Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 - Teoría Electromagnética

Ayudantía 3

5 de abril 2024
1er semestre 2024 - Profesor: Javier Silva Orellana
Ayudante: Vicente Corvalán Hernández - vcorvalh@uc.cl

Problema 1

Encuentre el vector potencial magnético de un segmento finito de un cable que lleva una corriente I. Luego, encuentre el campo magnético producido por dicha corriente.

Solución:

Colocamos el cable a lo largo del eje z y definimos un segmento finito entre z_1 y z_2:

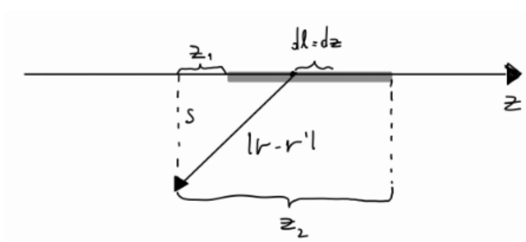


Figura 1: Segmento finito con corriente I

Recordando el vectober de potencial magnético:

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

En este caso, $d\mathbf{l}' = z'$ y el vector $|r - r'|$ es :

$$\mathbf{r} = s\hat{r} + z\hat{z}$$
$$\mathbf{r}' = z'\hat{z}$$
$$|r - r'| = \sqrt{s^2 + (z - z')^2}$$

Así, tenemos la integral definida como:

$$\text{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\hat{\mathbf{z}}}{|s\hat{r}-(z-z')|}dz' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{\mathbf{z}}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2+s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\hat{\mathbf{z}}\left[-\ln\left((z-z')+\sqrt{(z-z')^2+s^2}\right)\right]\Bigg|_{z_1}^{z_2} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{(z-z_1)+\sqrt{(z-z_1)^2+s^2}}{(z-z_2)+\sqrt{(z-z_2)^2+s^2}}\right]\hat{\mathbf{z}}}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A}{\partial s}\hat{\phi} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{(z-z_1)+\sqrt{(z-z_1)^2+s^2}}\frac{s}{\sqrt{(z-z_1)^2+s^2}} - \frac{1}{(z-z_2)+\sqrt{(z-z_2)^2+s^2}}\frac{s}{\sqrt{(z-z_2)^2+s^2}}\right]\hat{\phi}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A}{\partial s}\hat{\phi} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{(z-z_1)-\sqrt{(z-z_1)^2+s^2}}{(z-z_1)^2-[(z-z_1)^2+s^2]}\frac{s}{\sqrt{(z-z_1)^2+s^2}} - \frac{(z-z_2)-(z-z_2)^2+s^2}{(z-z_2)^2-[(z-z_2)^2+s^2]}\frac{s}{\sqrt{(z-z_2)^2+s^2}}\right]\hat{\phi}$$

Reduciendo términos de la expresión anterior, obtenemos:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A}{\partial s}\hat{\phi} = -\frac{\mu_0 I s}{4\pi}(-\frac{1}{s^2})\left[\frac{(z-z_1)}{\sqrt{(z-z_1)^2+s^2}} - 1 - \frac{(z-z_2)}{\sqrt{(z-z_2)^2+s^2}} + 1\right]\hat{\phi}$$

Si ahora, definimos $\sin(\theta_1) = \frac{(z-z_1)}{\sqrt{(z-z_1)^2+s^2}}$ y $\sin(\theta_2) = \frac{(z-z_2)}{\sqrt{(z-z_2)^2+s^2}}$, la expresión se reduce a:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)\hat{\phi}$$

Problema 2

Un loop circular ubicado en $x^2+y^2=9$, $z=0$ lleva una corriente DC de 10A en dirección $\hat{\phi}$. Determine el campo $\mathbf{H}$ en los puntos (0,0,4) y (0,0,-4).

Solución:
Podemos apoyarnos de la siguiente figura para resolver el problema:

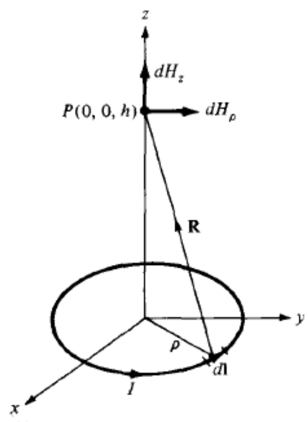


Figura 2: Corriente en loop circular

La intensidad de campo magnético $d\mathbf{H}$ en el punto P(0,0,h) contribuido por un elemento de corriente $I\mathbf{dl}$ está dado por la ley de Biot-Savart.

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{Id\mathbf{l'} \times (\mathbf{r\prime} - \mathbf{r})}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3}$$

Definimos los vectores r y r':

$$\mathbf{r} = z\hat{z}$$
$$\mathbf{r'} = r'\hat{r}$$
$$|r - r'| = \sqrt{s^2 + r'^2}$$

Además, $d\mathbf{l} = r'd\phi\hat{\phi}$. Luego, se tiene que $d\mathbf{l} \times (\mathbf{r'} - \mathbf{r}) = r'^2 d\phi\hat{z} - r'zd\phi\hat{r}$. Por simetría, nos damos cuenta que la integral en dirección $\hat{r}$ es nula.

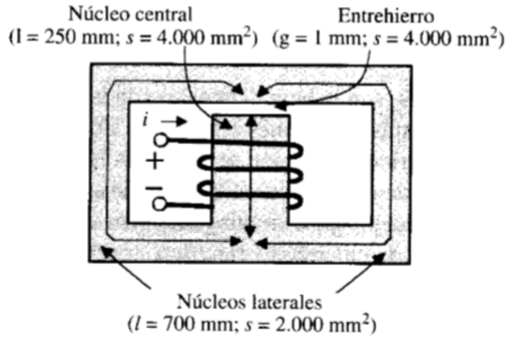
Así, tenemos:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\phi\hat{z} = \frac{I}{2}\frac{r'^2}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}.$$

Notamos que el campo evaluado en (0,0,4) y (0,0,-4) es el mismo e igual a $0.36\hat{z}A/m$.

Problema 3 [Rescatado de compilado de máquinas]

El núcleo central del circuito magnético de la figura está bobinado con 800 espiras. El material es acero fundido con un valor de la permeabilidad relativa de $\mu_r = 1.000$.



a) Calcular la corriente I que debe aplicarse a la bobina para obtener en el entrehierro un flujo de 1 mWb.

b) Es posible utilizar, para mayor exactitud, una función no lineal que represente el cambio en la permeabilidad magnética del acero fundido. Resolver el mismo problema, suponiendo que la curva de magnetización del acero fundido viene expresada por la ecuación:

$$B = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} H}{1 + 10^{-3} H}$$

c) Ahora realice el mismo ejercicio que en a) considerando que el entrehierro triplica su g.

Solución:

a) Primero, dibujamos el circuito magnético equivalente:

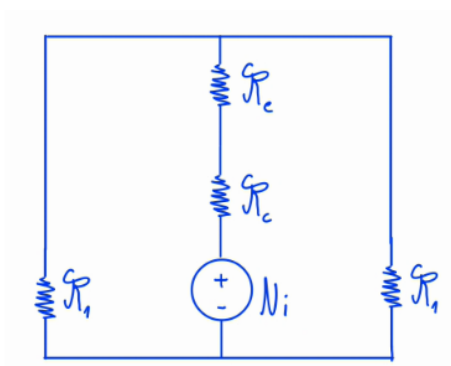


Figura 3: Circuito magnético equivalente

Tenemos que la reluctancia equivalente vista por la fuente es igual a $\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_c +$

$(\mathfrak{R}_l // \mathfrak{R}_l)$, y también $\phi = 1mWb$.

$$\mathfrak{R}_e = \frac{1 \cdot 10^{-3}[m]}{4.000 \cdot 10^{-6}[m^2] \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}[H/m]} = 198.940[H^{-1}]$$

$$\mathfrak{R}_c = \frac{250 \cdot 10^{-3}[m]}{4.000 \cdot 10^{-6}[m^2] \cdot 1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}[H/m]} = 49.736[H^{-1}]$$

$$\mathfrak{R}_l = \frac{700 \cdot 10^{-3}[m]}{2.000 \cdot 10^{-6}[m^2] \cdot 1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}[H/m]} = 278.520[H^{-1}]$$

$$\mathfrak{R}_t = 198.940[H^{-1}] + 49.736[H^{-1}] + \frac{278.520[H^{-1}]}{2} = 387.940[H/m]$$

Luego, la fuerza magnetomotriz:

$$\mathfrak{F} = 1 \cdot 10^{-3}[Wb] \cdot 387.940[H/m] = 387,94[Av]$$

Y así, la corriente:

$$I = \frac{\mathfrak{F}}{N} = \frac{387,94[Av]}{800[vueltas]} = 0,48493[A]$$

b) Debido a la simetría del circuito y de acuerdo a la Figura 4, el flujo en las columnas laterales vale la mitad que en la columna central es decir:

$$\phi_l = \frac{\phi_c}{2} = 0,5 \cdot 10^{-3}[Wb]$$

Como la sección lateral es igual a $2.000[mm^2]$, la inducción en estas columnas valdrá:

$$B_l = \frac{\phi_l}{S_l} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}[Wb]}{2.000 \cdot 10^{-6}[m^2]} = 0,25[T]$$

que llevado a la curva de magnetización del material da un valor de H_l:

$$0,25[T] = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} H_l}{1 + 10^{-3} H_l} \Rightarrow H_l = 161,29[Av/m]$$

El núcleo tiene doble flujo y doble sección que las columnas laterales, por lo que se deduce idéntico valor de la inducción y en consecuencia de la excitación H, es decir:

$$H_c = H_l = 161,29[Av/m]$$

En cuanto al entrehierro se cumple que: $H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{0,25[T]}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1,99 \cdot 10^5 \left[\frac{Av}{m}\right]$. Luego aplicando KVL a la malla 1 del circuito de la Figura 4, de acuerdo con la fórmula, se obtiene:

$$NI = 161,29 \left[\frac{Av}{m}\right] \cdot 0,7[m] + 161,29 \left[\frac{Av}{m}\right] \cdot 0,25[m] + 1,99 \cdot 10^5 \left[\frac{Av}{m}\right] \cdot 10^{-3} = 352,23[Av]$$

Por ello, la corriente es:

$$I = \frac{352,23[Av]}{800[vueltas]} = 0,44[A]$$

c) Se realiza el mismo caso de la primera parte, pero dado a que la distancia del entrehierro aumentó, es necesario determinar una nueva $\mathfrak{R}_e$ que se puede ver en la formula de la reluctancia que se triplica, al no existir variaciones en su sección o permeabilidad. A partir de lo dicho anteriormente, se determina la nueva reluctancia total:

$$\text{Re}_\ell = 3 \cdot 198.940[H^{-1}] + 49.736[H^{-1}] + \frac{278.520[H^{-1}]}{2} = 785.827[H/m]$$

Y se calcula su f.m.m. para producir el flujo pedido:

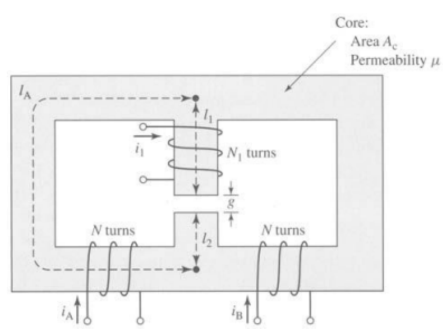
$$\mathfrak{F} = 1 \cdot 10^{-3}[Wb] \cdot 785.827[H/m] = 785,83[Av]$$

Obteniéndose la corriente necesaria:

$$I = \frac{\mathfrak{F}}{N} = \frac{785,83[Av]}{800[vueltas]} = 0,9823[A]$$

Problema 4

El circuito magnético de la figura, tiene tres bobinados. Los bobinados A y B cada uno tiene N vueltas y se encuentran enrollados en las dos piernas inferiores del núcleo. Las dimensiones del núcleo se encuentran especificadas en la figura.



a) Encuentre las autoinductancias de cada bobinado.

b) Encuentre las inductancias mutuas de cada bobinado.

c) Encuentre el voltaje inducido en la bobina 1, por las corrientes $i_A(t)$ e $i_B(t)$. Demuestre que este voltaje puede ser utilizado para medir, desbalances entre estas dos corrientes a la misma frecuencia.

Solución:

a) Primero, tenemos su circuito magnético equivalente:

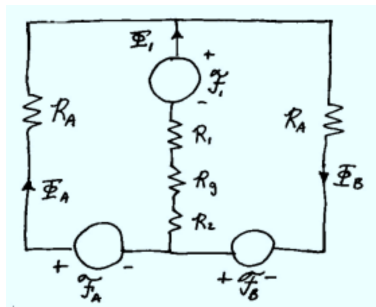


Figura 4: Circuito magnético equivalente

$\mathcal{R}_\mathrm{A} = \frac{l_\mathrm{A}}{\mu A_\mathrm{c}}$; $\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu A_\mathrm{c}}$; $\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu A_\mathrm{c}}$; $\mathcal{R}_\mathrm{g} = \frac{g}{\mu_0 A_\mathrm{c}}$. Luego, tenemos que la autoinductancia se define como:

$$L_{ii} = N_i \frac{d\phi_i}{dI_i}$$

Y como $\phi = \mathfrak{F}/\mathfrak{R} = N \cdot I/\mathfrak{R}$, se tiene:

$$L_{ii} = \frac{N_i^2}{\mathfrak{R}_{eq}}$$

. Así:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_A/2} = \frac{N_1^2 \mu A_\mathrm{c}}{l_1 + l_2 + l_\mathrm{A}/2 + g\,(\mu/\mu_0)}$$

$$L_\mathrm{AA} = L_\mathrm{BB} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_\mathrm{A} + \mathcal{R}_\mathrm{A}||(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g)} = \frac{N^2 \mu A_\mathrm{c}}{l_\mathrm{A}} \left[\frac{l_\mathrm{A} + l_1 + l_2 + g\,(\mu/\mu_0)}{l_\mathrm{A} + 2(l_1 + l_2 + g\,(\mu/\mu_0))} \right]$$

b) Tenemos que la inductancia mutua:

$$M_{ij} = N_j \frac{d\phi_{ij}}{dI_i} = N_i \frac{d\phi_{ji}}{dI_j}$$

Donde, ϕ_{ij} es el flujo que la bobina i produce sobre la bobina j. Cabe destacar que dada la orientación de las bobinas, el signo de la inductancia mutua podría ser $+$ o $-$. Así, se tiene:

$$L_\mathrm{AB} = L_\mathrm{BA} = \frac{N^2(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g)}{\mathcal{R}_\mathrm{A}(\mathcal{R}_\mathrm{A} + 2(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g))} = \frac{N^2 \mu A_\mathrm{c}}{l_\mathrm{A}} \left[\frac{l_1 + l_2 + g\,(\mu/\mu_0)}{l_\mathrm{A} + 2(l_1 + l_2 + g\,(\mu/\mu_0))} \right]$$

$$L_\mathrm{A1} = L_\mathrm{A} = -L_\mathrm{B1} = -L_\mathrm{IB} = \frac{-NN_1}{\mathcal{R}_A + 2(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_g)} = \frac{-NN_1 \mu A_c}{l_\mathrm{A} + 2(l_1 + l_2 + g\,(\mu/\mu_0))}$$

c)

$$v_1 = \frac{d}{dt}\left[L_{\mathrm{A1}} i_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B1}} i_{\mathrm{B}}\right] = L_{\mathrm{A1}} \frac{d}{dt}\left[i_{\mathrm{A}} - i_{\mathrm{B}}\right]$$