Pauta

Ayudantía 2

Electroestática y Condiciones de Borde

P1)

Usamos $\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$, Como $\vec{E}\cdot\vec{ds} = |E|\,ds\;\hat{r}\cdot\hat{r}$

$$\Rightarrow |E|\,4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_{enc}}{4\pi r^2\varepsilon_0}\,\hat{r}$, Q_{en} varía según $0<r<R$ o $r\geq R$

$$Q_{en\,r\geq R} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{R} Kr^2\,r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi \rightsquigarrow Q_{en\,r\geq R} = \int_0^R 4\pi K r^4\,dr$$

$$\Rightarrow Q_{en\,r\geq R} = \frac{4\pi KR^5}{5}$$

Ahora

$$Q_{en\,0<r<R} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{r} Kr^2\,r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi \Rightarrow Q_{en\,0<r<R} = \frac{4\pi Kr^5}{5}$$

Así

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\frac{4\pi Kr^5}{5}}{4\pi r^2\varepsilon_0}\,\hat{r} \rightsquigarrow \dfrac{Kr^3}{5\varepsilon_0} & 0<r<R \\[2ex] \dfrac{\frac{4\pi KR^5}{5}}{4\pi r^2\varepsilon_0}\,\hat{r} \rightsquigarrow \dfrac{KR^5}{5\varepsilon_0 r^2} & r\geq R \end{cases}$$

Condiciones de Borde para $E \perp$

$$\varepsilon_0 E_2 \perp - \varepsilon_0 E_1 \perp = \sigma_s$$

Como la sup. es no conductora $\sigma_s = 0$

$$\Rightarrow \quad E_2 \perp = E_1 \perp$$

Evaluamos en $r = R$. Para E_1 es $r = R^-$ y E_2 es $r = R^+$

$$\frac{K R^5}{5\varepsilon_0 R^2} = \frac{K R^3}{5\varepsilon_0} \quad \checkmark \quad \text{Cumple.}$$

Potencial

$$\varphi_{(r)} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$\varphi^{(r)}_{r>R} = -\int_{\infty}^{r} \frac{K R^5}{5\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r}\, dr \Rightarrow \varphi^{(r)}_{r>R} = -\frac{K R^5}{5\varepsilon_0 r} \quad //$$

$$\varphi^{(r)}_{0<r<R} = -\int_{\infty}^{r} \frac{K r^3}{5\varepsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r}\, dr \Rightarrow \varphi^{(r)}_{0<r<R} = \frac{-K}{20\varepsilon_0}\left(5R^4 - r^4\right) \quad //$$

¿Si la esfera es conductora?

El campo $\vec{E}$ es el mismo para $r > R$ pero $\vec{E} = 0$ si $0 < r < R$.

Para las condiciones de borde se hace igual que antes

$$\varepsilon_0 E_2 \perp - \varepsilon_0 E_1 = \sigma, \quad \text{Como } \sigma = \frac{q_T}{\text{Area}} \Rightarrow \sigma = \frac{K R^3}{5}$$

y $E_1 = 0$ porque es conductor

$$E_2(r = R^+) = \frac{K R^3}{5\varepsilon_0} \quad //$$

P2

a) Sin cargas libres

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = 0$$

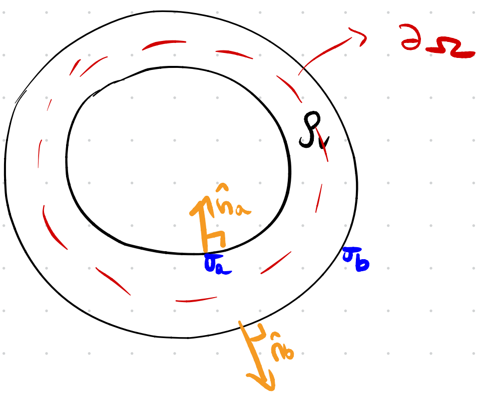
$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Como $\vec{P}$ es 0 en el vacío, en $r<a$ y $r>b$ $\vec{E}=0$

En $a<r<b$, $\vec{P} = \frac{K}{r}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{-K}{r\varepsilon_0}\hat{r}$ //

La región $r<a$ tiene q_T cero

La región $a<r<b$ tiene q_T producto de la polarización



La carga total encerrada por $\partial\Omega$ es:

$$\sigma_a \cdot A + \rho_v \cdot V$$

Encontramos σ_a y ρ_v con $\vec{P}$

$$\sigma_a = \vec{P}_{(a)} \cdot \hat{n} = \vec{P}_{(a)} \cdot (-\hat{r}) = -K/a$$

$$\rho_v = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{K}{r}\right) = -\frac{K}{r^2}$$

Así, $Q_T = -\frac{K}{a} \cdot 4\pi a^2 + \int_{\Omega} -\frac{K}{r^2} dv$

Para $r > b$

$$\sigma_b = \vec{P}_{(b)} \cdot \hat{n} = \vec{P}_{(b)} \cdot \hat{r} = K/b$$

Así $Q_T = -\frac{K}{a} \cdot 4\pi a^2 + \int_{\Omega} -\frac{K}{r^2} dv + 4\pi b^2 \frac{K}{b}$ //

Para la situación b)

$r < a$ $\quad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0 \quad (Q_L = 0)$

$r > a$ $\quad$ Ley de Gauss $\vec{D}$ dice

$$4\pi r^2 \vec{D}(r) = Q \Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Así $\vec{E}_{a<r<b} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon} \hat{r}$ $\quad$ y $\quad \vec{E}_{r>b} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \hat{r}$

$\therefore$ $\vec{P}$ en $a < r < b$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{r} = \Big(\overbrace{\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}}^{\chi} \Big) \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{r}$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

P3

Quiero ver si la distribución dada produce el mismo $\vec{E}$ que una dist. puntual de cargas.

- Campo por dist. puntual de N cargas

$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{K q_i (\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

- Campo de la dist. volumetrica $\rho(\vec{x})$

$$\vec{E}_{(\vec{x})} = \iiint_V \frac{K (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) \, d^3x'$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \iiint_V \frac{K (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} q_i \, \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) \, d^3x'$$

$$= \sum_{i=1}^{N} K q_i \iiint_V \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) \, d^3x'$$

CEDAZO

$$= \sum_{i=1}^{N} K q_i \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

llegamos a lo mismo !!!

P4

Componente // de E en la interfaz es siempre continua!

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \operatorname{sen}\theta_2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}$$

La componente $\perp$ de $\vec{D}$ experimenta una discontinuidad en presencia de carga libre.

$$D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \sigma_s$$

Como no hay carga libre

$$D_2^{\perp} = D_1^{\perp}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2 = \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

Igualamos ambos resultados

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \Rightarrow \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Si el medio 1 es aire, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$

$$\Rightarrow \frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} > 1 \Rightarrow \varepsilon_2 > \varepsilon_0$$

$\Rightarrow$ Se aleja !!!

☆ Esto sirve para la I2

P5

Pasos para resolver

1) elegir sist. coordenadas, esto determina operadores ∇ y ∇^2

2) Basados en la elección de 1) ver en que dirección varía φ
$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ o $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}$ etc$)$

3) φ dependerá de 1 variable x, y, z, θ, r etc
la variable se relaciona con el sist. de referencia

☆ Si dependiera de 2 tendrían que usar separación de variables

4) usar $\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ o $\nabla^2 \varphi = 0$, depende si hay densidades vol

5) Para que una $\frac{df}{d\cdot}$ valga cero, f es una constante!!!

$$\hookrightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dz^2} = A \Rightarrow \varphi_{(z)} = Az + B \quad ^^$$

6) usar condiciones de borde $\varphi_{(z=0)} = 2 \quad \varphi_{(z=\alpha)} = $ ☺

7) $E = -\nabla \varphi$

Resolviendo

1) Coordenadas cilíndricas / Polares ($z=0$)

2) φ varía en dirección $\hat{\theta}$

3) φ sólo depende de θ, no varía con r porque las placas son <u>muy</u> grandes (∞). Además α es chiquito

4) No hay ρ, usamos $\nabla^2\varphi = 0$

Laplaciano en cilíndricas: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Como φ depende de θ, $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$!

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

5) Como $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$, quiere decir que $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = A$

Integro otra vez $\rightarrow \varphi(\theta) = A\theta + B$

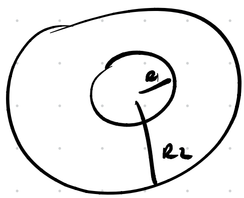
6) Las condiciones de borde dicen $\varphi(\theta=0) = 0$
$\varphi(\theta=\alpha) = V$

Así, evaluando en φ c/u $\Rightarrow \varphi(\theta) = \frac{V}{\alpha}\theta$

P6

En esféricas!!! Además no hay densidades vol.

La figura es equivalente a 2 esferas concéntricas



φ varía en $\hat{r}$ y solo depende de r.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0$$

Si lo anterior es 0, significa que $r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = cte$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C}{r^2} \Rightarrow \varphi(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Asumo que $\varphi(r=R_2) = 0$ y $\varphi(r=R_1) = V_0$

↳ No pierdo generalidad

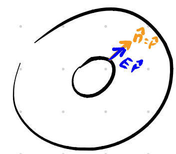
$$\Rightarrow \quad \varphi(r) = \frac{V_0 R_1 R_2}{r(R_2 - R_1)} - \frac{V_0 R_1}{R_2 - R_1}$$

Ahora $\quad E = -\nabla \varphi \quad$ Gradiente en esféricas!!!

↳ solo vivirá $\hat{r}$:)

$$\vec{E}(r) = \frac{V_0 R_1 R_2}{r^2 (R_2 - R_1)} \hat{r}$$

Queremos Q, y $Q = \iint \sigma \, ds$



Usando

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}(r = R_1) \hat{n}$$

$$= \varepsilon_0 E(r = R_1) \hat{r} \cdot \hat{r}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 V_0 R_2}{R_1 (R_2 - R_1)}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{|Q|}{\Delta V} = \frac{1}{V_0} \iint \sigma \, ds \Rightarrow C_1 = \frac{4\pi R_1^{\cancel{2}} \varepsilon_0 R_2}{\cancel{R_1} (R_2 - R_1)}$$

Para el cascarón más grande es lo mismo

$$C_2 = \frac{4\pi \rho_1 \rho_2 \varepsilon_0}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$C_{total} = C_1 + C_2$$