

Homework 2 - $\exists\forall$

Jiří Klepl

Ukažte, že jazyk L je rozhodnutelný, právě když existují rozhodnutelné jazyky A a B , pro které platí, že $L = \{x | (\exists y)[\langle x, y \rangle \in A]\} = \{x | (\forall y)[\langle x, y \rangle \in B]\}$

” \Rightarrow “

Nastavíme $A := \langle L, \{\lambda\} \rangle$ a $B := \langle L, \Sigma^* \rangle$.¹

L je rozhodnutelný, tedy i A , a B díky uzavřenosti rozhodnutelných jazyků na řetězení.

” \Leftarrow “

Jazyky A a B jsou rozhodnutelné, tedy z uzavřenosti na průnik i $A \cap \langle \Sigma^*, \Sigma^* \rangle$ a $B \cap \langle \Sigma^*, \Sigma^* \rangle$ jsou regulární a dají nám stejnou definici L . Budeme tedy uvažovat tyto průniky jako původní A a B .

Víme, že $A \subseteq \langle L, \Sigma^* \rangle \subseteq B$ a $L' = \{x | (\exists y)[\langle x, y \rangle \in B']\} = \{x | (\forall y)[\langle x, y \rangle \in A']\}$.

Tedy $(\forall x \in L')[\langle x, \rangle \in A' \wedge \langle x, \rangle \notin A]$ a $(\forall x \in L)[\langle x, \rangle \in B \wedge \langle x, \rangle \notin B']$.

Tedy problém jazyka L je převoditelný na problém rozhodnutelného jazyka $B \setminus A'$ a tedy L je rozhodnutelný. Mimochodem, to šlo vidět už v zadání.

¹ $(\forall X, Y \subseteq \Sigma^*)[\langle X, Y \rangle$ je zkratka za $\{\langle \rangle \cdot X \cdot \{, \} \cdot Y \cdot \{ \} \}$].