$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-(x-1)^2}dx \xlongequal{令x-1=u} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u+1)e^{-u^2}du$

习题四

一、填空题

1、已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}, = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$$

$X\sim N(1,\frac{1}{2})$

则 X 的数学期望 $E(X)=$ 1 ，方差 $D(X)=$ $\frac{1}{2}$.

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{ue^{-u^2}}_{奇}du+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{e^{-u^2}}_{偶}du$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du$

$\xlongequal{令u=\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\cdot\frac{1}{2}=1$

2、设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次击中目标的概率为 0.4，

则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ 18.4 .

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2 \Rightarrow E(X^2)=D(X)+(E(X))^2$

$X\sim B(10,0.4)\Rightarrow E(X)=np=4 \quad D(X)=np(1-p)=2.4$

3、设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 在[0，6]上服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$，X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布．记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，

则 $D(Y)=D(X_1)+D(2X_2)+D(3X_3)=D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)=\frac{6^2}{12}+4\cdot4+9\cdot3=46$

4、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$ 1 .

$E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2$

$=(E(X))^2+D(X)-3E(X)+2$

$=\lambda^2+\lambda-3\lambda+2=1$

$\Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \quad (\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$

5、设随机变量 X 在区间[-1，2]上服从均匀分布，随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & 若X>0\\ 0, & 若X=0\\ -1, & 若X<0\end{cases},$$

$P(Y=-1)=P(X<0)=\frac{1}{3}$

$P(Y=0)=P(X=0)=0$

$P(Y=+1)=P(X>0)=\frac{2}{3}$

则 $D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{8}{9}$

$E(Y)=(-1)\cdot\frac{1}{3}+0\cdot0+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$E(Y^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{3}+0\cdot0+1^2\cdot\frac{2}{3}=1$

6、设随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

p_{ij}	0.07	0.18	0.15	0.08	0.32	0.20
(X,Y)	(0,-1)	(0,0)	(0,1)	(1,-1)	(1,0)	(1,1)
(X^2,Y^2)	(0,1)	(0,0)	(0,1)	(1,1)	(1,0)	(1,1)

$E(X^2)=1^2\cdot(0.08+0.32+0.20)=0.6$

$E(Y^2)=1^2(0.07+0.15+0.08+0.20)=0.5$

$E(X^2Y^2)=1^2\cdot1^2(0.08+0.20)=0.28$

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{cov}(X^2,Y^2)=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=0.28-0.6\times0.5=-0.02$

二、选择题

1、设两个相互独立的随机变量 X、Y 的方差分别为 4 和 2，

则 $D(3X-2Y)=$[④]. $D(3X-2Y)=D(3X)+D(2Y)=3^2D(X)+2^2D(Y)=9\cdot4+4\cdot2=44$

① 8　　② 16　　③ 28　　④ 44

2、设随机变量 X、Y 独立同分布，记 $U=X-Y$，$V=X+Y$，则随机变量 U 与 V

必然[④].

$\mathrm{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=E((X-Y)(X+Y))-E(X-Y)E(X+Y)$

$=E(X^2-Y^2)-(E(X)-E(Y))(E(X)+E(Y))$

$=E(X^2)-E(Y^2)-((E(X))^2-(E(Y))^2)=D(X)-D(Y)=0$

① 独立　　② 不独立　　③ 相关　　④ 不相关

3、设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，则随机变量$\xi = X+Y$与$\eta = X-Y$不相关的充分必要条件是[②].

$cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=E[(X+Y)(X-Y)]-E(X+Y)E(X-Y)$
$=E(X^2-Y^2)-(E(X)+E(Y))(E(X)-E(Y))=E(X^2)-E(Y^2)-(E(X))^2+(E(Y))^2$

①$E(X)=E(Y)$　②$D(X)=D(Y)$　③$E(X^2)=E(Y^2)$　④X、Y不相关

4、设随机变量X和Y的方差存在且不等于0，则$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$是X和Y[②].

$=D(X)-D(Y)=0$

① 不相关的充分条件，但不是必要条件　② 不相关的充分必要条件
③ 独立的充分条件，但不是必要条件　④ 独立的充分必要条件

5、设随机变量X的数学期望$E(X)$、方差$D(X)$都存在，且$Y=X+E(X)$，则下列结论正确的是[③].

常数　线性关系

① $E(Y)=E(X)$　② $\mathrm{cov}(X,Y)=0$　③ $\rho_{XY}=1$　④ $\rho_{XY}=-1$

$Y=X+E(X) \Rightarrow E(Y)=E(X+E(X))=E(X)+E(X)=2E(X)$

$D(Y)=D(X+E(X))=D(X)$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
$=E(X(X+E(X)))-E(X)\cdot 2E(X)$
$=E(X^2+XE(X))-2(E(X))^2$
$=E(X^2)+E(X\cdot E(X))-2(E(X))^2$
$=E(X^2)+(E(X))E(X)-2(E(X))^2$
$=E(X^2)-(E(X))^2=D(X)$

$\Rightarrow \rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{D(X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}}=1$

三、计算题

1、设随机变量X的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求$E(X)$，$E(X^2)$，$E(3X^2+5)$.

$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k p_k=(-2)\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$

$E(X^2)=\sum_{k=1}^{3}x_k^2 p_k=(-2)^2\times0.4+0\times0.3+2^2\times0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+5=3\times2.8+5=13.4$

2、若有n把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁. 设取到每把钥匙是等可能的. 若每把钥匙试开一次后除去，求试开次数X的数学期望$E(X)$.

无放回

step1

X的可能取值$1,2,\cdots n$

$P(X=1)=\frac{1}{n}$

$P(X=2)=(1-\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$

$P(X=3)=(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n-1})\cdot\frac{1}{n-2}=\cdots=\frac{1}{n}$

$\cdots$

$P(X=k)=(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n-1})\cdots(1-\frac{1}{n-k+2})\frac{1}{n-k+1}$
$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$

$\Rightarrow X$的分布列为

X	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

step2

$\Rightarrow E(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k=1\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n}$
$=(1+2+\cdots+n)\frac{1}{n}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}$

3、一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0\\ 0\ , & x\le 0\end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换．若工厂出售一台设备赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元．试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望．

设出售一台设备的赢利函数为 $\eta(x)=\begin{cases}100-300 & 0<x<1\\ 100 & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}-200 & 0<x<1\\ 100 & x\ge 1\end{cases}$

$$\Rightarrow E(\eta(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)\cdot f(x)dx$$

$$=\int_0^1(-200)\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}dx+\int_1^{+\infty}100\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx$$

$$=200\cdot e^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^1-100\cdot e^{-\frac{x}{4}}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$$

4、（1）已知 $D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，求 $D(X+Y)$，$D(X-Y)$．

（2）设随机变量 X、Y 相互独立，且 $X\sim N(120,8^2)$，$Y\sim N(80,6^2)$，求 $Z_1=X+Y$，$Z_2=X-Y$ 的分布，并求概率 $P\{X>Y+50\}$，$P\{X+Y>180\}$．

(1) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=25+36\pm 2\times 0.4\times\sqrt{25}\cdot\sqrt{36}$

$\Rightarrow D(X+Y)=85\quad D(X-Y)=37$

(2) $X\sim N(120,8^2)\ \ Y\sim N(180,6^2)$ X与Y相互独立

$\Rightarrow Z_1=X+Y\sim N(120+80,8^2+6^2)$ 即 $Z_1\sim N(200,10^2)$

$Z_2=X-Y\sim N(120-80,8^2+6^2)$ 即 $Z_2\sim N(40,10^2)$

$P(X>Y+50)=P(X-Y>50)=P(Z_2>50)=1-P(Z_2\le 50)=1-\Phi\left(\frac{50-40}{10}\right)=1-\Phi(1)\approx 0.1587$

$P(X+Y>180)=P(Z_1>180)=1-P(Z_1\le 180)=1-\Phi\left(\frac{180-200}{10}\right)=1-\Phi(-2)=1-(1-\Phi(2))=\Phi(2)\approx 0.9772$

四、证明题

1、设随机变量(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

验证X、Y不相关，但X、Y不是相互独立的。

step1

X	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y	1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

$\Rightarrow E(X)=(-1)\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{2}{8}+1\cdot\frac{3}{8}=0=E(Y)$

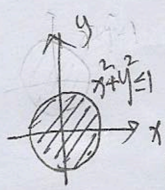
$E(XY)=(-1)(-1)\cdot\frac{1}{8}+(-1)\cdot 1\cdot\frac{1}{8}+1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{8}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{8}=0$

$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)\Rightarrow X,Y$不相关

step2 $P(X=-1)=\frac{3}{8}$ $P(Y=0)=\frac{2}{8}$

$P(X=-1,Y=0)=\frac{1}{8}\neq P(X=-1)P(Y=0)$

$\Rightarrow X$与Y不相互独立



2、设二维随机变量(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布，证明：$X$、$Y$不相关，但$X$、$Y$不是相互独立的。

step1 (X,Y)服从$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布

$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$ $(-1<x<1)$

$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

同理：$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

当$x=0=y$时 $f(0,0)=\frac{1}{\pi}$

$f_X(0)f_Y(0)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi^2}$ $\Big\}\Rightarrow f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

$\Rightarrow X$与Y不相互独立

step2 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_X(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}\underbrace{x\cdot\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}}_{奇函数}dx=0$

同理：$E(Y)=0$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$

$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{xy}{\pi}dxdy$

$\underline{极坐标}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\pi}\rho d\rho$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sin 2\theta\cdot\rho^3d\rho=0$

$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

$\Rightarrow X$与Y不相关