# Vliv tvaru exoplanet na podobu transitních křivek

(Studijní text k projektu)

Michaela Walterová

Červen 2024

## 1 Rotační a slapová deformace

Exoplanety obíhající v těsné blízkosti své mateřské hvězdy bývají považovány za slapově uzamčené ve stavu vázané rotace. Slapová interakce s hvězdou obyčejně vede ke zmenšování jejich hlavní poloosy, snižování výstřednosti dráhy a zpomalování rotace až do bodu, kdy se rotační frekvence planety $\dot{\theta}$ rovná střední oběžné frekvenci (střednímu pohybu $n$). Vázanou rotaci budeme pro jednoduchost předpokládat i ve většině tohoto textu.

V obecném případě rotační frekvence závisí na výstřednosti dráhy, vlastnostech planetárního nitra i atmosféry a přítomnosti jiných planet v soustavě. Pokud se omezíme na jednoplanetární soustavy, můžeme pro plynné obry očekávat uzamčení ve stavu tzv. „pseudo-synchronní rotace“:

$$\dot{\theta} = n(1 + 6e^2) \ . \tag{1}$$

Naopak terestrické exoplanety bez atmosféry mohou na málo výstředných oběžných drahách vykazovat buď zmíněnou vázanou rotaci ($\dot{\theta} = n$), na více výstředných drahách například spin-orbitální resonanci 3:2, odpovídající rotačnímu stavu Merkuru ($\dot{\theta} = \frac{3}{2}n$). Možné jsou i vyšší spin-orbitální resonance, nevyskytující se ve sluneční soustavě.

Povrch slapově a rotačně deformované planety můžeme v prvním přiblížení, tedy pro dostatečně malé deformace, považovat za povrch elipsoidu popsaný následujícím vztahem:

$$a(\vartheta, \varphi) = R + u(\vartheta, \varphi) \ , \tag{2}$$

kde $R$ je střední poloměr planety (či poloměr, jaký by měla nedeformovaná planeta) a $u$ značí radiální deformaci, jež může být vyjádřena jako součet deformací buzených slapovým a rotačním potenciálem. Pokud je potenciál pociťovaný planetou v čase neměnný, nebo pokud se planeta deformuje okamžitě (bez tření), lze psát:

$$u(\vartheta, \varphi) = \frac{h_2}{g_0} \left(\mathcal{U}_{\text{slapy}} + \mathcal{U}_{\text{rotace}}\right) \ . \tag{3}$$

Ve výše uvedeném vzorečku vidíme kromě dvou potenciálů $\mathcal{U}$ i gravitační zrychlení $g_0$ na povrchu planety a radiálně deformační Loveovo číslo $h_2$. Loveova čísla parametrizují vnitřní strukturu a materiálové vlastnosti planety a z jejich hodnoty můžeme mimo jiné určit, zda je nitro planety spíše promísené a homogenní, nebo zda je planeta v centru hustší, případně zda má jádro. Loveovo číslo homogenní kapalné nebo plynné koule by bylo $h_2 = 5/2$. Naopak pro dokonale tuhou a nedeformovatelnou planetu bychom měli $h_2 = 0$. Loveovo číslo diferencovaných a relativně pomalu rotujících planet spadá mezi tyto dvě krajní hodnoty.

Terestrické planety se na velmi dlouhých časových škálách jeví jako kapalné: jejich pláště, ač tvořené stlačenými křemičitany, mohou na škálách desítek milionů let téci. Jedním z důsledků této skutečnosti je, že se planety mohou pozvolna ochlazovat prostřednictvím plášťové konvekce. Naopak na velmi krátkých časových škálách se terestrické planety deformují elasticky. Díky tomu mohou zemským nitrem putovat například seismické vlny.

Obdobně tak slapová deformace planet závisí na frekvenci slapového zatěžování, a Loveovo číslo $h_2$ je v obecném případě frekvenčně závislé. Planety uzamčené ve stavu vázané rotace vnímají slapový potenciál jako neměnný; jsou zatěžovány na nulové frekvenci. Naopak při uzamčení ve vyšší spin-orbitální resonanci nebo ve stavu pseudo-synchronní rotace bude i slapová frekvence nenulová. Pokud se příliš nemění rychlost rotace planety, můžeme si i rotační potenciál představit jako zatěžování na nulové frekvenci.

Vidíme tedy, že vzoreček (3) platí pouze v případě, kdy je $h_2 = h_2(\omega)$ stejné pro slapový i rotační potenciál. Nyní si pro ilustraci vyjádříme příspěvek každého z potenciálů k radiální deformaci planety zvlášť a všimneme si jejich přesné frekvenční závislosti. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že planeta obíhá kolem hvězdy po kruhové dráze a její rotační osa je kolmá k rovině oběhu. Úhlovou rotační frekvenci planety $\dot{\theta}$ předepisujeme v tomto jediném kroku jako volný parametr, uvažujeme tedy zatím obecnou, slapově neuzamčenou rotaci. Příspěvek slapů k deformaci povrchu je:

$$u_{\text{slapy}}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}m_*}{ag_0}\left(\frac{R}{a}\right)^2 \left[\frac{3}{2}\ h_2(2n-2\dot{\theta})\ \sin^2\vartheta\ \cos\left[(2\varphi - 2M + 2\theta + \varepsilon_{h2}(2n-2\dot{\theta})\right] - \right.$$
$$\left. - h_2(0)\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)\right]\ , \tag{4}$$

kde $\mathcal{G}$ značí Newtonovu gravitační konstantu, $a$ je vzdálenost planety od hvězdy, $M = nt$ je střední anomálie, $\theta$ rotační úhel, $\vartheta$ je planetopisná košířka (úhel měřený od severního pólu planety k popisovanému bodu) a $\vartheta$ je planetopisná délka, měřená od „nultého poledníku“. Speciálně pro planetu s vázanou rotací ($\dot{\theta} = n$) a nultým poledníkem definovaným směrem ke hvězdě ($\theta = M$) se tento vzoreček zjednodušuje na:

$$u_{\text{slapy}}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}m_* h_2(0)}{ag_0}\left(\frac{R}{a}\right)^2\left(\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\ \cos 2\varphi - \frac{3}{2}\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}\right)\ , \tag{5}$$

Příspěvek rotace k deformaci povrchu je v obecném případě:

$$u_{\mathrm{rotace}}(\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{3}\frac{h_2(0)}{g_0}\,\dot{\theta}^2 R^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)\ . \tag{6}$$

Sečtením obou příspěvků získáváme celkovou deformaci $u(\vartheta,\varphi)$.

Na následujících řádcích budeme opět uvažovat vázanou rotaci a ve vztahu (5) vyjádříme $a^3$ ze třetího Keplerova zákona. Celková deformace má pak následující podobu:

$$u(\vartheta,\varphi) = \frac{h_2}{g_0}\,n^2R^2\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) + \frac{m_*}{m_*+m_\mathrm{p}}\left(\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi - \frac{3}{2}\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}\right)\right]\ . \tag{7}$$

Rovnice (2) s dosazenou celkovou deformací (7) popisuje povrch tříosého elipsoidu, jehož nejdelší poloosa je orientována směrem ke hvězdě a nejkratší poloosa je kolmá k oběžné dráze. Délky všech tří poloos jsou:

$$a_\mathrm{E} = R\left[1 + \frac{h_2}{g_0}\,n^2R\left(\frac{1}{6} + \frac{m_*}{m_*+m_\mathrm{p}}\right)\right] \approx R\left(1 + \frac{7}{6}\,\frac{h_2}{g_0}\,n^2R\right)\ , \tag{8}$$

$$b_\mathrm{E} = R\left[1 + \frac{h_2}{g_0}\,n^2R\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{m_*}{m_*+m_\mathrm{p}}\right)\right] \approx R\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{h_2}{g_0}\,n^2R\right)\ , \tag{9}$$

$$c_\mathrm{E} = R\left[1 + \frac{h_2}{g_0}\,n^2R\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{m_*}{m_*+m_\mathrm{p}}\right)\right] \approx R\left(1 - \frac{5}{6}\,\frac{h_2}{g_0}\,n^2R\right)\ . \tag{10}$$

Přibližná rovnost ve výše uvedených výrazech platí, je-li planeta řádově méně hmotná než její mateřská hvězda. Zavedeme-li planetocentrickou kartézskou souřadnou soustavu, jejíž $x$-ová osa je rovnoběžná s nejdelší poloosou a míří směrem ke hvězdě, $y$-ová osa leží v rovině oběhu a ukazuje proti směru oběhu, a konečně $z$-ová osa je zavedena tak, aby soustava byla pravotočivá, lze každý bod na povrchu planety popsat vektorem

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{E}\sin\vartheta\cos\varphi \\ b_\mathrm{E}\sin\vartheta\sin\varphi \\ c_\mathrm{E}\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{11}$$

Obecná rovnice tohoto elipsoidu je:

$$\frac{x^2}{a_\mathrm{E}^2} + \frac{y^2}{b_\mathrm{E}^2} + \frac{z^2}{c_\mathrm{E}^2} = 1\ , \tag{12}$$

což můžeme pro zjednodušení některých následujících operací přepsat do maticové podoby:

$$\mathbf{r}^\mathrm{t}\,\mathbf{A}\,\mathbf{r} = 1, \qquad \text{kde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_\mathrm{E}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b_\mathrm{E}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & c_\mathrm{E}^{-2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

a písmeno „t“ označuje transpozici. Našim následujícím úkolem bude vyjádřit rovnici elipsoidu v souřadné soustavě, která je k popisu pozice planety vůči pozorovateli vhodnější, a poté promítnout tento elipsoid na oblohu, tedy na rovinu kolmou ke spojnici pozorovatele a středu hvězdy.

## 2 Rotace souřadné soustavy a průmět planety

Ve výše popsaném případě, kde dráhu považujeme za dokonale kruhovou, lze pozici planety vůči hvězdě a pozorovateli popsat pomocí dvou úhlů. Prvním z těchto úhlu je fáze planety $\alpha(t)$, tedy úhel svíraný v čase $t$ průvodičem planety a spojnicí hvězdy s tím bodem dráhy, kde se planeta nachází uprostřed transitu. Fáze bude tedy rovna nule ve chvíli, kdy je planeta „v novu“, a její hodnota poroste s časem. Druhým úhlem je inklinace dráhy $i$ vůči obloze. Jako „oblohu“ budeme označovat rovinu tečnou ke kouli o středu shodném se středem Země a poloměru odpovídajícím vzdálenosti pozorované hvězdy od středu Země (tato koule a „obloha“ nechť se dotýkají právě v bodě, kde je umístěna hvězda). Inklinace $i = 90°$ znamená, že dráha planety prochází přes střed hvězdného disku a transit je tak pro dané parametry dráhy i hvězdy nejdelší. Naopak při inklinaci $i = 0°$ žádný transit nepozorujeme, dráha leží plně v rovině oblohy.

Rovnice (11) popisuje pozici každého bodu na povrchu elipsoidu vzhledem ke středu planety. Přejdeme-li od planetocentrické k asterocentrické souřadné soustavě, prozatím bez změny její orientace v prostoru, bude každý bod popsán vektorem $\mathbf{r}^* = \boldsymbol{\varrho} + \mathbf{r}$, kde $\boldsymbol{\varrho}$ jsou asterocentrické souřadnice středu planety. Díky způsobu zavedení planetocentrické souřadné soustavy je $\boldsymbol{\varrho} = (a, 0, 0)^{\mathrm{t}}$; $a$ značí poloměr kruhové dráhy planety. Obecná rovnice posunutého elipsoidu je $(\mathbf{r}^*)^{\mathrm{t}}\mathbf{A}\mathbf{r}^* = 1$.

Tuto asterocentrickou souřadnou soustavu nyní ve dvou krocích pootočíme tak, aby osa $x$ směřovala k pozorovateli a zbylé dvě osy ležely v rovině oblohy. Nejprve ji tedy otočíme kolem stávající osy $z$ o časově závislý úhel $\pi - \alpha(t)$. Tím docílíme toho, že se bude planeta v čase (potenciálního) středu transitu nacházet právě na ose $x$. Tuto operaci můžeme popsat následující rotační maticí:

$$\mathbf{R}_z(\pi - \alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\pi - \alpha) & \sin(\pi - \alpha) & 0 \\ -\sin(\pi - \alpha) & \cos(\pi - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Ve druhém kroku souřadnou soustavu otočíme okolo nové osy $y$ o úhel $\frac{\pi}{2} - i$, čímž namíříme osu $x$ na pozorovatele. Použijeme tuto rotační matici:

$$\mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - i) & 0 & \sin(\frac{\pi}{2} - i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - i) & 0 & \cos(\frac{\pi}{2} - i) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Matice celkové rotace je pak:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{tot}} = \mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{2} - i\right)\ \mathbf{R}_z(\pi - \alpha)\ . \tag{16}$$

V nové souřadné soustavě je tedy každý bod na povrchu planety vyjádřen vektorem

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}_{\mathrm{tot}}\, \mathbf{r}^* \ . \tag{17}$$

Naopak do původní asterocentrické souřadné soustavy se můžeme vrátit inverzním vztahem:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{R}_{\mathrm{tot}}^{-1}\, \mathbf{r}' = \mathbf{R}_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{t}}\, \mathbf{r}' \ . \tag{18}$$

Dosadíme-li odtud do obecné rovnice elipsoidu v původní asterocentrické souřadné soustavě, získáváme:

$$(\mathbf{r}')^{\mathrm{t}}\, \mathbf{R}_{\mathrm{tot}}\, \mathbf{A}\, \mathbf{R}_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{t}}\, \mathbf{r}' = (\mathbf{r}')^{\mathrm{t}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{r}' = 1 \tag{19}$$

Elipsoidální planetu nakonec promítneme do roviny $yz$, tedy do roviny oblohy tak, že položíme $x$-ovou souřadnici rovnu nule, $\mathbf{r}'_{yz} = \left(0, r'_y, r'_z\right)$.

Rovnice (19) s dosazeným $r'_x = 0$ vede na rovnici elipsy:

$$A\,(r'_y)^2 + B\,(r'_z)^2 + C\, r'_y r'_z = 1 \ , \tag{20}$$

kde

$$A = \frac{\sin^2\alpha}{a_{\mathrm{E}}^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b_{\mathrm{E}}^2} \ , \qquad B = \frac{(\cos\alpha\cos i)^2}{a_{\mathrm{E}}^2} + \frac{(\sin\alpha\cos i)^2}{b_{\mathrm{E}}^2} + \frac{(\sin i)^2}{c_{\mathrm{E}}^2} \ ,$$

$$C = \left(\frac{1}{a_{\mathrm{E}}^2} - \frac{1}{b_{\mathrm{E}}^2}\right) \sin 2\alpha\, \cos i \ .$$

Hlavní a vedlejší poloosu této elipsy lze nalézt pomocí následujícího výrazu:

$$a'_{\mathrm{E}}, b'_{\mathrm{E}} = \frac{-\sqrt{-2(C^2 - 4AB)\left(A + B \mp \sqrt{(A-B)^2 + C^2}\right)}}{C^2 - 4AB} \ . \tag{21}$$

Speciálně pro transit planety s oběžnou rovinou kolmou k obloze (tedy procházející přes střed hvězdného disku) jsou poloosy:

$$a'_{\mathrm{E}} = \frac{\sqrt{\left(a_{\mathrm{E}}^{-2}\sin^2\alpha + b_{\mathrm{E}}^{-2}\cos^2\alpha\right)}}{a_{\mathrm{E}}^{-2}\sin^2\alpha + b_{\mathrm{E}}^{-2}\cos^2\alpha} \qquad\qquad b'_{\mathrm{E}} = c_{\mathrm{E}} \tag{22}$$

V obecném případě je ovšem analytické vyjádření délky obou poloos podstatně složitější.

Úhel svíraný osou $y$ a jednou z poloos promítnuté planety je obecně:

$$\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{atan2}(-\mathrm{C}, \mathrm{B} - \mathrm{A})\ . \tag{23}$$