Homework 3 - splay_experiment

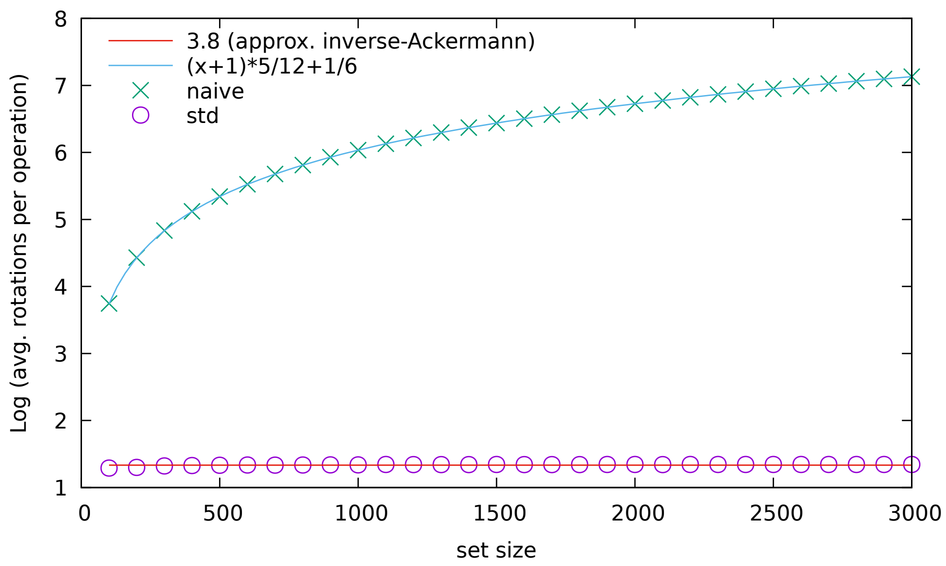
Jiří Klepl

Prolog

Následují diskuze tří zadaných testů a analýzy pozorovaných domnělých závislostí. Pro úvod by bylo vhodné říct, že všechny testy měří a průměrují počet provedených rotací naivní a standardní implementace splay stromu. Tento test je poměrně dobrým měřítkem časové složitosti práce nad těmito strukturami, neboť u splay stromů počet rotací odpovídá počtu čtení a dereferencí prvků, které vedou k přidanému/hledanému prvku (právě přidání a hledání prvku testy měří).

Sequential test

Figure 1: Sequential test results



Ve výsledcích tohoto testu znázorněných ve figuře 1 můžeme vidět velký rozdíl v počtu provedených rotací naivní a standardní implementace.

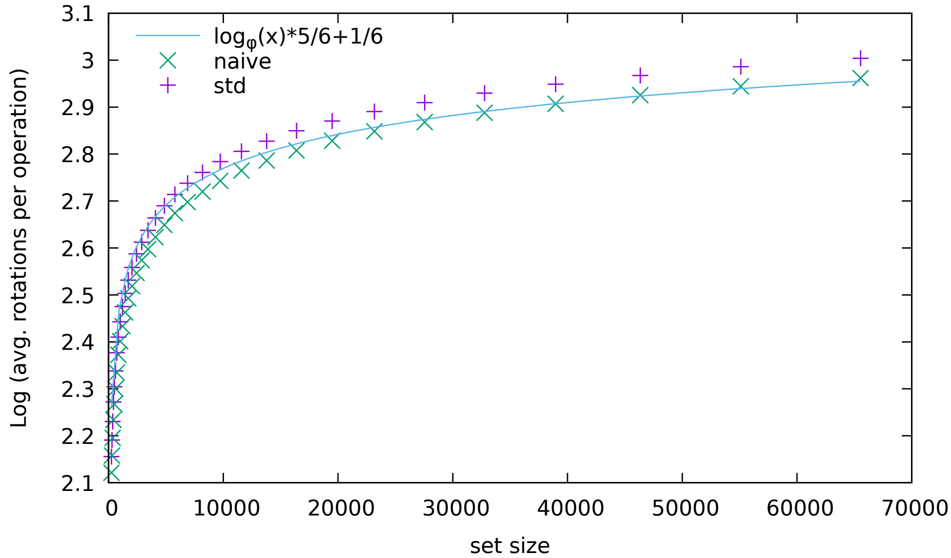
U obou implementací je složitost přidávání n prvků v $\Theta(n)$, tedy konstantní na jeden prvek. Výsledkem je vždy lineární seznam (při vzestupném přidávání propojen po levých synech). Tento výsledný tvar budou mít obě implementace po každém dokončení (přidávací/hledací) sekvence.

Složitost hledání prvku v naivní implementaci je v $\Theta(n)$. Strom má během hledání vždy tvar dvou hlavami spojených seznamů, z nichž jednomu odtrháváme listy a přidáváme je v hlavě do druhého. Jednoduchou matematickou úpravou proto dostaneme velice přesnou lineární aproximaci závislosti průměrného počtu rotací na velikosti pole.

Složitost hledání prvku ve standardní implementaci je v $\Theta(\alpha(n))$, kde α je inverzní Ackermannova funkce, důkaz toho lze nalézt na internetu. Tato analýza odpovídá mazání krajních bodů, když splay stromem reprezentujeme deque.

Random test

Figure 2: Random test results

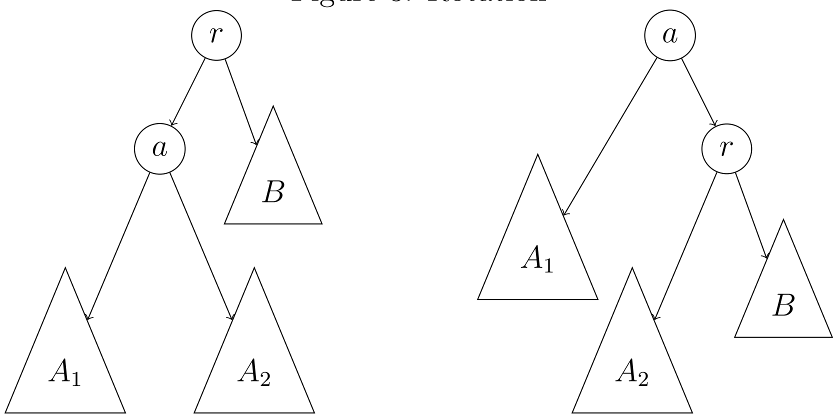


V testu s náhodným přístupem k prvkům dosahují obě implementace obdobného počtu rotací (pozn. znázorněná funkce je pouze k porovnání, není výsledkem žádné analýzy), na jeden prvek amortizovaně v $\Theta(n)$ (kde n je počet prvků). U standardní implementace toto není vůbec překvapivé, na přednáškách to bylo rigorózně dokázáno.

Jediným překvapením zde je podobnost výsledků naivní a standardní implementace. V dalším testu najdeme vysvětlení, které by částečně mohlo vysvětlovat i toto (včetně toho, proč naivní implementace dává lepší výsledky). Ono vysvětlení však zde není uspokojivé.

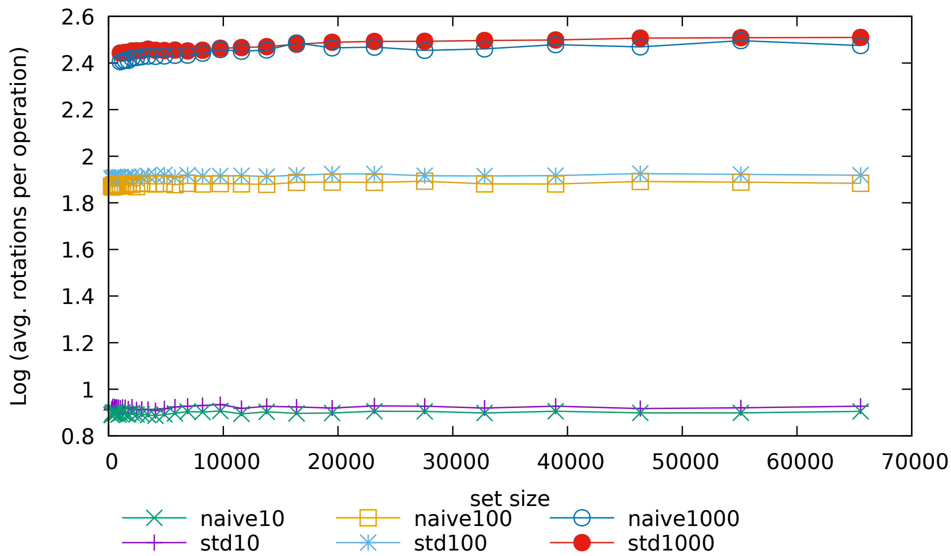
Co nám dá vysvětlení logaritmického počtu rotací je, že v libovolném nevyváženém podstromě budeme pravděpodobněji vyrotovávat prvky z větší (mohutnější) strany (na figuře 3 to je levá (a, A_1, A_2)). Když tedy budeme uvažovat tomu odpovídající rotaci prvku a, tak prvky z A_1 posuneme výš, prvky B z níž a prvky z A_2 budou stále ve stejné výšce, sníží se velikost levého podstromu a pravděpodobnost přístupu k jeho prvkům, opačně s pravým podstromem. Tedy naivní splay stromy se mají tendenci samy vyvažovat. A pak tedy tradičně podle průměrné hloubky.

Figure 3: Rotation



Subset test

Figure 4: Subset test results



V testu s náhodným přístupem do malé množiny prvků uvnitř velké množiny přidaných prvků opět vidíme velice podobný počet provedených rotací naivní a standardní implementace (pro danou konfiguraci testu).

Dále vidíme, že velikost stromů nemá v tomto testu signifikantní vliv na počet rotací. Naproti tomu velikost navštěvované podmnožiny má stejný vliv jako ona velikost v minulém testu (kde totiž velikost stromu odpovídala velikosti přistupované podmnožiny).

Vysvětlení pro naivní implementaci

Snažíme se vysvětlit, proč nemá velikost nadmnožiny vliv na práci se stromem a důležitá je jen přistupovaná podmnožina.

Uvažujme **"podmnožinovou špičku" stromu** (budeme značit A_i, či neformálně A; i značí počet provedených přístupů), což je v kořeni začínající maximální spojitý podgraf prvků, které jsou v podmnožině. (pozn. A_0 nemá smysl uvažovat, byl by prázdný, ale A_1 je poté alespoň kořen).

Špička A je (z definice) vždy spojitá a obsahuje prvky pouze z podmnožiny, tedy je-li přistupovaný prvek v tomto podgrafu, nikdy ani nesáhneme na prvek, který by v A nebyl (pozn. rotace neuvede na cestu od prvku z A ke kořeni prvek, který by nebyl z A). Tedy zbytek stromu je irelevantní při přistupování k prvkům z A.

Teď jen ukážeme, že prvky A_i jsou i v A_{i+1}. Nikdy nenastane vyrotovávání prvku, který není z A. Tedy jediná relevantí situace je, když vyrotovávaný prvek (nutně z podmnožiny) je těsně pod A (jinak se nic nerozbíjí, protože jsme v nějakém podstromě až dále pod A a na žádný prvek z A v rotacích nesáhneme). První situace, kdy vyrotovávaný prvek (který ještě není v A) manipuluje s nějakým prvkem z A, je, když už v A sám je (neboť manipuluje jen se svým rodičem), tedy jeho rodič je nutně v A. Tedy jakákoliv snaha o rozbití množiny A by nám dala spor.

Předešlé dva odstavce nám dohromady dají, že přistoupíme-li k prvkům z nějaké podmnožiny a poté nepřistoupíme k žádnému jinému a poté opět přistoupíme k prvkům z této podmnožiny, tak již vůbec nesáhneme na prvek, který by nebyl v této podmnožině.

Vysvětlení pro standardní implementaci

Pro standardní splay strom vysvětlení naivní implementace platí jen, když připustíme "skoro spojitost" výše zmíněné špičky A. Tedy připustíme, aby na cestě mezi prvkem v A a jeho prvním předkem z A byl maximálně jeden prvek, který není v podmnožině. Problematické totiž jsou *zigzig* rotace.

zig rotace a zigzag rotace nijak neohrožují špičku A, stále pro ně platí naivní vysvětlení. Zigzag rotace jediná může "Vytrhnout" prvek z A a nahradit jej vyrotovávaným, jenže ten je taktéž z podmnožiny a díky připuštění "skoro spojitosti" je vytrhnutý prvek stále v A.

Maximální vliv nadmnožiny je tedy určitě omezen dvojnásobkem vlivu podmnožiny, tedy nadmnožina asymptoticky významná není a i tohoto dvojnásobku docílíme jen ve velice konkrétních situacích a většinou bude špička A poměrně podobná špičce naivní implementace (pozn. A se nikdy nezhoršuje, pokud se konkrétně přes její hranici neprozigziguje nový prvek A - toto je jediný možný způsob uvedení mezery do A, ostatní rotace ji jistě nezhoršují).

Tyto mezery v A pravděpodobně vysvětlují v grafu viditelný nepatrný rozdíl implementací.