习题三

一、选择题

1、设 $F_1(x)$、$F_2(x)$ 分别是随机变量 X、Y 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，则必有[①].

① $a-b=1$ ② $a=b$ ③ $a+b=0$ ④ $a+b=1$

2、设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则[④].

① $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

② $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

③ $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数；

④ $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

3、设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布为 $\begin{pmatrix} X & 1 & 2 \\ p & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} Y & 1 & 2 \\ p & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$，则下列式子正确的是[④]. $P(X=Y)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=1)+P(X=2)\cdot P(Y=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$

① $P(X=Y)=\dfrac{2}{3}$ ② $P(X=Y)=1$ ③ $P(X=Y)=\dfrac{1}{2}$ ④ $P(X=Y)=\dfrac{5}{9}$

二元函数 4、设 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,0)$，则下列式子不正确的是[②].

$\mu_1\ \mu_2\ \sigma_1\ \sigma_2\ \rho$ $\rho=0\Rightarrow X$与Y相互独立 $f_X(x)\sim N(0,1)$ $f_Y(y)\sim N(0,1)$ $X\sim N(0,1)$. $Y\sim N(0,1)$

① $P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$ ② $P\{XY\le 0\}=\dfrac{1}{4}$ ③ $P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$ ④ $P\left\{\dfrac{X}{Y}\le 0\right\}=\dfrac{1}{2}$

$P((X\ge0,Y\le0)\cup(X\le0,Y\ge0))=P(X\ge0,Y\le0)+P(X\le0,Y\ge0)=P(X\ge0)P(Y\le0)+P(X\le0)P(Y\ge0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

5、设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则[②]

$\rho=0$ $\mu_1\ \sigma_1$ $\mu_2\ \sigma_2$

① $P(X+Y\le 0)=1/2$ ② $P(X+Y\le 1)=1/2$

$c_1X+c_2Y\sim N(c_1\mu_1+c_2\mu_2,\ c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+2\rho c_1c_2\sigma_1\sigma_2)$

③ $P(X-Y\le 0)=1/2$ ④ $P(X-Y\le 1)=1/2$ $\Rightarrow Z_1=X+Y\sim N(1,2)$ 关于 $z=1$ 对称

$P(X-Y\le -1)=1/2$ $Z_2=X-Y\sim N(-1,2)$ 关于 $z=-1$ 对称

二、填空题

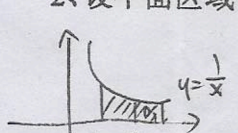
1、设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1\Rightarrow\int_0^2dx\int_0^1Axy^2dy=\frac{2A}{3}=1$$

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy^2, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $A=$ $\frac{3}{2}$.

2、设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=e^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在



$$P(X\ge e)=\frac{S_{D_1}}{S_D}=\frac{\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx}{\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx}=\frac{\ln|x|\Big|_e^{e^2}}{\ln|x|\Big|_1^{e^2}}=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$$

区域 D 上服从均匀分布，则 $P\{X\geq e\}=$ $\frac{1}{2}$.

3、设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X、Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

4、设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2),(i=1,2,\cdots,n)$，则

$X_1+X_2+\cdots+X_n$ 服从 $N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\ \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$ 分布.

5、设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$，则

$P\{\min\{X,Y\}\geq 0\}=$ $\frac{3}{7}$ ，$P\{\max\{X,Y\}\geq 0\}=$ $\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$.

三、计算题

$P(\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\})=P\{X\geq 0,Y\geq 0\}$ $\quad P(\{X\geq 0\}\cup\{Y\geq 0\})=P(X\geq 0)+P(Y\geq 0)-P(X\geq 0,Y\geq 0)$

1、盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球．以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数．求 X 和 Y 的联合分布律．

解: $X=0,1,2,3$ $\quad Y=0,1,2$

$\begin{cases}X+Y\geq 2\\X+Y<4\end{cases}$

$\Rightarrow P(0,0)=P(0,1)=P(1,0)=P(3,2)=P(\phi)=0$

$P(X=0,Y=0)=P(\phi)=0$

$P(X=0,Y=1)=P(\phi)=0$

$P(X=0,Y=2)=C_2^2\cdot C_2^2/C_7^4=\frac{1}{35}$

$P(X=1,Y=0)=P(\phi)=0$

$P(X=1,Y=1)=C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_2^2/C_7^4=\frac{6}{35}$

$P(X=1,Y=2)=C_3^1\cdot C_2^2\cdot C_2^1/C_7^4=\frac{6}{35}$

$P(X=2,Y=0)=C_3^2\cdot C_2^2/C_7^4=\frac{3}{35}$

$P(X=2,Y=1)=C_3^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1/C_7^4=\frac{12}{35}$

$P(X=2,Y=2)=C_3^2\cdot C_2^2/C_7^4=\frac{3}{35}$

$P(X=3,Y=0)=C_3^3\cdot C_2^1/C_7^4=\frac{2}{35}$

$P(X=3,Y=1)=C_3^3\cdot C_2^1/C_7^4=\frac{2}{35}$

$P(X=3,Y=2)=P(\phi)=0$

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

2、将一枚硬币掷 3 次，以 X 表示前 2 次中出现 H 的次数，以 Y 表示 3 次中出现 H 的次数．求 X、Y 的联合分布律以及 (X,Y) 的边缘分布律．

解: $X=0,1,2$ $\quad Y=0,1,2,3$ 且 $X\leq Y\leq X+1$

$\Rightarrow P(X=0,Y=2)=P(X=0,Y=3)=P(X=1,Y=0)=P(X=1,Y=3)=P(X=2,Y=0)=P(X=2,Y=1)=P(\phi)=0$

(X,Y) 可能取值 $(0,0)$. $(0,1)$. $(1,1)$ $(1,2)$. $(2,2)$. $(2,3)$

$\Rightarrow P(X=0,Y=0)=C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1/2^3=\frac{1}{8}$ $\quad P(X=1,Y=1)=C_2^1\cdot C_1^1/2^3=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=2,Y=2)=C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1/2^3=\frac{1}{8}$

$P(X=0,Y=1)=C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1/2^3=\frac{1}{8}$ $\quad P(X=1,Y=2)=C_2^1\cdot C_1^1/2^3=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=2,Y=3)=C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1/2^3=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow$

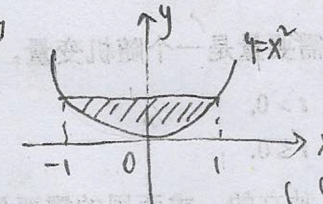
Y \ X	0	1	2	$P(Y=y_j)$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P(X=x_i)$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

X-型: $-1\le x\le 1$. $x^2\le y\le 1$

Y-型: $0\le y\le 1$. $-\sqrt{y}\le x\le \sqrt{y}$

$x^2\le y\le 1 \Rightarrow 0\le y\le 1$

3、设二维随机变量(X,Y)的概率密度为



$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, x^2\le y\le 1,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$$

(1)试确定常数c；(2)求边缘概率密度.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1} cx^2y\,dy=1$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} c x^2\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=x^2}^{y=1}dx$

$=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-x^6)dx$

$=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_{x=-1}^{x=1}=1$

$\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,dy=\frac{21}{8}x^2y^2\Big|_{y=x^2}^{y=1} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4) & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4) & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\,dx=\frac{21}{12}x^3y\Big|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}\\ 0 & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & (0\le y\le 1)\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

4、设X和Y是两个相互独立的随机变量，X在$(0,1)$上服从均匀分布，Y的概率密度

为 $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

（1） 求X和Y的联合概率密度；

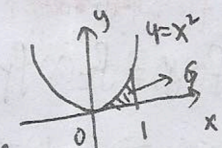
（2） 设含有a的二次方程为$a^2+2Xa+Y=0$，试求a有实根的概率.

(1) $X\sim U(0,1)\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{1} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

X,Y相互独立

$\Rightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1,\ y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$



(2) $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根 $\Rightarrow \Delta=(2X)^2-4\cdot 1\cdot Y\ge 0\Rightarrow Y\le X^2$

$P(Y\le X^2)=\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^1 -e^{-\frac{y}{2}}\Big|_{y=0}^{y=x^2}dx$

$=\int_0^1(1-e^{-\frac{x^2}{2}})dx=x\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$=1-\sqrt{2\pi}\left(\Phi(1)-\Phi(0)\right)=0.1445$

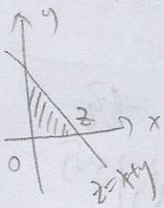
5、某种商品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

设各周的需要量是相互独立的，求两周的需要量的概率密度.

设这两周的需求量分别为 X, Y 且 X 与 Y 相互独立. 则其概率密度为

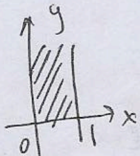
$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}\qquad \Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z} & z>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$



两周的需求量 $Z=X+Y$. 其概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx=\int_0^z xe^{-x}\cdot(z-x)e^{-(z-x)}dx$$

$$=\int_0^z(xz-x^2)e^{-z}dx=e^{-z}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2z-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{x=0}^{x=z}=\frac{1}{6}z^3\cdot e^{-z}\quad (z>0)$$



6*、设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<\infty,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ （1）试确定常数 b；（2）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；（3）求函数 $U=\max(X,Y)$ 的分布函数.

① $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ 即 $\int_0^1 dx\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy=1 \Rightarrow -b(e^{-1}-e^0)=1\Rightarrow b=\frac{1}{1-e^{-1}}$

② $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(x+y)}}{1-e^{-1}}dy=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}\ (0<x<1)\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f(x,y)$ 取非零值时 X-型区域中 y 的取值

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1\frac{e^{-(x+y)}}{1-e^{-1}}dx=e^{-y}\ (y>0)\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f(x,y)$ 取非零值时 Y-型区域中 x 的取值

③ $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\Rightarrow X$ 与 Y 相互独立 $\Rightarrow F_U(z)=P(U\le z)=P(X\le z, Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)$
$=\int_{-\infty}^{z}f_X(x)dx\int_{-\infty}^{z}f_Y(y)dy=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

(i) $z\le 0\Rightarrow f_X(x)=0\quad f_Y(y)=0\Rightarrow F_U(z)=0$

(ii) $0<z<1\Rightarrow f_X(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}\quad f_Y(y)=e^{-y}\Rightarrow F_U(z)=\int_0^z\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}dx\cdot\int_0^z e^{-y}dy=\frac{(e^{-z}-1)^2}{1-e^{-1}}$

(iii) $z\ge 1\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}} & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}\quad f_Y(y)=e^{-y}\Rightarrow F_U(z)=\left[\int_0^1\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}dx+\int_1^z 0dx\right]\cdot\int_0^z e^{-y}dy$
$=1-e^{-z}$

$$\therefore F_U(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \frac{(e^{-z}-1)^2}{1-e^{-1}} & 0<z<1\\ 1-e^{-z} & z\ge 1\end{cases}$$