《信号与系统》知识点总结

北京交通大学电子信息工程学院　程铁平
2009.6

0. 前言

本文的目的是帮助《信号与系统》课程学习者整理知识。它适合于对《信号与系统》已经建立起一定的框架，但可能对某些问题感到模糊或困惑的人阅读。本文也试图对一些类型的计算题给出机械的标准化的解法。过于容易，或不太可能被考试题考察的知识点在此省略。知识点基本上按照章来组织和编号。但是如果不同的章有相类似的知识点，我将把它们合并成一个，然后用字母 M (mixed)开头编号。

另外大家要注意将本文和教材结合起来看。它的目的是整理思路，因此不能对它期望过多。

符号*表示卷积，而不是乘法。

1. 第 1 章

1.1 能量信号和功率信号

请阅读教材第 4 页。

1.2 系统的线性和非线性，时不变和时变，因果和非因果

请阅读教材相关内容。这里，我对系统的线性和非线性给出我的一点个人看法。严格地说来，系统是否线性指的是系统的输出对输入满足齐次性和叠加性。按照这个标准，如果系统的输出和某个系统的“初始状态”有关，即其不能视为一个线性系统。但是，很多教材都从实用的角度出发，将线性的定义放宽为允许将初始状态看做一种特殊的输入，因而很多按照原来定义不是线性的系统成为了线性系统。在第 3 章我还要对此问题作进一步的阐述。

2. 第 2 章

2.1 冲激信号的性质

筛选特性、抽样特性、展缩特性，即教材中公式（2-21），（2-22），（2-23）必须在理解的基础上记忆。冲激信号δ（t）不是一般意义上的信号，而是一种理想化的“信号”，在数学上它是一广义函数。我们无法离开冲激信号因为它为我们的推导和思维提供了很多方便。冲激信号虽然在物理上不存在，但如果一个物理信号取到非 0 值的时间集中在某个瞬时，就可用冲激信号近似。不过要注意脉冲信号δ[k]却是完完全全的一般意义上的信号。

2.2 信号的尺度变换、翻转与时移图示解题方法

对这种类型的题目。针对信号是连续或离散应采用不同的解题步骤。

对于连续信号，大家应仔细阅读教材中的例子，特别是例 2-6。建议严格按照例 2-6 的步骤做。对折线波形可以用一个小技巧：把所有的关键点在新图画出其对应点，然后将他们连接起来。

对于离散信号，可直接根据自变量的值算出函数值，然后在图上标出即可。一般来说，需要画的值没几个。

2.3 积分与 u(t)，累加和与 u[k]

若 g(t)是 f(t)从-∞开始积分到 t 得到的积分信号。则 g(t)=f(t)∗u(t)。

若 g(t)是 f(t)从 0-开始积分到 t 得到的积分信号。则 g(t)=f(t)u(t)∗u(t)。

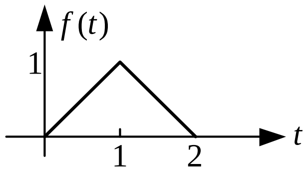
若 g[k]是 f[k]从-∞开始累加到 k 得到的信号。则 g[k]=f[k]*u[k]。

若 g[k]是 f[k]从 0 开始累加到 k 得到的信号。则 g[k]=f[k]u[k]*u[k]。

2.4 根据信号波形写出表达式解题方法

连续情形：我的个人看法是绝大多数情况下，求导法是好方法。逐步求导，直到导数信号由冲激和矩形构成。要注意从导数信号积分得到原信号存在一个常数问题。

【例】写出下列波形的用基本信号表示的表达式。



解：采用导数法。首先画出 $f'(t)$ 的波形（这里省略）。从导数信号的图可以写出：

$$f'(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)\text{。}$$

因此，$f(t)=r(t)-2r(t-1)+r(t-2)+C$，这里 C 为待定常数。从图看出 $f(-\infty)=0$，而因为 $r(-\infty)=0$，故应有 $C=0$。即 $f(t)=r(t)-2r(t-1)+r(t-2)$。

考题不太可能出离散情况，但是出了也不用怕，因为离散序列可以用δ[k]及其移位线性组合得来。

3. 第 3 章

3.1　LTI 系统的时域描述

由线性常系数微分（差分）方程描述的系统是连续（离散）线性时不变系统。但是反过来不成立，比如延迟环节 $y(t)=x(t-t_0)$就不能用微分方程描述。

微分方程形式：$y^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_i y^{(n-i)}(t)=b_0x^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}b_i x^{(n-i)}(t)$

差分方程形式：$y[k]+\sum_{i=1}^{n}a_i y[k-i]=b_0x[k]+\sum_{i=1}^{n}b_i x[k-i]$

说它们是 LTI 的可以这么理解：

1）如果该系统起作用（即工作）的时间范围是双边的，即 $(-\infty,\infty)$，相应地输入信号 x(t)和输出信号 y(t)都定义在 $(-\infty,\infty)$ 上，则该系统是 LTI 系统。

2）如果该系统起作用（即工作）的时间范围是$[0,\infty)$，相应地输入信号 x(t)和输出信号 y(t)都定义在$[0,\infty)$上，则从线性的原始定义出发，该系统是有条件的 LTI 系统。其条件是 y(0-)，y'(0-)，…，$y^{(n-1)}$(0-)均为 0（对连续系统）；y[-1]，y [-2]，…，y[-n]均为 0（对离散系统）。如果把初始状态也视为某种扩展的“输入”，则系统对输入信号和“初始状态输入”是线性的，从这个意义上把该系统视为 LTI 系统。

3）前面已述如果系统处于零初始状态（initially at rest, IR），则该系统为 LTI 系统（即使按照原来的严格标准）。这可以有两种理解：A)将系统理解为从双边信号到双边信号的 LTI 系统；如果采用这种理解，则需扩充 x(t)和 y(t)的定义为当 t<0 时，x(t)=0, y(t)=0。B)将系统理解为从 0 始信号到 0 始信号的 LTI 系统；如果采用这种理解，则无需扩充相关信号的定义域，但须修改时不变性定义，规定时间位移只能是非负的（因为负的时间位移会破坏信号的 0 始性）。

3.2　0-的含义

0- 不是一个独立的值，它一定是和函数联系在一起的。正式定义：$f(0-)=\lim_{t<0,t\to 0} f(t)$。即 f(0-)是 f(t)在 t=0 处的左极限。为方便起见，我们有时也说 f(0-)是 f 在 0-的值。

3.3　求 LTI 系统零输入响应解题方法

连续情形解题步骤：

1） 写出特征方程，求出特征根。
2） 根据特征根写出响应的含有待定系数的表达式。注意有重根，共轭复根的情况。还要注意表达式中不含有 u(t)，但后面要加注 t≥0-。
3） 根据 y 及其各阶导数在 0-的值，求出所有待定系数。
4） 写出零状态响应的明确表达式，注意最后要加注 t≥0-。

离散情形解题步骤：

1） 写出特征方程，求出特征根。
2） 根据特征根写出响应的含有待定系数的表达式。注意有重根，共轭复根的情况。还要注意表达式中不含有 u[k]，但后面要加注 k≥-n。其中，n 为方程的阶数。
3） 根据 y[-1],…y[-n]的值，求出所有待定系数。
4） 写出零状态响应的明确表达式，注意最后要加注 k≥-n。

3.4　求 LTI 系统冲激响应/脉冲响应解题方法

连续情形解题步骤：

1） 写出特征方程，求出特征根。
2） 根据特征根写出冲激响应 h(t)的含有待定系数的表达式。注意有重根，共轭复根的情况。还要注意表达式为某个叠加起来的式子乘以 u(t)。如果微分方程等式两端的最高求导阶数相同，在 h(t)中还会含有冲激信号项。
3） 将原微分方程右端的所有输入信号 x(t)用δ（t）替换，将微分方程左端的输出信号 y(t)用 h(t)替换。
4） 将如此得到的微分方程用冲激平衡法即“等式两端的δ（t），δ’（t），…的相应系数必须相等”确定所有的待定系数。注意在这个过程中要充分利用冲激信号的筛选特性。
5） 写出 h(t)的明确表达式。

请仔细阅读教材 86，87 页的两个例子。不过我个人观点，在两个例子中，t≥0 都可以去掉。

离散情形解题步骤：

1） 写出特征方程，求出特征根。
2） 根据特征根写出脉冲响应 h[k]的含有待定系数的表达式。注意有重根，共轭复根的情况。还要注意表达式为某个叠加起来的式子乘以 u[k]。如果差分方程等式两端的最大延迟相同，在 h[k]中还会含有δ [k]项。
3） 将原差分方程右端的所有输入信号 x[k]用δ[k]替换，将微分方程左端的输出信号 y[k]用 h[k]替换。
4） 将如此得到的差分方程用 k=0,k=1,…代入，解出所有的待定系数。
5） 写出 h[k]的明确表达式。

我这里用教材 103 页的例子进行补充说明。

【例】某离散时间 LTI 系统的差分方程为 y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=x[k]。求系统的单位脉冲响应 h[k]。

解：系统的特征方程为 $r^2+3r+2=0$。解得特征根为 $r_1=-1$，$r_2=-2$。单位脉冲响应的形式为

$h[k]= [C_1(-1)^k+C_2 (-2)^k]u[k]$。

从原方程得到 h[k]+3h[k-1]+2h[k-2]=δ[k]。分别用 k=0, k=1 代入得

$h[0]=C_1 +C_2 =1$，

$-C_1-2C_2+3h[0]=0$。 解得 $C_1=-1$， $C_2=2$。

因此，系统的单位脉冲响应为 $h[k]= [-(-1)^k+2 (-2)^k]u[k]$。

个人觉得教材 103 页把第 4 步其实是如此简单的方法不必要地复杂化了。

3.5 求 LTI 系统的全响应

全响应 = 零输入响应+零状态响应 = 零输入响应+输入*冲激（脉冲）响应。

在最后给出全响应表达式时，要加注 t≥0-（连续），k≥-n（离散）。

【注】零输入响应是由系统的初始状态引起的响应，由于比初始状态更早的 y 的值我们并不知道，而且也不需要知道，因此我们只能把零输入响应看作有始信号，在正确的前提下可将开始时间尽量选得早一点，对连续系统选 0-，对离散系统选-n（n 为差分方程的阶）比较好。因此，零输入响应在解题时一般写成

$y_{zi}(t)=$某表达式，$t\ge 0^-$　　（连续）

$y_{zi}[k]=$某表达式，$k\ge -n$　　（离散）

对于零状态响应（包括冲激响应），我们既可以把它理解为从 0 时刻开始的信号，也可以把它理解为双边信号。在采用后者时，t<0 时的值用 0 填充。我倾向于采用后者。这样，在解题时零状态响应一般写成

$y_{zs}(t)=$某表达式$\cdot u(t)$　　（连续）

$y_{zs}[k]=$某表达式$\cdot u[k]$　　（离散）

3.6 齐次解和特解

前面给出的线性微分（差分）方程，如果将方程右端置为 0，所得到的方程被称为原方程的齐次方程。即

$$y^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_i y^{(n-i)}(t)=0 \qquad \text{（连续）}$$

$$y[k]+\sum_{i=1}^{n}a_i y[k-i]=0 \qquad \text{（离散）}$$

线性微分（差分）方程所对应的齐次方程的解称为齐次解。由此可见，齐次解一般不是原方程的解。齐次解有无穷多个，它们构成一个线性空间。“特解”这个名词根本不是什么数学概念，用某种方法求出的一个具体的原方程的解就称为一个特解。因此，不存在哪些解是特解，哪些解不是特解这样的说法。任何一个解，只要被求出了，就可以称为是一个特解。“特解”这个名词的出现，主要是基于线性微分（差分）方程的这么一个性质：只要求出一个解（称为“特解”），则方程的所有解都可以表示为该特解与一齐次解之和。

零输入响应是该线性微分（差分）方程的一个齐次解。

3.7 固有响应和强制响应

定义见教科书 96 页。Oppenheim 的教材没有提及这对概念；而在 Haykin 的教材中，固有响应=零输入响应，强制响应=零状态响应。按照我们的教科书的定义，零输入响应构成固有响应的一部分，而在零状态响应中也包含一部分固有响应。我们的定义在绝大多数情况下是没有歧义的。但是如果输入信号中含有对应于系统的特征根的指数信号，则固有响应和强制响应难以区分。

3.8 卷积的性质

需要特别注意卷积的平移特性以及任意信号与延时冲激信号卷积的延时特性，在计算时经常会用到。建议用 Laplace 变换的观点把卷积积分的微分特性，积分特性，等效特性统一在一起。

3.9　卷积积分表

$$a \neq b: \quad e^{at}u(t) * e^{bt}u(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}u(t)$$

$$e^{at}u(t) * e^{at}u(t) = e^{at}r(t)$$

$$r(t) * u(t) = \frac{t^2}{2}u(t)$$

如果在此表中找不到可用公式，可利用 Laplace 变换的卷积特性求。此表应结合卷积的性质使用。

3.10　卷积和表

$$a \neq b: \quad a^k u[k] * b^k u[k] = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}u[k]$$

$$a^k u[k] * a^k u[k] = (k+1)a^k u[k]$$

如果在此表中找不到可用公式，可利用 z 变换的卷积性质求。此表应结合卷积的性质使用。

3.11　求有限长度序列卷积和的列表法

非常好用的方法，一定要掌握。

M.　Mixed

在这里我把 Fourier 级数、Fourier 变换、离散 Fourier 级数、离散时间 Fourier 变换、Laplace 变换、z 变换统称为六大变换。然后在这里列出它们的相类似性质。各大变换都有线性特性，由于其太简单，不提。

M.1 六大变换的定义

变换名称	针对信号	正变换公式	反变换公式
Fourier 级数	连续周期（设周期为 T）	$C_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{<T>}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$，$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$	$x(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}$
Fourier 变换	连续	$X(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$	$x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}dt$
离散 Fourier 级数	离散周期（设周期为 N）	$X[m]=\displaystyle\sum_{k=<N>}x[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$	$x[k]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{m=<N>}X[m]e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$
离散时间 Fourier 变换	离散	$X(\Omega)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j\Omega k}$	$x[k]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega k}d\Omega$
Laplace 变换	连续	$X(s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$	$x(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$
z 变换	离散	$X(z)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}$	$x[k]=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\oint_C X(z)z^{k-1}dz$

【注 1】为了突出时域和频域的互易对称性，并在计算频域卷积时明确谁是自变量，这里将频谱函数的自变量都记为ω，Ω。我们将使用不同的符号表示同一信号的 Fourier 变换和 Laplace 变换如果它们同时放在一起讨论。不过在本文中好像没有这样的情况。

【注 2】在上面变换中，（连续）Fourier 级数是唯一的在反变换公式中无需系数，而在正变换公式中有系数的。注意到这一点可以防止我们粗心做错某些题目。

【注 3】对 Laplace 和 z 变换在这里我们暂时只考虑双边的。单边的各知识点在各自所属章中列出。

M.2 六大变换的时移特性

时间域的位移对应于在（复）频域乘以一个因子。如将信号在时间延后 t_1，则在变换域所乘的因子就是将正变换公式中积分核中的 t 替换成 t_1 即可。

M.3 六大变换的卷积特性

对于适用于一般非周期信号的 Fourier 变换、离散时间 Fourier 变换、Laplace 变换、z 变换，时域卷积对应于变换域乘法。

对于 Fourier 级数，时域卷积积分改为时域周期卷积积分。两个都以 T 为周期的信号 f(t)，g(t)，其 Fourier 系数分别为 $C_{f,n}$ 和 $C_{g,n}$。如果 y(t)是 f(t)，g(t)以 T 为周期的周期卷积，则 y(t)的 Fourier 系数为 $TC_{f,n}C_{g,n}$。。

对于离散 Fourier 级数，时域卷积和改为时域周期卷积和。两个都以 N 为周期的信号 f[k]，g[k]，其离散频谱分别为 F[m]和 G[m]。如果 y[k]是 f[k]，g[k]以 N 为周期的周期卷积，则 y[k]的离散频谱为 F[m]G[m]。。

M.4 六大变换的频移特性

六大变换都具有频移特性。教材中介绍了 Fourier 级数、Fourier 变换、离散 Fourier 级数、离散时间 Fourier 变换的频移特性。对于 Laplace 变换和 z 变换，频移特性变成了指数加权特性。

M.5 六大变换的乘积特性

基本上，时域乘法对应于变换域的卷积（或周期卷积），只不过卷积后还要乘以某个系数，该系数就是反变换公式中的那个系数。对于 Laplace 变换和 z 变换，复频域卷积的公式较复杂一些，由于用得很少，不提。

M.6 六大变换的展缩特性

以 Fourier 变换为例，$x(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{\omega}{a})$ 。

M.7 三大时域连续变换的时域微分特性

Fourier 级数、Fourier 变换、Laplace 变换这三种变换的时域信号都是连续的，他们具有相似的时域微分特性。这可以从它们的反变换公式推导出来。

Fourier 级数：　$x'(t) \leftrightarrow jn\omega_0 C_n$

Fourier 变换：　$x'(t) \leftrightarrow j\omega \overline{X}(\omega)$

Laplace 变换：　$x'(t) \leftrightarrow sX(s)$

M.8 四大频域连续变换的频域微分特性

Fourier 变换、离散时间 Fourier 变换、Laplace 变换、z 变换这四种变换的频域函数都是连续的，他们具有相似的频域微分特性。这可以从它们的正变换公式推导出来。

Fourier 变换：　$-jtx(t) \leftrightarrow \dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$

离散时间 Fourier 变换：　$-jkx[k] \leftrightarrow \dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

Laplace 变换：　$tx(t) \leftrightarrow -\dfrac{dX(s)}{ds}$

z 变换：　$kx[k] \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

4. 第 4 章

4.1 连续实周期信号的 Fourier 级数三角形式

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{<T>}x(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{<T>}x(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

4.2 连续周期信号计算 C_n 方法

1） 有可能能够根据信号表达式直接写出它的 Fourier 展开式，这样可直接写出 C_n。

2） 在教材中已经有周期矩形的 C_n 表达式，可以结合 Fourier 级数的时移特性使用。

3） 如果信号为实偶对称，则先计算其三角形式的 Fourier 级数，然后再写出 Fourier 系数 C_n。

4） 否则就只能硬着头皮用定义式去做。

4.3 具有某种对称性的连续周期信号的频谱特征

实偶对称　$\Leftrightarrow$　Fourier 频谱也是实偶对称，Fourier 三角级数只有直流和余弦项

实奇对称　$\Leftrightarrow$　Fourier 三角级数只有正弦项

半波重叠　$\Leftrightarrow$　Fourier（三角）级数只有偶次项

半波对称　$\Leftrightarrow$　Fourier（三角）级数只有奇次项

其实，半波重叠意味着它的周期还可以缩小一半，即从 T 变成 T/2。

4.4 连续周期信号的功率谱

请看教材 147 页。

4.5 Fourier 变换的对称特性

书上关于这个写了很多，但是我们不可能也不必要全记。只需记住最有用的：如果实信号

$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$，则 $x_e(t)\leftrightarrow \mathrm{Re}[X(\omega)]$，$x_o(t)\leftrightarrow \mathrm{jIm}[X(\omega)]$。

4.6 Fourier 变换的互易对称特性

这个性质很有用。如果 $x(t)\leftrightarrow X(\omega)$，则 $X(t)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$。

4.7 Fourier 变换的积分特性

如果 $x'(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$，则 $x(t) \leftrightarrow \pi[x(\infty)+x(-\infty)]\delta(\omega)+\dfrac{X_1(\omega)}{j\omega}$。

4.8　Fourier 变换的 Parseval 定理

即信号的总能量既可以在时域计算，也可以在频域计算。

$$\text{Total Energy} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$$

由此引发一个有效带宽的概念：如果 $\dfrac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_B}^{\omega_B} |X(\omega)|^2\, d\omega}{\text{Total Energy}} = 0.95$，则 ω_B 称为该信号的有效带宽。

4.9　Fourier 变换表

教科书 158 页。这个没有办法，只能死记了。我以前的想法是可以只记最基本的，然后剩下的可以从最基本的导出，但是我现在发现考试的题量很大，如果不直接记住所有的公式肯定会损失做题速度。特别要注意记住矩形和 Sa 的频谱。

4.10　连续周期信号的 Fourier 变换

本来按照 Fourier 变换的原始定义，除非是零信号，否则一般周期信号是没有 Fourier 变换的。但是在允许频域冲激函数后，周期信号也有 Fourier 变换了。如果周期为 T 的信号 x(t)其 Fourier 系数为 C_n，则 $x(t) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi C_n \delta(\omega - n\omega_0)$。

4.11 离散周期信号计算频谱方法

有可能能够根据信号表达式直接写出它的 Fourier 展开式，这样可直接写出 X[m]。否则只能硬着头皮用定义式做。注意在写 X[m]时要体现出它是以 N 为周期的。你可以只写一个周期，但是你不能把该周期以外的写成全为 0。

4.12 具有某种对称性的离散周期信号的频谱特征

见教材 177 页。但是考到的可能性不大。

4.13 离散周期信号的 Parseval 定理

见教科书 178 页。

4.14　离散时间 Fourier 变换的对称特性

书上关于这个写了很多，但是我们不可能也不必要全记。只需记住最有用的：如果实信号

$x[k] \leftrightarrow X(\Omega)$，则 $x_e[k] \leftrightarrow \mathrm{Re}[X(\Omega)]$，$x_o[k] \leftrightarrow \mathrm{jIm}[X(\Omega)]$。

4.15 离散信号的 Parseval 定理

$$\text{Total Energy} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2\, d\Omega$$

4.16 离散时间 Fourier 变换与 Fourier 变换的关系

离散信号工程上大多来源于对连续信号的采样。因此，一个离散信号 x[k]，对应于连续信号

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT)$$

其中，T 为采样周期，下标 c 表示连续（continuous）。对上面的 $x_c(t)$进行 Fourier 变换，得到

$$X_c(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega Tk}$$

如在上式的等式右端将ωT 用Ω替代，则得到 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$，而这就是 x[k]的离散时间 Fourier 变换的定义式。

4.17 抽样和周期化

对连续信号 x(t)以 T 为周期进行抽样，在数学上描述为：

$$x(t) \quad (\text{sampling}) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)\text{。}$$

对函数 f(ω)进行以ω_0为周期的周期化，在数学上描述为：

$$f(\omega) \quad (\text{periodization}) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega+n\omega_0)\text{。}$$

大家必须理解抽样和周期化的直观意义。周期化其实是把不同的周期都叠加在一起。可以结合 189 页的图形去理解周期化。

4.18 抽样定理

对 x(t)以周期 T 进行时域抽样，在频域上相当于从 $X(\omega)$ 得到

$$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * F[\delta_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_{sam})\text{，其中 } \omega_{sam} = \frac{2\pi}{T}\text{。}$$

即在频域对 $X(\omega)$ 进行以ω_{sam}为周期的周期化然后除以 T。如果原信号频谱中含有$\omega_{sam}/2$ 或更高的成份，则在频谱周期化时会出现频谱混叠(aliasing)，从而使得从周期化后的频谱恢复原频谱成为不可能。因此，要避免出现频谱混叠，必须要求原信号频谱的最大频率$\omega_m < \omega_{sam}/2$，或者反过来说，$\omega_{sam} > 2\omega_m$ 。换言之，采样频率必须大于信号最高频率的两倍才能避免频谱混叠。这就是抽样定理。

严格来说信号频谱一般是没有最高频率的，但是从实用角度可认为有效带宽或更高一点的频率是信号的最高频率。在考题中经常考到的：

如果 f(t)的最高频率为ω_m，则 f(at)的最高频率为 $a\omega_m$。

$f_1(t)f_2(t)$，　　最高频率为 $\omega_{m1} + \omega_{m2}$

$f_1(t)*f_2(t)$，　　最高频率为 $\min(\omega_{m1}, \omega_{m2})$

$f_1(t)+f_2(t)$，　最高频率（一般情况下）为 $\max(\omega_{m1}, \omega_{m2})$。

5. 第 5 章

5.1 稳定系统的频率响应

只有稳定系统才有频率响应。得到频率响应的方法：1）从系统的微分（差分）方程；2）从系统的冲激（脉冲响应）做 Fourier（离散时间 Fourier）变换。

5.2 信号通过稳定系统的响应的频域解法

将此信号的频谱与系统的频率响应相乘，然后进行（Fourier/离散时间 Fourier）反变换得到响应。书上 215 页例 5-3 说的是求系统的零状态响应。其实没有必要，因为这里的假设是系统工作和信号的时间范围为（-∞，∞），也就不存在初始状态的问题。

5.3 正弦型信号通过稳定系统的响应

请阅读教科书 219 页，229 页。

5.4 无失真传输系统

传递函数 $Ke^{-t_d s}$ 。

5.5 各种滤波器

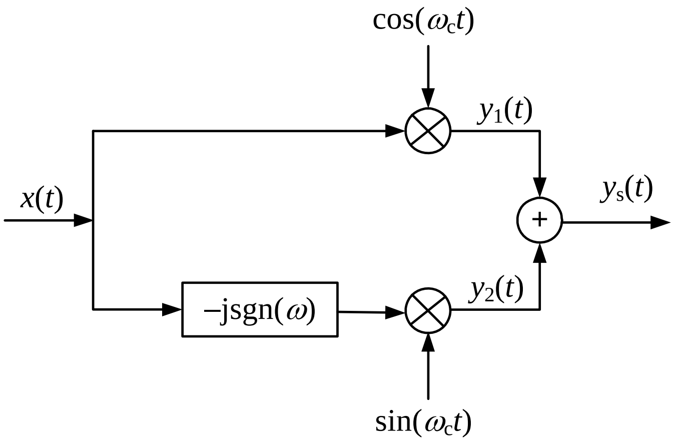
理想（模拟/数字）低通、高通、带通、带阻滤波器的频率响应。注意它们都是无法物理实现的，只能实现具有近似功能的滤波器。

5.6 Hilbert 变换器

Hilbert 变换的“变换”和 Fourier，Laplace 变换中的“变换”不是一回事。在后者，变换涉及到从时域到其他域，而 Hilbert 变换不涉及域的变化。其实 Hilbert 变换器是一个特殊的 LTI 系统，它的频率响应为 $H(\omega)= -j\mathrm{sgn}(\omega)$。因而其冲激响应为 $h(t)=1/(\pi t)$。由于 $h(0)=\infty$，因此 Hilbert

变换器应该也是不能物理实现的，只能实现它的某种近似。

5.7　用 Hilbert 变换器实现 SSB



记 x(t)的频谱为 $X(\omega)$，y_1(t)的频谱为$Y_1(\omega)$，y_2(t)的频谱为$Y_2(\omega)$，y_s(t)的频谱为$Y_s(\omega)$。

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]=\frac{1}{2}[X(\omega+\omega_c)+X(\omega-\omega_c)]$$。

$$\begin{aligned}Y_2(\omega)&=\frac{1}{2\pi}[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)]*j\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]\\&=\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)]*[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]\\&=\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)X(\omega+\omega_c)-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c)X(\omega-\omega_c)]\end{aligned}$$。

$$Y_s\omega)=Y_1(\omega)+Y_2(\omega)=\frac{1}{2}[(1+\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c))X(\omega+\omega_c)+(1-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c))X(\omega-\omega_c)]$$

设 $X(\omega)$ 的最高频率为ω_m，一般来说，$\omega_m << \omega_c$。

1） 当$\omega > \omega_c$，此时 $X(\omega+\omega_c)=0$，$1-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c)=0$，因此$Y_s(\omega)=0$。

2） 当$\omega < -\omega_c$，此时 $X(\omega-\omega_c)=0$，$1+\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)=0$，因此$Y_s(\omega)=0$。

3） 当 $-\omega_c+\omega_m < \omega < \omega_c-\omega_m$，此时 $X(\omega+\omega_c)=0$，$X(\omega-\omega_c)=0$，因此$Y_s(\omega)=0$。

这说明调制后的信号 y_s(t)占据频带 $\omega_c-\omega_m \sim \omega_c$，频带宽度为$\omega_m$，与原信号 x(t)的频带宽度相同。这是下边带调制。

如果 Hilbert 移相器的频率响应改为 jsgn(ω)。则

$$Y_s(\omega)=\frac{1}{2}[(1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c))X(\omega+\omega_c)+(1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c))X(\omega-\omega_c)]$$

1） 当 $-\omega_c < \omega < \omega_c$，此时$1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)=0$，$1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c)=0$，因此$Y_s(\omega)=0$。

2） 当$\omega > \omega_c+\omega_m$，此时$1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_c)=0$，$X(\omega-\omega_c)=0$，因此$Y_s(\omega)=0$。

3） 当$\omega < -\omega_c-\omega_m$，此时$1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_c)=0$，$X(\omega+\omega_c)=0$，因此$Y_s(\omega)=0$。

这说明调制后的信号 $y_s(t)$占据频带 $\omega_c \sim \omega_c+\omega_m$，频带宽度为$\omega_m$，与原信号 x(t)的频带宽度相同。这是上边带调制。

6. 第 6 章

6.1 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系

按照 Fourier 变换的原始定义，只有绝对可积（此外还需满足一些正则性条件）的信号才有 Fourier 变换。这样的定义不足以将许多重要信号纳入，例如周期信号。 通过推广定义，允许频谱函数为广义函数，即可以出现频域冲激后，大多数周期信号有了 Fourier 变换。但是，在 Fourier 变换的框架内无法将随时间增长的信号纳入。这就需要引入新变换，即 Laplace 变换。Laplace 变换的基本思想是首先将原信号进行指数衰减，使衰减后的信号满足绝对可积条件，然后进行 Fourier 变换。由于衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 在 t<0 时反而成了增长因子，所以，为了保证收敛性，Laplace 变换往往要求信号从某个时间开始，在开始时间之前的信号值规定为 0。实际上，工程上往往使用单边 Laplace 变换来保证收敛性。换言之，Laplace 变换基本上只能处理单边的随时间增长信号。Laplace 变换着重于处理单边信号，这和 Fourier 变换是不同的。此外，Laplace 变换不允许在复频域出现冲激函数（它也用不着这样做），这也和 Fourier 变换不同。

Laplace 变换的应用场合：对任意 LTI 系统（无论其是否稳定）的冲激响应，其 Laplace 变换均存在。而 Fourier 变换做不到这一点。这使得在控制领域，Laplace 变换比 Fourier 变换更适合于系统分析，因为被控对象和闭环系统都可能出现不稳定。Laplace 变换用于求解线性微分方程的解也很方便。用这种方法所有的运算中出现的系数为实数。而如果用 Fourier 变换（假如能用）则会出现复系数，不必要地增加复杂性。

Fourier 变换的应用场合：信号的 Fourier 频谱有明确的物理意义。因此，在信号分析中更多地使用 Fourier 变换。通信系统一般不存在稳定性问题，而且通信系统的功能往往是频谱变换。因此通信系统的分析更多地使用 Fourier 变换。

6.2 单边 Laplace 变换的定义

现实中一个系统总有开始工作的时间，我们把该时间规定为 0。在这之前，此系统的各个物理量的演化过程我们无法也无需知道。所以工程上我们总是使用单边的 Laplace 变换，这样做而且能保证复频谱函数的收敛性。

我倾向于将信号 x(t)的单边 Laplace 变换定义为

$$L_u[x(t)]=L[x(t)u(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)u(t)e^{-st}dt \text{。}$$

下标 u 表示单边（unilateral），没有下标的 L 表示双边 Laplace 变换。注意这里的 u(t)必须定义成当 t≥0 时，u(t)=1；当 t<0 时，u(t)=0。由于这里规定了 u(0)=1，因此发生在 0 时刻的 x(t)的冲激，冲激偶等等“奇异事件”都被包括在积分内。除非是在非常病态的情况下，该定义和教科书的定义是等价的： $L_u[x(t)] = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt := \lim_{\varepsilon<0,\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ 。

6.3 单边 Laplace 变换与双边 Laplace 变换特性的比较

在 M 中给出的双边 Laplace 变换的性质大部分能够被单边 Laplace 变换继承。有几点例外：

1） 时移特性不能被简单继承。

2） 要继承卷积特性，必须要求两个信号均为单边信号。

3） 时域微分特性不能被简单继承。

6.4 单边 Laplace 变换的时移特性

如果原信号是单边信号，则右移不会破坏单边性，可以继承双边 Laplace 变换的时移特性。单边信号的左移，以及非单边信号无论是左移还是右移，都不能继承双边 Laplace 变换的时移特性。

6.5 单边 Laplace 时域微分特性

$$L[x'(t)u(t)] = sX(s) - x(0-)$$

$$L[x^{(n)}(t)u(t)] = s^n X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i x^{(n-1-i)}(0-)$$

6.6 单边 Laplace 时域积分特性

书上 299 页公式（6-31），（6-32）。

6.7 Laplace 变换初值和终值定理

$$x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s),\quad x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

6.8 Laplace 变换表

书 262 页

6.9 部分分式法求 Laplace 反变换

书 272-276 页。

6.10 连续 LTI 系统响应的 Laplace 变换法求解

将 LTI 微分方程等式两端作单边 Laplace 变换，利用单边 Laplace 变换的时域微分特性，将原

微分方程转化成复频域的代数方程，求解出响应的复频谱，然后进行反变换求出响应。

6.11 连续 LTI 系统稳定性判断

系统函数的极点全部具有负实部为稳定。

7. 第 7 章

7.1　单边 z 变换与双边 z 变换的比较

在 M 中给出的双边 z 变换的性质大部分能够被单边 z 变换继承。有几点例外：

1） 时移特性不能被简单继承。

2） 要继承卷积特性，必须要求两个信号均为单边信号。

7.2　单边 z 变换的时移特性

书 312 页的公式（7-10）特别重要，因为在解差分方程时要用到。

$$Z\{x[k-n]u[k]\}=z^{-n}[X(z)+\sum_{k=-n}^{-1}x[k]z^{-k}]$$

7.3　z 变换初值和终值定理

$$x[0]=\lim_{z\to\infty}X(z)，\quad x[\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

7.4　z 变换表

可以只记两个：

$$a^k u[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$(k+1)a^k u[k]\leftrightarrow\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$$

7.5　部分分式法求 z 反变换

书 320-321 页。用 z^{-1} 的分解法计算量小一些，教材就是用这种方法。要分解到分母为 1 阶因子或一阶因子的平方。

7.6 离散 LTI 系统稳定性判断

系统函数的极点全部在单位圆内为稳定。

8. 第 8 章

8.1　从 RLC 电路推导状态方程

步骤：

1）对每个电容/电感，选电容的电压/电感的电流为状态变量。

2）写出各个器件方程，并根据 KCL，KVL 写出方程。如有必要可设多个中间变量，中间变量要选得和尽量多的变量有关系。

3）以状态变量、输入变量为已知量，状态变量导数、中间变量为未知量求解方程组。这就要求方程个数和未知量个数相同，这肯定是能够做到的，如果不够要检查漏掉什么关系。注意：不能因为状态变量为已知量就说状态变量导数也是已知量！ 因为状态方程的右端只能出现代数运算而不能出现导数运算！

4）整理前面的结果。写出矩阵形式的状态方程。

5）写出输出方程。注意输出变量只是在这个阶段才开始起作用！

8.2　从系统函数画直接型框图

此方法对于连续系统和离散系统是基本相同的。

1）写出以 s^{-1} 或 z^{-1} 表示的系统函数。形如

$$\frac{b_0+b_1s^{-1}+b_2s^{-2}+\cdots+b_ns^{-n}}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}+\cdots+a_ns^{-n}}$$

$$\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

2）画出主前向通路：前加法器、n 个积分器（延迟器）、1 个常数增益 b_n 、后加法器。

3）画出 n 个反馈通路：从第 m=(1..n)个积分器（延迟器）出来的信号经过常数增益 a_m 后并反相后到达前加法器。

4）画出 n 个前馈通路：从第 m=(0..n-1)个积分器（延迟器）出来的信号经过常数增益 b_m 后到达后加法器。

8.3　从系统函数画级联型框图

此方法对于连续系统和离散系统是基本相同的。

步骤：

1）将系统函数进行因式分解。每个因子的分母多项式都是一阶的或者不可约的二阶的，并且要保证每个因子的分子多项式次数 ≤ 分母多项式次数。（在选择哪个分子与哪个分母搭配成一个因子时有很大的自由度）

2） 对每个因子画出其直接型框图。

3） 将这些因子的直接型框图级联起来，构成整个系统的框图。

8.3　从系统函数画并联型框图

此方法对于连续系统和离散系统是基本相同的。

步骤：

1） 将系统函数分解成：常数+严格真分式。然后对严格真分式进行部分分式分解。每个分解式的分母多项式都是一阶的或者不可约的二阶的，并且每个分解式的分子多项式次数 < 分母多项式次数。

2） 对常数和每个分解式画出其直接型框图。

3） 将这些直接型框图并联起来，构成整个系统的框图。

8.4　从框图到状态空间描述

以每个积分器（延迟器）的输出作为状态变量。对于由系统函数画出的直接型框图，最好按照标准方式安排状态变量（从左到右分别为 q_n，q_{n-1}，…，q_1）。对于之前没有加法器的积分器（延迟器），写出 trivial 的分状态方程（一个状态变量的导数/前移是另一个状态变量），对于之前有加法器的积分器（延迟器），写出 nontrivial 的分状态方程（一个状态变量的导数/前移是各个状态变量和输入变量的线性组合）。最后将这些分状态方程组合成矩阵形式的状态方程。

最后写出输出方程。

8.5　连续时间系统状态方程的解

$dq/dt=Aq+Bx$

对上式两端进行单边 Laplace 变换，得到

$sQ(s)-q(0-)=AQ(s)+BX(s)$

$(sI-A)Q(s)=q(0-)+BX(s)$

$Q(s)= (sI-A)^{-1}[q(0-)+BX(s)]$

由于 $y(t)=Cq(t)+Dx(t)$

故 $Y(s)=CQ(s)+DX(s)$

8.6　离散时间系统状态方程的解

$q[k+1]=Aq[k]+Bx[k]$

对上式两端进行单边 z 变换，得到

$zQ(z)-q[0] = AQ(z)+BX(z)$

$(zI-A)Q(z)=q[0]+BX(z)$

$Q(z)= (zI-A)^{-1}[q[0]+BX(z)]$

由于 $y[k]=Cq[k]+Dx[k]$

故 $Y(z)=CQ(z)+DX(z)$