习题 $1-F(x_1-0)$

$=1-P(X<x_1)=1-F(x_1-0)\Rightarrow F(x_1-0)=\alpha$

一、填空题

1、若 $P(X\le x_2)=1-\beta$, $P(X\ge x_1)=1-\alpha$，其中 $x_1<x_2$，则 $P(x_1\le X\le x_2)=$ $1-\beta-\alpha$

$=F(x_2)$ 　 $F(x_2)-F(x_1-0)$

2、设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 &, x<0\\ A\sin x, & 0\le x\le \pi/2\\ 1 &, x>\pi/2\end{cases}$$

$F(x)$连续 $\Rightarrow F(\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2}+0)\Rightarrow A\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow A=1$

$P\{|X|<\frac{\pi}{6}\}=P\{-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6}\}=F(\frac{\pi}{6})-F(-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}-0$

则 $A=$ 1，$P\left\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\right\}=$ $\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \Phi(\frac{4-2}{\sigma})-\Phi(\frac{2-2}{\sigma})=\Phi(\frac{2}{\sigma})-\Phi(0)=\Phi(\frac{2}{\sigma})-0.5=0.3\Rightarrow\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$

正态分布

3、若随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$ 且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ 0.2 .

$=\Phi(\frac{0-2}{\sigma})=\Phi(-\frac{2}{\sigma})=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})=1-0.8=0.2$

4、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\dfrac{1}{2}$，则 $\mu=$ 4 .

$y^2+4y+X=0$ 无实根 $\Rightarrow \Delta=4^2-4X<0$

$\Rightarrow X>4\Rightarrow P(X>4)=1-P(X\le4)=1-\Phi(\frac{4-\mu}{\sigma})=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \Phi(\frac{4-\mu}{\sigma})=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{4-\mu}{\sigma}=0\Rightarrow\mu=4$

5、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$p=P(X\le\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\le\dfrac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$ $\frac{9}{64}$.

$P(Y=2)=C_3^2\cdot(\frac{1}{4})^2\cdot(1-\frac{1}{4})^{3-2}=3\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$

二、选择题

$F(-x)=\int_{-\infty}^{-x}f(t)dt\xlongequal{令x=-t}\int_{+\infty}^{x}f(-s)d(-s)=-\int_{+\infty}^{x}f(s)ds=\int_{x}^{+\infty}f(s)ds$

1、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有[②].

$F(-x)+F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)ds+\int_{x}^{+\infty}f(s)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)ds=1\Rightarrow F(0)=\frac{1}{2}$

① $F(-a)=1-F(a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

② $P(|X|<a)=2F(a)-1$

③ $P(|X|>a)=2[1-F(a)]$

① $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$ 　　② $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx\xlongequal{令t=-x}\int_{+\infty}^{a}f(-t)d(-t)=\int_{a}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}-\int_0^a f(t)dt=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

③ $F(-a)=F(a)$ 　　④ $F(-a)=2F(a)-1$

2、设 $X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P\{X\le\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则[①].

$p_1=P(X\le\mu-4)=\Phi(\frac{\mu-4-\mu}{4})=\Phi(-1)$

$p_2=P(Y\ge\mu+5)=1-P(Y<\mu+5)=1-\Phi(\frac{\mu+5-\mu}{5})=1-\Phi(1)=\Phi(-1)$

① 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$ 　　② 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$

③ 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$ 　　④ 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$

3、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ [③].

① 单调增大　　② 单调减少　　③ 保持不变　　④ 增减不定

4、设 $X \sim N(3,2^2)$，且 $P\{X > c\} = P\{X \le c\}$，则 $c =$ [④].

$1-P(X\le c) \Rightarrow P(X>c)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\frac{c-3}{2}=0$

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3

7

5*、设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则随机变量 $Y = \min\{X,2\}$ 的分布函数[④].

$X \sim E(\lambda)$　$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$　$Y=\min\{X,2\}=\begin{cases}X & 0<X<2\\ 2 & X\ge 2\end{cases}$

① 是连续函数　　② 至少有两个间断点

③ 是阶梯函数　　④ 恰好有一个间断点　$x=0$

三、计算题

1、袋中有 5 只球，编号分别为 1，2，3，4，5. 在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律.

① $P(X=1)=P(X=2)=P(\phi)=0$

② $P(X=3)=1/C_5^3=\frac{1}{10}$

③ $P(X=4)=C_3^2\cdot 1/C_5^3=\frac{3}{10}$

④ $P(X=5)=C_4^2\cdot 1/C_5^3=\frac{3}{5}$

X	3	4	5
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

2、一大楼装有 5 个同类型的供水设备. 调查表明在任一时刻 t 每个设备被使用的概率为 0.1，问在同一时刻

（1）　恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

（2）　至少有 3 个设备被使用的概率是多少？

（3）　至多有 3 个设备被使用的概率是多少？

（4）　至少有 1 个设备被使用的概率是多少？

$X \sim B(5,0.1)$　$k=0,1,2,3,4,5$

$p_k=P_5(X=k)=C_5^k(0.1)^k(1-0.1)^{5-k}$

(1) A="恰有2个设备被使用"　$P(A)=P_5(X=2)=C_5^2(0.1)^2(1-0.1)^{5-2}=$

(2) B="至少有3个设备被使用"　$P(B)=P_5(X\ge 3)=\sum_{k=3}^{5}C_5^k(0.1)^k(1-0.1)^{5-k}$

(3) C="至多有3个设备被使用"　$P(C)=P_5(X\le 3)=\sum_{k=0}^{3}C_5^k(0.1)^k(1-0.1)^{5-k}$

(4) D="至少有1个设备被使用"　$P(D)=P_5(X\ge 1)=1-P_5(X<1)=1-P_5(0)$

$=1-C_5^0(0.1)^0(1-0.1)^5$

3、甲、乙两人投篮，投中的概率分别为0.6，0.7．今各投3次．求

（1）两人投中次数相等的概率；（2）甲比乙投中次数多的概率．

令A="甲投中" B="乙投中" $\Rightarrow$ 甲投中k次 $P_A(X=k)=C_3^k\cdot 0.6^k\cdot(1-0.6)^{3-k}$ $k=0,1,2,3$

乙投中k次 $P_B(X=k)=C_3^k\cdot 0.7^k\cdot(1-0.7)^{3-k}$

(1) "两人投中次数相等" = C

$\Rightarrow P(C)=\sum_{k=0}^{3} C_3^k\cdot 0.6^k\cdot 0.4^{3-k}\cdot C_3^k\cdot 0.7^k\cdot 0.3^{3-k}$

(2) D="甲比乙投中次数多"

$\Rightarrow P(D)=C_3^1\cdot 0.6\cdot 0.4^{3-2}\cdot C_3^0\cdot 0.7^0\cdot 0.3^3+C_3^2\cdot 0.6^2\cdot 0.4^1\left(C_3^0\cdot 0.7^0\cdot 0.3^3+C_3^1\cdot 0.7^1\cdot 0.3^2\right)$

$+C_3^3\cdot 0.6^3\cdot 0.4^0\left(C_3^0\cdot 0.7^0\cdot 0.3^3+C_3^1\cdot 0.7^1\cdot 0.3^2+C_3^2\cdot 0.7^2\cdot 0.3^1\right)$

4、某种型号的器件的寿命 X（以小时计）具有以下的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000\\ 0 & ，其它\end{cases}$$

现有一大批此种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取5只，问其中至少有2只寿命大于1500小时的概率是多少？

解 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1000}{t^2}dt=P(X\le x)$

$p=P(X>1500)=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3}$

A="至少有2只寿命大于1500小时"

$P(A)=P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_5^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-0}-C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-1}=\frac{232}{243}$

5、设 K 在区间（0，5）服从均匀分布，求 x 的方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率．

$4x^2+4kx+k+2=0$ 有实根 $\Rightarrow \Delta=(4k)^2-4\cdot 4(k+2)\ge 0 \Rightarrow k\le -1$ 或 $k\ge 2$

$k\sim U(0,5) \Rightarrow f(k)=\begin{cases}\frac{1}{5-0} & 0<k<5\\ 0 & 其它\end{cases}$

A="方程有实根"

$\Rightarrow P(A)=P((k\le -1)\cup(k\ge 2))=P(k\le -1)+P(k\ge 2)=0+1-P(k<2)$

$=1-F(k=2)=1-\int_0^2\frac{1}{5-0}dx=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

6、公共汽车车门的高度，是按男子于车门碰头的机会在 0.01 以下来设计的．设男子身高 X 服从 $\mu=168cm$，$\sigma=7cm$ 的正态分布，问车门的高度应如何确定？

$X \sim N(168, 7^2)$ 令 k=车门高度

$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) < 0.01$

$\Rightarrow P(X < k) > 1 - 0.01 = 0.99$

即 $\Phi\left(\frac{k-168}{7}\right) > 0.99$

$\Rightarrow \frac{k-168}{7} \geq 2.33 \Rightarrow k \geq 168 + 2.33 \times 7 = 184.31$

7、设随机变量 X 在（0，1）服从均匀分布．（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度；（2）求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度．

$X \sim U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1} & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

(1) $y = e^x$.

$F_Y(y) = P(e^x \leq y) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y) = \int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx\right)' = f_X(\ln y)\frac{1}{y}$

$= \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{y} & 0 < \ln y < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y} & 1 < y < e \\ 0 & 其它 \end{cases}$

(2) $y = -2\ln x$

$F_Y(y) = P(-2\ln X \leq y) = P(X \geq e^{-\frac{y}{2}}) = \int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{+\infty} f_X(x)dx$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(\int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{+\infty} f_X(x)dx\right)' = -f_X(e^{-\frac{y}{2}})e^{-\frac{y}{2}}(-\frac{1}{2})$

$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0 < e^{-\frac{y}{2}} < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0 < y < +\infty \\ 0 & 其它 \end{cases}$