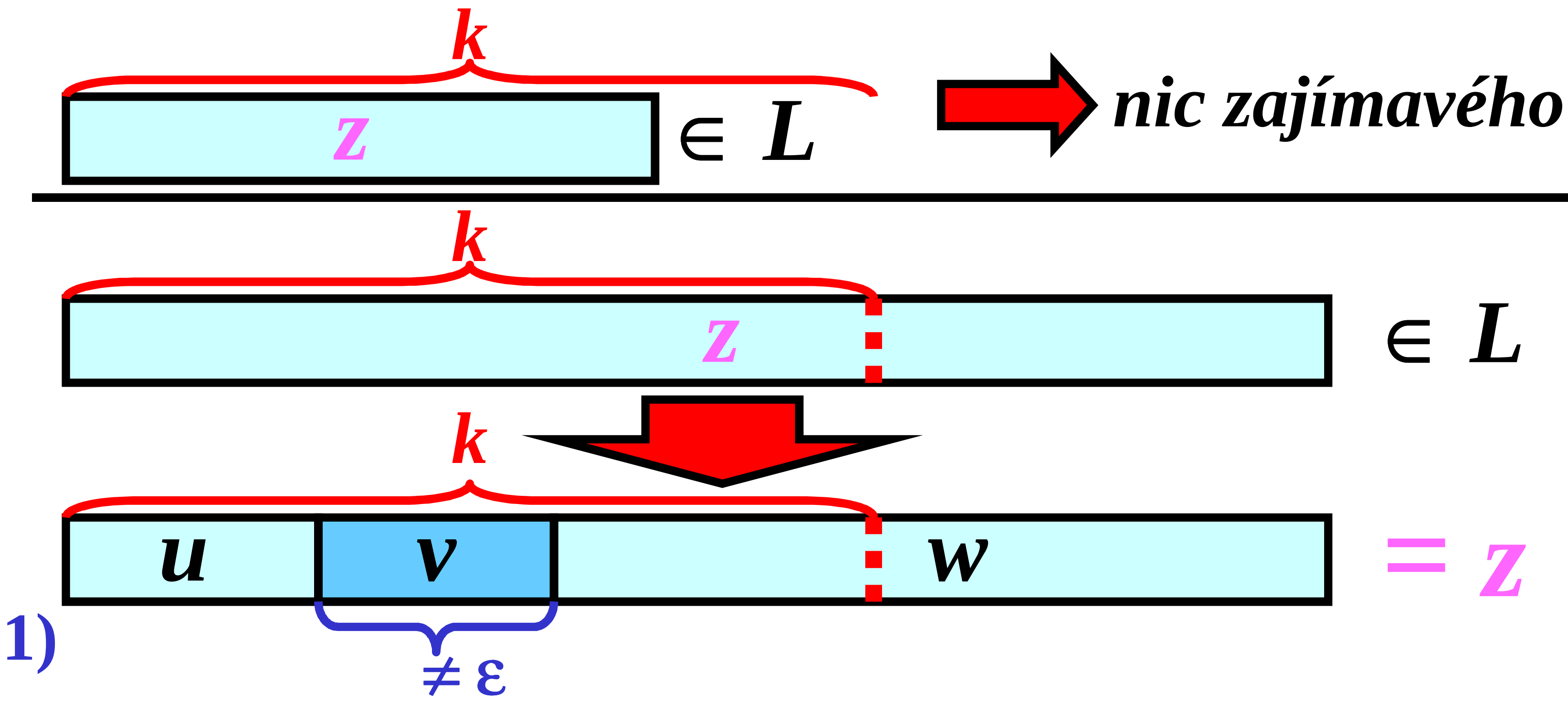
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



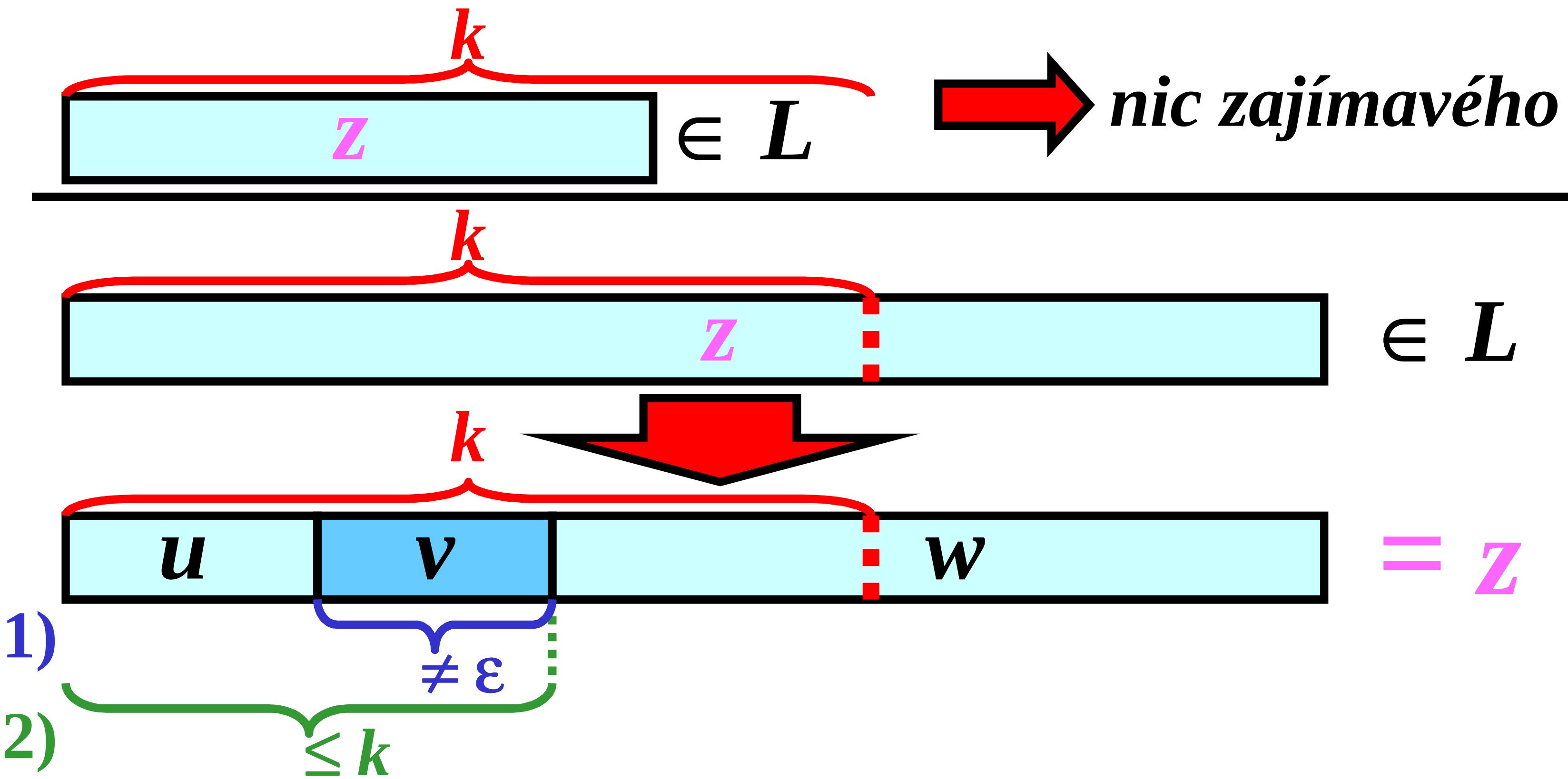
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



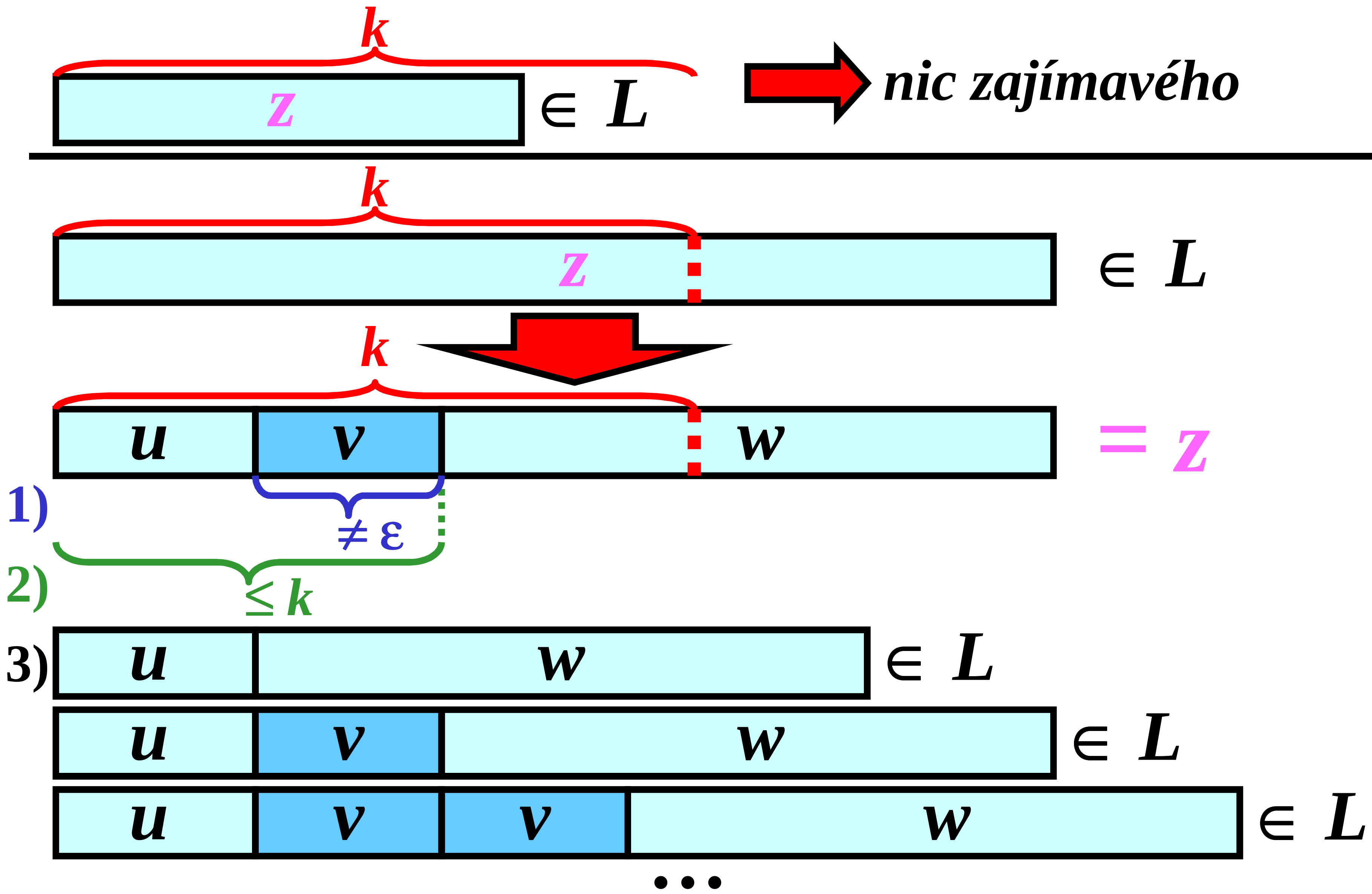
Pumping lemma: Ilustrace

• L = libovolný regulární jazyk:



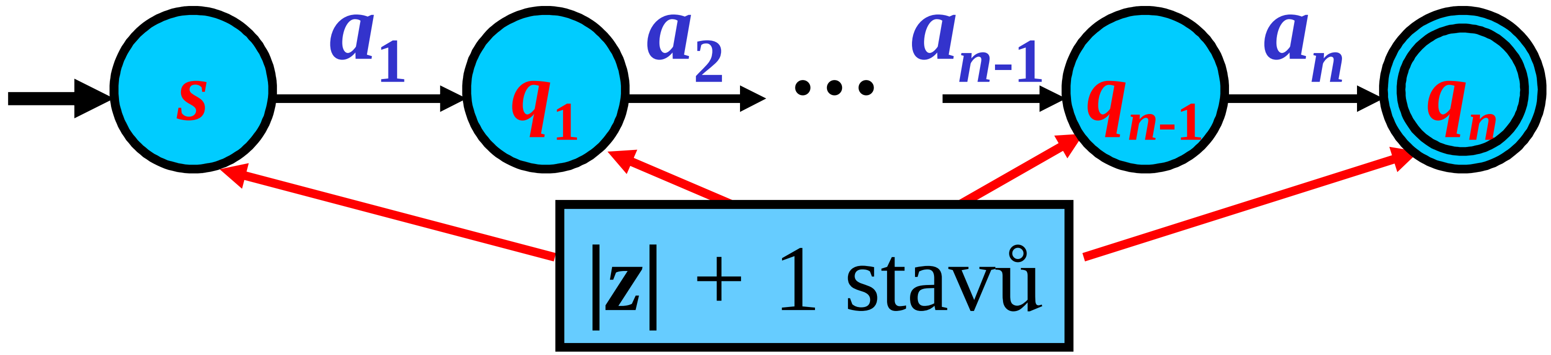
Pumping lemma: Ilustrace

- L = libovolný regulární jazyk:



Důkaz pumping lemmy 1/3

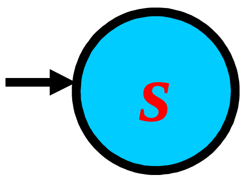
- Nechť L je libovolný regulární jazyk. Potom existuje **DKA** $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ a $L = L(M)$.
- Pro $z \in L(M)$, M provede $|z|$ přechodů a M navštíví $|z| + 1$ stavů:
- pro $z = a_1a_2 \ldots a_n$:



$$s\overbrace{a_1a_2\ldots a_n}^{|z|} \vdash q_1a_2\ldots a_n \vdash \ldots \vdash q_{n-1}a_n \vdash q_n$$

Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M). Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.
- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:

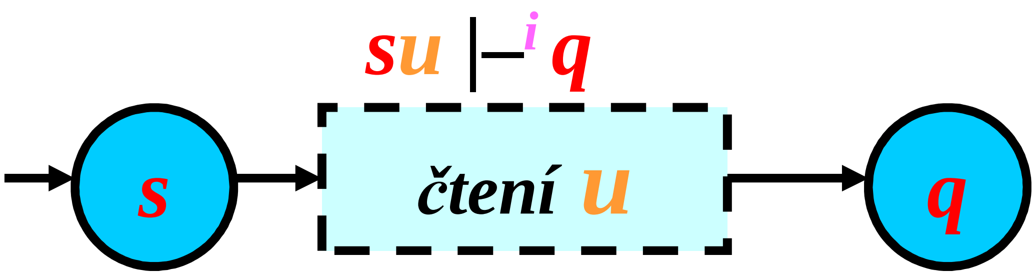


Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M).

Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.

- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:

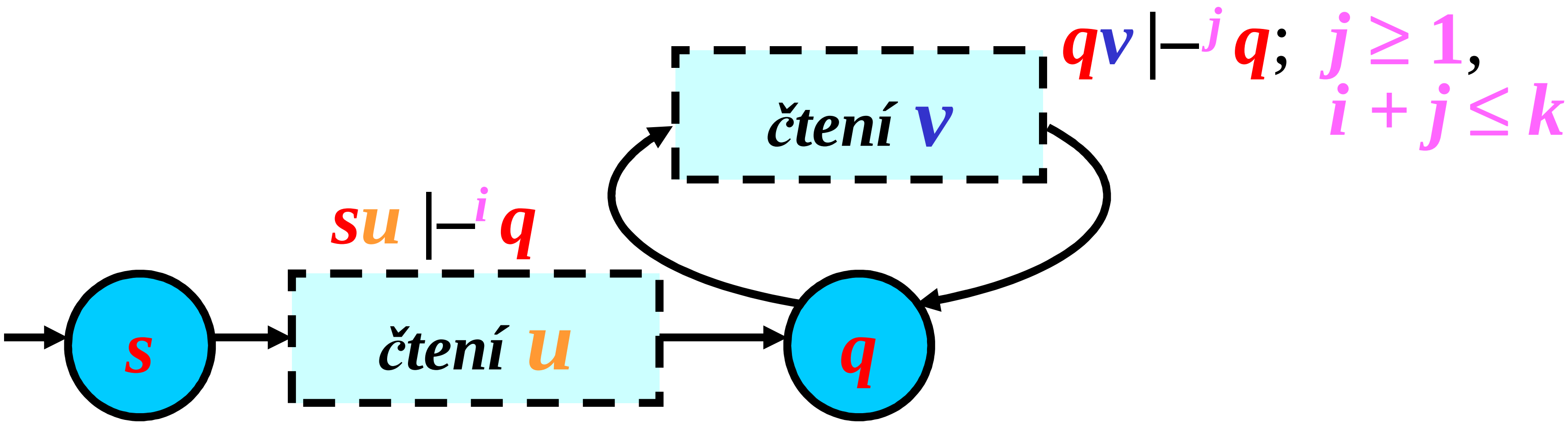


Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M).

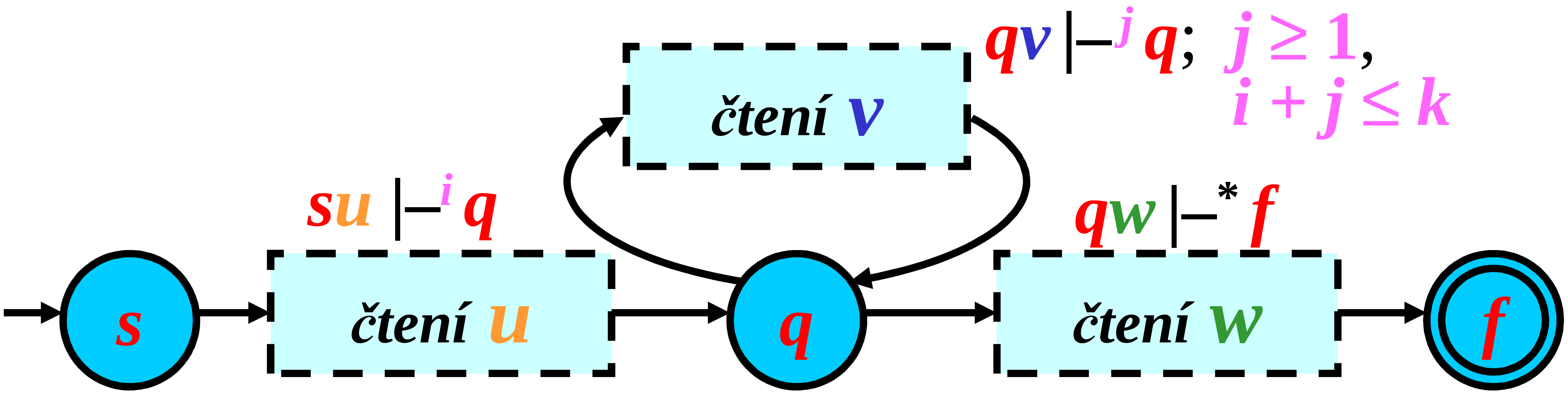
Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.

- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:



Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť ***k*** = card(Q) (celkový počet stavů v M). Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav ***q***, který M navštíví nejméně dvakrát.
- Pro z existuje u, v, w takové, že: z = ***uvw***:

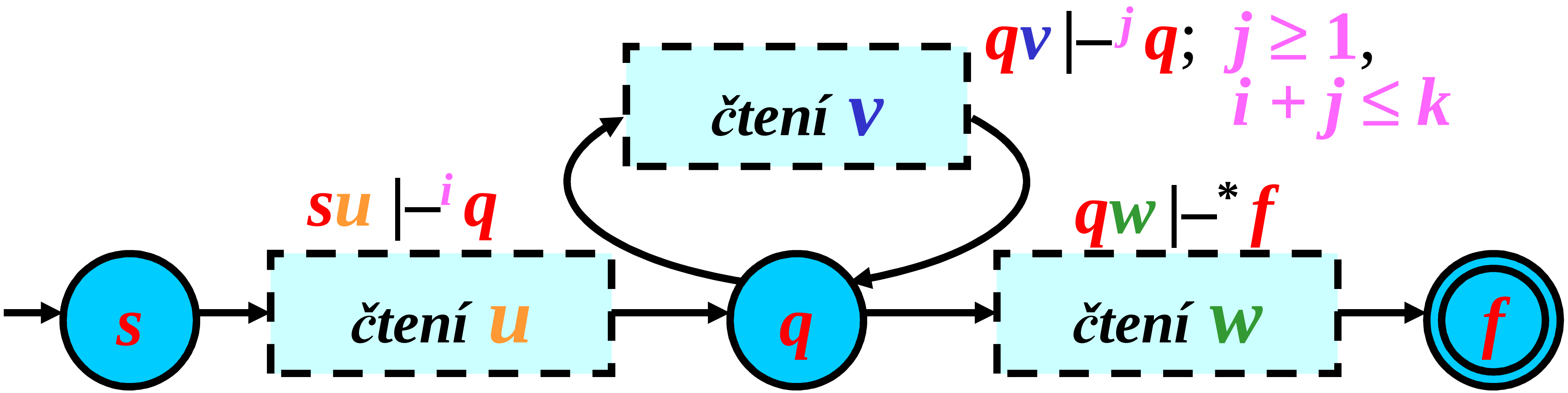


Důkaz pumping lemmy 2/3

- Nechť $\boldsymbol{k}$ = card(Q) (celkový počet stavů v M).

Pro každé $z \in L$ a $|z| \geq k$, M navštíví nejméně $k + 1$ stavů. Protože $k + 1 >$ card(Q), musí existovat stav $\boldsymbol{q}$, který M navštíví nejméně dvakrát.

- Pro z existuje u, v, w takové, že: $z = \boldsymbol{uvw}$:



Celkově:

$$sz = suvw \vdash^i qvw \vdash^j qw \vdash^* f,\ f \in F$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f$, $f \in F$, tedy:

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

suw

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^{m}w = uv^{0}w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^{i}} qw$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^{m}w = uv^{0}w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^m w$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^{m}w = uv^{0}w = uw$,

$$su w \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f, \; f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^{m}w \overset{1.}{\vdash^{i}} qv^{m}w$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^i q$; 2. $qv \vdash^j q$; 3. $qw \vdash^* f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

$$su w \overset{1.}{\vdash^i} qw \overset{3.}{\vdash^*} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^m w \overset{1.}{\vdash^i} qv^m w \overset{2.}{\vdash^j} qv^{m-1} w \overset{2.}{\vdash^j} \dots \overset{2.}{\vdash^j} qw$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^{i} q$; 2. $qv \vdash^{j} q$; 3. $qw \vdash^{*} f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^{m}w = uv^{0}w = uw$,

$$su w \overset{1.}{\vdash^{i}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f, \quad f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^{m}w \overset{1.}{\vdash^{i}} qv^{m}w \overset{2.}{\vdash^{j}} qv^{m-1}w \overset{2.}{\vdash^{j}} \dots \overset{2.}{\vdash^{j}} qw \overset{3.}{\vdash^{*}} f, \quad f \in F$$

Důkaz pumping lemmy 3/3

- Obecně tedy M může provést přechody:

1. $su \vdash^i q$; 2. $qv \vdash^j q$; 3. $qw \vdash^* f$, $f \in F$, tedy:

- pro $m = 0$, $uv^m w = uv^0 w = uw$,

$$suw \overset{1.}{\vdash^i} qw \overset{3.}{\vdash^*} f,\ f \in F$$

- pro každé $m > 0$,

$$suv^m w \overset{1.}{\vdash^i} qv^m w \overset{2.}{\vdash^j} qv^{m-1} w \overset{2.}{\vdash^j} \ldots \overset{2.}{\vdash^j} qw \overset{3.}{\vdash^*} f,\ f \in F$$

Celkově:

1) $qv \vdash^j q$, $j \geq 1$; proto $|v| \geq \mathbf{1}$, tedy $v \neq \varepsilon$

2) $suv \vdash^i qv \vdash^j q$, $i + j \leq k$; proto $|uv| \leq \boldsymbol{k}$

3) Pro každé $m \geq 0$: $suv^m w \vdash^* f$, $f \in F$, proto $uv^m w \in L$

CBD

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk <u>**není**</u> regulární:

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

↓

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $\boldsymbol{z} \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|\boldsymbol{z}| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

Pumping lemma: Aplikace I.

• Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

↓

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $\boldsymbol{z} \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|\boldsymbol{z}| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

↓

Pro <u>všechny</u> dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$ ukážeme:

existuje $m \geq 0$, pro které $\boldsymbol{uv^mw} \notin \boldsymbol{L}$;

ale podle PL platí vztah: $\boldsymbol{uv^mw} \in \boldsymbol{L}$

$\}$ **SPOR**

Pumping lemma: Aplikace I.

• Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $\boldsymbol{z} \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|\boldsymbol{z}| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

Pro <u>všechny</u> dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$ ukážeme:

$\left.\begin{array}{l}\text{existuje } m \geq 0 \text{, pro které } \boldsymbol{uv^m w} \notin \boldsymbol{L}; \\ \text{ale podle PL platí vztah: } \boldsymbol{uv^m w} \in \boldsymbol{L}\end{array}\right\}$ **SPOR**

špatný předpoklad

Pumping lemma: Aplikace I.

- Pomocí pumping lemmy pro RJ často provádíme důkaz sporem, že daný jazyk **<u>není</u>** regulární:

Předpokládejme, že L je regulární

Uvažujme PL konstantu $\boldsymbol{k}$ a vyberme $\boldsymbol{z} \in L$, jehož délka je závislá na $\boldsymbol{k}$ tak, že $|\boldsymbol{z}| \geq \boldsymbol{k}$ je vždy pravdivé

Pro <u>všechny</u> dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq k$ ukážeme:

$$\left.\begin{array}{l}\text{existuje } m \geq 0 \text{, pro které } \boldsymbol{uv^m w} \notin \boldsymbol{L}; \\ \text{ale podle PL platí vztah: } \boldsymbol{uv^m w} \in \boldsymbol{L}\end{array}\right\} \textbf{SPOR}$$

špatný předpoklad

Proto

L **není regulární**

Pumping Lemma: Příklad

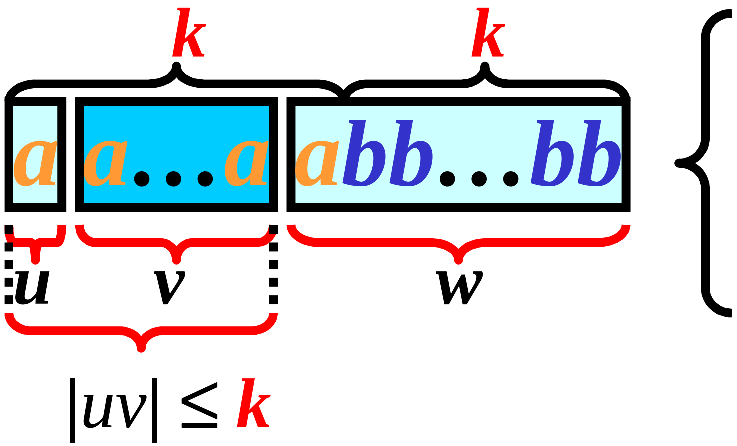
Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

---

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $\boldsymbol{k} \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a^k b^k}$**:** $\boldsymbol{a^k b^k} \in L$, $|\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{a^k b^k}| = 2\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{k}$

3) Všechny dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq \boldsymbol{k}$**:**



Pumping Lemma: Příklad

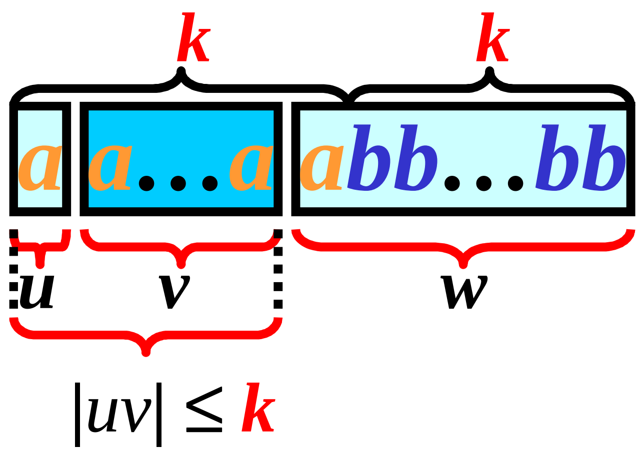
Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

---

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $\boldsymbol{k} \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a^k b^k}$: $\boldsymbol{a^k b^k} \in L$, $|\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{a^k b^k}| = 2\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{k}$

3) Všechny dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq \boldsymbol{k}$:



• pumping lemma: $uv^0w \in L$

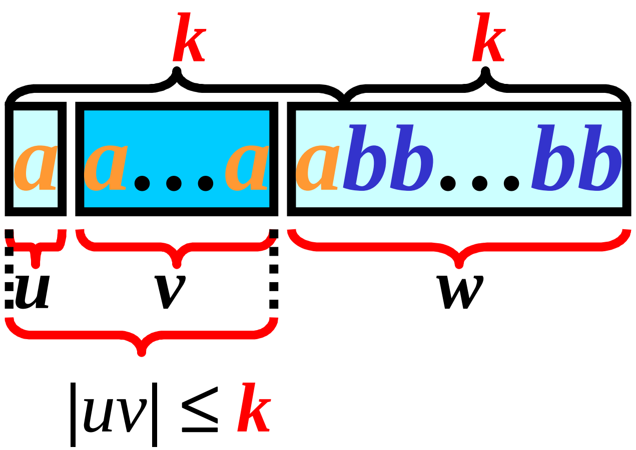
Pumping Lemma: Příklad

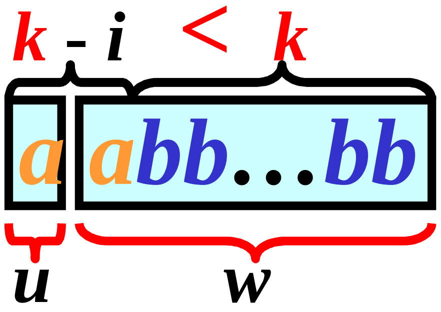
Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $\boldsymbol{k} \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a^k b^k}$: $\boldsymbol{a^k b^k} \in L$, $|\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{a^k b^k}| = 2\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{k}$

3) Všechny dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq \boldsymbol{k}$:



- pumping lemma: $uv^0w \in L$
- $uv^0w = uw =$  $\notin L$

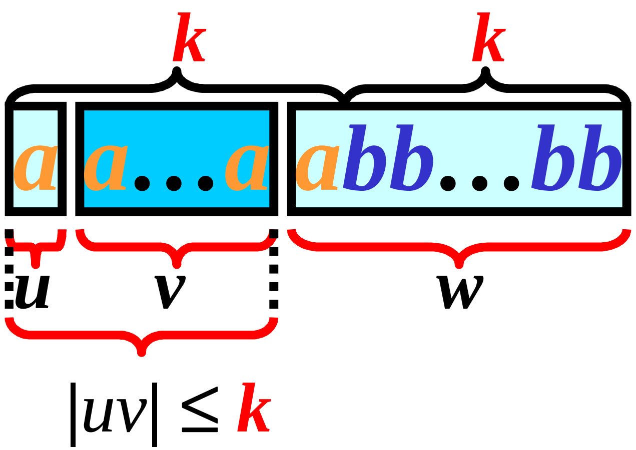
Pumping Lemma: Příklad

Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

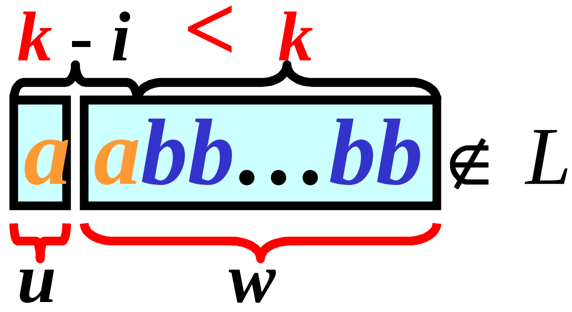
1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $\boldsymbol{k} \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a^k b^k}$: $\boldsymbol{a^k b^k} \in L$, $|\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{a^k b^k}| = 2\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{k}$

3) Všechny dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq \boldsymbol{k}$:



- pumping lemma: $uv^0w \in L$
- $uv^0w = uw =$



Spor!

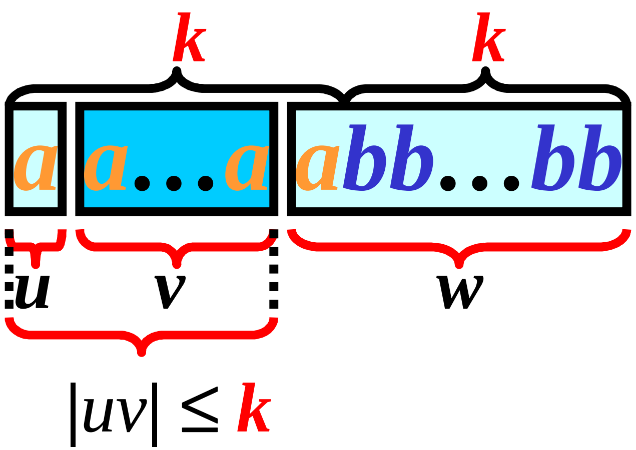
Pumping Lemma: Příklad

Dokažme, že $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ není regulární:

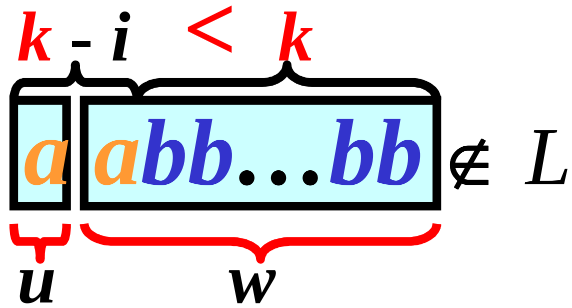
1) Předpokládejme, že L je regulární. Nechť $\boldsymbol{k} \geq 1$ je konstanta z pumping lemmy pro jazyk L.

2) Nechť $\boldsymbol{z} = a^k b^k$: $a^k b^k \in L$, $|\boldsymbol{z}| = |a^k b^k| = 2\boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{k}$

3) Všechny dekompozice $\boldsymbol{z}$ na $\boldsymbol{uvw}$, $v \neq \varepsilon$, $|uv| \leq \boldsymbol{k}$:



- pumping lemma: $uv^0w \in L$
- $uv^0w = uw =$



Spor!

4) Proto L není regulární jazyk

Poznámka k použití pumping lemmy

- **Pumping lemma:**

pokud L je regulární **potom** existuje $k \geq 1$ a ...

Základní aplikace pumping lemmy:

- důkaz sporem, že L není regulární jazyk.

- **Ale následující implikace je špatná:**

- **Nelze použít pumping lemmy k dokázání, že daný jazyk L je regulární!!**

Poznámka k použití pumping lemmy

- **Pumping lemma:**

pokud L je regulární $\xrightarrow{\textbf{potom}}$ existuje $k \geq 1$ a ...

Základní aplikace pumping lemmy:

- důkaz sporem, že L není regulární jazyk.

- **Ale následující implikace je špatná:**

pokud ~~existuje $k \geq 1$ a ...~~ $\xrightarrow{\textbf{potom}}$ ~~L je regulární~~

- **Nelze použít pumping lemmy k dokázání, že daný jazyk L je regulární!!**

Pumping lemma: Aplikace II. 1/3

• Pumping lemmu je možné použít k dokazování dalších tvrzení.

Ilustrace:

• Nechť M je DKA a k konstanta z pumping lemmy (k je počet stavů v M). Potom platí:
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Důkaz:

1) existuje $\boldsymbol{z \in L(M)}$, $\boldsymbol{k \leq |z|} < 2k \Rightarrow L(M)$ je nekonečný**:**

Pumping lemma: Aplikace II. 1/3

• Pumping lemmu je možné použít k dokazování dalších tvrzení.

Ilustrace:

• Nechť M je DKA a k konstanta z pumping lemmy (k je počet stavů v M). Potom platí:
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Důkaz:

1) existuje $\boldsymbol{z \in L(M)}$, $\boldsymbol{k \leq |z|} < 2k \Rightarrow L(M)$ je nekonečný**:**

pokud $\boldsymbol{z \in L(M)}$, $\boldsymbol{k \leq |z|}$, potom podle PL:
$z = uvw$, $v \neq \varepsilon$ a dále pro každé $m \geq 0$: $uv^mw \in L(M)$

Pumping lemma: Aplikace II. 1/3

• Pumping lemmu je možné použít k dokazování dalších tvrzení.

Ilustrace:

• Nechť M je DKA a k konstanta z pumping lemmy (k je počet stavů v M). Potom platí:
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Důkaz:

1) existuje $\boldsymbol{z \in L(M)}$, $\boldsymbol{k \leq |z|} < 2k \Rightarrow L(M)$ je nekonečný:

pokud $\boldsymbol{z \in L(M)}$, $\boldsymbol{k \leq |z|}$, potom podle PL:

$z = uvw$, $\underbrace{v \neq \varepsilon}$ a dále pro každé $\underbrace{m \geq 0: uv^m w \in L(M)}$

$L(M)$ je nekonečný

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\text{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$ **b)**

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- ***L*(*M*) je nekonečný $\Rightarrow$ existuje *z* $\in$ *L*(*M*), |*z*| $\geq$ *k***

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\text{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$ **b)**

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- **$L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**

Předpokládáme, že ***L*(*M*) je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$\boxed{L(M) \text{ je nekonečný}} \xrightarrow{\textbf{a)}} \boxed{\text{existuje } z \in L(M), |z| \geq k}$

b) $\downarrow$

$\boxed{\text{existuje } z \in L(M), k \leq |z| < 2k}$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- **$L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**

Předpokládme, že **$L(M)$ je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$

pro všechna $z \in L(M)$ platí: $|z| < k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\text{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\big\downarrow$ b)

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- **$L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**

Předpokládme, že ***L*(*M*) je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\Downarrow$

pro všechna $z \in L(M)$ platí: $|z| < k$

$\Downarrow$

***L*(*M*) je konečný**

Pumping Lemma: Aplikace II. 2/3

2) $L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**:**

- Dokážeme sporem, že platí:

$L(M)$ je nekonečný $\xrightarrow{\text{a)}}$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

b) $\downarrow$

existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

---

a) Dokážeme sporem, že:

- **$L(M)$ je nekonečný $\Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**

Předpokládme, že **$L(M)$ je nekonečný** a neexistuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$

$\downarrow$

pro všechna $z \in L(M)$ platí: $|z| < k$

$\downarrow$

$L(M)$ je konečný

Spor!

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M), |z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M), |z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$

  a neexistuje $z \in L(M), k \leq |z| < 2k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

  a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ ✕✕✕✕ ⟶

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $\boldsymbol{z \in L(M), |z| \geq k \Rightarrow}$
  existuje $\boldsymbol{z \in L(M), k \leq |z| < 2k}$

a neexistuje $\boldsymbol{z \in L(M), k \leq |z| < 2k}$

Nechť $\boldsymbol{z_0}$ je **nejkratší řetězec** splňující $\boldsymbol{z_0 \in L(M), |z_0| \geq k}$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $\boldsymbol{|z_0| \geq 2k}$

Pokud $\boldsymbol{z_0 \in L(M)}$ a $\boldsymbol{|z_0| \geq k}$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,

$\boldsymbol{|uv| \leq k}$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^mw \in L(M)$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$ **existuje** $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ $\times\times\times\times \longrightarrow$

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$, $|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**

a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,

$|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

pro $m = 0$: $uv^m w = uw \in L(M)$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$
  existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ ✕✕✕✕ →

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,

$|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

↓

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

pro $m = 0$: $uv^m w = uw \in L(M)$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$**!**

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$ **existuje** $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$, $|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

pro $m = 0$: $uv^m w = uw \in L(M)$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$**!**

z_0 není nejkratší řetězec splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje** $\boldsymbol{z \in L(M), |z| \geq k \Rightarrow}$
  existuje $\boldsymbol{z \in L(M), k \leq |z| < 2k}$

a neexistuje $\boldsymbol{z \in L(M), k \leq |z| < 2k}$ $\times\times\times\times$

Nechť $\boldsymbol{z_0}$ je **nejkratší řetězec** splňující $\boldsymbol{z_0 \in L(M), |z_0| \geq k}$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $\boldsymbol{|z_0| \geq 2k}$

Pokud $\boldsymbol{z_0 \in L(M)}$ a $\boldsymbol{|z_0| \geq k}$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,

$\boldsymbol{|uv| \leq k}$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$\boldsymbol{|uw|} = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq \boldsymbol{k}$$

pro $m = 0$**:** $uv^m w = \boldsymbol{uw \in L(M)}$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$**!**

$\boldsymbol{z_0}$ **není nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

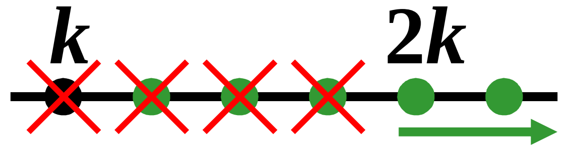
SPOR!

Pumping Lemma: Aplikace II. 3/3

b) Dokážeme sporem:

- **existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k \Rightarrow$ existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$**

Předpokl., že **existuje $z \in L(M)$, $|z| \geq k$**
a neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$



Nechť z_0 je **nejkratší řetězec** splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

Protože neexistuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$, musí: $|z_0| \geq 2k$

Pokud $z_0 \in L(M)$ a $|z_0| \geq k$, PL zaručuje: $z_0 = uvw$,
$|uv| \leq k$ a pro každé $m \geq 0$, $uv^m w \in L(M)$

$$|uw| = \overbrace{|z_0|}^{\geq 2k} - \overbrace{|v|}^{\leq k} \geq k$$

pro $m = 0$: $uv^m w = \boldsymbol{uw} \in \boldsymbol{L(M)}$

Celkově: $uw \in L(M)$, $|uw| \geq k$ a $|uw| < |z_0|$**!**

z_0 není nejkratší řetězec splňující $z_0 \in L(M)$, $|z_0| \geq k$

SPOR!

Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

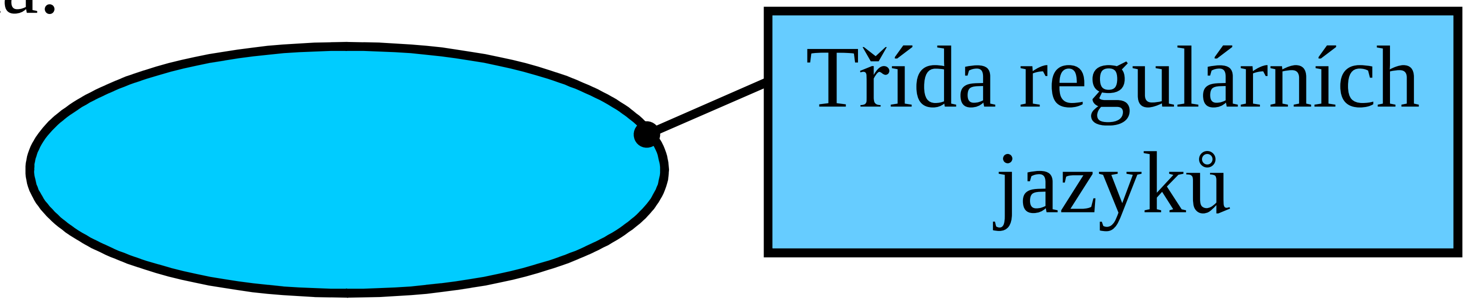
Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

Ilustrace:

• Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči ***sjednocení***.

To znamená:



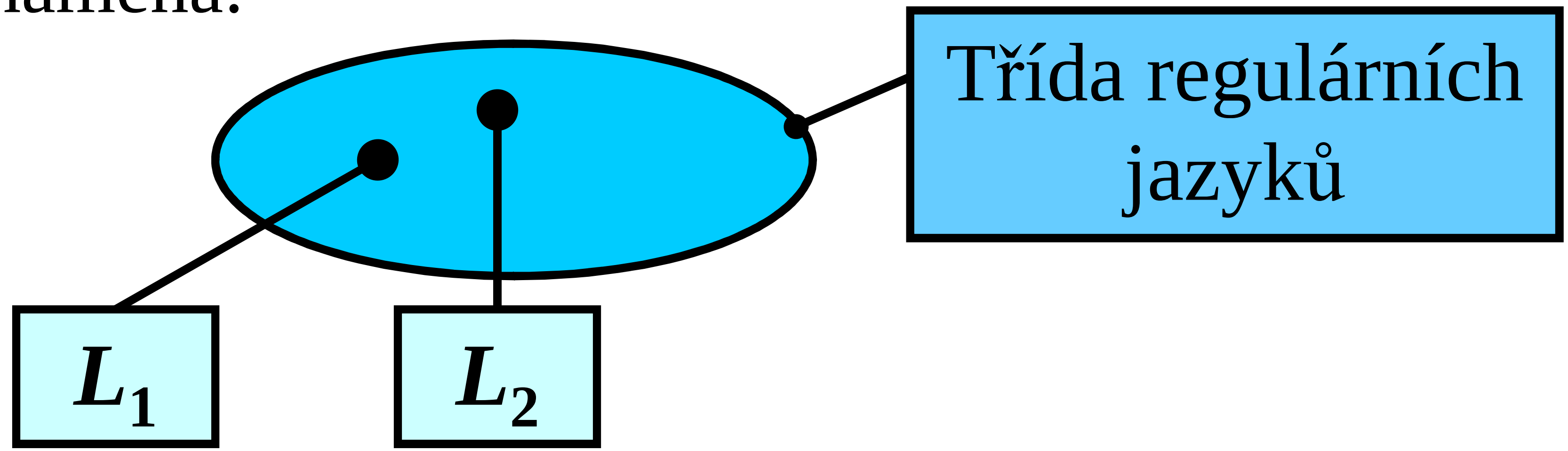
Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

Ilustrace:

- Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči ***sjednocení***.

To znamená:



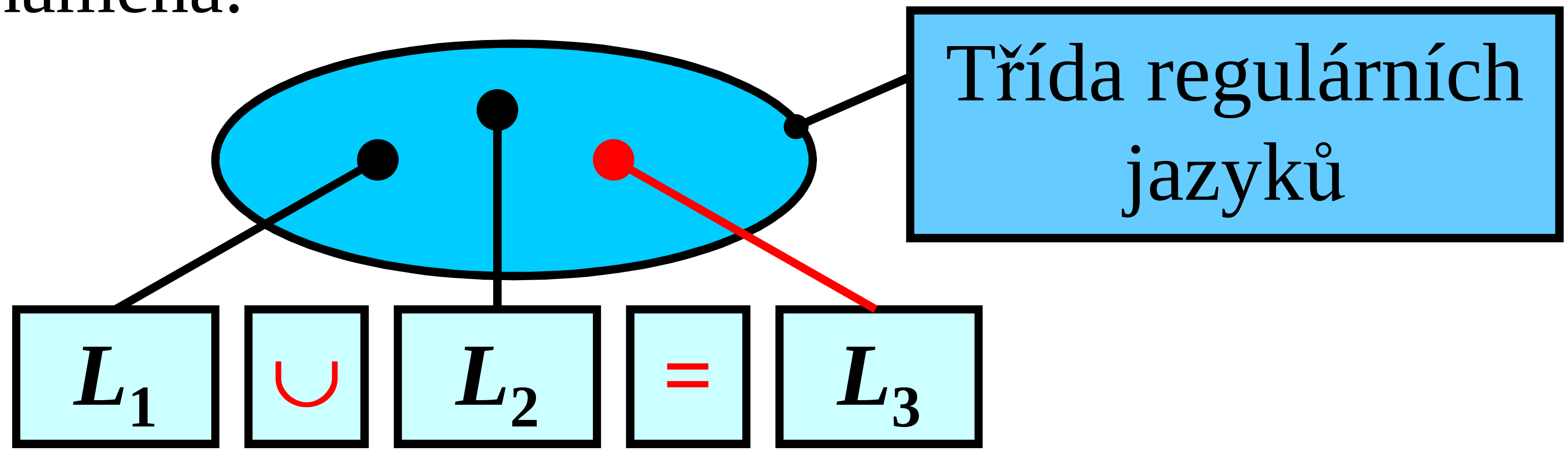
Uzávěrové vlastnosti 1/2

Definice: Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči operaci ***o***, pokud výsledek operace ***o*** na libovolné regulární jazyky je opět regulární jazyk.

Ilustrace:

- Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči ***sjednocení***.

To znamená:



Uzávěrové vlastnosti 2/2

Tvrzení: Třída regulárních jazyků je uzavřena vůči: **sjednocení**, **konkatenaci**, **iteraci**.

Důkaz:

- Nechť $\boldsymbol{L_1}$, $\boldsymbol{L_2}$ jsou dva **regulární jazyky**
- Potom existují dva RV r_1, r_2: $L(r_1) = \boldsymbol{L_1}$, $L(r_2) = \boldsymbol{L_2}$;
- Podle definice regulárních výrazů:
  - $r_1.r_2$ je RV značící $\boldsymbol{L_1 L_2}$
  - $r_1 + r_2$ je RV značící $\boldsymbol{L_1} \cup \boldsymbol{L_2}$
  - r_1^* je RV značící $\boldsymbol{L_1}^*$
- Každý RV značí regulární jazyk, tedy

$\boldsymbol{L_1 L_2}$, $\boldsymbol{L_1} \cup \boldsymbol{L_2}$, $\boldsymbol{L_1}^*$ jsou **regulární jazyky**

Algoritmus: KA pro doplněk

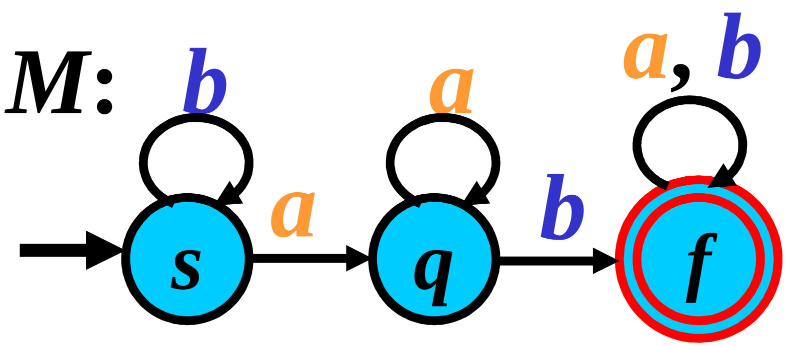
- **Vstup:** Úplný KA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Úplný KA: $M' = (Q, \Sigma, R, s, F')$,

$$L(M') = \overline{L(M)}$$

- **Metoda:**
- $F' := Q - F$

Příklad:

***M*:**



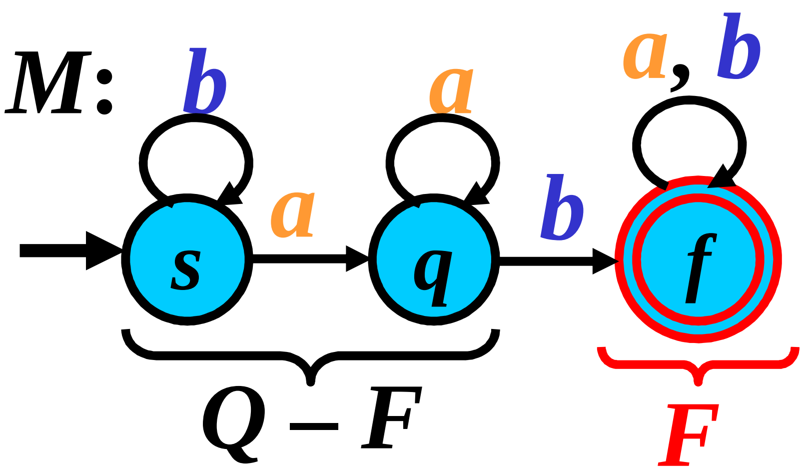
Algoritmus: KA pro doplněk

- **Vstup:** Úplný KA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Úplný KA: $M' = (Q, \Sigma, R, s, F')$,

$$L(M') = \overline{L(M)}$$

- **Metoda:**
- $F' := Q - F$

Příklad:



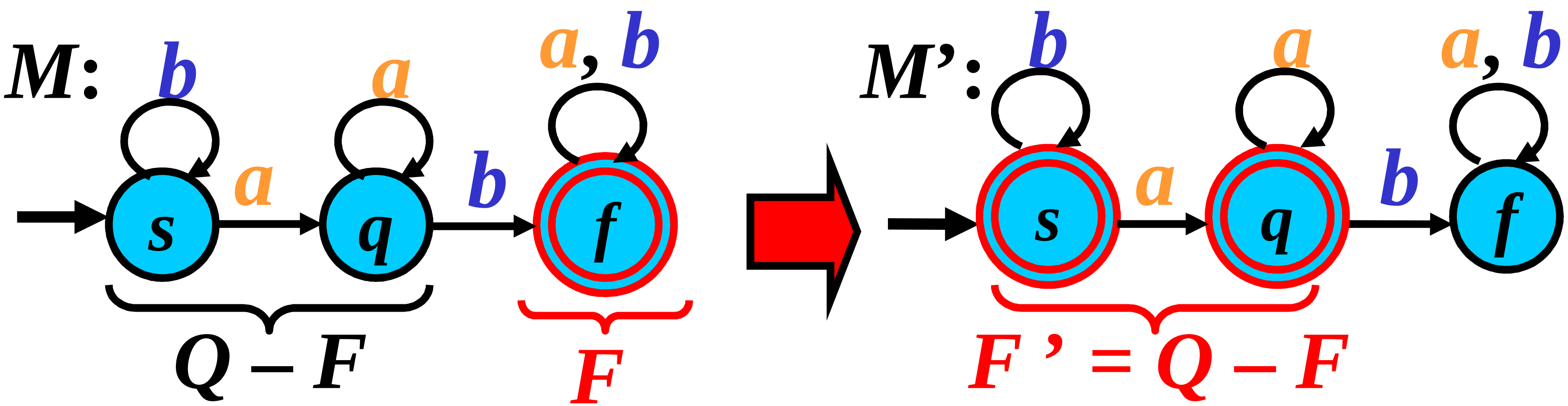
Algoritmus: KA pro doplněk

- **Vstup:** Úplný KA: $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$
- **Výstup:** Úplný KA: $M' = (Q, \Sigma, R, s, F')$,

$$L(M') = \overline{L(M)}$$

- **Metoda:**
- $F' := Q - F$

Příklad:



$L(M) = \{x$: *ab* je podřetězec $x\}$; $L(M') = \{x$: *ab* není podřetězec $x\}$

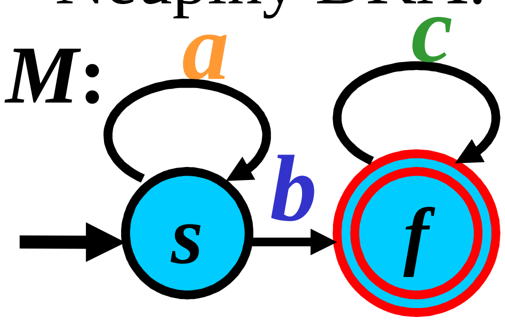
KA pro doplněk: Problém

- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud *M* není úplný KA, potom *M* musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

Příklad:

Neúplný DKA:

***M*:**



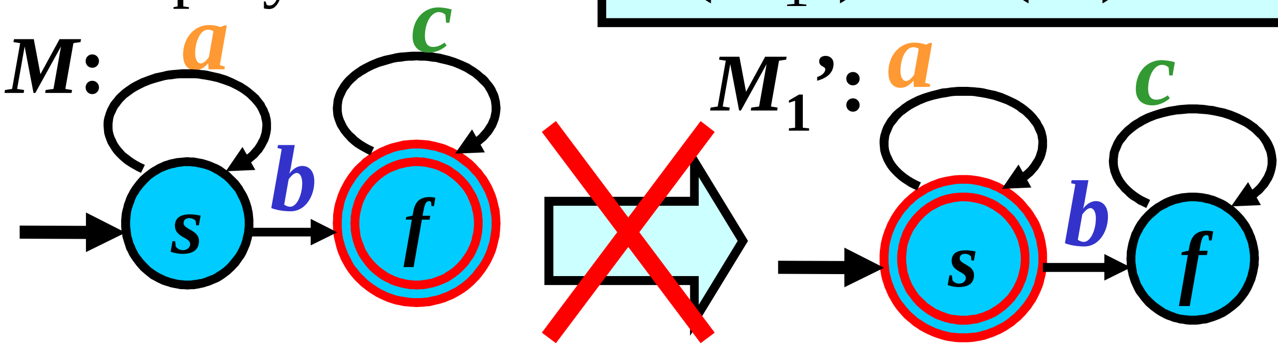
KA pro doplněk: Problém

- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud *M* není úplný KA, potom *M* musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

Příklad:

Neúplný DKA:

$L(M_1') \neq \overline{L(M)}$**!** - $c \notin L(M)$, $c \notin L(M_1')$



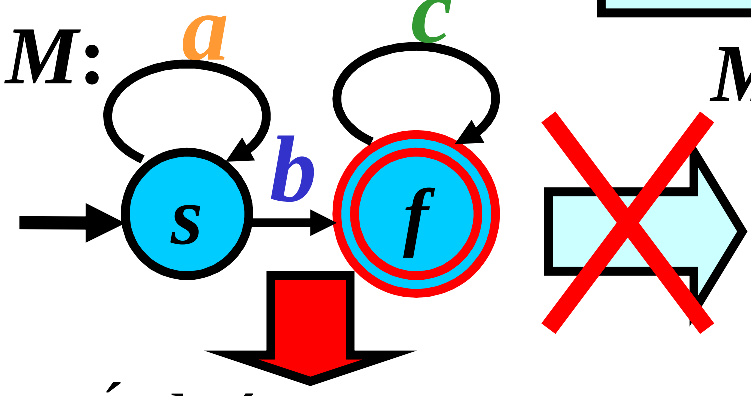
KA pro doplněk: Problém

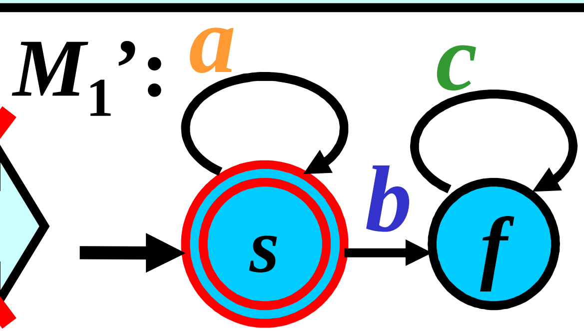
- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud *M* není úplný KA, potom *M* musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

Příklad:

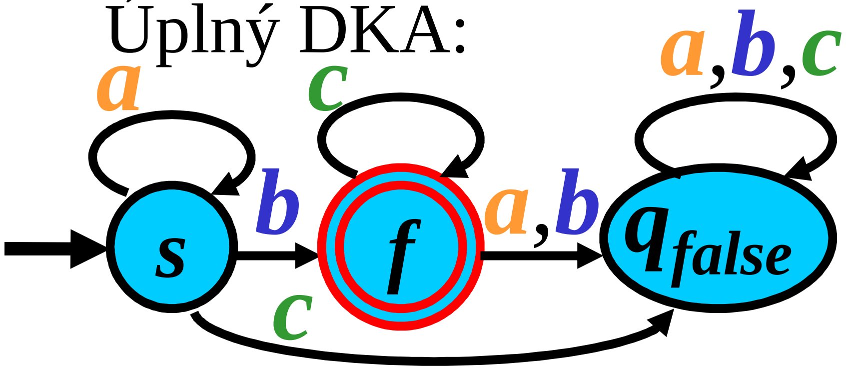
$L(M_1') \neq \overline{L(M)}$**!** - $c \notin L(M)$, $c \notin L(M_1')$

Neúplný DKA:





Úplný DKA:

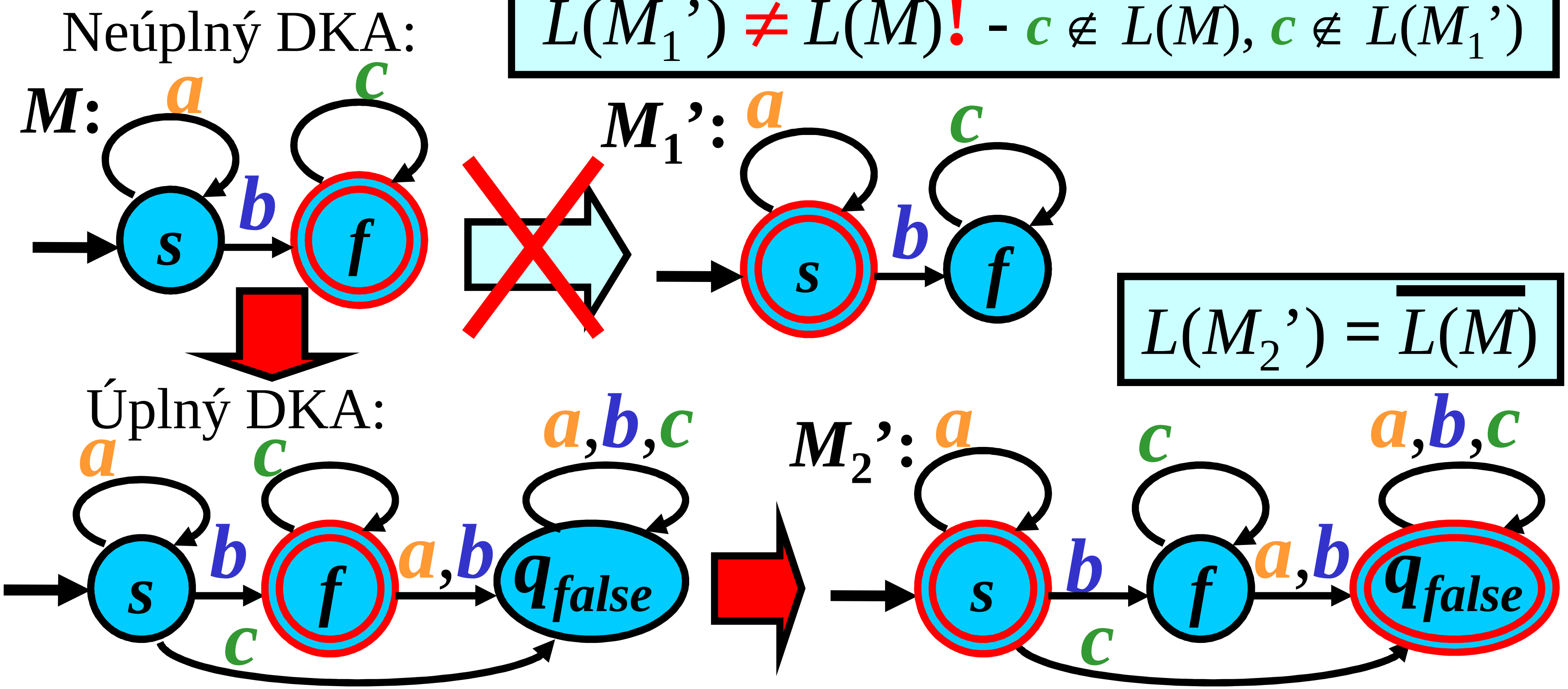


KA pro doplněk: Problém

- Předchozí algoritmus vyžaduje **úplný** KA
- Pokud M není úplný KA, potom M musí být převed na úplný KA a pak může být použit předchozí algoritmus

Příklad:

$L(M_1') \neq \overline{L(M)}$**!** - $c \notin L(M)$, $c \notin L(M_1')$



Uzávěrové vlastnosti: Doplněk

Tvrzení: Třída regulárních jazyků je uzavřena vůči **doplňku**.

Důkaz:

- Nechť $\boldsymbol{L}$ je **regulární jazyk**
- Pak existuje úplný DKA M: $L(M) = \boldsymbol{L}$
- Můžeme sestrojit úplný DKA M': $L(M') = \overline{\boldsymbol{L}}$ užitím předchozího algoritmu
- Každý KA definuje regulární jazyk, tedy $\overline{\boldsymbol{L}}$ je **regulární jazyk**

Uzávěrové vlastnosti: Průnik

Tvrzení: Třída regulárních jazyků je uzavřena vůči **průniku**.

Důkaz:

- Nechť L_1, L_2 jsou dva **regulární jazyky**
- $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ jsou **regulární jazyky**

(třída regulárních jazyků je uzavřena vůči doplňku)

- $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ je **regulární jazyk**

(třída regulárních jazyků je uzavřena vůči sjednocení)

- $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ je **regulární jazyk**

(třída regulárních jazyků je uzavřena vůči doplňku)

- $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ je **regulární jazyk**

(De-Morganovy zákony)

Boolova algebra jazyků

Definice: Nechť je třída jazyků uzavřena vůči sjednocení, průniku a doplňku. Potom tato třída tvoří ***Boolovu algebru jazyků***.

Tvrzení: Třída regulárních jazyků tvoří Booleovu algebru jazyků.

Důkaz:

• Třída regulárních jazyků je uzavřená vůči sjednocení, průniku a doplňku.

Hlavní rozhodnutelné problémy

1. Problém členství:

- **Instance:** FA M, $w \in \Sigma^*$; **Otázka:** $w \in L(M)$**?**

2. Problém prázdnosti:

- **Instance:** FA M; **Otázka:** $L(M) = \emptyset$**?**

3. Problém konečnosti:

- **Instance:** FA M; **Otázka:** Je $L(M)$ konečný**?**

4. Problém ekvivalence:

- **Instance:** FA M_1, M_2; **Otázka:** $L(M_1) = L(M_2)$**?**

Algoritmus: Problém členství

- **Vstup:** DKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$; $w \in \Sigma^*$
- **Výstup:** **ANO**, pokud $w \in L(M)$

  NE, pokud $w \notin L(M)$

- **Metoda:**
- **if** $sw \vdash^* f$, $f \in F$ **then** napiš('**ANO**')

  else napiš('**NE**')

Celkově:

Problém členství je pro KA rozhodnutelný

Algoritmus: Problém prázdnosti

- **Vstup:** KA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$;
- **Výstup:** **ANO**, pokud $L(M) = \emptyset$
  NE, pokud $L(M) \neq \emptyset$

- **Metoda:**
- **if** s je neukončující **then** napiš('**ANO**')
  else napiš('**NE**')

Celkově:

Problém prázdnosti je pro KA rozhodnutelný

Algoritmus: Problém konečnosti

- **Vstup:** DKA $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$;
- **Výstup:** **ANO**, pokud $L(M)$ je konečný
  NE, pokud $L(M)$ je nekonečný

- **Metoda:**
- Nechť $k = \text{card}(Q)$
- **if** existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$ **then** napiš('**NE**')
  else napiš('**ANO**')

Pozn.: Tento algoritmus je založen na tvrzení:

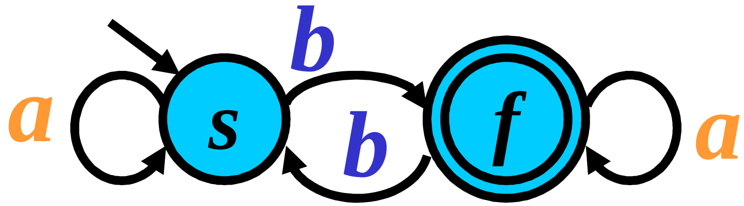
$L(M)$ je nekonečný $\Leftrightarrow$ existuje z: $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Celkově:

Problém konečnosti je pro KA rozhodnutelný

Rozhodnutelné problémy: Příklad

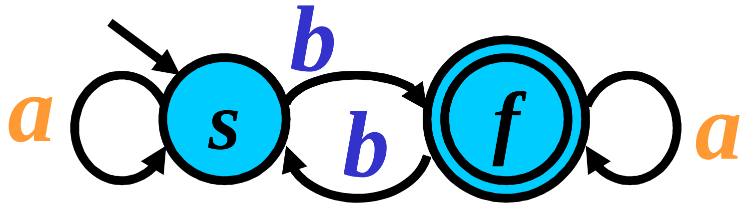
M:



Otázka: $ab \in L(M)$?

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M:

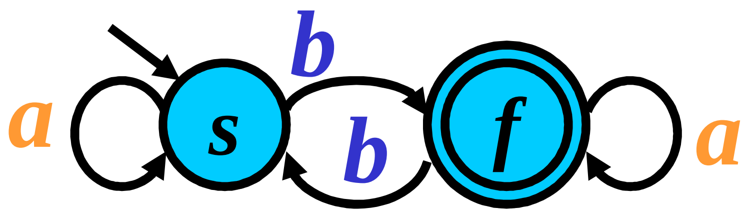


Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f,\ f \in F$

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



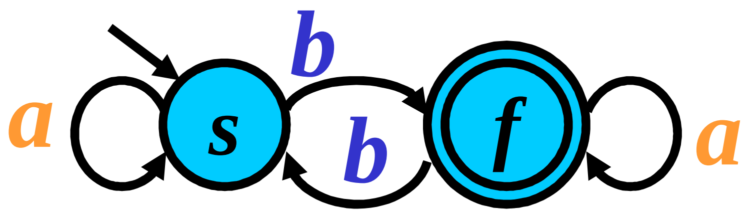
Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f,\ f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^{*} f,\ f \in F$

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

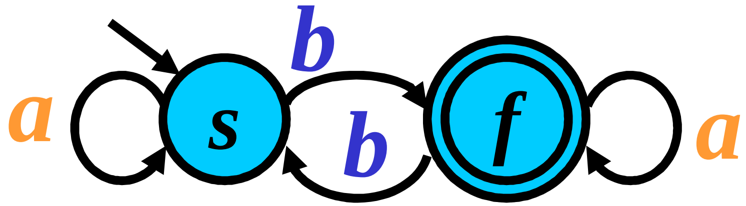
$sab \vdash sb \vdash f,\ f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^{*} f,\ f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M:



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

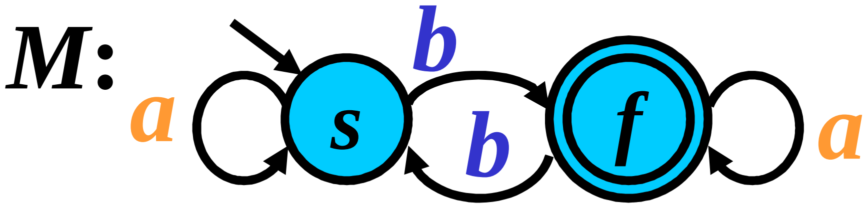
$sab \vdash sb \vdash f$, $f \in F$

Odpověď: **ANO**, protože $sab \vdash^* f$, $f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

Rozhodnutelné problémy: Příklad



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f, f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f, f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

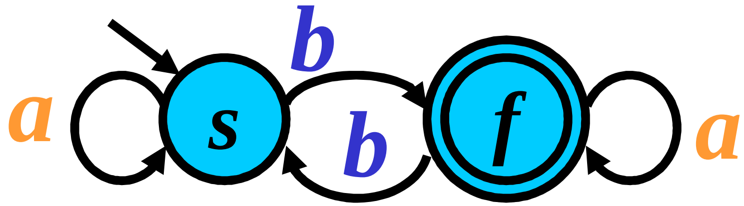
$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f; q \in Q; a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f, fa \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … s je ukončující

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M:



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f$, $f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f$, $f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

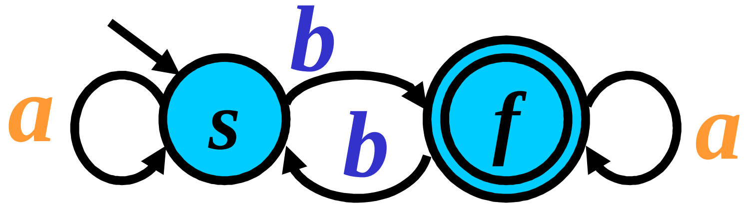
$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \to f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \to f$, $fa \to f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … s je ukončující

Odpověď: NE, protože s je ukončující

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M: 

Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f$, $f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f$, $f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f$, $fa \rightarrow f$

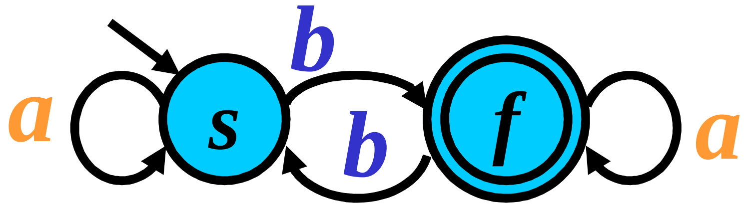
$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … s je ukončující

Odpověď: NE, protože s je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný**?**

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f$, $f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f$, $f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \to f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \to f$, $fa \to f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … s je ukončující

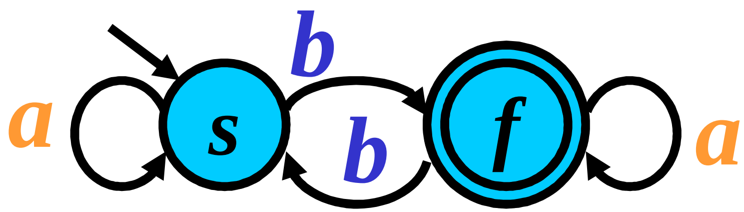
Odpověď: NE, protože s je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný? $k = \mathrm{Card}(Q) = 2$

Všechny řetězce $z \in \Sigma^*$: $2 \le |z| < 4$: aa, bb, ab, ...

Rozhodnutelné problémy: Příklad

M:



Otázka: $ab \in L(M)$?

$sab \vdash sb \vdash f$, $f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f$, $f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$?

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f$; $q \in Q$; $a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f$, $fa \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … **s** je ukončující

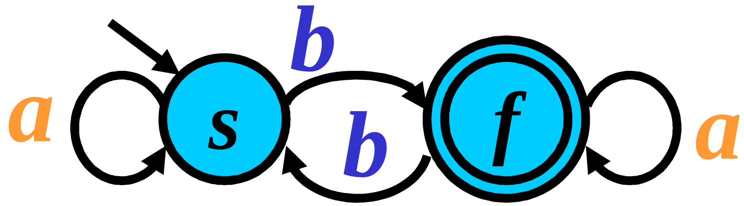
Odpověď: NE, protože **s** je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný? $k = \mathrm{Card}(Q) = 2$

Všechny řetězce $z \in \Sigma^*$: $2 \leq |z| < 4$: aa, bb, $\boxed{ab \in L(M)}$, ...

Rozhodnutelné problémy: Příklad

***M*:**



Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

$sab \vdash sb \vdash f,\ f \in F$

Odpověď: ANO, protože $sab \vdash^* f,\ f \in F$

Otázka: $L(M) = \emptyset$ **?**

$Q_0 = \{f\}$

1. $qa' \rightarrow f;\ q \in Q;\ a' \in \Sigma$: $sb \rightarrow f,\ fa \rightarrow f$

$Q_1 = \{f\} \cup \{s, f\} = \{f, s\}$ … s je ukončující

Odpověď: NE, protože s je ukončující

Otázka: Je $L(M)$ konečný? $k = \mathrm{Card}(Q) = 2$

Všechny řetězce $z \in \Sigma^*$: $2 \leq |z| < 4$: aa, bb, $\boxed{ab \in L(M)}$, ...

Odpověď: NE, protože existuje $z \in L(M)$, $k \leq |z| < 2k$

Algoritmus: Problém ekvivalence

- **Vstup:** Dva minimální KA, M_1a M_2
- **Výstup:** **ANO**, pokud $L(M_1) = L(M_2)$

  NE, pokud $L(M_1) \neq L(M_2)$

- **Metoda:**
- **if** M_1 má stejnou strukturu jako M_2 až na pojmenování stavů

  then napiš('**ANO**')

  else napiš('**NE**')

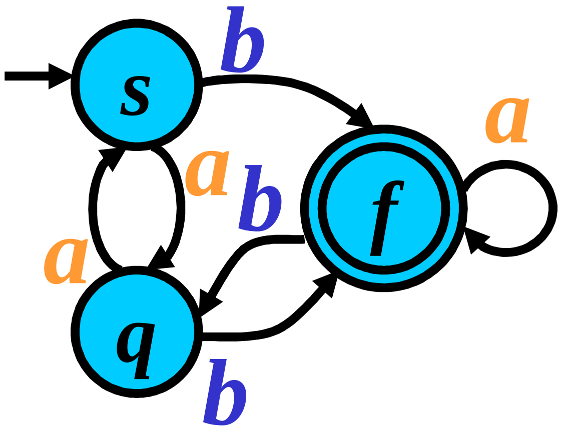
Celkově:

Problém ekvivalence je pro KA rozhodnutelný

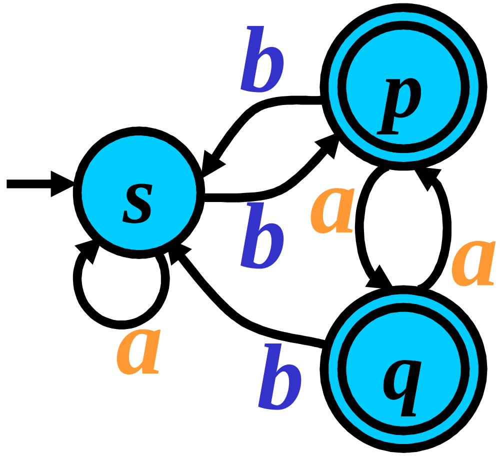
Problém ekvivalence: Příklad

Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$**?**

M_1:



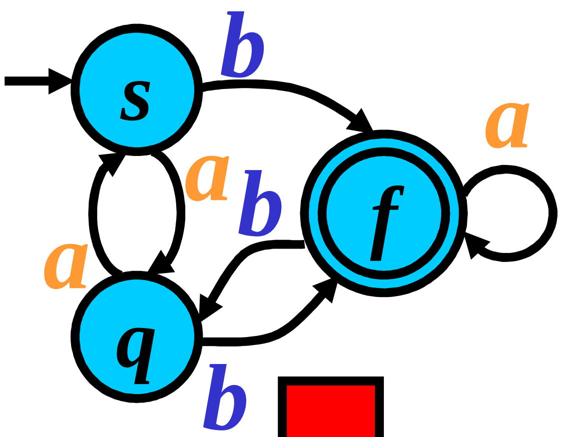
M_2:



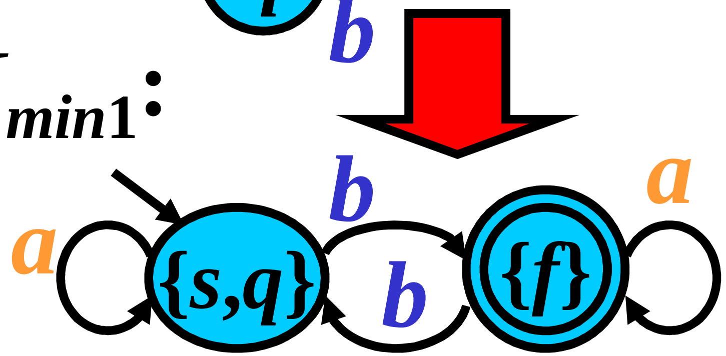
Problém ekvivalence: Příklad

Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$?

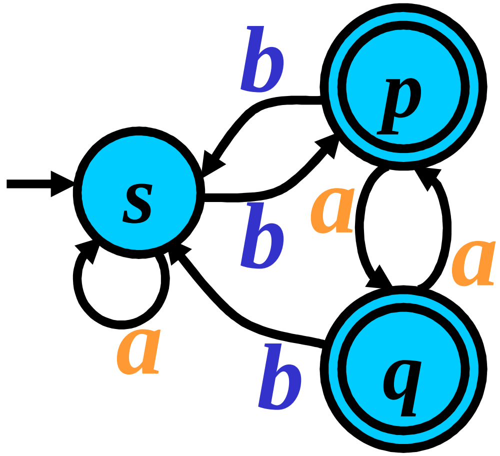
M_1:



M_{min1}:

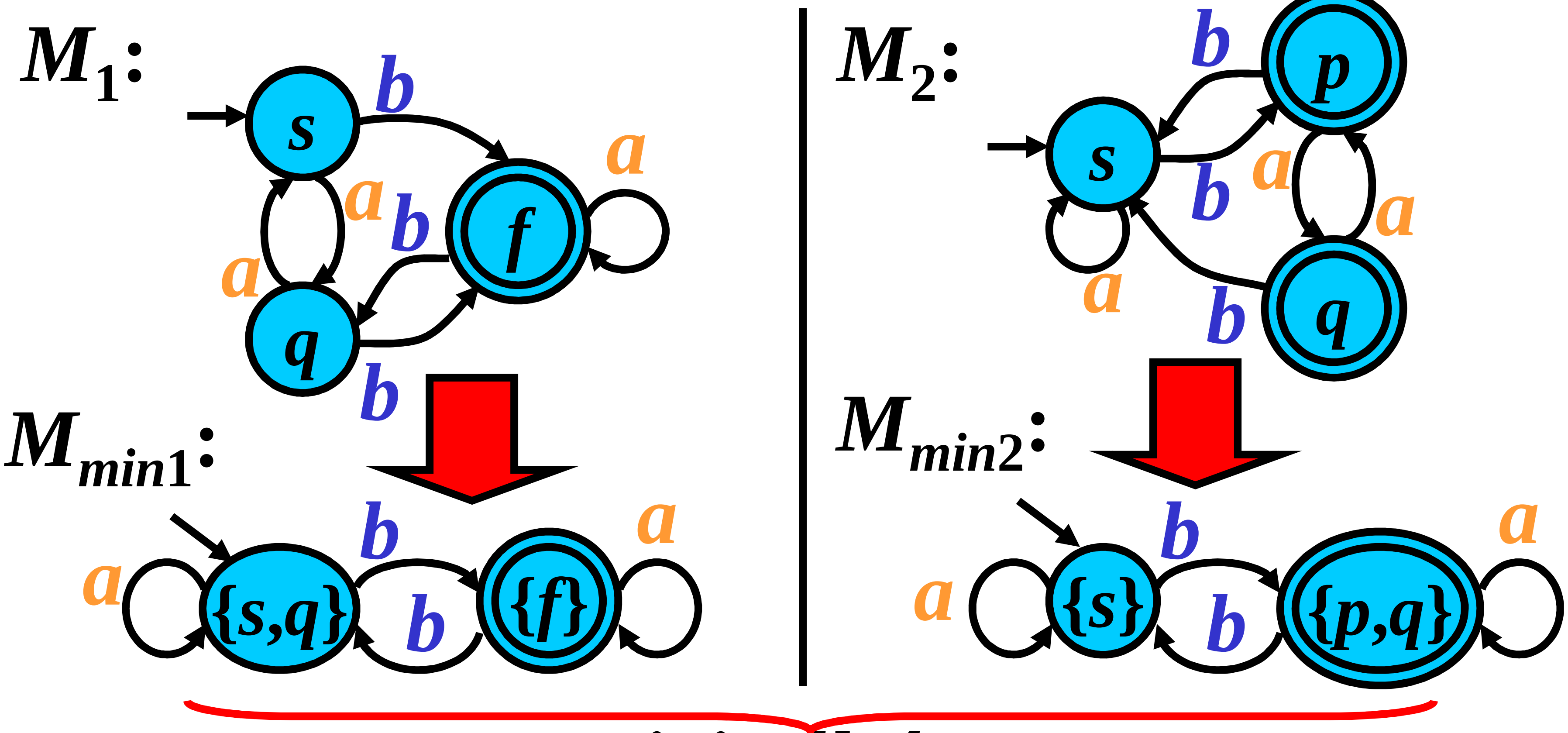


M_2:



Problém ekvivalence: Příklad

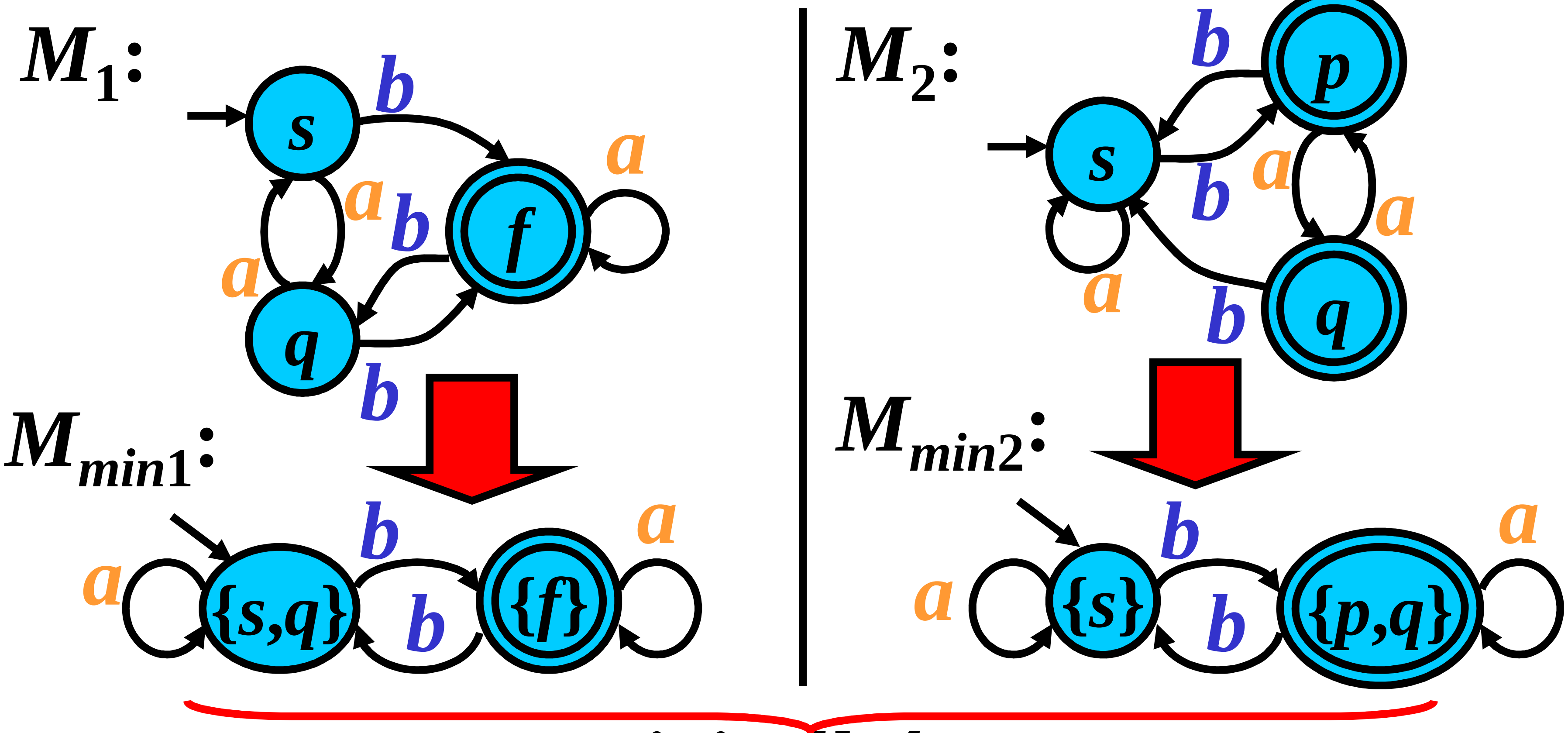
Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$?



Minimální KA

Problém ekvivalence: Příklad

Otázka: $L(M_1) = L(M_2)$?



Minimální KA

Odpověď: ANO, protože M_{min1} má stejnou strukturu jako M_{min2}