

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий

# Отчёт о выполнении лабораторной работы

## 2.2.1

Исследование взаимной диффузии газов

Автор:  
Трунов Владимир  
Б01-103

Долгопрудный  
15 мая 2022 г.

# 1 Введение

## Цель работы:

1. регистрация зависимости концентрации гелия в воздухе от времени с помощью датчиков теплопроводности при разных начальных давлениях смеси газов;
2. определение коэффициента диффузии по результатам измерений.

**В работе используются:** измерительная установка; форвакуумный насос; баллон с газом (гелий); манометр; источник питания; магазин сопротивлений; гальванометр; секундомер.

## 2 Теоретические сведения

Диффузией называют самопроизвольное взаимное проникновение веществ друг в друга, происходящее вследствие хаотичного теплового движения молекул. При перемешивании молекул разного сорта говорят о взаимной (или концентрационной) диффузии.

Диффузия в системе, состоящей из двух компонентов  $a$  и  $b$  (бинарная смесь), подчиняется закону Фика: плотности потока компонентов  $j_{a,b}$  (количество частиц, пересекающих единичную площадку в единицу времени) пропорциональны градиентам их концентраций  $\nabla n_{a,b}$ , что в одномерном случае можно записать как

$$j_a = -D \frac{\partial n_a}{\partial x}, \quad j_b = -D \frac{\partial n_b}{\partial x},$$

где  $D$  – коэффициент взаимной диффузии компонентов. Знак «минус» отражает тот факт, что диффузия идёт в направлении выравнивания концентраций. Равновесие достигается при равномерном распределении вещества по объёму сосуда ( $\partial n / \partial x = 0$ ).

В данной работе исследуется взаимная диффузия гелия и воздуха. Давление  $P$  и температура  $T$  в условиях опыта предполагаются неизменными:  $p = (n_{He} + n_v)kT$ , где  $n_{He}$  и  $n_v$  – концентрации (объёмные плотности) диффундирующих газов. Поэтому для любых изменений концентраций справедливо  $\Delta n_{He} = -\Delta n_v$ . Следовательно, достаточно ограничиться описанием диффузии одного из компонентов, например гелия  $n_{He}$ :

$$j_{He} = -D \frac{\partial n_{He}}{\partial x}.$$

Приведём теоретическую оценку для коэффициента диффузии. В работе концентрация гелия, как правило, мала ( $n_{He} \ll n_v$ ). Кроме того, атомы гелия существенно легче молекул, составляющих воздух ( $\mu_{He} \ll \mu_{O_2}, \mu_{N_2}$ ), значит и их средняя тепловая скорость велика по сравнению с остальными частицами. Поэтому перемешивание газов в работе можно приближенно описывать как диффузию примеси лёгких частиц  $He$  на практически стационарном фоне воздуха. Коэффициент диффузии в таком приближении равен

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}, \quad (1)$$

где  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  – средняя тепловая скорость частиц примеси,  $\lambda = \frac{1}{n_0\sigma}$  – их длина свободного пробега,  $n_0$  – концентрация рассеивающих центров (фона),  $\sigma$  – сечение столкновения частиц примеси с частицами фона.

Таким образом, теория предсказывает, что коэффициент диффузии бинарной смеси обратно пропорционален давлению в системе  $D \propto 1/P$ , и не зависит от пропорций компонентов, что и предлагается проверить в работе экспериментально.

### 3 Схема эксперимента

Для исследования взаимной диффузии газов и измерения коэффициента взаимной диффузии  $D$  используется два сосуда объёмами  $V_1$  и  $V_2$  ( $V_1 \approx V_2 = V$ ), соединённые трубкой длины  $L$  и сечения  $S$  (рис. 1). Предполагается, что сосуды заполнены смесью двух газов при одинаковом давлении, но с различной концентрацией компонентов. Вследствие взаимной диффузии, проходящей в соединительной трубке, концентрации компонентов в сосудах с течением времени выравниваются.

Важно отметить, что диффузия – относительно медленный процесс, и для его наблюдения необходимо отсутствие конвекции, т. е. макроскопических течений газа. Для этого необходимо обеспечить равенство давлений и температур в сосудах до начала измерений.

В общем случае концентрации компонентов  $n(t, x)$  зависят от как от координаты, так и времени. Задача упрощается, если объём соединительной трубки мал по сравнению с объёмами сосудов – тогда концентрации газов  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  внутри каждого сосуда можно считать постоянными по всему объёму сосуда, и принять, что процесс выравнивания концентраций происходит благодаря диффузии в трубке.

Рассмотрим подзадачу о диффузии в соединительной трубке. Предположим сперва, что концентрации примеси (гелия) на её торцах поддерживаются постоянными и равными  $n_1$  и  $n_2$  соответственно. Тогда через некоторое время в трубке установится стационарный поток частиц, одинаковый в каждом сечении трубки (в противном случае, если бы поток зависел от  $x$ , частицы бы накапливались в трубке, и процесс перестал бы быть стационарным). Применяя закон Фика в трубке, получим

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x} = \text{const}$$

Следовательно, распределение концентрации в трубке  $n(x)$  – линейная функция:

$$n(x) = \frac{\Delta n}{L} x \quad (2)$$

и плотность потока частиц всюду постоянна и равна

$$j = -D \frac{\Delta n}{L}, \quad (3)$$

где  $\Delta n = n_2 - n_1$  – разность концентраций гелия на концах трубки.

Теперь вернёмся к процессу выравнивания концентраций в сосудах. Частицы перетекают из сосуда 2 в сосуд 1 по трубке и концентрации  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  меняются во времени. Предположим, что этот процесс происходит достаточно медленно, так что в трубке в любой момент времени успевает установиться практически стационарное течение, описываемое формулами (2), (3). Такое приближение называют квазистационарным. Кроме того, будем считать, что в пределах каждого сосуда частицы распределены равномерно, так что концентрации примеси вблизи трубки и в остальных частях сосуда отличаются мало. Тогда полное число частиц примеси в сосудах равно соответственно  $N_1 = n_1 V$  и  $N_2 = n_2 V$ . Произведение плотности потока (3) на площадь сечения трубки  $S$  даёт количество частиц, пересекающих в единицу времени любое поперечное сечение трубки. Поэтому

$$\frac{dN_1}{dt} = jS, \quad \frac{dN_2}{dt} = -jS.$$

Выразим отсюда скорость изменения  $\Delta n$ . Вычитая из второго равенства первое и деля результат на объём сосуда  $V$ , с учетом (3) получим

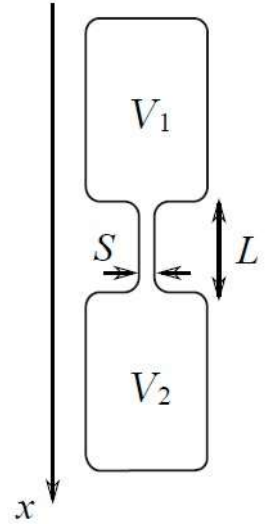


Рис. 1: Общая схема установки

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = -\frac{\Delta n}{\tau}, \quad (4)$$

где введено обозначение

$$\tau = \frac{1}{D} \frac{VL}{2S}. \quad (5)$$

Интегрируя (4), получаем, что разность концентраций будет убывать по экспоненциальному закону

$$\Delta n = \Delta n_0 e^{-t/\tau}, \quad (6)$$

где  $\Delta n_0$  – разность концентраций примеси в сосудах в начальный момент времени. Видно, что величина  $\tau$  есть характерное время выравнивания концентраций между сосудах. Оно определяется геометрическими размерами установки и коэффициентом диффузии.

Отметим, что для применимости квазистационарного приближения необходимо убедиться, что время процесса  $\tau$  много больше характерного времени диффузии отдельной частицы вдоль трубки  $L$ , которое согласно закону Эйнштейна–Смолуховского по порядку величины равно

$$\tau_{\text{диф}} \sim L^2/2D.$$

Кроме того, если сосуды расположены вертикально, может возникнуть вопрос о влиянии силы тяжести на диффузию. Влиянием гравитации можно пренебречь, если перепад потенциальной энергии в сосуде много меньше энергии теплового движения частиц  $mgh \ll kT$ . Нетрудно проверить, что для молекулярной диффузии в нашем эксперименте это выполняется с большим запасом.

## 4 Методика измерений

Для измерения разности концентраций в установке применяются датчики теплопроводности. При этом используется тот факт, что теплопроводность  $\kappa$  смеси зависит от её состава. В общем случае зависимость  $\kappa(n)$  довольно сложна, однако при малой разности  $\Delta n$  концентраций в сосудах можно ожидать, что разность теплопроводностей будет изменяться прямо пропорционально  $\Delta n$ :

$$\Delta \kappa = \kappa(n_2) - \kappa(n_1) \approx \text{const} \cdot \Delta n.$$

Эксперименты показывают, что если доля примеси гелия составляет менее 15%, отклонение от линейной зависимости не превышает 0,5%, что для наших целей вполне достаточно.

Сами датчики теплопроводности устроены следующим образом. Тонкая платиновая проволока, протянутая вдоль оси стеклянного цилиндра, нагревается током. Внутренняя полость датчика сообщается с объёмом камеры через отверстия, размеры которых таковы, что скорость диффузии из объёма сосуда в полость датчика значительно больше скорости диффузии из одного объёма в другой. Таким образом, состав газа в датчике практически совпадает с составом газа в объёме. Тепло от проволоки к стенке цилиндра передаётся главным образом за счёт теплопроводности газа, находящегося внутри цилиндра. При заданной мощности нагревания приращение температуры проволоки и, следовательно, приращение её сопротивления пропорциональны теплопроводности газа.

Для измерения сопротивлений используется мостовая схема, позволяющая определять разность показаний датчиков с высокой точностью. Мост балансируется при заполнении сосудов (и датчиков) одной и той же смесью. При заполнении сосудов смесями различного состава возникает «разбаланс» моста. При незначительном различии в составах смесей показания вольтметра, подсоединённого к диагонали моста, будут пропорциональны разности концентраций примеси:

$U \propto \Delta\kappa \propto \Delta n$ . В процессе диффузии разность концентраций убывает по закону (6), и значит по тому же закону изменяется напряжение:

$$U = U_0 e^{-t/\tau}, \quad (7)$$

где  $U_0$  – показание гальванометра в начальный момент времени. Измеряя экспериментально зависимость  $U(t)$ , можно получить характерное время процесса  $\tau$ , откуда по формуле (5) определить коэффициент диффузии  $D$ .

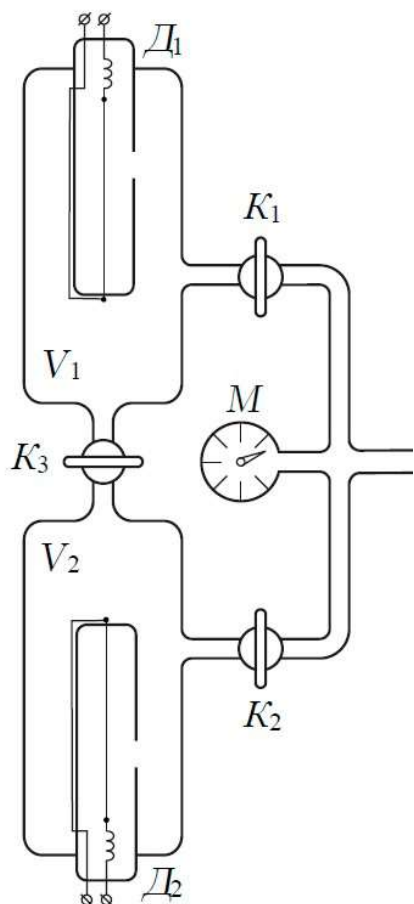


Рис. 2: Измерительная часть установки

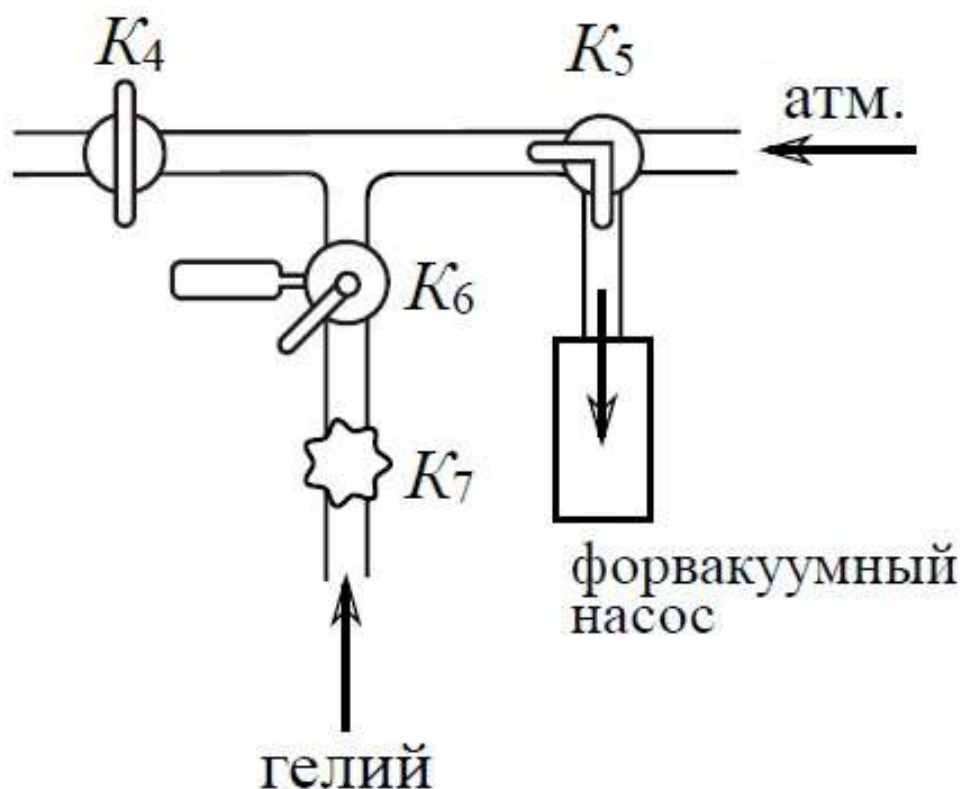


Рис. 3: Конструкция системы откачки

## 5 Экспериментальная установка

Схема измерительной части установки приведена на рис. 2. Она соединена с системой откачки и напуска гелия. Для откачки используется форвакуумный насос. Конструкции системы откачки и напуска могут быть различны в зависимости от установки; один из вариантов изображен на рис. 3.

Часть установок компьютеризировано, что позволяет записывать зависимость показаний вольтметра  $U(t)$  в реальном времени (на остальных установках фиксация  $U(t)$  ведется вручную с помощью секундомера).

Измерительная часть установки состоит из двух сосудов  $V_1$  и  $V_2$ , размещённых вертикально. Краны  $K_1$  и  $K_2$  служат для управления откачкой и подачей воздуха/гелия в сосуды. Диффузия осуществляется через тонкую короткую трубку, соединяющую сосуды, оснащённую краном  $K_3$ . К соединительным трубкам подключен манометр  $M$ , измеряющий разность давлений между соединительными трубками и атмосферой, и позволяющий измерять давления в разных частях системы (в зависимости от положения кранов).

Выравнивание давлений в сосудах  $V_1$  и  $V_2$  без изменения состава газов в них может быть осуществлено через обводные трубки посредством кратковременного открытия кранов  $K_1$  и  $K_2$  (при закрытом  $K_3$ ).

Гелий содержится в баллоне (не изображен на рис.) под давлением, превышающим атмосферное. Для предотвращения избыточного расхода гелия и его неконтролируемого проникания в установку предусмотрен металлический кран  $K_7$ , отделяющий её от баллона с гелием. Его открывают только на время непосредственного заполнения установки гелием, остальное время он должен быть закрыт. Для подачи малых порций гелия предусмотрен двухходовый кран с дозатором (рис. 4). При повороте рычажка  $P$  в положение  $I$  гелий в небольшом количестве поступает в дозатор (если открыт  $K_7$ ), а при повороте  $P$  в положение  $II$  порция из дозатора поступает в установку.

Датчики теплопроводности  $D_1$  и  $D_2$ , расположенные в сосудах  $V_1$  и  $V_2$  соответственно, включены в мостовую электрическую схему согласно рис. 5. В одну из диагоналей моста включён высокочувствительный вольтметр (гальванометр)  $\Gamma$ , к другой подключается источник небольшого постоянного напряжения. Сопротивления проволок датчиков составляют одно из плеч моста. Второе плечо составляют переменные сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R$ , служащие для установки показаний вольтметра  $\Gamma$  на нуль (балансировка моста). Сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  спарены (их подвижные контакты находятся на общей оси) и изменяются одновременно при повороте ручки грубой регулировки. Точная балансировка выполняется потенциометром  $R$ . Балансировку необходимо проводить перед каждым экспериментом заново: при этом установка заполняется чистым газом (воздухом без гелия) при давлении, близком «рабочему» (при котором затем будут проводиться измерения).

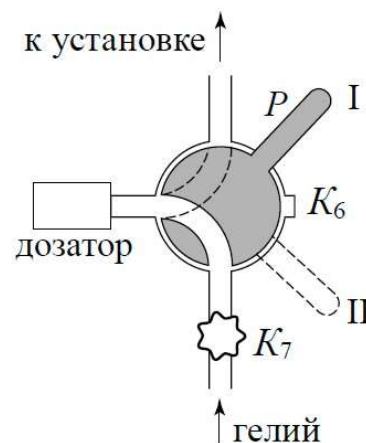


Рис. 4: Механизм подачи гелия

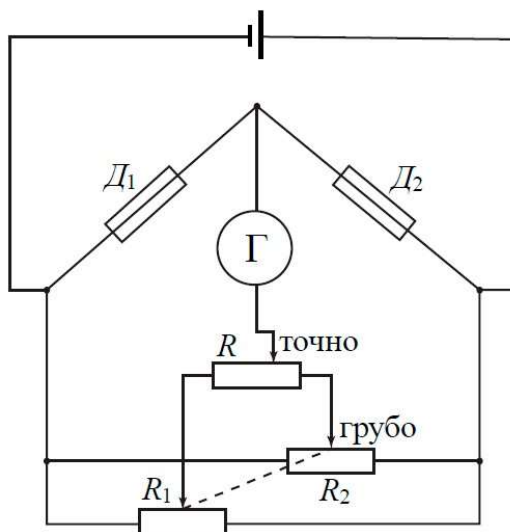


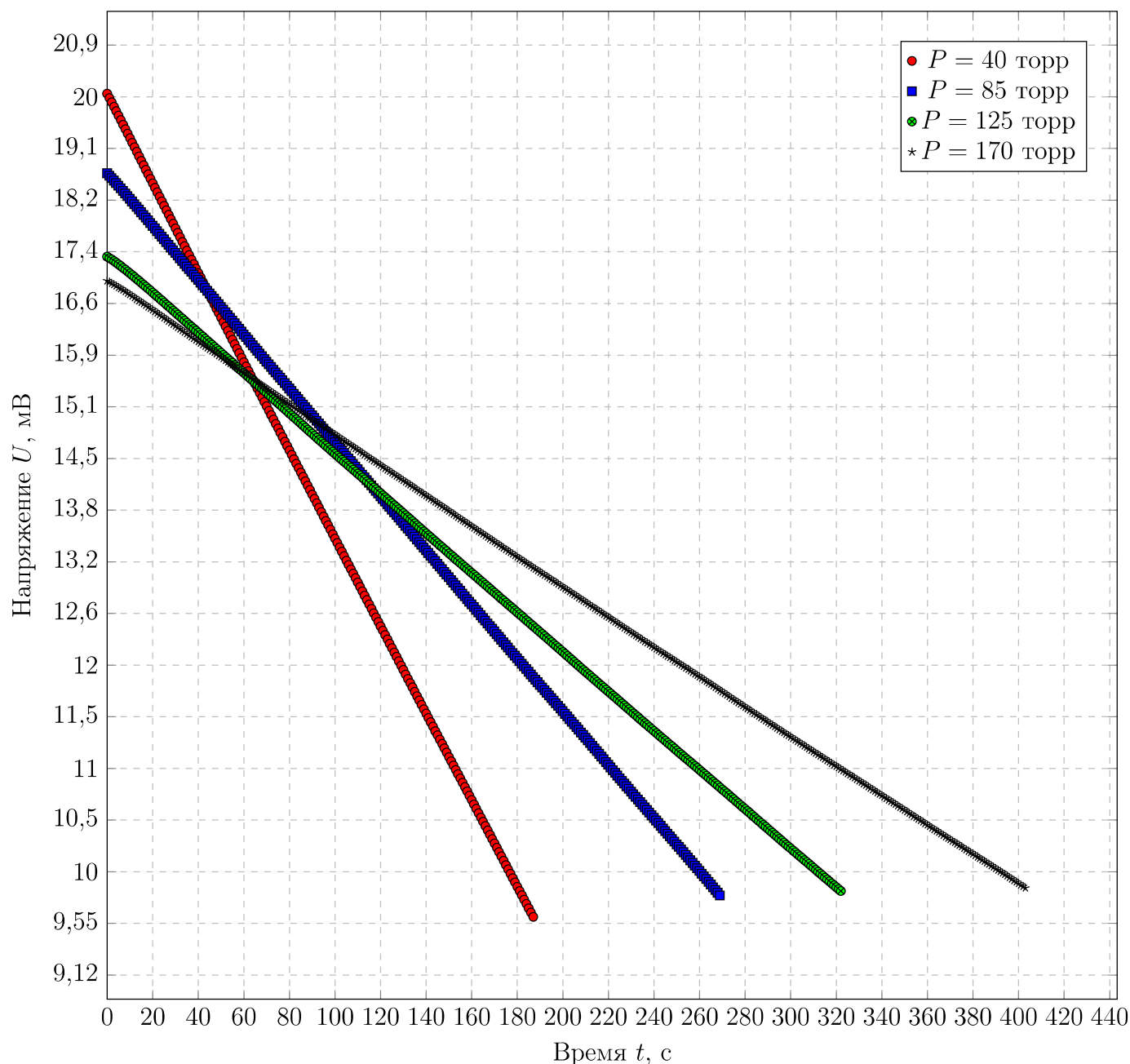
Рис. 5: Схема мостовой схемы

## 6 Ход работы

### 6.1 Измерение коэффициента взаимной диффузии в зависимости от давления

Для смеси гелий-воздух исследуем зависимость коэффициента взаимной диффузии от начального давления в системе. Для этого будем фиксировать с помощью компьютера в лаборатории зависимость показаний вольтметра от времени, прошедшего с начала эксперимента. По полученным результатам нарисуем график зависимости напряжения от времени в логарифмическом масштабе по оси ординат.

График зависимости  $U(t)$



Из графика видно, что в логарифмическом масштабе зависимости принимают линейный вид. Поэтому проведём их аппроксимацию прямыми вида

$$y = Ae^{Bx}.$$

Это уравнение при помощи логарифмирования можно привести к виду

$$\ln y = \ln A + Bx.$$

Тогда в этом случае для вычисления параметра  $B$  можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Получаем следующее:

$$B = \frac{\langle t \ln U \rangle - \langle t \rangle \langle \ln U \rangle}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$$

$$\sigma_B^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \left( \frac{\langle (\ln U - \langle \ln U \rangle)^2 \rangle}{\langle (t - \langle t \rangle)^2 \rangle} \right) - B^2},$$

где  $N$  – количество измерений. При этом можно считать, что  $\sigma_B \approx \sigma_B^{\text{случ}}$ , т.к. показания вольтметра довольно точны и систематическая ошибка мала по сравнению со случайными флуктуациями напряжения в ходе эксперимента.

Проводя данные вычисления для каждого значения, заносим результаты в таблицу 1.

$P$ , торр	$\sigma_P$ , торр	$B \cdot 10^{-3}$ , $\text{с}^{-1}$	$\sigma_B \cdot 10^{-3}$ , $\text{с}^{-1}$	$\tau$ , с	$\sigma_\tau$ , с
40,0	1,9	-3,930	0,002	254,5	0,1
85,0	1,9	-2,400	0,001	416,7	0,1
125,0	1,9	-1,770	0,001	565,0	0,2
170,0	1,9	-1,350	0,001	740,7	0,4

Таблица 1: Аппроксимация зависимостей

При такой аппроксимации, согласно (7), коэффициент

$$B = -\tau^{-1} \Rightarrow \tau = -B^{-1}.$$

При этом погрешность

$$\sigma_\tau = \tau \cdot \frac{\sigma_B}{|B|}.$$

Вычисляем эти параметры и результаты также заносим в таблицу 1. Из (5) выразим коэффициент взаимной диффузии:

$$D = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{VL}{2S}, \quad (8)$$

где параметры  $V$  и  $L/S$  определяются лишь геометрическими параметрами установки. На моей установке

$$V = (420 \pm 10) \text{ см}^3,$$

$$\frac{L}{S} = (9,0 \pm 0,1) \text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, погрешность вычисления коэффициента взаимной диффузии по (8) можно вычислить по следующей формуле:

$$\sigma_D = D \sqrt{\left(\frac{\sigma_\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{L/S}}{(L/S)}\right)^2}.$$

Используя приведённые выше соотношения, вычисляем коэффициент  $D$  для каждого значения  $P$ . Результаты вычислений заносим в таблицу 2.



$P$ , торр	$D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	$\sigma_D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$
40,0	7,43	0,20
85,0	4,54	0,12
125,0	3,35	0,09
170,0	2,55	0,07

Таблица 2: Результаты вычислений  $D$

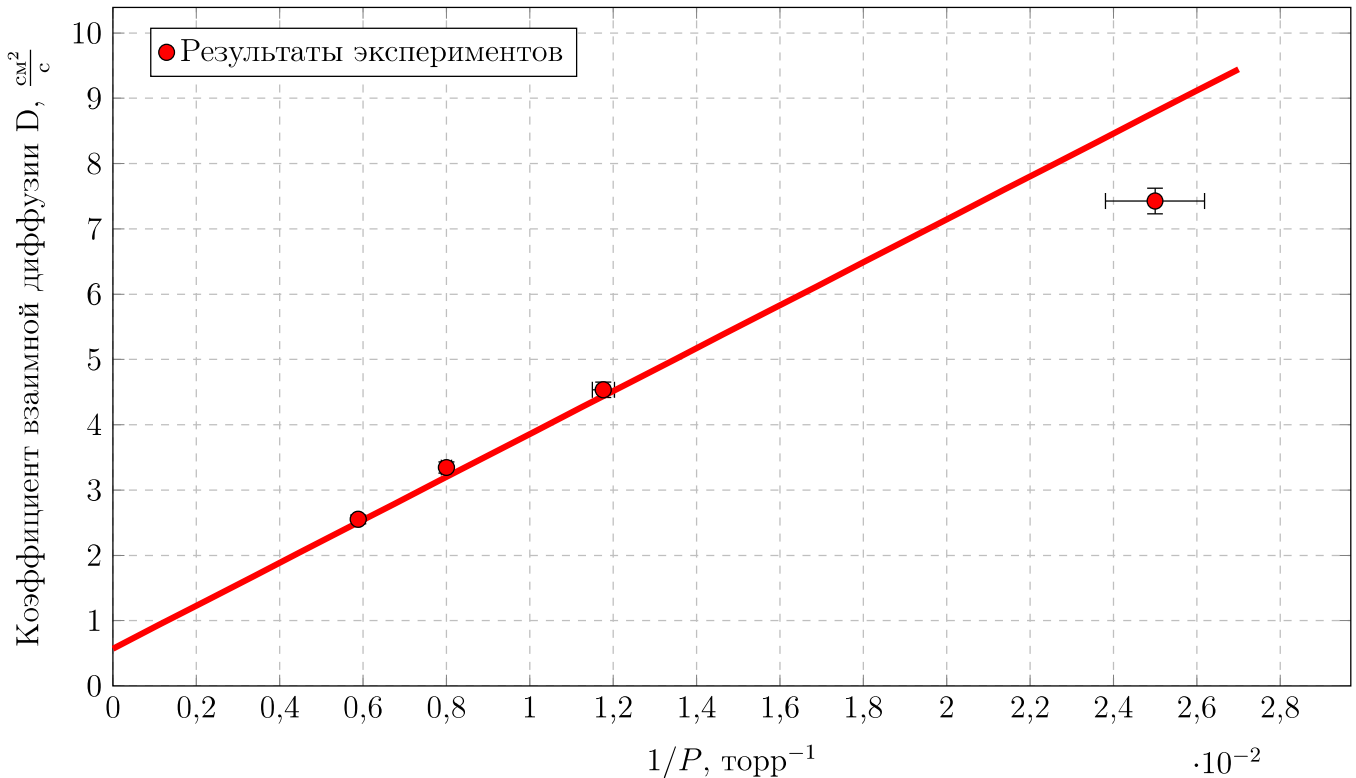
## 6.2 Экстраполяция к атмосферному давлению

Экстраполируем полученные в 6.1 результаты к атмосферному давлению. Для этого построим график зависимости  $D(1/P)$ . Подготовим необходимые для построения данные, занесём их в таблицу 3, затем построим график.

$1/P \cdot 10^{-3}$ , торр $^{-1}$	$\sigma_{1/P} \cdot 10^{-3}$ , торр $^{-1}$	$D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	$\sigma_D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$
25,00	1,19	7,43	0,20
11,76	0,26	4,54	0,12
8,00	0,12	3,35	0,09
5,88	0,07	2,55	0,07

Таблица 3: Данные для построения графика зависимости  $D(1/P)$

График зависимости  $D(1/P)$



Проведём аппроксимацию полученной зависимости прямой  $y = kx + b$ . В итоге получаем

$$k = (328,7 \pm 23,8) \frac{\text{см}^2}{\text{с} \cdot \text{торр}}.$$

Таким образом, для атмосферного давления ( $P = 760$  торр) получаем

$$D_{\text{атм}} = (0,43 \pm 0,03) \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \quad (\varepsilon = 7\%).$$

### 6.3 Вычисление длины свободного пробега атомов гелия в воздухе и эффективного сечения столкновений атомов гелия с молекулами воздуха

По полученным в 6.2 данным вычислим длину свободного пробега  $\lambda$  атомов гелия в воздухе. Согласно (1):

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} = \frac{1}{3} \lambda \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Отсюда получаем следующее:

$$\lambda = 3D \sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \approx (107,3 \pm 7,5) \text{ нм}, \quad (\varepsilon = 7\%).$$

Используя длину свободного пробега, можно оценить сечение столкновения атомов гелия с молекулами воздуха  $\sigma$  по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{1}{n_{\text{возд}} \lambda},$$

где  $n_{\text{возд}} \approx 2,65 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  – концентрация воздуха при нормальных условиях. Производя расчёты, получаем:

$$\sigma \approx (3,51 \pm 0,24) \cdot 10^{-19} \text{ м}^2, \quad (\varepsilon = 7\%).$$

## 7 Обсуждение результатов и выводы

В ходе работы:

- была зарегистрирована зависимость концентрации гелия в воздухе от времени с помощью датчиков теплопроводности при различных начальных давлениях смеси газов;
- по результатам измерений был определён коэффициент взаимной диффузии для смеси гелий-воздух;
- была оценена длина свободного пробега гелия в воздухе, а также сечение столкновения атомов гелия с молекулами воздуха.

В итоге, для коэффициента взаимной диффузии смеси гелий-воздух мы получили:

$$D_{\text{атм}} = (0,43 \pm 0,03) \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \quad (\varepsilon = 7\%).$$