Clase 03
Expansión Multipolar

Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition: pp. 151 – 166

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- En algunas situaciones, podemos aproximar las distribuciones de carga como si fuesen una carga puntual.
- Esto no siempre podrá ser una buena idea, y necesitaremos obtener a estimaciones más precisas.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-01:** Plantear y resolver ecuaciones para la determinación de Fuerzas, Campos, Flujos, Potenciales, Torques y Energías electromagnéticas en problemas de mediana complejidad.
- **OA-02:** Comprender y aplicar el concepto de expansión multipolar para la estimación precisa de campos electromagnéticos.

Contexto

- Vamos a necesitar:

Ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$

Potencial Eléctrico

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho_\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\tau'$$

Relación Campo-Potencial

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

Contenidos

- Monopolo Eléctrico
- Dipolo Eléctrico
- Expansión multipolar
- Momento dipolar y origen de coordenadas
- Expansión multipolar y campo eléctrico

Monopolo Eléctrico

- Dada una carga aislada o *monopolo*, el potencial eléctrico será:

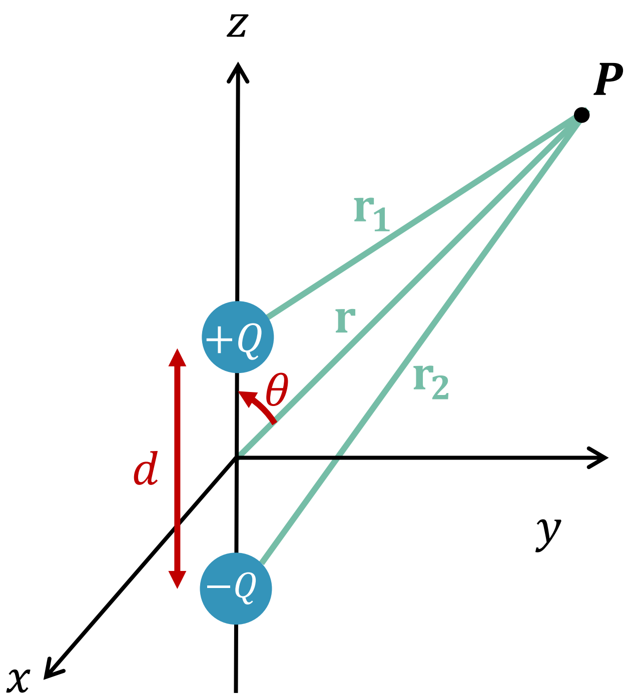
$$V_{mon}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Esto también se hace válido para un arreglo de cargas Q cualquiera, cuando tomamos suficiente distancia.

E-01

Dipolo Eléctrico

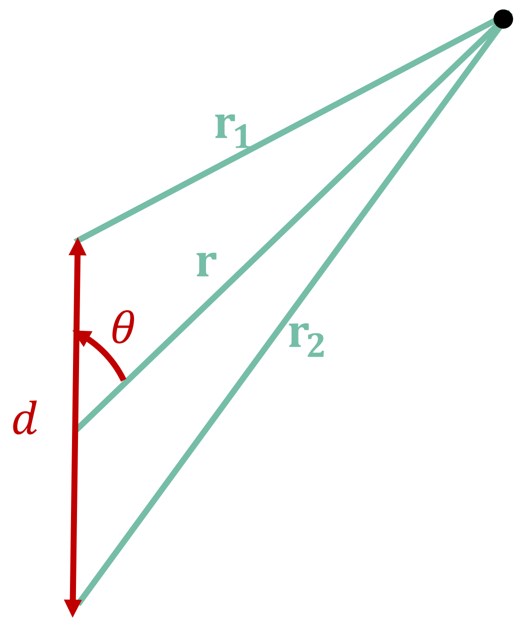
- Consideremos el siguiente caso para 2 cargas de signo opuesto:



Por superposición: $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Dipolo Eléctrico

- Consideremos el siguiente caso para 2 cargas de signo opuesto:



Por Ley de Cosenos :

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - r\,d\,cos\theta, \qquad r_2^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r\,d\,cos\theta$$

$$r_1^2 = r^2\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\,cos\theta\right), \qquad r_2^2 = r^2\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\,cos\theta\right)$$

Si $d \ll r$:

$$r_1 = r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\,cos\theta}, \qquad r_2 = r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\,cos\theta}$$

Dipolo Eléctrico

Así:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{r}\ cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\ cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Desarrollamos expansión binomial: $(1+x)^n \approx 1 + \ nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ \ldots$

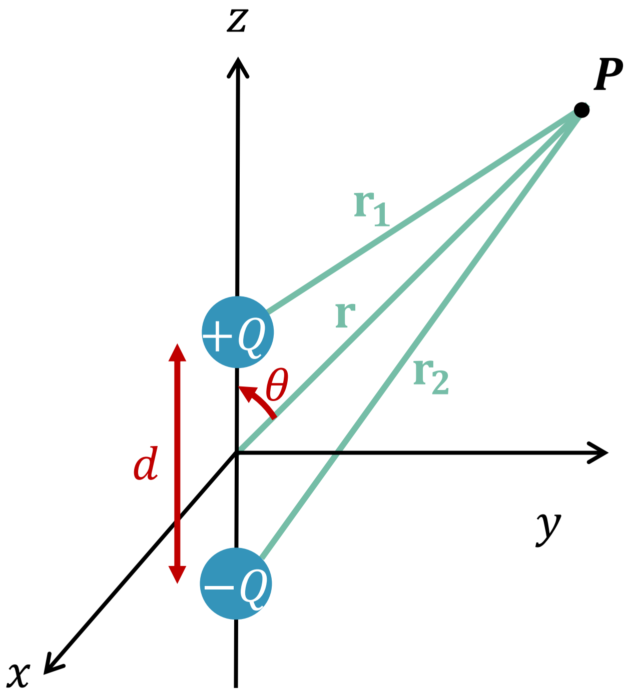
$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\ cos\theta\right), \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\ cos\theta\right)$$

Luego:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{d}{r^2}\ cos\theta$$

Dipolo Eléctrico

- Consideremos el siguiente caso para 2 cargas de signo opuesto:



Reemplazando:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\ cos\theta}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(d\mathbf{a_z})\cdot\mathbf{a_r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a_r}}{r^2}$$

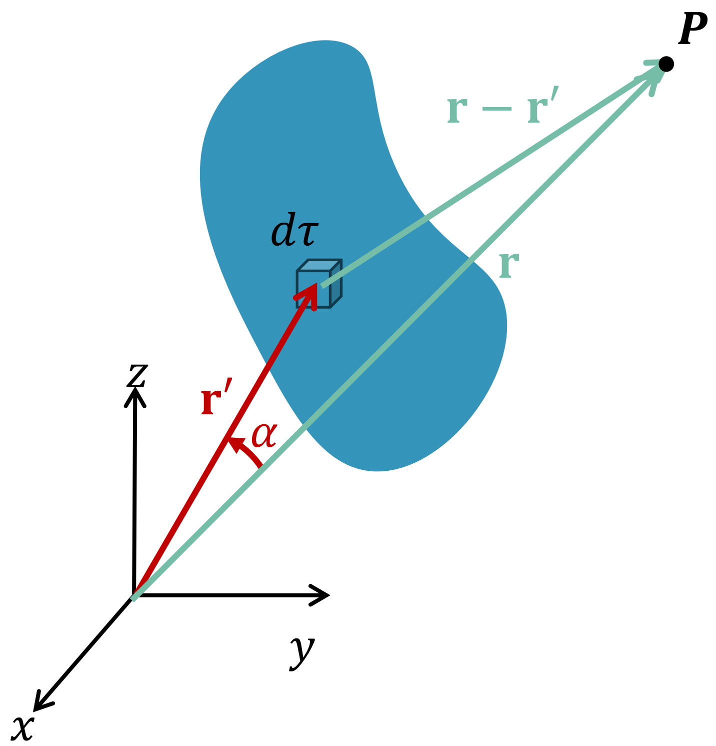
$$\boxed{V_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}$$

Potencial dipolar

$$\boxed{\mathbf{p} = Q\mathbf{d}}$$

Momento dipolar

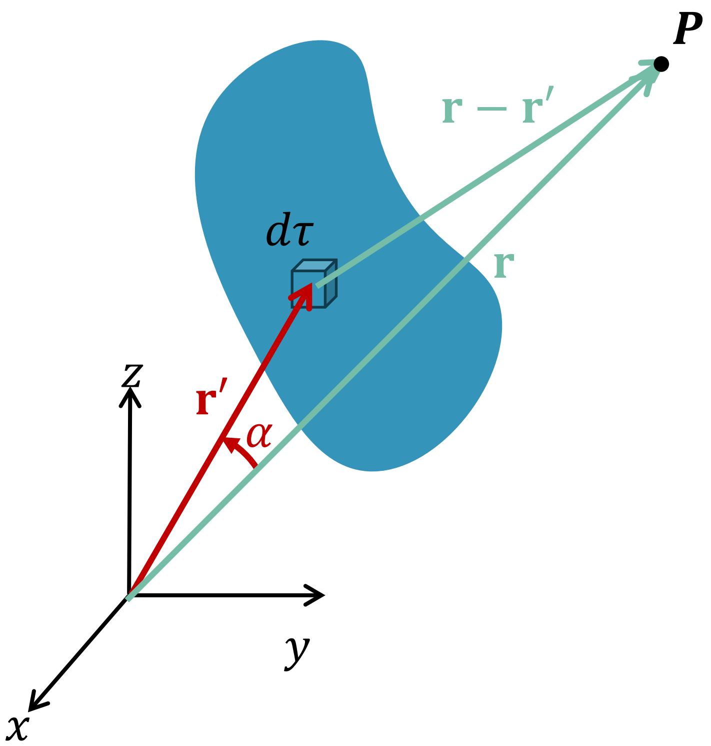
Expansión Multipolar



Sabemos que el potencial está dado por:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau$$

Expansión Multipolar



Replicando ley de cosenos, pero sin simplificar:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = r^2\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)cos\alpha\right]$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = r^2\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2cos\alpha\right)\right]$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\sqrt{1+\epsilon}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\,(1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

Expansión Multipolar

Usando expansión binomial:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\ (1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \cdots\right)$$

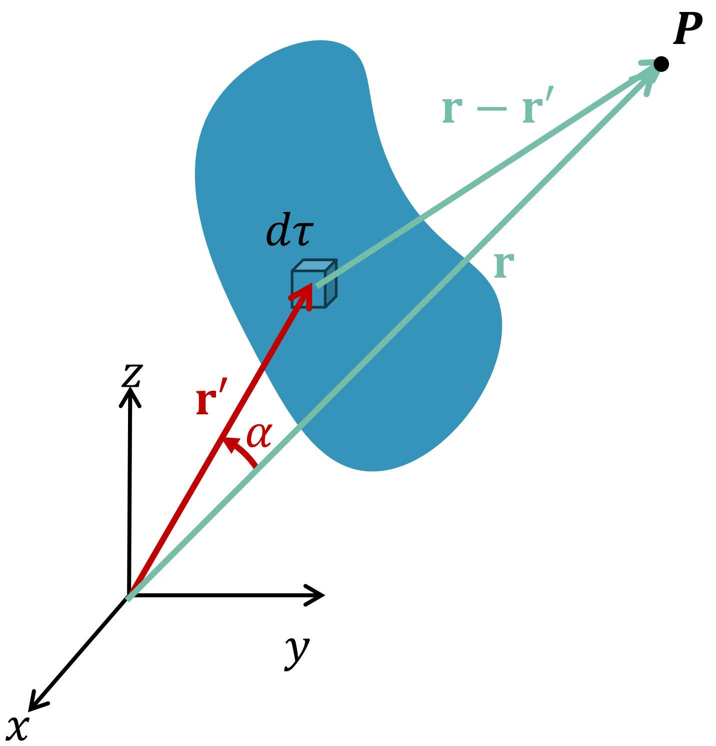
$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1\ - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2cos\alpha\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{r'}{r} - 2cos\alpha\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\left(\frac{r'}{r} - 2cos\alpha\right)^3 + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1\ - \left(\frac{r'}{r}\right)(cos\alpha) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{3\cos^2\alpha - 1}{2}\right) - \left(\frac{r'}{r}\right)^3\left(\frac{5\cos^3\alpha - 3cos\alpha}{2}\right) + \cdots\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(cos\alpha)}$$

Expansión multipolar

Expansión Multipolar



Sabemos que el potencial está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\tau'$$

Luego, la expansión multipolar del potencial eléctrico será:

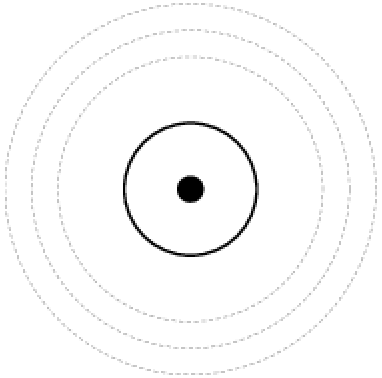
$$\boxed{V(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{(n+1)}}\int_\Omega r'^n P_n(cos\alpha)\rho(\mathbf{r}')\,d\tau'}$$

Expansión Multipolar

Desarrollando los términos de la expansión:

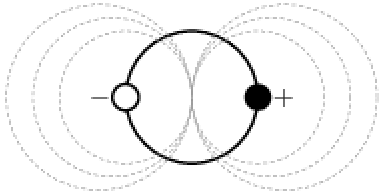
$n = 0$

$$V_{mono}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\int_\Omega \rho(\mathbf{r}')\,d\tau'}{r}$$



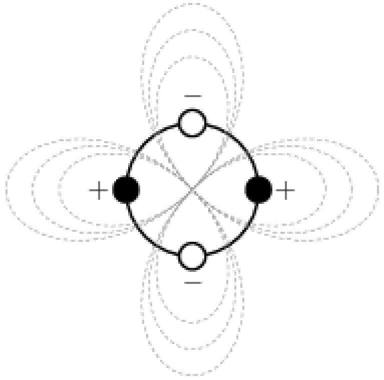
$n = 1$

$$V_{dip}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\int_\Omega r'\cos\alpha\,\rho(\mathbf{r}')\,d\tau'}{r^2}$$



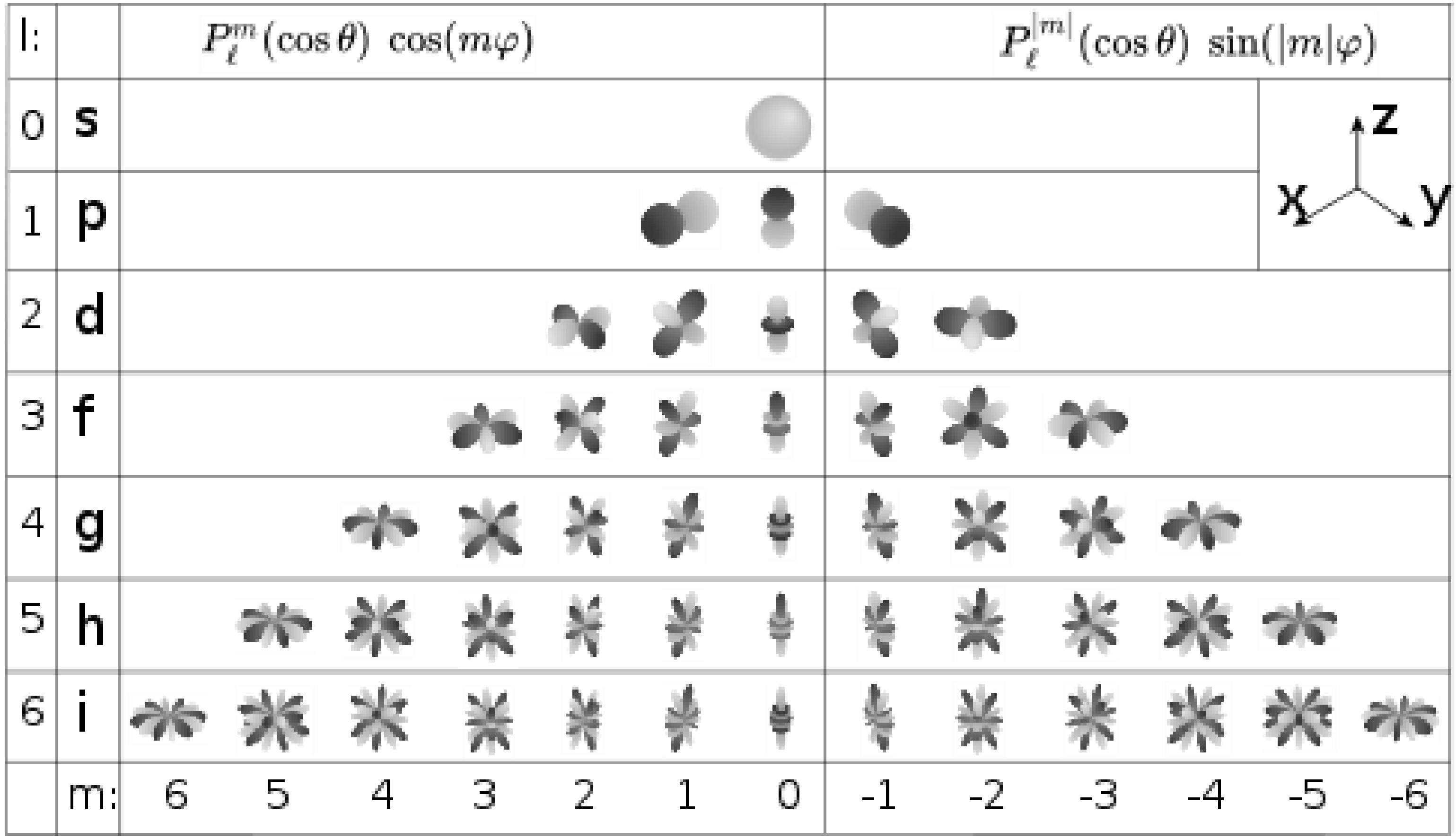
$n = 2$

$$V_{quad}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\int_\Omega r'^2\left(\frac{3cos\alpha - 1}{2}\right)\rho(\mathbf{r}')\,d\tau'}{r^3}$$



Expansión Multipolar

Esto ya lo han visto antes, pero no desde esta perspectiva.



Momento dipolar y Origen de Coordenadas

Para el caso del monopolo

$$V_{mono}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\int_\Omega \rho(\mathbf{r}')\, d\tau'}{r}$$

el momento monopolar $\int_\Omega \rho(\mathbf{r}')\, d\tau'$ es independiente del origen de coordenadas, pues solo corresponde a sumar las cargas.

Momento dipolar y Origen de Coordenadas

Por otro lado, para el dipolo

$$V_{dip}(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\int_\Omega r' \cos\alpha \, \rho(\mathbf{r}') \, d\tau'}{r^2}$$

el momento dipolar $\mathbf{p} = \int_\Omega \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \, d\tau'$ sí varía según el origen de coordenadas, pues tiene una dependencia de r'.

No obstante, este momento tiene un comportamiento muy especial.

Momento dipolar y Origen de Coordenadas

- Consideremos un nuevo punto de referencia $\boldsymbol{a}$, tal que:

$$\mathbf{p}' = \int_{\Omega} (\mathbf{r}' - \mathbf{a})\rho(\mathbf{r}')\, d\tau'$$

- Dado que $\boldsymbol{a}$ es un vector constante:

$$\mathbf{p}' = \int_{\Omega} \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\, d\tau' - \int_{\Omega} \mathbf{a}\,\rho(\mathbf{r}')\, d\tau'$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{a}\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}')\, d\tau' = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q$$

Momento dipolar y Origen de Coordenadas

- De este modo, **si la carga neta Q es cero, el momento dipolar es independiente del origen**.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q$$

E-02

Expansión Multipolar y Campo Eléctrico

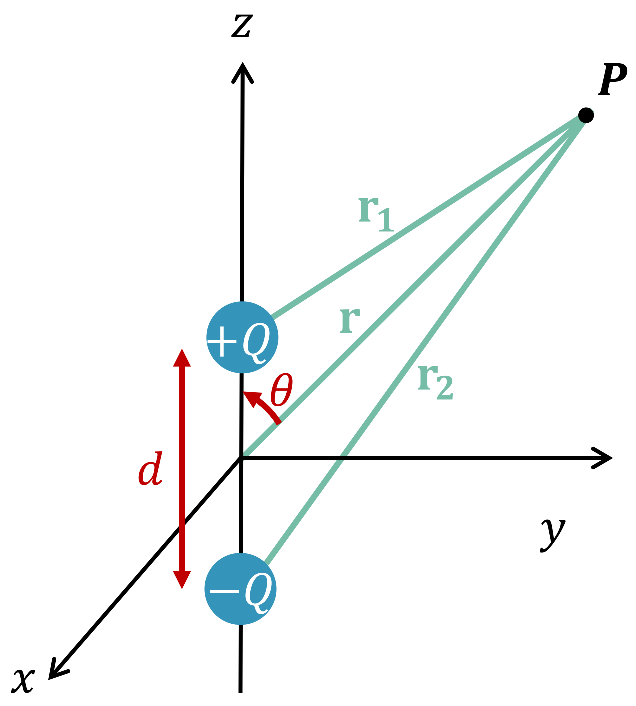
- Como vimos en la clase anterior, el potencial y el campo están relacionados según:

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathrm{V}$$

- De este modo, a partir de la expansión multipolar del potencial eléctrico, es posible hacer estimaciones precisas del Campo Eléctrico.

Expansión Multipolar y Campo Eléctrico

- Para el caso de nuestro dipolo:



$$V_{dip} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V_{dip} = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta\right]$$

$$\mathbf{E} = -\left[-\frac{Qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\mathbf{a}_r - \frac{1}{r}\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^2}\mathbf{a}_\theta\right]$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta\right]}$$

Resumen

- No siempre podemos aproximar una distribución de cargas como una carga puntual.
- La expansión multipolar nos permite obtener estimaciones más precisas del potencial eléctrico.

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{(n+1)}}\int_{\Omega} r'^{n} P_n(cos\alpha)\rho(\mathbf{r}')\, d\tau'}$$

- Potenciales precisos permiten estimar campos precisos: $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$.
- El momento dipolar es inmune a la posición cuando $\sum_{n=1}^{N} Q_n = 0$.

Cerremos la clase de hoy

- Ya analizamos por completo el comportamiento de Campos Electrostáticos en el vacío, para distintas distribuciones de cargas.
- Nos resta analizar el comportamiento en medios materiales.

- Próxima Clase (Jueves 14/marzo):

  Electrostática en Materiales.

- Bibliografía:

  Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 177 – 198

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Regla del producto

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot f\mathbf{A} = f\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} f$$

Potencial dipolar

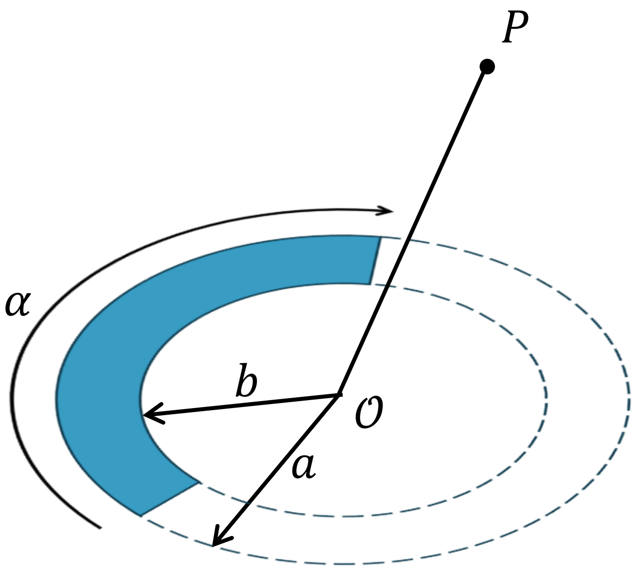
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\int_\Omega \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{r} \rho(\mathbf{r}')\, d\tau'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\int_\Omega \mathbf{p}\, \rho(\mathbf{r}')\, d\tau'}{r^2}$$

Ley de Gauss

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho_{tot}$$

Ejemplo 1: Caso Monopolo

- Retomemos el Ejemplo 1 de la clase anterior:



$$V(\rho,\theta,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho\prime=a}^{b}\int_{\theta\prime=0}^{\alpha}\frac{\sigma\rho'\,d\theta'\,d\rho'}{\sqrt{\rho^2+z^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\theta-\theta')}}$$

Si $\mathbf{r}$ se hace drásticamente grande:

$$V(\rho,\theta,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho\prime=a}^{b}\int_{\theta\prime=0}^{\alpha}\frac{\sigma\rho'\,d\theta'\,d\rho'}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

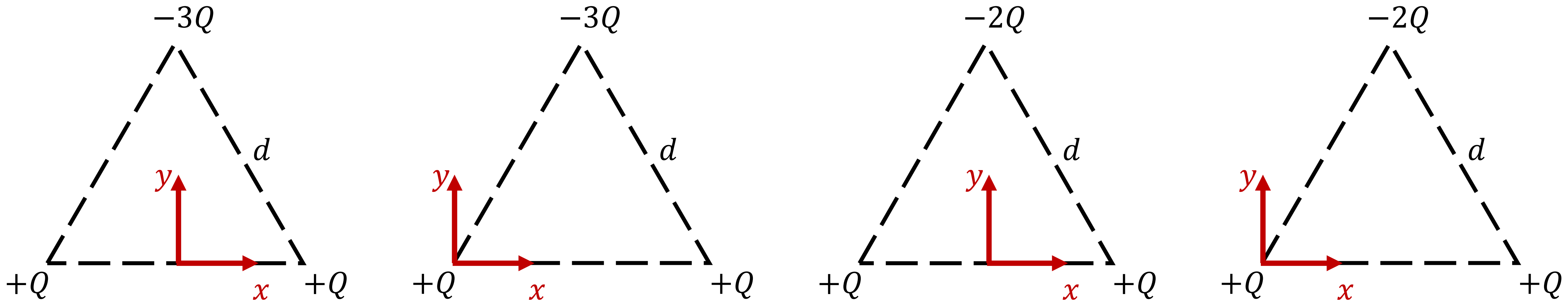
$$V(\rho,\theta,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}}\int_{\rho\prime=a}^{b}\int_{\theta\prime=0}^{\alpha}\sigma\rho'\,d\theta'\,d\rho'$$

$$\boxed{V(\rho,\theta,z)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|}}$$

Volver

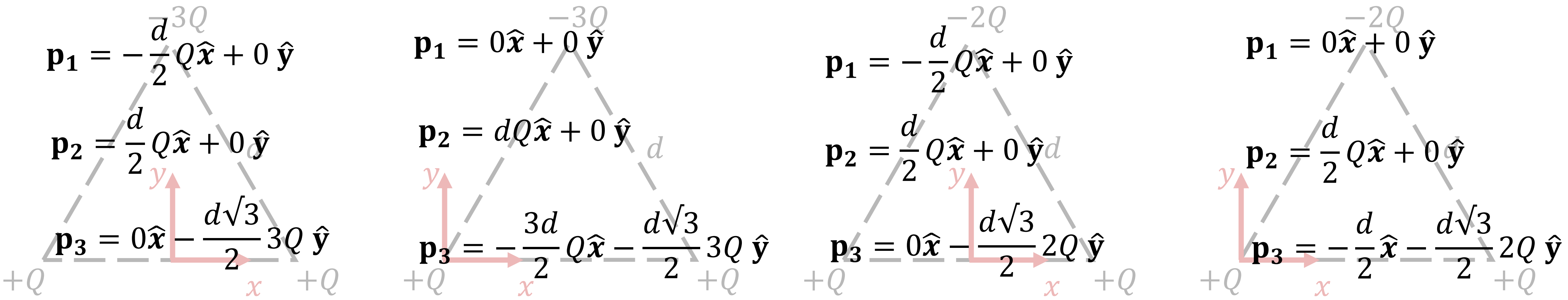
Ejemplo 02: Momento Dipolar

- Determine el momento dipolar para los siguientes arreglos de cargas puntuales:



Ejemplo 02: Momento Dipolar

- Determine el momento dipolar para los siguientes arreglos de cargas puntuales:



$$\mathbf{p_1} = -\frac{d}{2}Q\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_2} = \frac{d}{2}Q\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_3} = 0\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{d\sqrt{3}}{2}3Q\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \mathbf{p}_i = 0\,\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,dQ\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{p_1} = 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_2} = dQ\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_3} = -\frac{3d}{2}Q\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{d\sqrt{3}}{2}3Q\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \mathbf{p}_i = -\frac{1}{2}dQ\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,dQ\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{p_1} = -\frac{d}{2}Q\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_2} = \frac{d}{2}Q\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_3} = 0\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{d\sqrt{3}}{2}2Q\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \mathbf{p}_i = 0\,\hat{\boldsymbol{x}} - \sqrt{3}\,dQ\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{p_1} = 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_2} = \frac{d}{2}Q\hat{\boldsymbol{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{p_3} = -\frac{d}{2}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{d\sqrt{3}}{2}2Q\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \mathbf{p}_i = 0\,\hat{\boldsymbol{x}} - \sqrt{3}\,dQ\hat{\mathbf{y}}$$

Volver