习题一

一、选择题

1、对于任意二事件 A、B，与 $\underbrace{A\cup B=B}_{\Rightarrow A\subset B}$ 不等价的是[④].

① $A\subset B$　　② $\bar{B}\subset\bar{A}$　　③ $A\bar{B}=\Phi$　　④ $\bar{A}B=\Phi$

2、若二事件 A、B 同时发生的概率 $P(AB)=0$，则[③].

① A、B 互不相容（互斥）　　② $AB=\Phi$

③ AB 未必是不可能事件　　④ $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

3、设 A、B 为两个随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是[①].

① $P(A\cup B)=P(A)$　　② $P(AB)=P(A)$ × $=P(B)$

③ $P(B\mid A)=P(B)$ × $=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$　　④ $P(B-A)=P(B)-P(A)$ × $=0=P(\phi)$

4、设 A、B 为两个概率不为零的互不相容事件，则下列结论正确的是[②].

① A、B 相互独立　　② A、B 不相互独立

③ A、B 不一定相互独立　　④ A、B 对立

$AB=\phi\Rightarrow P(AB)=0$

$P(A)>0,\ P(B)>0\Rightarrow P(A)P(B)\neq P(AB)$

5、设 $0<P(A)$、$P(B)<1$，且 $P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid\bar{B})=1$．则[④].

① A、B 互不相容　　② A、B 相互对立

③ A、B 互不独立　　④ A、B 相互独立

$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{P(AB)}{P(B)}+\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}$

$=\dfrac{P(AB)}{P(B)}+\dfrac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}$

$=\dfrac{P(AB)}{P(B)}+\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$

$=\dfrac{P(AB)}{P(B)}+\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}=1$

$\Rightarrow P(A)P(B)=P(AB)$

6、如果事件 A、B 同时发生时，事件 C 必然发生．则[②].

① $P(C)\le P(A)+P(B)-1$　　② $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$

$\Downarrow$ $AB\subset C\Rightarrow P(AB)\le P(C)$

③ $P(C)=P(AB)$　　④ $P(C)=P(A\cup B)$

$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$

7、设事件 A、B 满足 $A\subset B$，且 $P(B)>0$．则[②].

$\Downarrow$ $AB=A$

① $P(A)<P(A\mid B)$　　② $P(A)\le P(A\mid B)$

③ $P(A)>P(A\mid B)$　　④ $P(A)\ge P(A\mid B)$

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant\dfrac{P(A)}{1}$

二、填空题

1、设 $P(A)=0.4$, $P(A\cup B)=0.7$．当 A、B 互不相容时（$AB=\phi$），$P(B)=$ 0.3；

$P(A)P(B)=P(AB)$

当 A、B 相互独立时，$P(B)=$ 0.5　$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

2、已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$, $P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$, $P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$ $\dfrac{1}{3}$．　$\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{2}$

3、掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，其中有一颗点数为 1 的概率为 $2/6=\dfrac{1}{3}$．

4、掷一枚硬币 5 次，出现“3 次正面，2 次反面”的概率为 $C_5^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\dfrac{5}{16}$

条件概率

5、已知一个家庭有三个小孩，且其中至少有一个是女孩，则该家庭至少有一个男孩的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}$ $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_1^1C_1^1C_1^1}{2^3}=\frac{7}{8}$

$\bar{A}\bar{B}=\phi \Rightarrow P(\bar{A}\bar{B})=$

$P(AB)=1-P(\overline{AB})$

$=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$

$=1-(P(\bar{A})+P(\bar{B}))$

$=1-\left(\frac{C_1^1C_1^1C_1^1}{2^3}+\frac{C_1^1C_1^1C_1^1}{2^3}\right)$

$=\frac{3}{4}$

三、计算题

1、设 A、B、C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$．求 A、B、C 至少有一个发生的概率．

$ABC\subset AB \Rightarrow 0\le P(ABC)\le P(AB)=0 \Rightarrow P(ABC)=0$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0$

$=\frac{5}{8}$

条件概率

2、在 1，2，…，100 中任取一数，已知取出的数不大于 50，求

（1） 此数既是 2 的倍数又是 3 的倍数的概率；

（2） 此数是 2 或 3 的倍数的概率．

令 A="此数是2的倍数"

B="此数是3的倍数"

法一：(1) $\left[\frac{50}{6}\right]=8$

$\Rightarrow P(AB)=C_8^1/C_{50}^1=\frac{8}{50}=\frac{4}{25}$

(2) $\left[\frac{50}{2}\right]=25$ $\left[\frac{50}{3}\right]=16$

$\Rightarrow P(A)=C_{25}^1/C_{50}^1=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$

$P(B)=C_{16}^1/C_{50}^1=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{8}{25}-\frac{4}{25}=\frac{33}{50}$

法二：(1) C="此数小于等于50"

$P(AB|C)=C_8^1/C_{50}^1=\frac{4}{25}$

(2) $P(A\cup B|C)$

$=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

$=C_{25}^1/C_{50}^1+C_{16}^1/C_{50}^1-C_8^1/C_{50}^1=\frac{33}{50}$

3、甲、乙、丙三人独立地破译一密码，他们能单独译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$，求此密码被译出的概率．

令 A="甲破译出密码"

B="乙……"

C="丙……"

D="密码被破译"

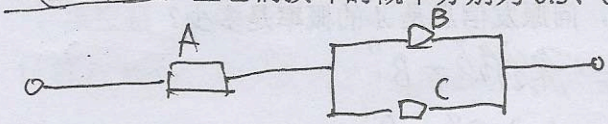
$P(D)=1-P(\bar{D})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$=1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$

$=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})$

$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

4、电路由元件 A 与两个并联的元件 B、C 串联而成，若元件 A、B、C 损坏与否相互独立，且它们损坏的概率分别为 0.3、0.2、0.1．求电路断路的概率．



令 A="元件A损坏"

B="- - B - - -"

C="- - C - - -"

D="电路断路"

法一：$P(D)=P(A)+P(\bar{A})P(B)\cdot P(C)$

$=0.3+(1-0.3)\times 0.2\times 0.1$

$=0.3+0.014$

$=0.314$

法二：$P(D)=P(A\cup BC)=P(A)+P(BC)-P(ABC)$

$=0.3+0.2\times 0.1-0.1\times 0.2\times 0.3$

$=0.314$

全概率公式

5、（1）设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球；乙袋中装有 N 只白球、M 只红球．今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球．问取到白球的概率是多少？

（2）第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球．先从第一只盒中任取两只球放入第二只盒中去，再从第二只盒中任取一只球．求取到白球的概率．

(1) A="甲袋中取出一球为白球"

B="甲 - - - - 红球"

C="乙 - - - - 白球"

$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$

$=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{N}{N+M+1}$

$=\frac{n(N+1)+Nm}{(m+n)(N+M+1)}$

(2). R="取出红球" W="取出白球"

step1 从第一只盒子里取出两球

$P(RR)=C_5^2/C_9^2$ $P(RW)=C_5^1C_4^1/C_9^2$ $P(WW)=C_4^2/C_9^2$

step2 从第二只盒子中取出白球

$P(W|RR)=C_5^1/C_{11}^1$ $P(W|RW)=C_6^1/C_{11}^1$ $P(W|WW)=C_7^1/C_{11}^1$

step3 全概率公式

$P(W)=P(RR)P(W|RR)+P(RW)P(W|RW)+P(WW)P(W|WW)$

$=\frac{C_5^2}{C_9^2}\cdot\frac{C_5^1}{C_{11}^1}+\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}\cdot\frac{C_6^1}{C_{11}^1}+\frac{C_4^2}{C_9^2}\cdot\frac{C_7^1}{C_{11}^1}=\frac{53}{99}$

贝叶斯公式

6、将两信息分别编码为 A、B 传递出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01．信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2：1．若接收站收到的信息是 A，问原发信息是 A 的概率是多少？

令 A="原发信息为 A"．$\bar{A}$="原发信息为 B"

C="收到信息为 A"．$\bar{C}$="收到信息为 B"．

$$\Rightarrow P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(\bar{A})P(C|\bar{A})}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times(1-0.02)}{\frac{2}{3}\times(1-0.02)+\frac{1}{3}\times 0.01}=\frac{196}{197}$$

全概率公式
贝叶斯公式

7、袋中装有 m 只正品硬币、n 只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）．在袋中任取一只，将它投掷 r 次．求：

（1） 每次都得到国徽的概率；

（2） 已知每次都得到国徽，这只硬币是正品硬币的概率．

(1) 令 A="任取一枚硬币是正品"

B="掷 r 次得到 r 次国徽"

次品　　次品投掷背面

$$\Rightarrow P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

全概率公式

$$=\frac{m}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}\cdot 1$$

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

(2) $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

$$=\left[\frac{m}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\right]\Big/\left[\frac{m}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}\cdot 1\right]$$

$$=\frac{m}{(m+n)2^r}$$