4주차: 최단 경로 알고리즘

다익스트라, 플로이드 와샬, 벨만 포드

오늘 할 내용은?

최단 경로 알고리즘에 대해 알아봅시다

- 1. 다익스트라 (Dijkstra)
- 2. 플로이드 와샬 (Floyd Warshall)
- 3. 벨만 포드 (Bellman Ford)

하나의 시작 정점에서 다른 모든 정점으로 가는 최단 경로를 구하는 알고리즘

- 1. 출발 정점에서 출발 정점까지의 최단 거리를 0으로 확정
- 2. 최단 거리가 확정된 정점과 가장 가까운 정점을 찾아 그 지점까지 최단 거리를 **확정**
 - ※ priority_queue를 이용해 가장 가까운 정점을 찾자!
- 3. priority_queue가 빌 때까지 반복
- greedy로 최단 거리를 확정 → 음수 가중치의 간선이 있으면 **사용 불가!**
- 시간 복잡도 O(E log V) (E: 간선 개수 / V: 정점 개수)

priority_queue 문제풀이

Priority Queue Al Start Start

백준 1927 최소 힙

1927 최소 힙

문제: 가지고 있는 값 중 가장 작은 값을 출력하는 문제

- priority_queue: 큐인데 맨 앞(front)에 가장 큰 값이 들어있는 큐
- <queue> 헤더에 정의되어 있음
- 선언 방법: std::priority_queue<자료형> 이름;
- priority_queue에 (마이너스)를 붙여 가장 작은 값이 먼저 나올 수 있도록 하자

최소 힙 코드

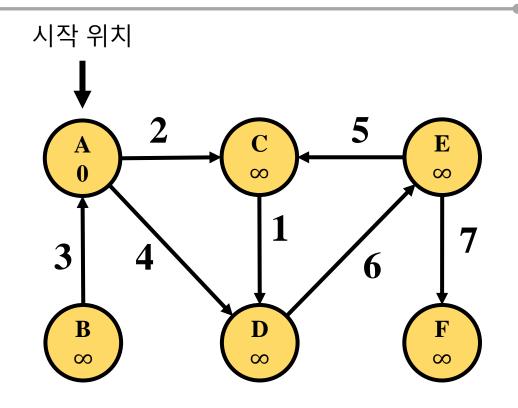
```
¤#include <iostream>
    #include <queue>
    using namespace std;
    priority_queue<int> pq;
   pint main() {
        ios_base::sync_with_stdio(false);
        cin.tie(NULL);
        cout.tie(NULL);
        int n; cin \gg n;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
12
13
            int num; cin >> num;
            if (num = 0) {
                if (pq.empty())
15
                    cout \ll "0\n";
                else {
                    cout \ll -pq.top() \ll "\n";
                    pq.pop();
19
20
21
22
            else {
                pq.push(-num); // -를 붙여 특별한 정렬없이 사용
23
24
25
26
        return 0;
27
```

현재 위치: not started

priority_queue

top \rightarrow

	from	to	distance
r	A	A	0

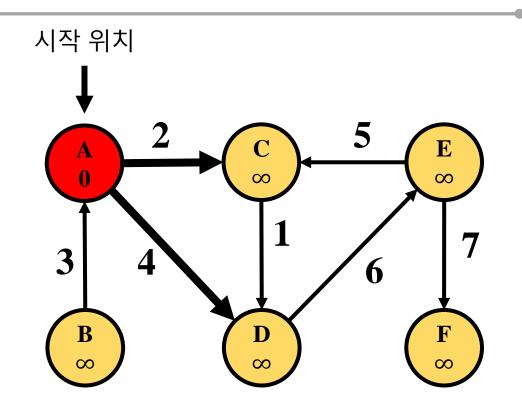


A의 최단 경로를 0, 나머지 정점의 최단 경로는 INF(무한)으로 설정합니다

현재 위치: A

priority_queue

	from	to	distance
top →	A	C	0 + 2
	A	D	0 + 4

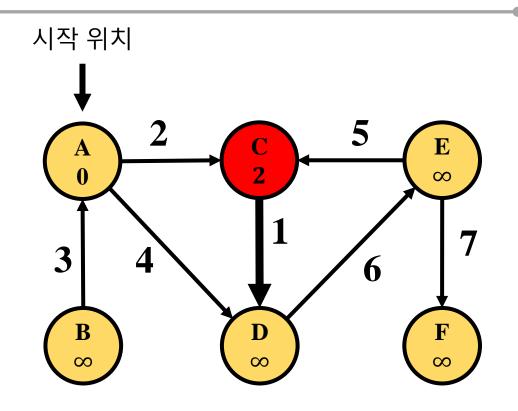


A에서 갈 수 있는 곳들의 최단 거리 후보 값을 priority_queue에 넣어줍니다

현재 위치: C

priority_queue

	from	to	distance
top →	C	D	2 + 1
	A	D	0 + 4

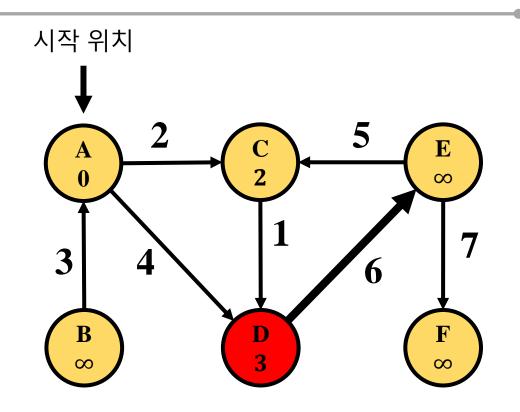


C에서 갈 수 있는 곳들의 최단 거리 후보 값을 priority_queue에 넣어줍니다

현재 위치: D

priority_queue

	from	to	distance
top →	A	D	0 + 4
	D	E	3 + 6



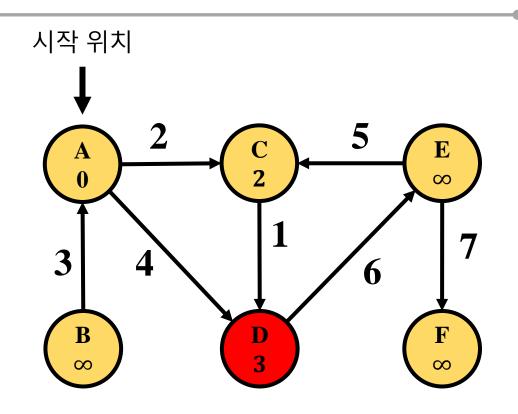
D에서 갈 수 있는 곳들의 최단 거리 후보 값을 priority_queue에 넣어줍니다

현재 위치: D

top -

priority_queue

from	to	distance
D	E	3 + 6

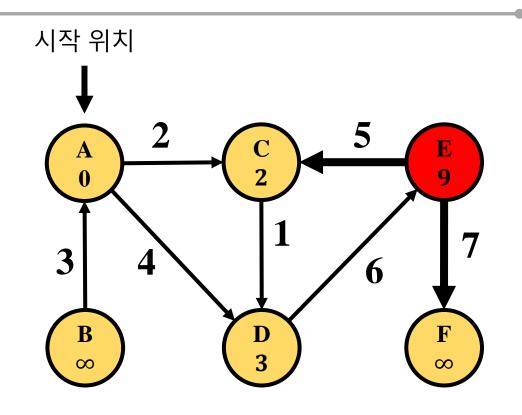


D까지의 최단 경로는 이미 확정되었으므로 갱신하지 않고 pass!

현재 위치: E

priority_queue

	from	to	distance
top →	E	C	9 + 5
	E	$\overline{\mathbf{F}}$	9 + 7



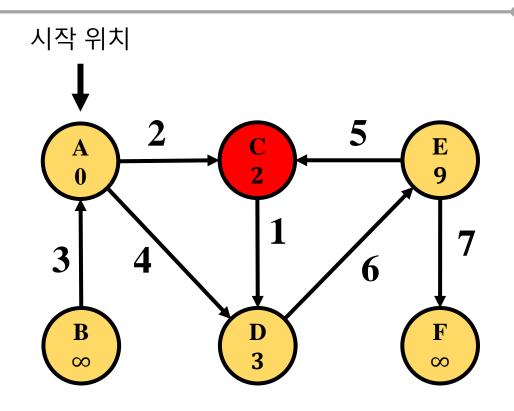
E에서 갈 수 있는 곳들의 최단 거리 후보 값을 priority_queue에 넣어줍니다

현재 위치: C

top -

priority_queue

from	to	distance
E	${f F}$	9 + 7



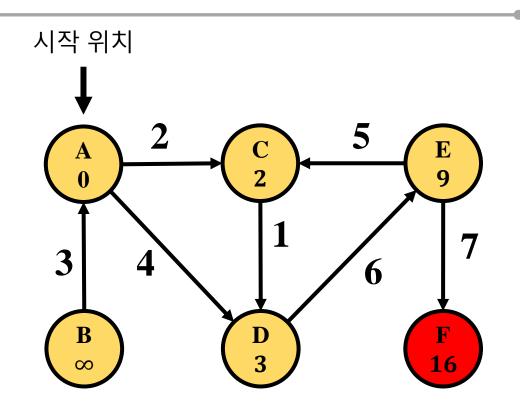
C까지의 최단 경로는 이미 확정되었으므로 갱신하지 않고 pass!

현재 위치: F

priority_queue

top →

	from	to	distance
>			



priority_queue가 비었으므로 종료!

도달할 수 없으면 종료 후 최단 경로 값이 INF(무한)

이제 문제를 풀어봅시다!

Dijkstra 문제풀이

백준 1753 최단 경로

1753 최단경로

문제: 주어진 방향 그래프에서 최단 경로를 찾는 문제

조건: 1 ≤ V ≤ 20,000

 $1 \le E \le 300,000$ $1 \le w \le 10$

⇒ 다익스트라를 사용하면 충분히 해결할 수 있다

최단경로 코드

```
pint main() {
31
         ios_base::sync_with_stdio(false);
32
         cin.tie(NULL);
33
34
         cout.tie(NULL);
35
         cin \gg v \gg e;
36
         cin \gg k;
37
         for (int i = 0; i < e; i ++) {
             int a, b, c; cin \gg a \gg b \gg c;
38
             edges[a].push_back({ b, c });
39
40
41
         dij(k);
         for (int i = 1; i \le v; i ++) {
42
             if (distan[i] = INF)
43
                 cout << "INF\n";</pre>
44
             else cout << distan[i] << "\n";
45
46
         return 0;
47
48
```

```
#include <iostream>
#include <queue>
"#define INF 987654321 // 무한대 정의
using namespace std;
int v, e, k;
vector<pair<int, int>> edges[20005]; //도착정점, 가중치
int distan[20005];
pvoid dij(int start) {
    for (int i = 1; i \le v; i++) {
       distan[i] = INF;
    priority queue<pair<int, int>>> pq; // 경로 값, 도착정점
    pq.push({ 0,start });
   while (!pq.empty()) {
       int con = pq.top().second;
        int dis = -pq.top().first; // -를 붙여 최소값 가져오기
       pq.pop();
       if (distan[con] < INF) continue; //이미 방문했으면
       distan[con] = dis;
        for (pair<int, int> i : edges[con]) {
           int next = i.first;
           int weight = i.second + dis;
           if (distan[next] < INF) continue; //이미 방문했으면
           pq.push({ -weight, next });
```

모든 정점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘

distan[start][end]: start → end의 최단거리를 나타내는 dp배열

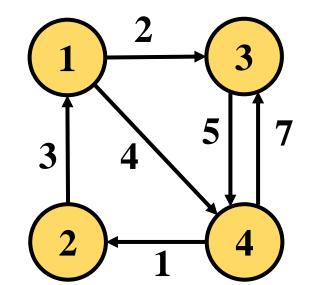
- 1. start → end의 최단거리를 간선의 길이로 초기화
- 2. 모든 start → end조합에 대해, 특정한 정점 mid를 경유해서 가는 start → mid → end와 start → end의 최단 거리를 비교
- 3. 모든 정점 mid에 대해 **반복**

Tip. mid에 대한 반복문이 맨 밖에 와야 합니다!

- 음수 가중치의 간선이 있어도 사용가능!
- 시간 복잡도 **O(V³)** (V: 정점 개수)

Step1. DP 배열 초기화

end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	INF	INF
3	INF	INF	0	5
4	INF	1	7	0



mid: not started

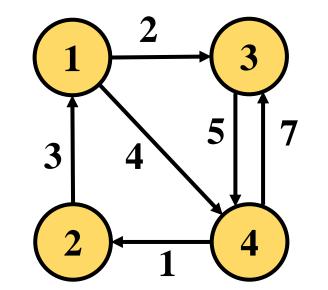
start: not started

end: not started

- Start == end이면 ()으로 초기화
- 바로 갈 수 있으면 간선의 길이로 초기화
- 바로 갈 수 없으면 INF로 초기화

Step2. start → mid → end와 start → end의 최단 거리 비교

end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	INF	INF
3	INF	INF	0	5
4	INF	1	7	0



mid: 1 start: 2

and.

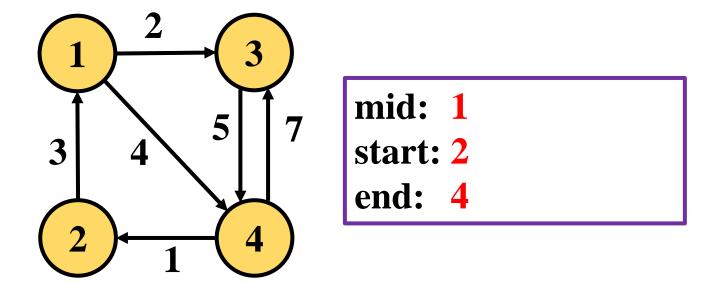
end: 3

distan[start][end] INF
distan[start][mid]+distan[mid][end] 3 + 2

⇒ distan[start][end] 5로 갱신!

Step2. start → mid → end와 start → end의 최단 거리 비교

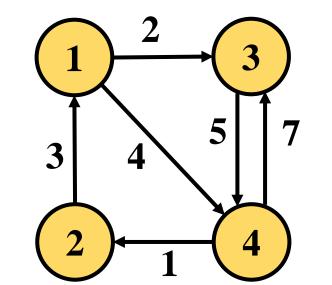
end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	5	INF
3	INF	INF	0	5
4	INF	1	7	0



distan[start][end] INF
distan[start][mid]+distan[mid][end] 3+4
⇒ distan[start][end] 7로 갱신!

Step2. start → mid → end와 start → end의 최단 거리 비교

end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	5	7
3	INF	INF	0	5
4	INF	1	7	0

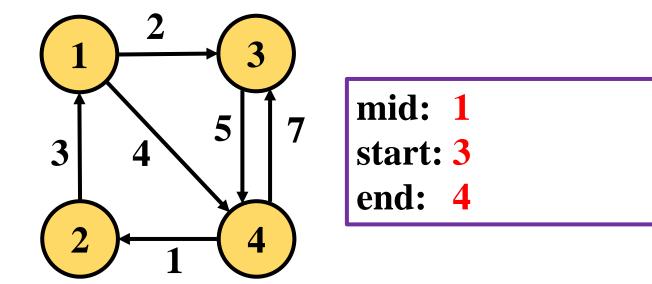


mid: 1 start: 3 end: 2

distan[start][end] INF
distan[start][mid]+distan[mid][end] INF + INF
⇒ Pass!

Step2. start → mid → end와 start → end의 최단 거리 비교

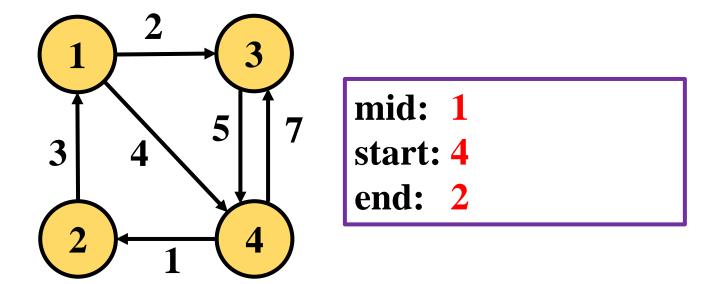
end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	5	7
3	INF	INF	0	5
4	INF	1	7	0



```
distan[start][end] 5
distan[start][mid]+distan[mid][end] INF + 4
⇒ Pass!
```

Step2. start → mid → end와 start → end의 최단 거리 비교

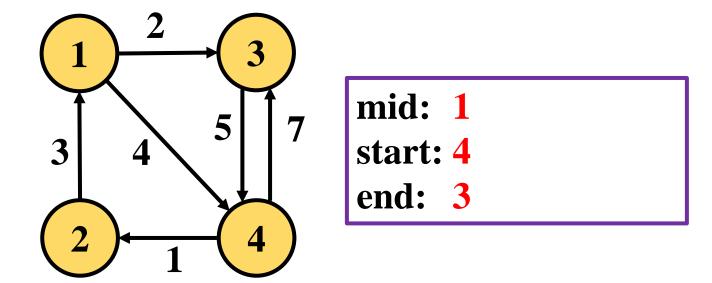
end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	5	7
3	INF	INF	0	5
4	INF	1	7	0



```
distan[start][end] 1
distan[start][mid]+distan[mid][end] INF + INF
⇒ Pass!
```

Step2. start → mid → end와 start → end의 최단 거리 비교

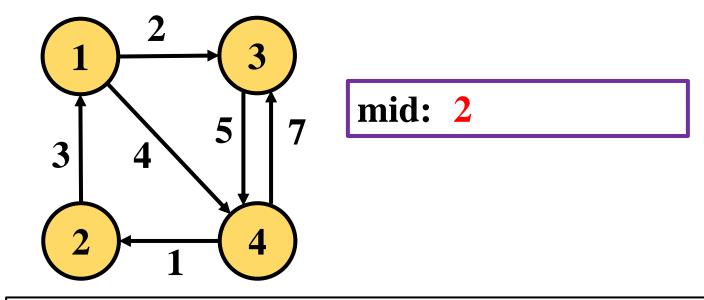
end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	5	7
3	INF	INF	0	5
4	INF	1	7	0



distan[start][end] 7
distan[start][mid]+distan[mid][end] INF +2
⇒ Pass!

Step3. 모든 정점 mid에 대해 반복

end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	5	7
3	INF	INF	0	5
4	4	1	6	0

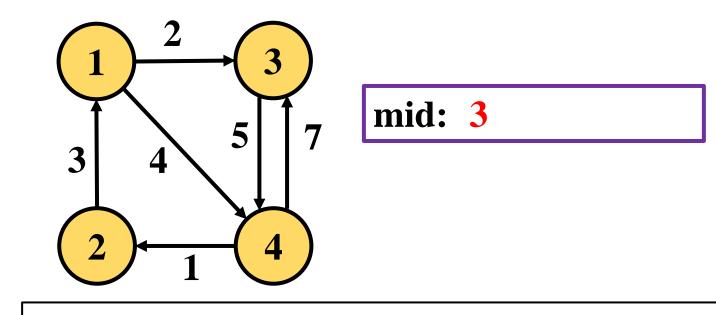


 \Rightarrow 4 \rightarrow 1의 경로가 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1으로 갱신!

 \Rightarrow 4 \rightarrow 3의 경로가 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3으로 갱신!

Step3. 모든 정점 mid에 대해 반복

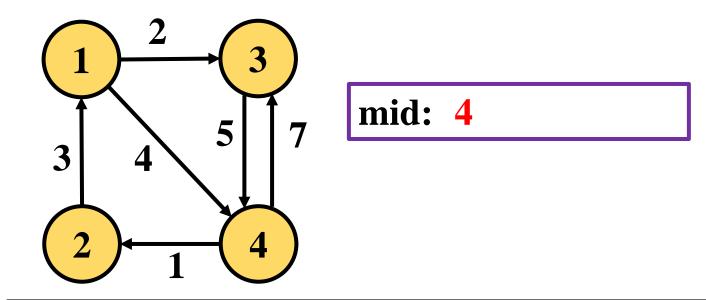
end start	1	2	3	4
1	0	INF	2	4
2	3	0	5	7
3	INF	INF	0	5
4	4	1	6	0



⇒갱신된 경로가 없다!

Step3. 모든 정점 mid에 대해 반복

end start	1	2	3	4
1	0	5	2	4
2	3	0	5	7
3	9	6	0	5
4	4	1	6	0



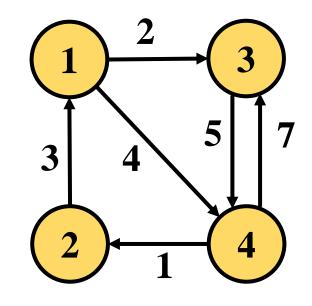
 \Rightarrow 1 \rightarrow 2의 경로가 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2으로 갱신!

 \Rightarrow 3 \rightarrow 1의 경로가 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1으로 갱신!

 \Rightarrow 3 \rightarrow 2의 경로가 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2으로 갱신!

최단 경로를 구한 결과

end start	1	2	3	4
1	0	5	2	4
2	3	0	5	7
3	9	6	0	5
4	4	1	6	0



※ INF이면 경로가 존재하지 않는 것

Floyd Warshall 문제풀이

置星0/5 处验7/里是例: 백준 11404 플로이드

11404 플로이드

문제: 모든 도시의 쌍에 대해 이동에 필요한 비용의 최소값 구하기

$$1 \le n \le 100$$
 $1 \le m \le 100,000$

 $n^3 = 1,000,000$ 이므로 플로이드 와샬 알고리즘으로 충분히 가능!

플로이드 코드

초기화와 입력 받기

```
#include <iostream>
    #include <algorithm>
    #define INF 987654321
    using namespace std;
    int dp[105][105];
    int n, m;
    pint main() {
         ios_base::sync_with_stdio(false);
10
         cin.tie(NULL);
         cout.tie(NULL);
13
         cin \gg n;
         cin \gg m;
         for (int i = 1; i \leq n; i \leftrightarrow) {
             for (int j = 1; j \le n; j++) {
16
                 if (i = j)
                      dp[i][j] = 0;
18
                 else
19
                      dp[i][j] = INF;
20
         } // 초기화
         for (int i = 0; i < m; i \leftrightarrow) {
23
             int a, b, c; cin \gg a \gg b \gg c;
24
             dp[a][b] = min(dp[a][b], c); // 간선 받기
25
```



```
for (int mid = 1; mid \leq n; mid++) {
28
             for (int start = 1; start ≤ n; start++) {
29
                 for (int end = 1; end \leq n; end++) {
                     dp[start][end] = min(dp[start][end], dp[start][mid] + dp[mid][end]);
30
                } // dp 갱신
31
32
33
34
         for (int i = 1; i \le n; i++) {
35
             for (int j = 1; j \le n; j++) {
                 if (dp[i][j] = INF) // 출력
36
                     cout << "0 ";
37
                 else cout \ll dp[i][j] \ll " ";
38
39
             cout \ll "\n";
40
41
42
43
         return 0;
```

Bellman Ford 벨만 포드

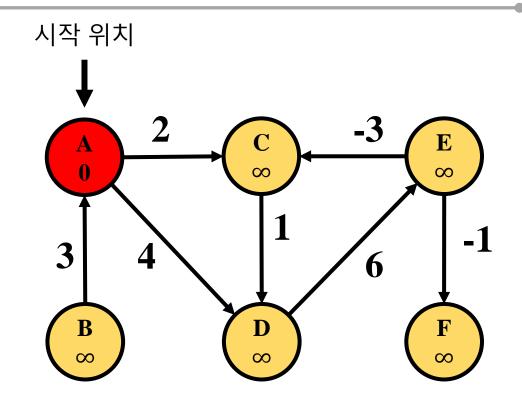
하나의 시작 정점에서 다른 모든 정점으로 가는 최단 경로를 구하는 알고리즘

- 1. 시작 정점은 0, 다른 정점은 INF로 초기화
- 2. 모든 간선을 확인하면서 각 간선의 도착 정점까지의 최단 거리 갱신
- 3. 2번을 $\mathbf{V} \mathbf{1}$ 번 반복 \rightarrow 두 정점 사이 최대 간선 개수는 $\mathbf{V} \mathbf{1}$ 이기 때문
- 4. 2번을 한 번 더 했을 때 갱신이 된다면 음수 사이클 존재!
- 음수 가중치의 간선이 있어도 사용가능 + 음수 사이클 검출 가능
- 시간 복잡도 **O(VE)** (V: 정점 개수/E: 간선 개수)

Bellman Ford 벨만 포드

갱신 반복 횟수: 0

정점 번호	A	В	C	D	E	F
최단거리	0	8	8	8	8	8



A의 최단 경로를 0,

나머지 정점의 최단 경로는 INF(무한)으로 초기화

갱신 시작 정점

■ 갱신된 정점

나머지 정점

Bellman Ford 벨만 포드

갱신 반복 횟수: 1

정점 번호	A	В	C	D	E	F
최단거리	0	8	2	4	8	∞

시작 위치 **-3**

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신 ■ 갱신 시작 정점■ 갱신된 정점□ 나머지 정점

갱신 반복 횟수: 2

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	2	3	9	8

시작 위치 **-3**

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 3

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	2	3	9	8

시작 위치

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 4

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	2	3	9	8

시작 위치 **-3**

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 5

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	2	3	9	8

시작 위치 **-3**

V-1번째 이후에 갱신되는 정점이 없다

→ 음수 사이클이 존재하지 않는다!

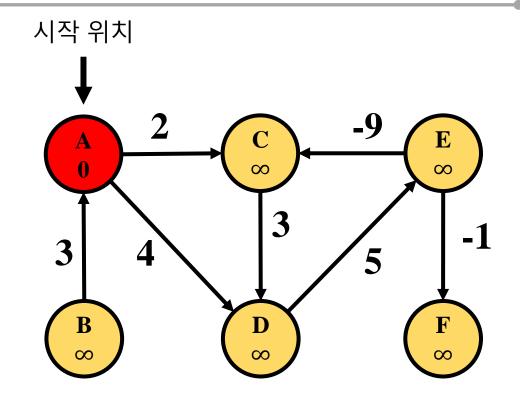
■ 갱신 시작 정점

■ 갱신된 정점

나머지 정점

갱신 반복 횟수: 0

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	8	8	8	8



A의 최단 경로를 0,

나머지 정점의 최단 경로는 INF(무한)으로 초기화

■ 갱신 시작 정점

■ 갱신된 정점

나머지 정점

갱신 반복 횟수: 1

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	2	4	8	8

시작 위치 -1

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 2

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	2	4	9	8

시작 위치 -1

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 3

정점 번호	A	В	C	D	Е	F
최단거리	0	8	0	4	9	8

시작 위치 3

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 4

정점 번호	A	В	C	D	Е	F
최단거리	0	8	0	3	9	8

시작 위치 -1

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 5

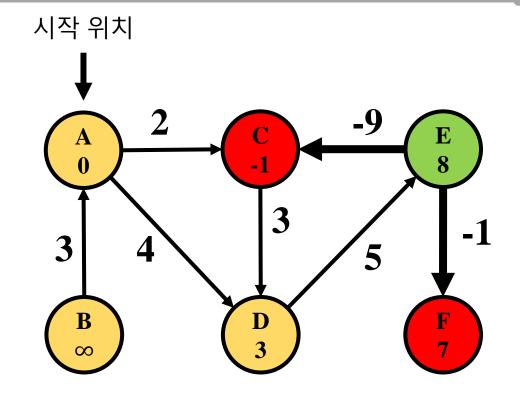
정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	0	3	8	8

시작 위치 3 -1

갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해 도착지점의 최단거리 갱신

갱신 반복 횟수: 6

정점 번호	A	В	С	D	E	F
최단거리	0	8	-1	3	8	7



V번째에 갱신된다 (C, F 갱신)

→ 음수 사이클이 **존재**한다!

갱신 시작 정점

■ 갱신된 정점

┗ 나머지 정점

Bellman Ford 문제풀이

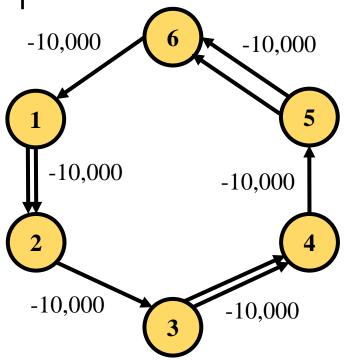
對巴亚 三 기본 문제! 백준 11657 타임머신

11657 타임머신

문제: 음수 가중치가 있는 그래프에서 최단 경로 구하기

$$1 \le n \le 500$$
 $1 \le m \le 6,000$ $-10,000 \le C \le 10,000$

- ※ 주의할 점
- \Rightarrow 가중치가 전부 -10,000이고 고리형태이면 최단 거리는 $(n-1) \times m \times (-10,000)$ 이 될 수 있다
- \Rightarrow 대략 3×10^{10} 으로 int형이면 underflow가 발생할 수 있다!
- \Rightarrow 최단 거리 배열의 자료형이 long long이어야 한다



타임머신 코드

```
pint main() {
37
         ios_base::sync_with_stdio(false);
38
39
         cin.tie(NULL);
40
         cout.tie(NULL);
41
         cin \gg n \gg m;
42
         for (int i = 0; i < m; i \leftrightarrow) {
43
             ll a, b, c; cin \gg a \gg b \gg c;
             edges.push_back({ { a, b }, c });
44
45
46
         if (bf()) { // 음수 사이클이 있으면
47
             cout \ll "-1\n";
48
             return 0;
49
50
         for (int i = 2; i \le n; i++) {
51
             if (distan[i] = INF)
52
                  cout \ll "-1\n";
53
             else cout << distan[i] << "\n";</pre>
54
55
         return 0;
56
```

```
##include <iostream>
#include <algorithm>
#include <vector>
#define INF 987654321
using namespace std;
using ll = long long;
int n, m;
vector<pair<pair<ll, ll>, ll> edges;
ll distan[505]; // underflow 조심!!
pint bf() {
   for (int i = 1; i \le n; i ++) {
       distan[i] = INF;
   } // 초기화
   distan[1] = 0;
    for (int i = 1; i < n; i ++) {
       for (pair<pair<ll, ll>, ll> edge : edges) {
           ll start = edge.first.first; // 시작 정점
           ll end = edge.first.second; // 도착 정점
           ll weight = edge.second; // 가중치
           if(distan[start] ≠ INF) // 갱신
               distan[end] = min(distan[end], distan[start] + weight);
    for (pair<pair<ll, ll>, ll> edge : edges) {
       ll start = edge.first.first;
       ll end = edge.first.second;
       ll weight = edge.second;
       if (distan[start] ≠ INF & distan[end] > distan[start] + weight) {
           return 1; // n - 1번 이후 갱신이 있으면 음수 사이클 존재
   return 0; // 음수 사이클 없음
```

SPFA (Shortest Path Faster Algorithm)

Bellman Ford의 <u>비효율적인 부분</u>을 개선한 알고리즘

최단 거리가 갱신된 정점에서 출발하는 간선에 대해서만 체크함

 \Rightarrow 시간 복잡도는 똑같이 O(VE)이지만 실제로는 O(V+E), O(E)의 성능을 가진다 최악의 경우, O(VE)

구현: 출발하는 간선을 queue에 넣고 BFS와 유사하게 반복문을 사용해 탐색

타임머신 코드 using SPFA

```
¤#include <iostream>
    #include <algorithm>
    #include <vector>
    #include <cstring>
    #include <queue>
    #define INF 987654321
    using namespace std;
    using ll = long long;
9
    int n, m;
    int inQueue[505]; // 큐에 들어있는지 확인
    int cycle[505]; // 정점 방문 횟수 체크
12
    ll distan[505];
13
    vector<pair<ll, ll>> edges[505]; // 도착정점, 가중치
```

타임머신 코드 using SPFA

```
int bf() {
        memset(cycle, 0, sizeof(cycle));
        for (int i = 1; i \leq n; i \leftrightarrow) {
            distan[i] = INF;
        queue<ll> q;
        distan[1] = 0;
        inQueue[1] = 1;
        cycle[1]++;
        q.push(1); // 큐에 넣기
        while (!q.empty()) {
            int con = q.front();
            q.pop();
            inQueue[con] = 0;
            for (pair<ll, ll> i : edges[con]) {
                if (distan[i.first] > distan[con] + i.second) { // 갱신되면
                    distan[i.first] = distan[con] + i.second;
32
                    if (inQueue[i.first] = 0) { // 큐 안에 없으면
                        inQueue[i.first] = 1;
                        cycle[i.first]++;
35
                        q.push(i.first); // 넣기
36
37
                    if (cycle[i.first] = n) // 정점을 충분히 많이 방문했을때
38
39
                        return 1;
40
        return 0;
```

타임머신 코드 using SPFA

```
pint main() {
         ios_base::sync_with_stdio(false);
         cin.tie(NULL);
         cout.tie(NULL);
49
50
         cin \gg n \gg m;
         for (int i = 0; i < m; i \leftrightarrow) {
51
             ll a, b, c; cin \gg a \gg b \gg c;
52
             edges[a].push_back({ b, c });
53
54
55
         if (bf()) {
             cout \ll "-1\n";
56
57
              return 0;
58
59
         for (int i = 2; i \le n; i++) {
60
             if (distan[i] = INF)
                  cout \ll "-1\n";
61
              else cout << distan[i] << "\n";
62
63
         return 0;
```

최단 경로 알고리즘 정리

	다익스트라	플로이드 와샬	벨만 포드
알 수 있는 최단 경로	한 정점에서의 다른 모든 정점까지의 최단 경로	사이의 최모든 정점 단경로	한 정점에서의 다른 모든 정점까지의 최단 경로
시간복잡도	O(E log V)	$O(V^3)$	O(VE)
음수 가중치	불가능	가능	가능
음수 사이클	불가능	불가능	가능

Problem Set – 다익스트라





3 1238 파티

Problem Set – 플로이드 와샬



3 11780 플로이드2

2610 회의준비

Problem Set – 벨만 포드



22 1219 오민식의 고민

Problem Set – 도전!



3860 할로윈 묘지