

Лабораторная работа 3.7.1

Скин-эффект в полом цилиндре

Владимир Трунов, Андрей Строчук

Введение

Цель работы: исследование проникновения переменного магнитного потока в медный полый цилиндр.

В работе используются: генератор звуковой частоты, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас из диэлектрика, медный экран в виде трубки, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, осциллограф.

1 Общая теория скин-эффекта

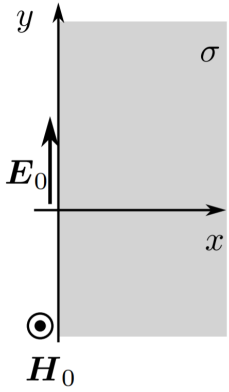


Рис. 1: Скин-эффект в плоской геометрии

Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор \mathbf{H} направлен всюду вдоль оси z и зависит только от координаты x , то есть $H_x = H_y \equiv 0$.

Из уравнений Максвелла следует равенство:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1)$$

В нашем случае оно примет вид:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (2)$$

Пусть полупространство $x > 0$ заполнено проводящей средой с проводимостью σ , а на границе $x = 0$ задано магнитное поле, изменяющееся по гармоническому закону: $H_z = H_0 e^{i\omega t}$. Будем искать решение уравнения выше также в виде гармонической функции: $H_z(x, t) = H(x) e^{i\omega t}$.

После подстановки в уравнение получим:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega \sigma \mu \mu_0 H. \quad (3)$$

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, решение нужно искать в виде: $H(x) = H_0 e^{kx}$. Подставляя, получим, что уравнение имеет нетривиальные решения такого вида при $k^2 = i\omega \sigma \mu \mu_0$. Откуда получаем:

$$k = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0}. \quad (4)$$

Для полубесконечной среды ($z > 0$) физический смысл имеет только решение со знаком минус, соответствующее стремлению к нулю амплитуды поля при $z \rightarrow \infty$. Окончательное решение уравнения:

$$H_z(x, t) = H_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}, \quad (5)$$

где $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu \mu_0}}$ - **глубина проникновения** поля, или **скиновая глубина**.

2 Специфика работы

В работе изучается скин-эффект в длинном тонкостенном медном цилиндре, помещённом внутрь соленоида, поэтому $\mu \approx 1$ с хорошей точностью.

Если выполнено условие $h \ll a$, то для описания поля внутри стенки можно ограничиться одномерным приближением. После решения уравнения (3) и подстановки граничных условий $H(0) = H_0$, $H(h) = H_1$ приходим к главной формуле всей работы:

$$H_1 = \frac{H_0}{\frac{1}{2}ak \operatorname{sh} kh + \operatorname{ch} kh} \quad (6)$$

Разобьем на предельные случаи.

1. **Малые частоты.** Имеем $\delta \gg h$, откуда $|kh| \ll 1$, значит $\operatorname{ch} kh \approx 1$, $\operatorname{sh} kh \approx kh$, и тогда:

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i\frac{ah}{\delta^2}}. \quad (7)$$

Следовательно для отношения модулей получаем:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (ah\pi f\sigma\mu_0)^2}}. \quad (8)$$

А фаза H_1 отстает от фазы H_0 на $\psi = \arctg\left(\frac{ah}{\delta^2}\right)$.

2. **Большие частоты.** Ситуация обратная – $\delta \ll h$. Тогда $|kh| \gg 1$ и $|ka| \gg 1$, откуда $\operatorname{sh} kh \approx \operatorname{ch} kh \approx \frac{1}{2}e^{kh}$, и тогда:

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{ka}e^{-kh} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a}e^{-\frac{h}{\delta}}e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta}\right)}. \quad (9)$$

Как видно из формулы (9), в этом пределе поле внутри цилиндра по модулю в $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a}e^{-h/\delta}$ раз меньше, чем снаружи, и, кроме того, запаздывает по фазе на:

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\pi f\sigma\mu_0}. \quad (10)$$

3 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки для исследования проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр изображена на рис. 3. Переменное магнитное поле создаётся с помощью соленоида, намотанного на полый цилиндрический каркас 1 из поливинилхлорида, который подключается к генератору звуковой частоты. Внутри соленоида расположен медный цилиндрический экран 2. Для измерения магнитного поля внутри экрана используется измерительная катушка 3.

С помощью вольтметра V измеряется действующее значение ЭДС индукции, которая возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле $H_1 e^{i\omega t}$. Комплексная амплитуда ЭДС индукции в измерительной катушке равна

$$\widehat{U} = -SN \frac{d\widehat{B}_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t}.$$

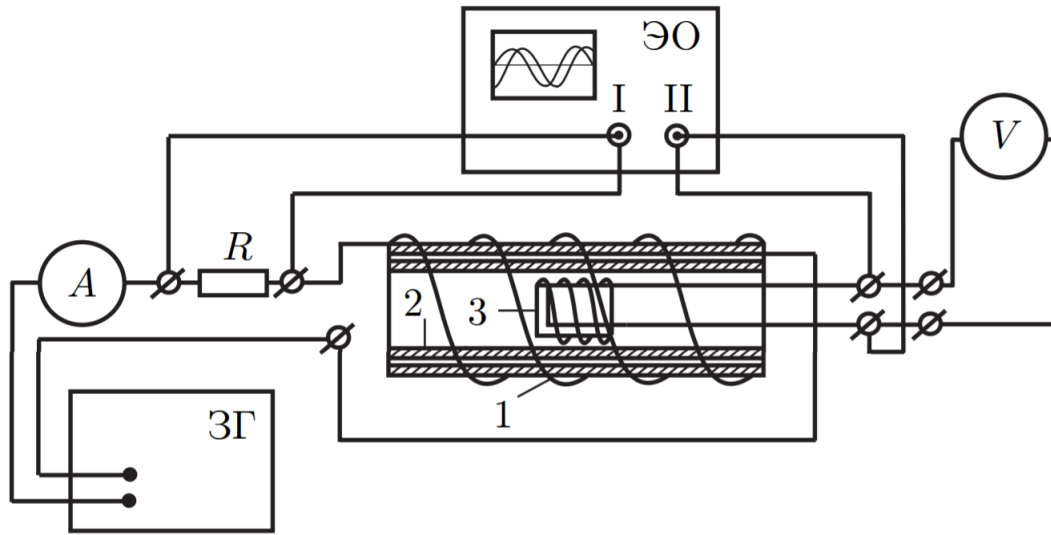


Рис. 2: Экспериментальная установка для изучения скин-эффекта

Показания вольтметра, измеряющего это напряжение, будут тогда, соответственно, равны:

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1|.$$

Видно, что модуль амплитуды магнитного поля внутри экрана $|H_1|$ пропорционален U и обратно пропорционален частоте сигнала f :

$$|H_1| \propto \frac{U}{f}.$$

При этом поле вне экрана $|H_0|$ пропорционально току I в цепи соленоида, измеряемому амперметром A :

$$|H_0| \propto I.$$

Следовательно:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \text{const} \cdot \frac{U}{fI} \quad (11)$$

Таким образом, отношение амплитуд магнитных полей снаружи и вне экрана (коэффициент ослабления) может быть измерено по отношению $\frac{U}{fI}$ при разных частотах, а неизвестная константа в соотношении может быть определена по измерениям при малых частотах.

4 Определение проводимости материала экрана

В установке в качестве экрана используется медная труба промышленного производства. Технология изготовления труб оказывает заметное влияние на электропроводимость. Из-за наличия примесей проводимость меди трубы в данной работе отличается от табличного значения в меньшую сторону. Для определения σ экрана будем использовать частотную зависимость (10) фазового сдвига между магнитными полями внутри и вне экрана при высоких частотах. Как видно из выражения (10), в области больших частот $f \gg \frac{1}{h^2 \pi \sigma \mu_0}$ зависимость $\psi(\sqrt{f})$ аппроксимируется прямой, проходящей через точку $\psi(0) = \frac{\pi}{4}$. По наклону этой прямой можно вычислить проводимость материала экрана.

Ход работы

1. При $\nu_h = 2263.5 \text{ Гц}$ толщина стенок h равна скин-глубине δ .

U, V	I, mA	ν , Hz	ξ
0,0052	21,84	20	0,011904762
0,0068	21,818	25	0,012466771
0,0083	21,78	30	0,012702785
0,0097	21,724	35	0,012757451
0,0111	21,656	40	0,012814001
0,0124	21,573	45	0,012773168
0,0137	21,492	50	0,01274893
0,015	21,397	55	0,012746052
0,0173	21,197	65	0,012556204
0,0194	20,985	75	0,012326265
0,0214	20,769	85	0,012122139
0,023	20,551	95	0,011780705
0,0246	20,338	105	0,011519604

2. Получим зависимость $\xi = U/I\nu$ при малых частотах от $0,01\nu_h$ до $0,05\nu_h$.
4. Исследовали зависимость величины ξ от фазового сдвига ψ при малых частотах от $0,05\nu_h$ до $0,5\nu_h$
5. Исследовали зависимость величины ξ от фазового сдвига ψ при высоких частотах от $0,5\nu_h$ до $15\nu_h$
6. Исследуем зависимость индуктивности катушки L от частоты ν в диапазоне от $\nu_{min} = 40\text{Гц}$ до $1,5\nu_h$.

Обработка данных

1. Построим график зависимости $f(\nu^2)$ от $1/\xi^2$.

Получили линейную зависимость. Теперь с помощью экстраполяции найдем ξ_0 - коэффициент пропорциональности между ξ и коэффициентом ослабления магнитного поля $|H_1|/|H_0|$.

$$\xi_0 = 13.29 \pm 0.02 \text{МОм} \cdot \text{с}$$

Рассчитаем проводимость меди из формулы:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (ah\pi f\sigma\mu_0)^2}}. \quad (12)$$

$$\sigma = (41.3 \pm 0.7) \times 10^6 \text{Ом}^{-1}.$$

2. Построим график зависимости $f(\nu) = \text{tg}\psi$.

По наклону прямой определяем коэффициент проводимости σ

$$\sigma = 45.4 \pm 0.6 * 10^6 \text{Ом}^{-1}$$

3. Построим график частотной зависимости фазового сдвига $f(\sqrt{\nu}) = \psi - \pi/4$
По наклону касательной определим коэффициент проводимости σ из формулы:

$$\psi = \pi/4 + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}$$

$$\sigma = 44.8 \pm 0.7 * 10^6 \text{Ом}^{-1}$$

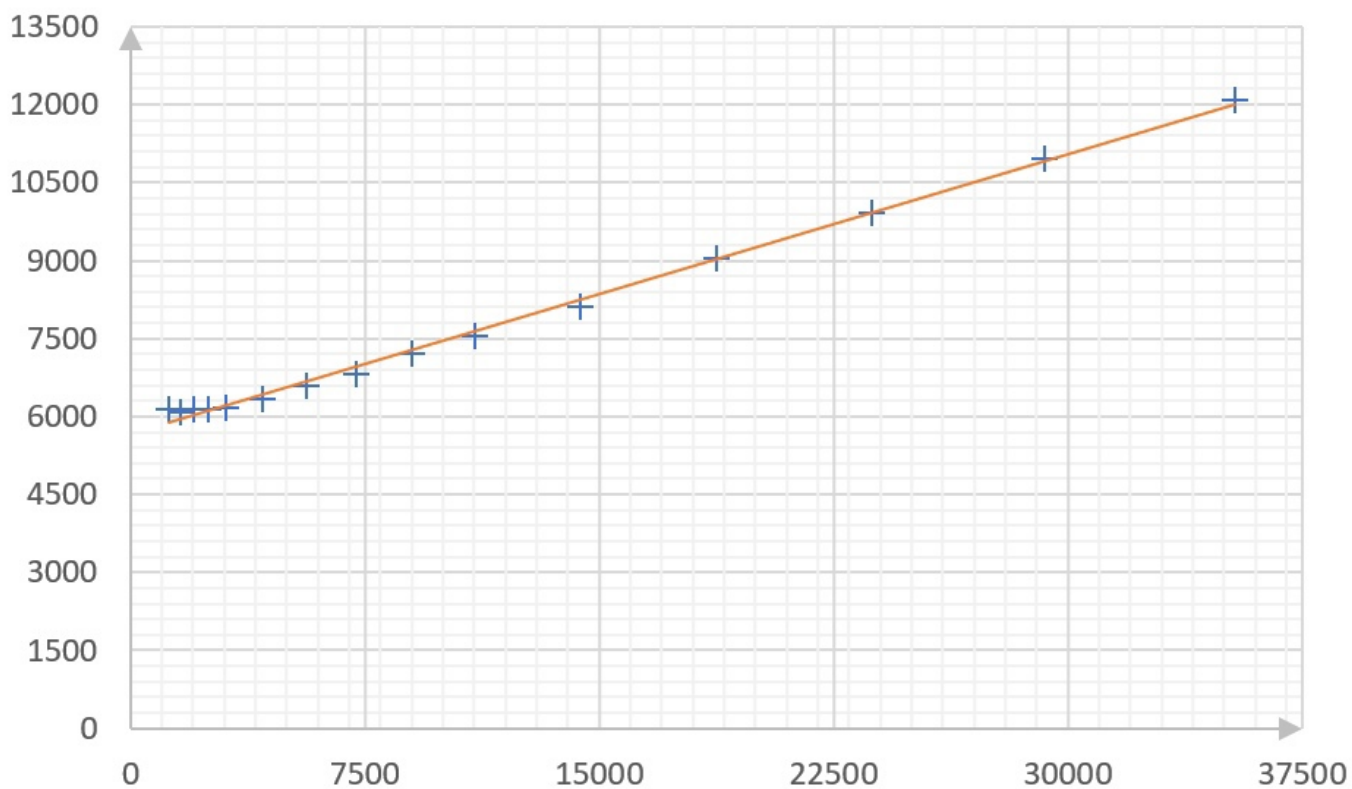


Рис. 3: график зависимости $f(\nu^2)$ от $1/\xi^2$

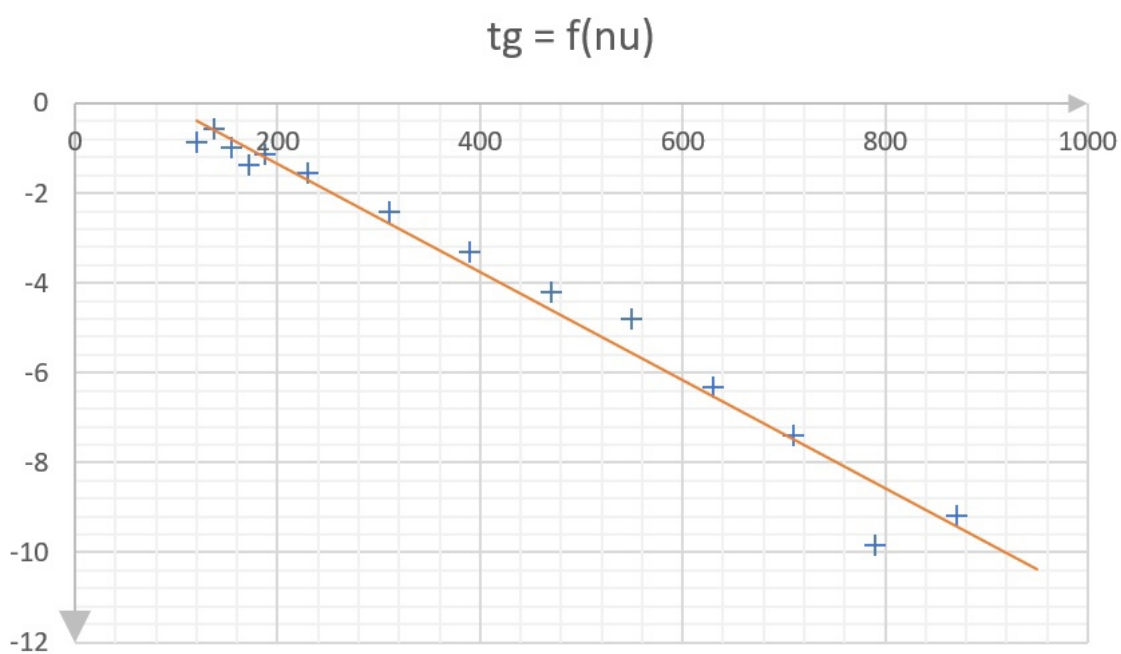


Рис. 4: график зависимости $f(\nu) = \text{tg}\psi$

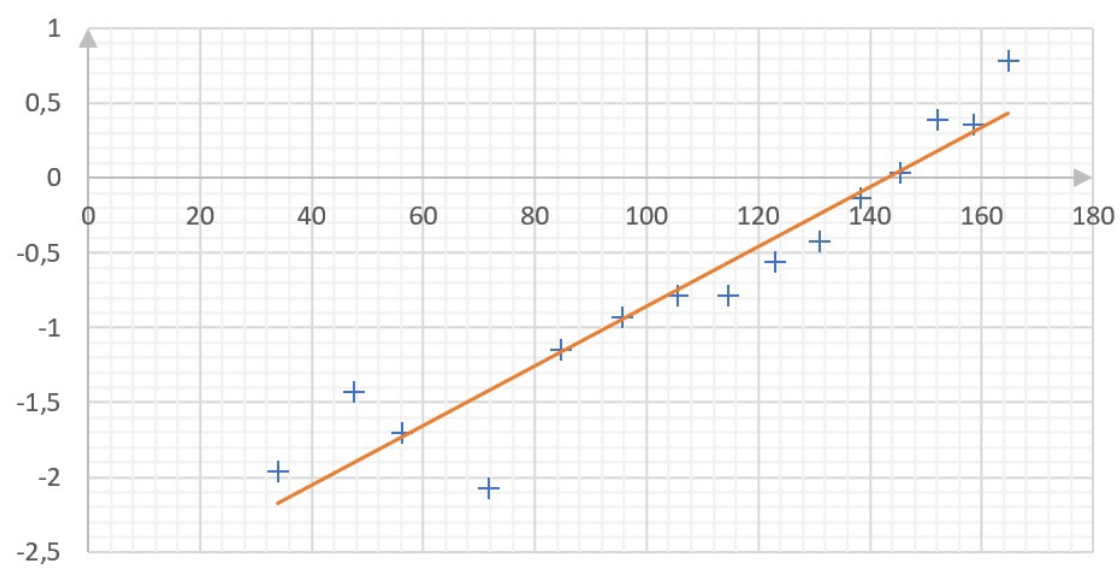


Рис. 5: график зависимости $f(\sqrt{\nu}) = \psi - \pi/4$

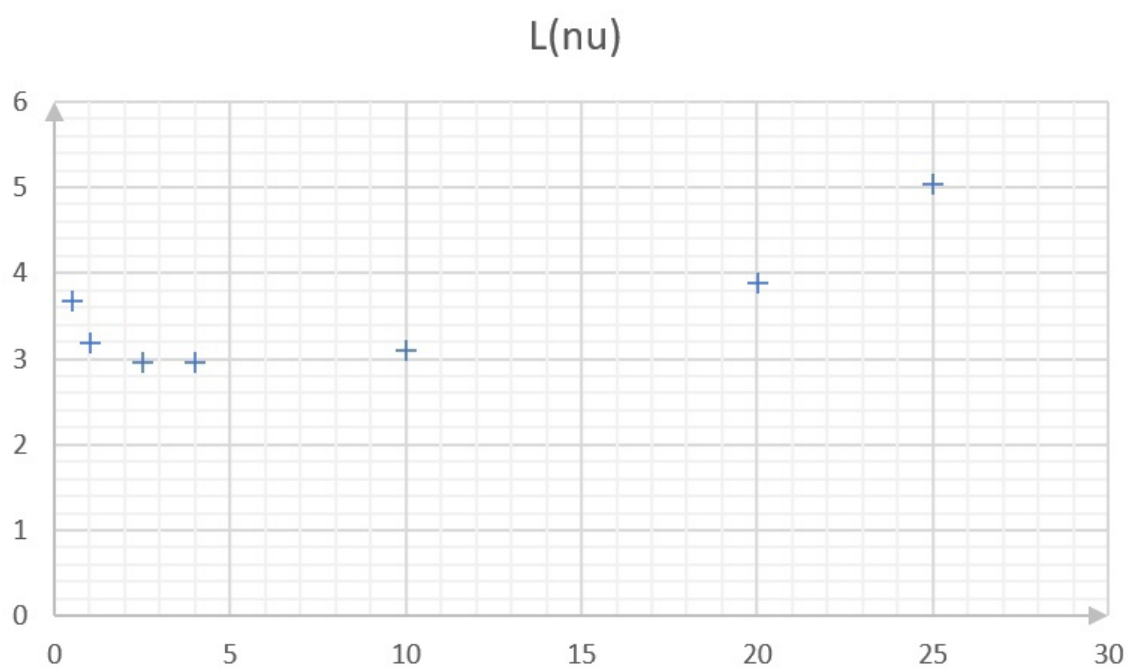


Рис. 6: график зависимости $L(\nu)$

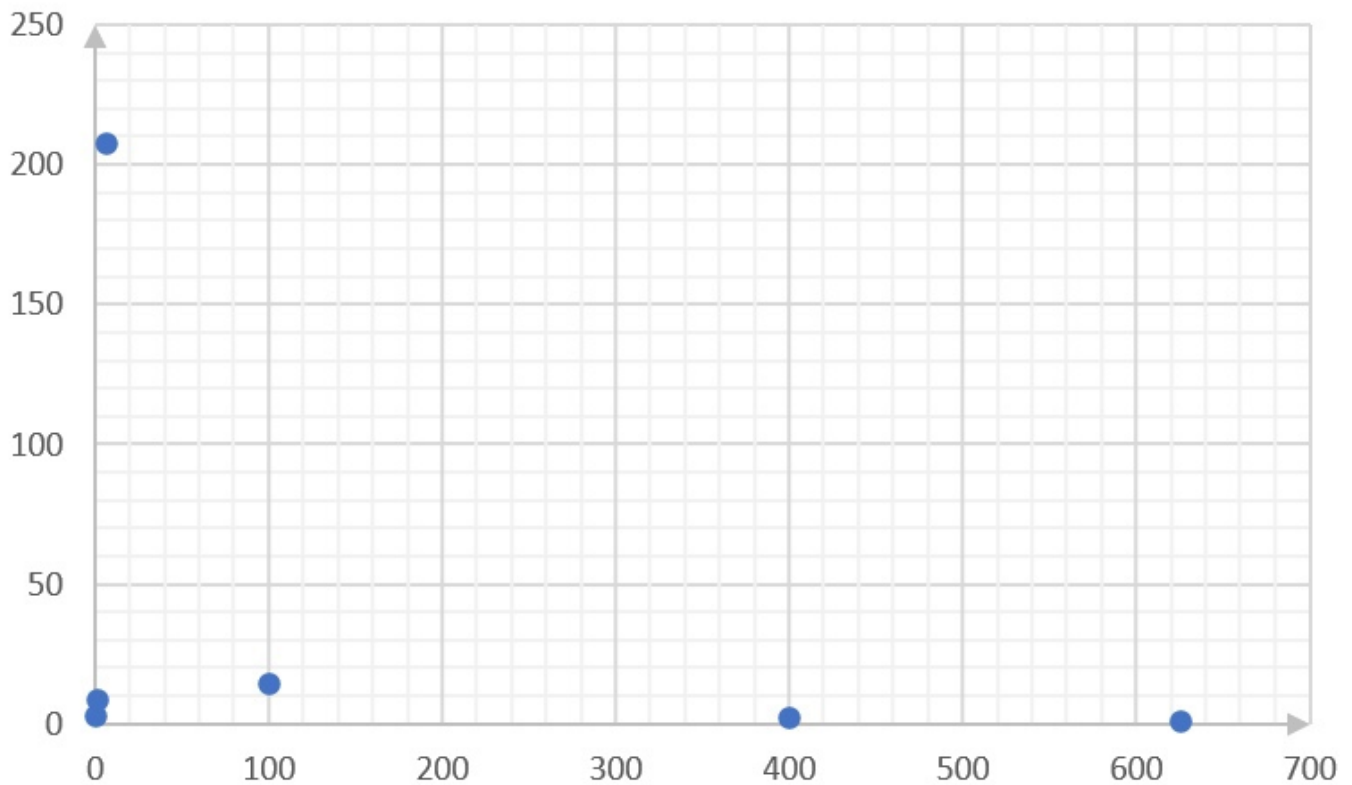


Рис. 7: график зависимости $(L_{max} - L)/(L - L_{min})$ от ν^2

4. Построим график зависимости индуктивности катушки от частоты $L(\nu)$. Определим максимальное и минимальное значения индуктивности L_{min} и L_{max} . Построим теперь график зависимости $(L_{max} - L_{min})/(L - L_{min})$ от ν^2 .

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = \pi^2 a^2 h^2 \mu_0^2 \sigma^2 \nu^2$$

5. Сведем результаты в таблицу:

$\sigma_1, 10^6 \text{Ом}^{-1}$	$\sigma_2, 10^6 \text{Ом}^{-1}$	$\sigma_3, 10^6 \text{Ом}^{-1}$	$\sigma_{teor}, 10^6 \text{Ом}^{-1}$
41.3 ± 0.7	45.4 ± 0.6	44.8 ± 0.7	55

В результате полученные данные совпадают с теоретическими в пределах 15

5 Вывод

В ходе работы была получена проводимость материала цилиндра 3 способами, и результат почти совпал с теорией. Различия данных связаны со способом изготовления образца и со способом проведения измерений.