

# (a,b)-stromy

Zápočtová práce z Programování I pro pokročilé

Jiří Škrobánek<sup>1</sup>

9. listopadu 2018, Ostrava

## Abstract

This documentation describes the entire functionality of (a,b)-trees implementation in Python 3 by Jiří Škrobánek. Aside from listing all methods, principles of (a,b)-trees are explained and complexity of used algorithms is analysed.

## Obsah

<b>1</b>	<b>Definice</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metody</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Stručný popis algoritmů</b>	<b>2</b>
3.1	Vkládání . . . . .	2
3.2	Hledání . . . . .	3
3.3	Mazání . . . . .	3
3.4	Vyvažování . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Analýza složitosti</b>	<b>4</b>
4.1	Minimální vyváženost stromu . . . . .	4
4.2	Paměťová složitost . . . . .	4
4.3	Rychlost vyhledávání . . . . .	4
4.4	Rychlost vyvažování . . . . .	4

## 1 Definice

(a,b)-strom je strom. Musí platit  $(a, b) \in \mathbb{N}^2, 2 \leq a, 2a - 1 \leq b$ . (a,b)-strom je buďto prázdný, nebo mají všechny vnitřní vrcholy nejméně  $a$  synů a nejvýše  $b$  synů. Výjimkou je kořen, jenž musí mít mezi  $2$  a  $b$  syny. Všechny listy leží v jedné hladině. Vnější vrcholům jsou přiřazeny unikátní klíče (prvky lineárně uspořádané množiny). Vnitřním vrcholům je přiřazen maximální klíč z jeho synů. Ve vnitřním vrcholu jsou uloženy klíče synů ve vzestupném pořadí. Pro každý podstrom platí, že mimo podstrom neexistují vnější vrcholy, které mají nižší klíč než maximální klíč v podstromu a zároveň vyšší klíč než minimální v podstromu.

V tomto stromě se dá vyhledat vnější vrchol dle klíče v logaritmickém čase vzhledem k počtu vnějších vrcholů. Přidávání a odebírání listů rovněž funguje v logaritmickém čase.

Speciálním případem (a,b)-stromů pro  $2a - 1 = b$  jsou B-stromy, mimo jiné oblíbený 2-3-strom.

## 2 Metody

Knihovna obsahuje třídy `InternalNode` a `ExternalNode` pro vnitřní a vnější vrcholy a třídu `ABTree`, která má metody popsané níže.

---

<sup>1</sup>Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, jiri@skrobanek.cz

Počet vnějších vrcholů ve stromě značíme  $E$ .

```
__init__(a: int, b: int)
```

Vytvoří (a,b)-strom pro konkrétní hodnoty  $a, b$ .

Výjimky: `ValueError`: Neplatná volba parametrů.

Složitost:  $\mathcal{O}(1)$

```
insert(self, key: int, value=None)
```

Vloží do stromu uspořádanou dvojici (key, value). Value může být libovolného typu nebo `None`.

Výjimky: `ValueError`: Strom již klíč obsahuje.

Složitost:  $\Theta(\log(E))$

```
delete(self, key: int)
```

Vymaže ze stromu vnější vrchol s klíčem `key`.

Výjimky: `ValueError`: Strom klíč neobsahuje.

Složitost:  $\Theta(\log(E))$

```
contains(self, key: int)
```

Vrací: `bool` Zda strom obsahuje daný klíč.

Složitost:  $\Theta(\log(E))$

```
find(self, key: int)
```

Vrací: Hodnotu ve vnějším vrcholu s daným klíčem.

Výjimky: `ValueError`: Strom klíč neobsahuje.

Složitost:  $\Theta(\log(E))$

```
item_count(self)
```

Vrací: `int` Počet vnějších vrcholů ve stromě.

Složitost:  $\mathcal{O}(1)$

```
find_leq(self, key: int)
```

Vrací: (`k`, `value`) Uspořádaná dvojice klíče a hodnoty z vnějšího vrcholu, který má maximální klíč v množině vrcholů s klíčem v intervalu  $(-\infty, key)$

Složitost:  $\mathcal{O}(\log E)$

```
find_lesser(self, key: int)
```

Vrací: (`k`, `value`) Uspořádaná dvojice klíče a hodnoty z vnějšího vrcholu, který má maximální klíč v množině vrcholů s klíčem v intervalu  $(-\infty, key)$

Složitost:  $\mathcal{O}(\log E)$

```
find_geq(self, key: int)
```

Vrací: (`k`, `value`) Uspořádaná dvojice klíče a hodnoty z vnějšího vrcholu, který má minimální klíč v množině vrcholů s klíčem v intervalu  $[key, \infty)$

Složitost:  $\mathcal{O}(\log E)$

```
find_greater(self, key: int)
```

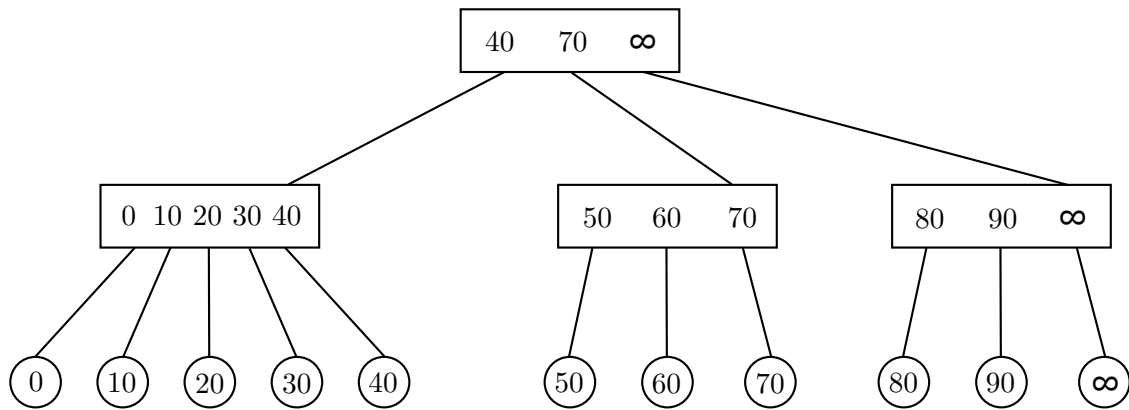
Vrací: (`k`, `value`) Uspořádaná dvojice klíče a hodnoty z vnějšího vrcholu, který má minimální klíč v množině vrcholů s klíčem v intervalu  $(key, \infty)$

Složitost:  $\mathcal{O}(\log E)$

## 3 Stručný popis algoritmů

### 3.1 Vkládání

Vkládáme `key`, `value`. Pokud je strom prázdný vytvoříme kořen, který bude mít nově vkládaný záznam jako jednoho syna a vrchol s klíčem  $\infty$  jako druhého syna. Začneme u kořene. Z vrcholu přejdeme na jeho syna, který má nejbližší vyšší klíč než `key`.



Obrázek 1: Příkladový (3,5)-strom

Po vložení zavoláme algoritmus vyvažování na otce nově vzniklého vnějšího vrcholu.

### 3.2 Hledání

Pokud hledáme podle klíče **key**, začneme v kořeni a sestupujeme na syny s nejbližším vyšším klíčem, nebo případně klíčem rovným **key**. Pokud nedojdeme do vnějšího vrcholu s hledaným klíčem, strom klíč neobsahuje.

### 3.3 Mazání

Pokud je třeba vrchol vymazat, nejdříve ho je třeba najít ve stromě a potom odstranit. Pokud byl navíc maximálním klíčem v některých vnitřních vrcholech, je třeba změnit v jeho předcích klíče na druhý nejvyšší vrchol v otci mazaného vrcholu (Takový musí existovat.)

Může být porušeno vyvážení stromu, proto je třeba zavolat vyvažování na bývalého otce smazaného vrcholu.

### 3.4 Vyvažování

Pokud jsme přidávali nebo mazali od posledního spuštění vyvažování pouze jeden vrchol, povolený počet synů ve vrcholech může být porušen o nejvýše 1.

Pokud ve stromě zůstal kořen a jeden vrchol ( $\infty$ ), strom se stane prázdným.

Kontrolu stromu vždy začínáme v nějakém vrcholu. A může se vyvíjet několika způsoby:

- Pokud je kontrolovaný vrchol kořen, který má jediného syna, odstraníme ho z grafu a jeho syn se stane novým kořenem. Ukončíme vyvažování.
- Pokud je kontrolovaný vrchol kořen a má více než  $b$  synů, rozdělíme ho na dva a vytvoříme jim nového otce, který bude kořenem stromu. Ukončíme vyvažování.
- Pokud má kontrolovaný vrchol více než  $b$  synů: Rozdělíme jej na dva, oba vrcholy získají nejméně  $a$  synů, rozdělených podle velikosti. Tím mohl otec získat příliš mnoho synů, kontrolu pokračujeme na něm.
- Pokud má kontrolovaný vrchol méně než  $a$  synů: Zkontrolujeme, zda se nemůže levý nebo pravý rozdělit o syny s tímto vrcholem, aby měly oba alespoň  $a$  synů. Pokud toto nejde, sloučením s jedním z nich vznikne vrchol s povoleným počtem synů. Poté je potřeba pokračovat s kontrolou v otci, protože ztratil jednoho syna.
- Pokud je vše s vrcholem v pořádku, vyvažování ukončíme.

Výsledkem vyvažování je platný  $(a,b)$ -strom.

## 4 Analýza složitosti

### 4.1 Minimální vyváženost stromu

Pokud má strom  $e$  vnějších vrcholů, strom má hloubku nejvýše  $\lceil \log_a e \rceil + 1$ .

Z definice musejí mít všechny vnitřní vrcholy nejméně  $a$  synů, a proto počet vrcholů hloubky  $h$  ve stromě je nejméně  $a^h$ .

### 4.2 Paměťová složitost

Strom s parametry  $(a, b)$  a  $e$  záznamy zabírá v paměti  $\Theta(e)$ . Neuvažujeme, kolik zabírají samotné údaje, které do stromu ukládáme, pouze strukturu stromu a klíče. Strom má nejvýše hloubku  $\lceil \log_a e \rceil + 1$ . Jeden vnitřní vrchol v sobě obsahuje klíče a ukazatele na nejvýše  $b$  dalších vrcholů.

Můžeme tedy provést horní odhad tak, že všechny hladiny budou plné a bude jich teoretický maximální počet. V tomto případě je počet vnějších vrcholů roven  $a$ . Další úroveň obsahuje ve vrcholech klíče a ukazatele na externí vrcholy, ale všechny další obsahují nejméně  $a$ -krát méně klíčů, je jich  $a$ -krát méně. Součet takovéto geometrické řady je vždy pouze konstantním násobkem prvního členu, tedy  $e$ .

### 4.3 Rychlost vyhledávání

Vyhledávání se použije nejen v případě, že je potřeba získat z pole záznam, ale také při vkládání a odstraňování, je tedy nutné, aby probíhalo rychle.

Jak plyne z algoritmu, začíná se ve stromě a sestupuje se až na spodní hladinu. V každém prošlém vrcholu se přitom porovná až  $b$  klíčů. Pokud je hledání nakonec neúspěšné, proces se liší až posledním krokem.

Dohromady to dává  $\Theta(b \log_a e)$  operací ve stromě s  $e$  záznamy.

### 4.4 Rychlost vyvažování

Vyvažování spouštíme na nějakém konkrétním vrcholu, pouze pro tento vrchol hrozí porušení počtu synů. Provádí se de facto dvě operace:

**Slučování** Pokud se uskuteční sloučení vrcholu, vrchol vzniklý po sloučení bude mít počet synů v pořádku. Jen jeho otce bude třeba preventivně zkusit vyvážit (pokud existuje). Nově vzniklý vrchol už je ale vyvážený a nebude se k němu potřeba vracet.

Hledání vrcholů ke sloučení i vyrábění nového vrcholu je práce s  $\mathcal{O}(b)$  klíči.

**Rozdělování** Vrcholy vzniklé rozdělením mají správný počet synů, vyvažování pokračuje otcem těchto vrcholů.

Protože máme již určeno jaká je maximální hloubka stromu a vyvažuje se maximálně 1 vrchol v každé hloubce, můžeme říci, že během vyvažování proběhne  $\mathcal{O}(e)$  operací.

## Seznam obrázků

1	Příkladový (3,5)-strom . . . . .	3
---	----------------------------------	---

## Seznam tabulek

## Seznam příloh

- A. Zdrojový kód knihovny
- B. Zdrojové kódy příkladů

## Reference

- [1] KNUTH, Donald Ervin. The Art of Computer Programming. Upper Saddle River, NJ: Addison-Wesley, 2011. ISBN 978-0321751041.