习题六

一、填空题

1、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自于总体 $N(0,\sigma^2)$ 的随机样本，且随机变量

$Y=c\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\sim\chi^2(1)$，则常数 $c=$ $\frac{1}{n\sigma^2}$.

$n>1.\Rightarrow \frac{\sum X_i}{\sqrt{c}}\sim N(0,1)$　　$\Rightarrow C=1/D(\sum X_i)$ $=1/n\sigma^2$

即 $\frac{\sum X_i-E(\sum X_i)}{\sqrt{D(\sum X_i)}}\sim N(0,1)$

2、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自于总体 $\chi^2(n)$ 的随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$E(\overline{X})=$ n，$D(\overline{X})=$ 2.

$X_i\sim\chi^2(n)\Rightarrow E(X_i)=n\ \ D(X_i)=2n$

$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}E(\sum X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot n=n$

$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum X_i)$ $=\frac{1}{n^2}D(\sum X_i)$ $=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot 2n$ $=n$

3、设随机变量 $X\sim t(n)$，$n>1$，$Y=X^2$，则 Y 服从的分布是 $F(1,n)$.

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自于总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，则 $\overline{X}$ 服从的分布是 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

5、设 X_1,X_2,X_3,X_4 是取自于正态总体 $X\sim N(0,2^2)$ 的样本，且

$Y=a\cdot(X_1-2X_2)^2+b\cdot(3X_3-4X_4)^2$，则当 $a=$ $\frac{1}{20}$，$b=$ $\frac{1}{100}$ 时，

Y 服从 χ^2 分布，自由度为 2.

$X_1-2X_2\sim N(0.20)\Rightarrow \frac{X_1-2X_2-0}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$

$3X_3-4X_4\sim N(0.100)\Rightarrow \frac{3X_3-4X_4-0}{10}\sim N(0,1)$

$\Rightarrow\left(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2+\left(\frac{3X_3-4X_4}{10}\right)^2\sim\chi^2(2)$

二、选择题

1、设随机变量 $X\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{X}$ 服从的分布是[③].

① $N(0,1)$　　② $\chi^2(n_1+n_2)$　　③ $F(n_2,n_1)$　　④ 不确定

2、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自于总体 $N(0,\sigma^2)$ 的随机样本,则样本二阶原点矩

$X_i\sim N(0,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X_i-0}{\sigma}\sim N(0,1)$ 即 $\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$

$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 的数学期望为[①].

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)\Rightarrow E\left(\sum\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)=n$ 即 $\frac{1}{\sigma^2}E(\sum X_i^2)=n$

① σ^2　　② $\frac{\sigma^2}{n}$　　③ $\frac{2\sigma^4}{n}$　　④ $\frac{\sigma^4}{n}$

$\Rightarrow E(\sum X_i^2)=n\sigma^2$

$E(\frac{1}{n}\sum X_i^2)=\frac{1}{n}E(\sum X_i^2)$ $=\frac{1}{n}\cdot n\sigma^2=\sigma^2$

3、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自于总体 X 中的一个样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是样本均值，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为样本方差，则下列正确的是[③].

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

① $\frac{\sqrt{n-1}\cdot(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$　　② $\frac{\sqrt{n-1}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

③ $\dfrac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$　　　　④ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$

4、设随机变量X、Y都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$ $(\sigma\neq 0)$，且X、Y相互独立，

则随机变量$Z=\dfrac{(X+Y)^2}{(X-Y)^2}$服从的分布是[②].

$X+Y\sim N(0,2\sigma^2)$　$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$

$\Rightarrow \dfrac{X\pm Y-0}{\sqrt{2\sigma^2}}\sim N(0,1) \Rightarrow \left(\dfrac{X\pm Y}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2\sim\chi^2(1)$

① $\chi^2(1)$　② $F(1,1)$　③ $t(1)$　④ $N(0,1)$

$Z=\dfrac{(X+Y)^2}{(X-Y)^2}=\dfrac{\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2/1}{\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2/1}\sim F(1,1)$

三、计算题

1、在总体$N(12,4)$中随机抽一容量为5的样本X_1,X_2,X_3,X_4,X_5，求

(1) 样本均值与总体均值之差的绝对值大于1的概率；

(2) $P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)>15\}$，$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)<10\}$.

(1) $\overline{X}\sim N(12,4)\Rightarrow \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 即 $\dfrac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}\sim N(0,1)$

$P(|\overline{X}-\mu|>1)=1-P(|\overline{X}-\mu|\le 1)=1-P(-1\le\overline{X}-\mu\le 1)$

$=1-P\left(\dfrac{-1}{2/\sqrt{5}}\le\dfrac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}}\le\dfrac{1}{2/\sqrt{5}}\right)=1-\left(2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-1\right)$

$=2-2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=0.2628$

(2) $P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)>15\}$

$=1-P\{(X_1\le 15)(X_2\le 15)(X_3\le 15)(X_4\le 15)(X_5\le 15)\}$

$=1-\prod_{i=1}^{5}P(X_i\le 15)=1-[P(X_1\le 15)]^5$

$=1-\left[P\left(\dfrac{X_1-12}{2}\le\dfrac{15-12}{2}\right)\right]^5$

$=1-\left[\Phi\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]^5=1-(0.9332)^5=0.2923$

$P\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)<10\}$

$=1-P\{(X_1\ge 10)(X_2\ge 10)(X_3\ge 10)(X_4\ge 10)(X_5\ge 10)\}$

$=1-\prod_{i=1}^{5}P(X_i\ge 10)=1-\prod_{i=1}^{5}(1-P(X_i<10))$

$=1-(1-P(X_1<10))^5$

$=1-\left[1-P\left(\dfrac{X_1-12}{2}<\dfrac{10-12}{2}\right)\right]^5$

$=1-[1-\Phi(-1)]^5=1-[\Phi(1)]^5$

$=1-(0.8413)^5=0.5785$

2、设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$为总体$N(0,0.3^2)$的一个样本，求$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$.

$X_1,X_2\cdots X_n$为总体$N(0,0.3^2)$的一个样本

$\Rightarrow X_1,X_2\cdots X_n$相互独立且$X_i\sim N(0,0.3^2)$

$\Rightarrow \dfrac{X_i-0}{0.3}\sim N(0,1)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10}\left(\dfrac{X_i}{0.3}\right)^2=\dfrac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(10)$

$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\right)$

$=P\left(\dfrac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2>\dfrac{1.44}{0.09}\right)$

$=P\left(\dfrac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10}X_i^2>16\right)$

$=0.1$