Homework 1 - Reset

Jiří Klepl

Ukažte, jak lze libovolný jednopáskový Turingův stroj M převést na Resetovací (jednopáskový) stroj M', který se od Turingova stroje liší tím, že přechodová funkce neumožňuje pohyb doleva o jedno políčko, ale pouze pohyb na začátek (jednostranně nekonečné) pásky.

Formální předpoklady

Předpokládáme, že Turingův stroj (dále jen TS) je upraven do formy s jednostrannou páskou, má množinu stavů Q, abecedu Γ a přechodovou funkci $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$. TS M' bude mít množinu stavů Q', abecedu Γ' a přechodovou funkci $\delta' : Q' \times \Gamma' \to Q' \times \Gamma' \times \{RESET, N, R\}$. *Tedy jediný rozdíl v popisu stroje je nahrazení pohybu L (doleva) pohybem RESET.*

Řešení

Nejprve uvedeme myšlenku a způsob modelování, až poté formálně definujeme rozšíření množiny stavů Q na Q' a abecedy Γ na Γ'.

- Pravidlo x ve formě $\_ \times \_ \to \_ \times \_ \times R$ nebo $\_ \times \_ \to \_ \times \_ \times N$ budeme modelovat 1:1 (tedy v popisu M' budou všechna tato pravidla v nezměněném znění).
- Pro pravidla ve formě $x = (q, a) \to (p, b, L)$; q, a, p, b jsou proměnné
  1. Obarvíme pole, z něhož chceme doleva, červeně a začneme počítat je-li počet neobarvených polí alespoň 2 (postupně budeme černě obarvovat pole, která nejsou naším cílem, tedy jsou moc nalevo):
     $(q, a) \to (p_0, b_{red}, RESET)$; toto pravidlo definujeme pro každé pravidlo x z popisu TS M, které zadávalo posun vlevo.
  2. Počítáme, je-li počet nečerných polí do červeného (startovního) alespoň 2:
     $(p_0, a) \to (p_1, a, RIGHT)$
     $(p_1, a) \to (p_2, a, RIGHT)$
     $(p_2, a) \to (p_2, a, RIGHT)$
     všechna tato pravidla definujeme pro všechny kombinace $p \in Q$ a $a \in \Gamma$.
  3. Teď jsme zpět na červeném (startovním) poli a nastanou dvě situace (buďto jsou mezi posledním černým polem (nebo startem pásky) a červeným alespoň dvě nečerná, či nikoliv, to poznáme podle stavů p_1 a p_2).
     (a) Opakujeme postup od kroku 1., ale tentokrát postupně začerňujeme (4.):
     $(p_2, a_{red}) \to (p_{push}, a_{red}, RESET)$
     (b) Víme, že první neobarvené pole je první vlevo, tedy spustíme čisticí proces končící v něm (nejprve odčervevíme startovní pole), pokračujeme krokem 5.:
     $(p_1, a_{red}) \to (p_{clean}, a, RESET)$

     obě pravidla v tomto kroku definujeme pro všechny kombinace $p \in Q$ a $a \in \Gamma$.

4. Přeskočíme černě vyznačená pole, začerníme první nečerné a pokračujeme krokem 2.:
   $(p_{push}, a_{black}) \to (p_{push}, a_{black}, RIGHT)$
   $(p_{push}, a) \to (p_0, a_{black}, RIGHT)$
   tato pravidla opět definujeme pro všechny kombinace $p \in Q$ a $a \in \Gamma$.
5. Odčerníme všechna černě vyznačená pole a v prvním nečerném (cílov:
   $(p_{clean}, a_{black}) \to (p_{clean}, a, RIGHT)$
   $(p_{clean}, a) \to (p, a, N)$
   tato pravidla opět definujeme pro všechny kombinace $p \in Q$ a $a \in \Gamma$.

Rozšíření množiny stavů a abecedy

Rozšíření množiny stavů: $Q' = \{q, q_0, q_1, q_2, q_{push}, q_{clean} | q \in Q\}$
Rozšíření abecedy: $\Gamma' = \{a, a_{red}, a_{black} | a \in \Gamma\}$

Výpočetní složitost pro jeden modelovaný příkaz TS M

Je-li n index pozice na pásce, pak je výpočet proveden za pomoci $\Theta(n^2)$ příkazů TS M'.

Korektnost

Tvrdíme, že postup modelování neselže pro žádnou platnou instrukci. Tedy můžeme triviálně předpokládat, že modelování s posunem doprava či neposouváním neselže, a zaměřit se pouze na **modelování posunu doleva**.

Pozorování

1. Z předpokladů uvedených na začátku můžeme odvodit, že nalevo od startovního je alespoň jedno pole. Vyslovíme invariant, že pole přímo nalevo od startovního zůstane nečerné - tento lze triviálně ukázat.

2. Každá z modelovacích instrukcí posouvá hlavu vpravo (a nikdy ne napravo od startovního pole) a nebo ji vrací na začátek. Tedy je-li počet RESETů konečný, pak i počet provedených kroků.

3. RESET nastane pouze na startovním poli.

4. Bloky kroků výpočtu mezi jednotlivými RESETy se liší počtem černých polí (po jejich odkrokování) postupně právě o 1.

5. Před posledním resetem je před startovním polem právě jedno neobarvené pole.

Z pozorování plyne konečnost algoritmu a jeho kvadratická složitost. Z posledního pozorování pak jeho korektnost.

Optimalizace

Postup modelování posunu vlevo lze jednoduše optimalizovat na složitost $\theta(n \log n)$, n opět index pozice, změníme-li postup na začerňování pomocí sudosti/lichosti polí, ignorujeme-li začerněná pole. Tedy začerňujeme ta pole, jež jsou ve stejné třídě mod 2 jako startovní pole (vždy v aktuálním indexování s nepočítanými začerněnými poli). Jinak postup podobný.