习题五

一、填空题

1、设 X 是一随机变量，已知 $D(X)=0.09$，$E(X)$ 存在，若要求

$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}>0.9$，则 ε 至少是 $\sqrt{0.9}$.

2、若随机变量 X 服从在 $[-1,b]$ 上的均匀分布，且由切比雪夫不等式有 $E(X)=\frac{b-1}{2}$ $D(X)=\frac{(b+1)^2}{12}$

$P\{|X-1|<\varepsilon\}\geq\frac{2}{3}$，则 $b=$ 3 ，$\varepsilon\geq$ 2 .

3、设随机变量 X 的数学期望为 μ，方差为 $\sigma^2\neq0$，则 $P\{|X-\mu|<3\sigma\}\geq$ $\frac{8}{9}$.

4、设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为-0.5，则由切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y|\geq6\}\leq$ $\frac{1}{12}$.

令 $Z=X+Y \Rightarrow E(Z)=E(X)+E(Y)=0$

$D(Z)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

$=3$

$P\{|Z-0|\geq6\}\leq\frac{3}{36}$

二、选择题

1、已知随机变量 X 满足 $P\{|X-E(X)|\geq2\}\leq\frac{1}{16}$，则必有[②].

① $D(X)=\frac{1}{4}$　② $D(X)\geq\frac{1}{4}$　③ $P\{|X-E(X)|<2\}=\frac{15}{16}$　④ $D(X)<\frac{1}{4}$

2、设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 相互独立，且 $E(X_i)=1$，$D(X_i)=1$ $(i=1,2,\cdots,9)$，则对任何实数 $\varepsilon>0$，有[④].

$E(X_1+X_2+\cdots+X_9)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_9)=9$

$D(X_1+X_2+\cdots+X_9)$

$=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_9)=9$

① $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\varepsilon^2$　② $P\left\{\left|\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\varepsilon$

③ $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\varepsilon^{-2}$　④ $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\right\}\geq1-9\varepsilon^{-2}$

三、计算题

1、某车间有 100 台同类型的机器，每台机器出现故障的概率都是 0.02. 假设各台机器的工作是相互独立的，求机器出现故障的台数不少于 4 的概率.

$X\sim B(100,0.02)\Rightarrow np=100\times0.02=2$　$np(1-p)=100\times0.02(1-0.02)=1.96$

由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理得

$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$. 即 $\frac{X-2}{1.4}\sim N(0,1)$

$\Rightarrow P(X\geq4)=1-P(X<4)=1-P(\frac{X-4}{1.4}<\frac{4-2}{1.4})=1-\Phi(\frac{4-2}{1.4})\approx1-0.9236=0.0764$

2、（1）一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成．在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10．为了使整个系统起作用，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率．

（2）一复杂的系统由 n 个相互独立起作用的部件所组成．每个部件的可靠性为 0.90，且必须至少有 80%的部件工作才能使整个系统正常工作，问 n 至少为多大才能使系统的可靠性不低于 0.95？

(1) $X \sim B(100, 0.9)$

由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

$\Rightarrow \frac{100-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times(1-0.9)}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow P(X \geq 85) = P\left(\frac{X-90}{3} \geq \frac{85-90}{3}\right)$

$= P\left(\frac{X-90}{3} \geq -\frac{5}{3}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-90}{3} < -\frac{5}{3}\right)$

$= 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.9525$

(2) $X \sim B(n, 0.9)$

由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理

$\Rightarrow \frac{X-0.9n}{\sqrt{n\times0.9\times(1-0.9)}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow P(X \geq 0.8n) \geq 0.95$

即 $P\left(\frac{X-0.9n}{\sqrt{0.09n}} \geq \frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right) \geq 0.95$

$\Rightarrow 1 - P\left(\frac{X-0.9n}{\sqrt{0.09n}} < \frac{-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) \geq 0.95$

$\Rightarrow P\left(\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645 \Rightarrow n \geq 24.5$

又由 n 为正整数 $\Rightarrow n \geq 25$

3、计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数．设所有舍入误差是独立的且在（-0.5，0.5）上服从均匀分布．（1）若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？（2）最多有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90？

(1) $X_i \sim U(-0.5, 0.5) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & -0.5 < x < 0.5 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$E(X_i) = 0 \quad D(X_i) = \frac{1}{12}$

由列维—林德伯格中心极限定理

$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 1500\times0}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow P\left(\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| > 15\right) = 1 - P\left(\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| \leq 15\right)$

$= 1 - P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 1500\times0}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}}\right| \leq \frac{15-1500\times0}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}}\right)$

$= 1 - \left[2\Phi\left(\frac{15-1500\times0}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}}\right) - 1\right]$

$= 2 - 2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right) \approx 0.1802$

(2) $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right) \geq 0.9$

即 $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\times0}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\right| < \frac{10-n\times0}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\right) \geq 0.9$

$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \geq 0.9$

即 $\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95$

$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.645 \Rightarrow n \leq 443$