Homework 4 - reg

Jiří Klepl

> Nechť B je jazyk přijímaný konečným automatem a nechť A je jazyk pro nějž $A \leq_m B$. Je A regulární? Proč?

Vyvrátíme sporem.

Předpoklady sporu

Mějme regulární jazyk $B = \mathbf{a}+$ nad abecedou $\Sigma^\star = \{a, b\}$, jazyk A libovolný rozhodnutelný a E jeho enumerátor, jehož výstup je lexikograficky uspořádán.

Definice speciálního turingova stroje přijímajícího jazyk A

Definujme turingův stroj M přijímající A následovně:

Algorithm 1 M se slovem y na pásce

```
E ← Enumerátor jazyka A
W ← a
while !E.empty() do
    x ← E.front()
    E.pop()
    if x < y then
        W ← W · a
    else if x == y then
        return Přijmi vstup a na pásce zanech W
    else
        return Odmítni vstup
    end if
end while
```

Toto lze samozřejmě jednoduše za pomoci simulace emulátoru na jedné pásce za současného zaplňování druhé pásky symboly a a následovaného odmazáváním prvního vyenumerovaného slova, pokud je lexikograficky menší než vstup. Pokud je toto slovo rovné vstupu, necháme na výstupu pouze obsah druhé pásky. Pokud je vyšší, odmítneme vstup. Tento postup je jistě konečný, neboť je jen konečně mnoho lexikograficky menších slov, než je vstup. Tedy turingův stroj M vždy skončí.

Převod

Poté definujeme f pomocí turingova stroje M, poté: $B = f(A)$ a tedy $A \leq_m B$.

Spor

$A \leq_m B$ a B je regulární. Mějme tedy $A = \{\mathbf{a}^i\mathbf{b}^i | i \in \mathbb{N}\}$ porušující regulární pumping lemma a to nám dává spor.