Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Interrogación 03

06 de julio de 2024

Instrucciones

- Tiempo Límite de la Evaluación: **2 horas**.
- Puntaje Máximo: 24 puntos.
- Se permite el uso de calculadora. Se prohibe el uso de otros dispositivos electrónicos, tales como celulares, tablets, computadores, etc.
- Responda cada pregunta en una hoja separada. **No combine respuestas de distintas preguntas en una misma hoja**.
- Para cada pregunta escriba su nombre y el número de pregunta en la hoja correspondiente. **Aquellas hojas que carezcan de esta información no serán corregidas.**
- Responda con **letra legible**. Desarrollos tachados o garabateados no serán considerados en la corrección. En caso de que se solicite una expresión o respuesta numérica, déjela claramente señalada, encerrándola en un recuadro.
- Solo habrán 3 instancias de dudas: al inicio de la evaluación, a los 45 minutos y a los 90 minutos. Las dudas a tratar serán exclusivamente de enunciado.
- Este curso se adscribe y compromete al Código de Honor UC:

  Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en las relaciones con los demás integrantes de la comunidad y en la realización de todo trabajo, particularmente en aquellas actividades vinculadas a la docencia, al aprendizaje y la creación, difusión y transferencia del conocimiento. Además, me comprometo a velar por la dignidad e integridad de las personas, evitando incurrir en y, rechazando, toda conducta abusiva de carácter físico, verbal, psicológico y de violencia sexual. Del mismo modo, asumo el compromiso de cuidar los bienes de la Universidad

- En caso de detectar copia u otro tipo de acto deshonesto en esta evaluación, se le solicitará firmar esta hoja a modo de respaldo. La falta implicará la reprobación inmediata del curso con nota 1.1 y el caso será notificado a la Dirección de Pregrado.

Pregunta 1 [6 puntos]

Escoja y responda brevemente 4 de los siguientes 6 ítems. Si lo considera necesario, puede apoyarse en el uso de fórmulas, elementos gráficos o expresiones matemáticas. **Sea claro en señalar los ítems escogidos. Solo se corregirán los 4 primeros en ser respondidos.**

(a) [**1.5 puntos**] Considere el ejemplo de televisión satelital visto en clases. Explique el trayecto desde que la onda electromagnética es enviada hasta que llega al televisor. Emplee al menos 3 de las temáticas generales vistas en el curso.

A continuación se presentan algunos elementos a incluir, ordenados por eje temático. No es necesario que se responda con el mismo nivel de detalle, pero que contemple algunos de los contenidos mencionados para 3 de los ejes temáticos:

- Ondas: Desde el satélite se transmiten las señales de TV, al ser señales satelitales, las ondas estarán en polarización circular. Hay cambios de medio entre el espacio, las capas de la atmósfera y la tierra, de modo que la señal puede experimentar distintos grados de reflexión y transmisión.
- Antenas: La señal es recibida por una antena. Comúnmente son antenas omnidireccionales, con cierto grado de orientación vertical y capaces de recibir ondas en polarización circular. La antena actúa como receptor, y la potencia capturada es menor a la inicialmente transmitida por el satélite.
- Guías de onda: en general, las antenas de tipo parabólica concentran la señal en un foco, el cual suele tener acoplada una pequeña guía de onda, que posteriormente termina en un cable coaxial.
- Líneas de transmisión: El cable coaxial conecta la antena y la TV. En este caso se debe asegurar que todos los elementos esten a igual impedancia, cosa de maximizar la potencia. Debido a esto, se requiere una correcta adaptación de impedancias.

(b) [**1.5 puntos**] Nombre y explique brevemente las 4 etapas del proceso de generación de imágenes por resonancia magnética.

- **Polarización:** Se produce un alineamiento de los spins debido al fuerte campo magnético del resonador. Estos permanencen precesando a la frecuencia de Larmor.
- **Excitación:** Se aplica un pulso de RF a la frecuencia de Larmor. Este pulso genera un campo B_1 que lleva a los spins al plano transversal.
- **Lectura:** Mediante gradientes de campo se codifica espacialmente la presencia de los spins. Se genera un mapa de amplitudes y frecuencias en el espacio k, el cual es leído por el resonador.
- **Reconstrucción:** Se aplica la transformada inversa de Fourier para convertir el mapa de frecuencias en una imagen.

(c) [**1.5 puntos**] Nombre y describa los distintos pasos necesarios para generar un mapa de QSM. Considere como punto de inicio una imagen MRI compleja (magnitud y fase).

- **Phase Unwrapping:** Se elimina la componente periódica de la imagen de fase.
- **Background Field Removal:** Se eliminan las contribuciones de fase generadas por tejidos externos a la región de interés.
- **Combinación de Ecos**: Se toman las imágenes obtenidas a distintos TE y se combinan en una sola imagen.
- **Dipole Inversion:** Se realiza la deconvolución del dipolo discreto, o en otras palabras, se estima la distribución de susceptibilidad a partir del mapa de variaciones del campo magnético.

(d) [**1.5 puntos**] Nombre y describa al menos 2 elementos o consideraciones empleadas en el diseño de circuitos de radiofrecuencia.

- **RF Tapers:** Se hace una transición suave entre la pista y el pad donde se soldan los componentes de la PCB. Esto evita cambios en la impedancia.
- **RF vias:** se agregan agujeros cerca de las pistas. Estos agujeros ofrecen un camino de baja impedancia a tierra, lo cual evita que el ruido de RF contamine otras partes del circuito.
- **No encender el circuito si se desconectó la antena:** Algunos circuitos de RF tienen antenas. Usualmente, previo a la antena hay un amplificador operando al límite. Extraer la antena genera una terminación en circuito abierto, la señal reflejada se suma a la incidente, y la amplitud de voltaje puede dañar el amplificador.
- **Componentes de parámetros distribuidos:** Mediante el diseño de distintas geometrías en la vía de la PCB, se pueden generar distintos tipos de componentes, tales como capacitores, inductores, multiplicadores de señal, antenas, entre otros.
- Microstrips: Es necesario tener en consideración el tamaño y material de las vías. Existen aplicaciones que permiten calcular la impedancia de los microstrips, dependiendo de su tamaño y posición en la PCB.
- Componentes embebidos: Este corresponde al caso de circuitos integrados. Mediante comninaciones de capas dieléctricas y conductoras se pueden generar resistencias, capacitores, inductores y transformadores.

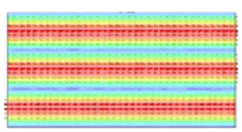
(e) [**1.5 puntos**] Describa el proceso para diseñar una red tipo L usando la Carta de Smith. Considere $R_L < Z_0$ y sea claro en los pasos a ejecutar.

- Paso 1: identificar la topología. Dado que $R_L < Z_0$, se necesita una topología paralelo serie.
- Paso 2: normalizar la impedancia de carga y graficarla en la Carta de Smith.

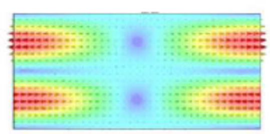
- Paso 3: Trazar el círculo de conductancia unitaria a la izquierda de la carta ($g = 1$).
- Paso 4: Se sigue el circulo r_L de la Carta de Smith, hasta llegar a una intersección con el círculo $g = 1$.
- Paso 5: Se determina la reactancia inicial y final. La resta entre ellas dará el valor normalizado del componente serie. Tras normalizar, se obtiene el valor de X.
- Paso 6: nos movemos desde la intersección hasta el centro de la carta, siguiendo el círculo $g = 1$.
- Paso 7: Se determina la susceptancia mediante la resta entre la susceptancia final e inicial de los puntos entre los cuales nos movimos. Luego se desnormaliza para obtener B.

(f) [**1.5 puntos**] Dibuje los patrones de campo de un modo TE_{03}, TE_{12} y TM_{01} para el corte transversal de una línea de transmisión rectangular.

TE_{03}



TE_{12}



TM_{01}

NO EXISTE

Pregunta 2 [6 puntos]

Empleando la Carta de Smith, diseñe un stub paralelo en circuito abierto, con el fin de adaptar una carga $Z_L = 80 + j50\ \Omega$ a una línea de transmisión de 100 Ω. Considere que la línea tiene una permitividad relativa $\varepsilon_r = 4$ y que la frecuencia de operación es de 100 MHz. Sea claro al señalar cada combinación de soluciones.

A continuación se presenta el desarrollo vía Carta de Smith:

1. Se grafica la impedancia normalizada $z_L = 0.8 + j0.5$, la admitancia y_L, la ROE y el círculo unitario $r = 1$.

2. A partir de la intersección de la ROE y $r = 1$, identificamos las soluciones.

3. Desde el punto en que se ubica y_L medimos el arco hacia cada una de las soluciones. Estos arcos se muestran como trazos morados en la figura. A partir de las mediciones se tiene que:

$$d_1 = 0.284\lambda$$
$$d_2 = 0.484\lambda$$

4. Para cada una de las soluciones, trazamos la curva asociada a la reactancia generada (trazos en verde claro).

5. Dado que se trata de un stub paralelo en circuito abierto, nos vamos al extremo izquierdo de la carta, que corresponde a una impedancia infinita en paralelo. Desde allí, medimos los arcos hacia las reactancias que compensan el efecto de cada solución. Luego:

$$l_1 = 0.414\lambda$$
$$l_2 = 0.086\lambda$$

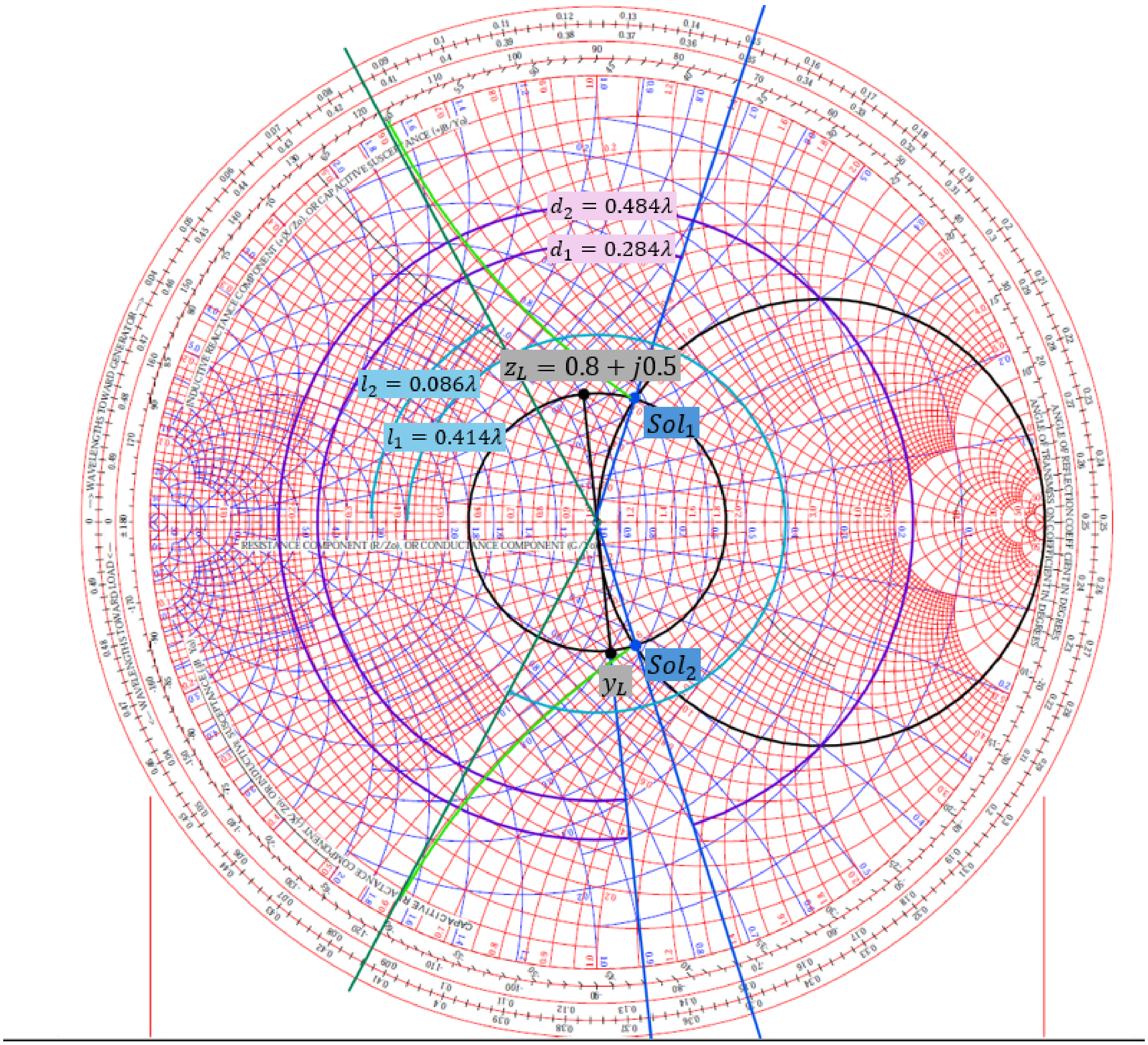
6. Solamente falta escalar las longitudes usando la longitud de onda. A partir de la permitividad relativa de la linea se tiene que:

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{f} = \frac{150 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^6} = 1.5\ [m]$$

Luego:

$$d_1 = 42.6\ [cm] \qquad l_1 = 62.1\ [cm]$$

$$d_2 = 72.6\ [cm] \qquad l_2 = 12.9\ [cm]$$



$d_2 = 0.484\lambda$
$d_1 = 0.284\lambda$
$z_L = 0.8 + j0.5$
$l_2 = 0.086\lambda$
$l_1 = 0.414\lambda$
Sol_1
Sol_2
y_L

Pregunta 3 [6 puntos]

Una guía de ondas rectangular, rellena con aire, tiene frecuencia de corte del modo TE_{10} a 10 GHz, mientras que para el modo TE_{23} la frecuencia de corte es de 30 GHz. Determine:

(a) **[2 puntos]** Las dimensiones de la guía.

La frecuencia de corte en una guía de ondas está dada por:

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Para el caso del modo TE_{10} se tiene:

$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2a}$$

Despejando a:

$$a = \frac{c}{2f_{c_{10}}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^{10}}$$

$$\boxed{a = 15\ [mm]}$$

Luego, para el caso TE_{23}:

$$3\cdot 10^{10} = \frac{3\cdot 10^8}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{0.015}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2}$$

$$4\pi^2\cdot 10^4 - \left(\frac{2\pi}{0.015}\right)^2 = \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2$$

$$b = \pm\frac{3}{2\sqrt{10^4 - 0.015^{-2}}}$$

$$\boxed{b = 20\ [mm]}$$

Notemos que en este caso, la dimensión b de la guía es mayor. Esto va contra la convención clásica. En la práctica, esto implica que en realidad el modo dominante sería TE_{01}. O bien, simplemente podemos invertir los pares (a, b) y trabajar como siempre.

(b) **[2 puntos]** Las frecuencias de corte de 4 modos intermedios.

En este caso, simplemente basta con evaluar la fórmula de frecuencia de corte para los distintos casos. Para no generar complicaciones adicionales, nos apegaremos a que $a = 15mm$ y $b = 20mm$.

Dado que se piden modos **intermedios**, solo se consideran válidos aquellos con frecuencias de corte entre 10 y 30 GHz. A continuación se presenta la lista de posibles respuestas:

Modo	$f_{c_{mn}}$ [GHz]
TE_{11}	12.5
TE_{20}	20
TE_{02}	15
TE_{21}	21.36
TE_{12}	18.02
TE_{22}	25
TE_{30}	30
TE_{03}	22.5
TE_{13}	24.6

(c) **[2 puntos]** La frecuencia de corte para el modo TE_{02} si la guía se llena con un material transparente de $\varepsilon = 5.5\varepsilon_0$.

Notemos que este cambio simplemente modifica el valor de la constante c en un factor $\sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{5.5}$. Luego:

$$f_{c_{20}}^{\varepsilon_r} = \frac{f_{c_{02}}}{\sqrt{5.5}} = \frac{15\ [GHz]}{\sqrt{5.5}} = 6.39\ [GHz]$$

Pregunta 4a [4 puntos]

Considere un arreglo de antenas dipolo $\lambda/2$ de 75 Ω de la Figura, las cuales se ubican a una distancia de 500 [m], ambas ubicadas en el mismo plano $x - z$. La antena transmisora es alimentada con un voltaje instantáneo de 200[V] a 1 [MHz], el cual es suministrado desde el extremo izquierdo de una línea de transmisión de $Z_0 = 130\ \Omega$.

Determine:

(a) **[1 punto]** La potencia promedio real entregada a la antena transmisora.

En este caso simplemente consideramos a la antena como una carga. Luego, la potencia entregada por la línea de transmisión estará dada por:

$$\bar{P} = \frac{V^2}{2Z_0}\left(1 - |\Gamma|^2\right) = \frac{V^2}{2Z_0}\left(1 - \left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|^2\right)$$

Reemplazando valores:

$$\bar{P} = \frac{200^2}{2 \cdot 130}\left(1 - \left|\frac{75 - 130}{75 + 130}\right|^2\right) = 153.85 \cdot (1 - 0.27^2)$$

$$\boxed{\bar{P} = 142.63\ [W]}$$

(b) **[2 puntos]** Las ganancias directivas de ambas antenas.

Para el caso de la antena transmisora, la ganancia directiva a una inclinación de 45° estará dada por:

$$G_{dt} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}\right]^2$$

$$\boxed{G_{dt} = 0.394}$$

Asimismo, para el caso de la antena receptora a 30°, la orientación en torno al eje quedará en un ángulo de 60°:

$$G_{dr} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}\right]^2$$

$$\boxed{G_{dr} = 0.666}$$

(c) **[1 punto]** La potencia promedio real que llega a la antena receptora.

Asumiendo vacío, tenemos que la longitud de onda de la señal irradiada es:

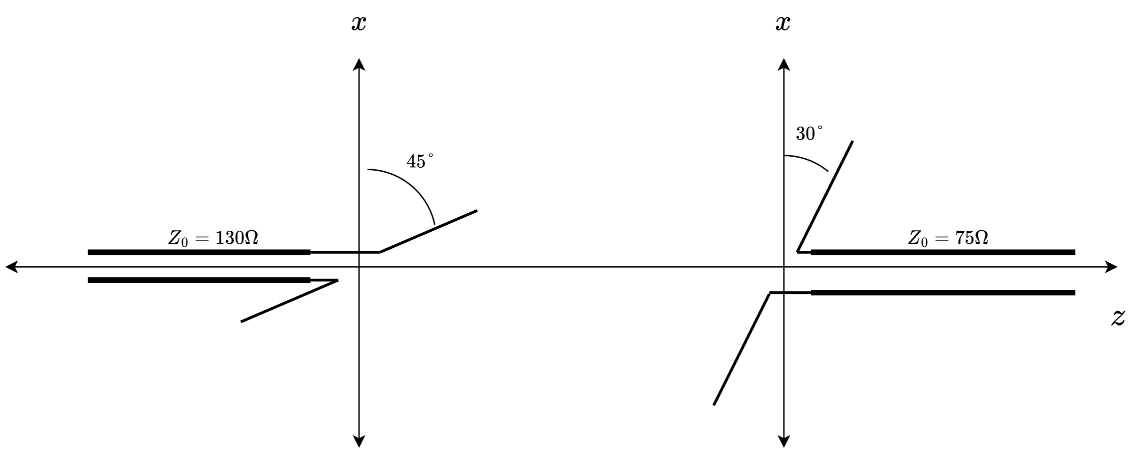
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{300[Mm/s]}{1[MHz]} = 300[m]$$

Luego, empleando la ecuación de Friis:

$$P_r = G_{dr} \cdot G_{dt} \cdot \left[\frac{\lambda}{4\pi r}\right]^2 \cdot \bar{P}$$

$$P_r = 0.394 \cdot 0.666 \cdot \left[\frac{300}{4\pi \cdot 500}\right]^2 \cdot 142.63$$

$$\boxed{P_r = 85.32[mW]}$$



Pregunta 4b [2 puntos]

Se tiene una antena de tipo corno piramidal cuadrado, también conocida como "la antena de nombre chistoso" por los alumnos de TEM, cuyo patrón de radiación se presenta en la figura adjunta. La antena en cuestión se encuentra operando como radar en banda S, emitiendo pulsos de potencia $P_{rad} = 45$ [kW] a una frecuencia de 3 [GHz] y con una potencia mínima de detección de 5×10^{-15} [W]. Considerando un objeto con una sección transversal de 40 [m^2], determine:

(a) **[1 punto]** La potencia mínima irradiada por el objeto, tal que se garantiza su detección. Asuma que el radar apunta desde su orientación óptima.

A partir de la gráfica se tiene que la ganancia en la dirección optima es de aproximadamente 14 dB.

$$G_{dt} = 10^{1.4} = 25.11$$

Por otro lado, la longitud de onda del sistema está dada por:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0.1[m]$$

Luego, empleando la definición de área efectiva:

$$\bar{P} = \frac{P_r}{A_e} = \frac{4\pi P_r}{\lambda^2 G_d t} = \frac{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-15}}{0.1^2 \cdot 25.11}$$

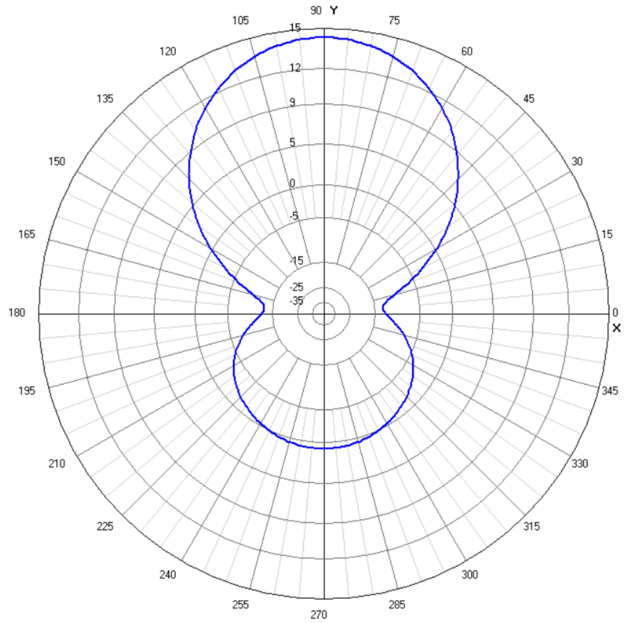
$$\boxed{\bar{P} = 2.5 \cdot 10^{-13}\ [W]}$$

(b) **[1 punto]** La distancia mínima a la cual debe ubicarse el objeto a modo de no ser detectado.

Simplemente reemplazamos todos nuestros datos en la Ecuación de Radar:

$$r = \left[\frac{(\lambda G_{dt})^2 \sigma P_{rad}}{(4\pi)^3 P_r}\right]^{1/4} = \left[\frac{(0.1 \cdot 25.11)^2 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 10^3}{(4\pi)^3 \cdot 5 \cdot 10^{-15}}\right]^{1/4}$$

$$\boxed{r = 32.7[km]}$$



90
Y
105
75
120
60
135
45
150
30
165
15
180
0
X
195
345
210
330
225
315
240
300
255
285
270
15
12
9
5
0
-5
-15
-25
-35

Ondas

$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$	$\frac{\omega^2}{\lvert\vec{\mathbf{k}}\rvert^2} = u^2$	$\beta = \frac{\omega}{u} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0}$

$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]^{1/2}$	$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]^{1/2}$

$\eta = \frac{\mu E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}}$	$\lvert\eta\rvert = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-1/4}$	$\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$

Ondas en medios (0 = vacío, d = dieléctrico, c = conductor ideal)

$\alpha_0 = 0 \quad \beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ $\lvert\eta_0\rvert = 377\Omega \quad \theta_{\eta_0} = 0$	$\alpha_d = 0 \quad \beta_d = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ $\lvert\eta_d\rvert = \sqrt{\mu/\varepsilon} \quad \theta_{\eta_d} = 0$	$\mu_{r,d} \approx 1 \quad n_d = \sqrt{\varepsilon_r}$

$\alpha_c \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2} \quad \beta_c \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$ $\lvert\eta_c\rvert \approx \sqrt{\omega\mu/\sigma} \quad \theta_{\eta_c} \approx \pi/4$	$\delta = \frac{1}{\alpha}$	$R_\square = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\sigma}}$	$u_g = \frac{u}{1-\beta\frac{du}{d\omega}}$

Energía y Potencia (c = en conductores)

$\vec{\boldsymbol{\mathcal{P}}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{E^2}{\eta}\vec{\mathbf{a}}_k = \eta H^2\vec{\mathbf{a}}_k$	$\langle\vec{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\rangle = \frac{E_0^2}{2\eta}\vec{\mathbf{a}}_k = \frac{\eta H_0^2}{2}\vec{\mathbf{a}}_k$	$\bar{P} = \frac{E_0^2}{2\lvert\eta\rvert}e^{-2\kappa\cdot r}\cos(\theta_\eta)$

Ondas en Interfases

$\theta_i = \theta_r$	$\beta_1\sin\theta_i = \beta_2\sin\theta_t$ $n_1\sin\theta_i = n_2\sin\theta_t$	$n = \frac{\eta_0}{\eta}$	$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon_1/\varepsilon_2}}$ $\tan\theta_b = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$

$\Gamma^\parallel = \frac{\eta_2\cos\theta_t-\eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t+\eta_1\cos\theta_i} = \frac{n_1\cos\theta_t-n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i}$	$T^\parallel = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t+\eta_1\cos\theta_i} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i}$
$\Gamma^\perp = \frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} = \frac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t}$	$T^\perp = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t}$

Líneas de Transmisión

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$SWR = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

$$|\Gamma| = \frac{ROE-1}{ROE+1}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\left(1 - |\Gamma|^2\right)$$

Guías de Ondas y Antenas

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$f_{\lambda/2}(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$U(\theta,\phi) = r^2\bar{P}$$

$$\bar{U} = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

$$G_{d_{\lambda/2}}(\theta) = \frac{U(\theta)}{\bar{U}} = \frac{4\pi U(\theta)}{P_{rad}} = (f_{\lambda/2}(\theta))^2$$

$$D[dB] = 10\log_{10} D$$
$$G[dB] = 10\log_{10} G$$

$$A_e = \frac{P_r}{\bar{P}} = \frac{\lambda^2 G_d(\theta)}{4\pi}$$

$$P_r = G_{dt}(\theta)G_{dr}(\theta)\left[\frac{\lambda}{4\pi r}\right]^2 P_t$$

$$P_r = \frac{P_{rad}G_{dt}}{4\pi r^2}\sigma\frac{1}{4\pi r^2}A_e = \frac{(\lambda G_{dt})^2\sigma P_{rad}}{(4\pi^3)r^4}$$

Electromagnetismo

$$\vec{\mathbf{H}} = \int_{V'}\frac{\vec{\mathbf{J}}dV'\times(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{4\pi|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|^3}$$

$$\oint_L \vec{\mathbf{H}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = I_{enc}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}}$$

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{V}{I}$$

$$V_{fem} = -N\frac{d\Psi_M}{dt}$$

Constantes útiles

$$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\ [\mathrm{C^2/Nm^2}]$$
$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ [\mathrm{N/A^2}]$$
$$c = 3\cdot 10^8\ [\mathrm{m/s}]$$

Pregunta I1 [Ref: FIS1533 2024-I][6 puntos]

Un anillo cuadrado de radio a y resistencia R se mueve a una velocidad constante u, alejándose de un alambre infinitamente largo que lleva una corriente I en el plano del anillo, como se muestra en la figura.

(a) **[2 puntos]** Encuentre una expresión general para el campo magnético generado por el alambre.

Aplicando ley de Ampère sobre un camino circular de radio r:

$$\oint_{\mathcal{P}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$|B(r)| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Notemos que, usando regla de la mano derecha, el vector del campo magnético es saliente para el plano ubicado sobre el alambre. Luego:

$$\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi z}\vec{a}_y$$

(b) **[2 puntos]** Determine una expresión para el flujo que circula por el anillo en función del tiempo.

Definamos convenientemente que el vector normal al área apunta en la misma dirección que el flujo magnético. Luego, por definición, el flujo a través del anillo estará dado por:

$$\Psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{z'=z}^{z'=z+a} \int_{x'=0}^{x'=a} -\frac{\mu_0 I}{2\pi z} dx' dz' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \left(\int_{x'=0}^{x'=a} dx' \right) \cdot \left(\int_{z'=z}^{z'=z+a} \frac{1}{z'} dz' \right)$$

$$\Psi = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln\left(\frac{z+a}{z}\right)$$

Finalmente, dado que la distancia z aumenta a medida que el anillo se aleja, podemos modelarla como $z(t)$. De este modo:

$$\boxed{\Psi(t) = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{z(t)}\right)}$$

(c) [**2 puntos**] Determine la corriente que circula por el anillo y la potencia disipada por el anillo. En el caso de la corriente, indique el sentido de circulación de esta.

Aplicamos ley de Faraday Lenz:

$$V_{ind} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\mu_0 a I}{2\pi}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{z}\right)}\left(-\frac{a}{z^2}\right)\frac{dz}{dt} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2\pi}\frac{1}{z\,(z+a)}\frac{dz}{dt}$$

Luego, notamos que $\frac{dz}{dt} = u$. De modo que:

$$V_{ind} = \frac{\mu_0 a^2 u I}{2\pi z\,(z+a)}$$

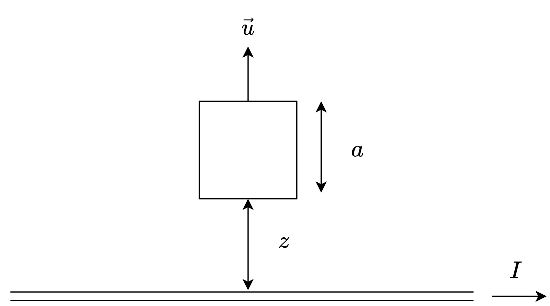
Por ley de Ohm, la corriente estará dada por:

$$\boxed{I_{ind} = \frac{\mu_0 a^2 u I}{2\pi z\,(z+a)\,R}}$$

El flujo al interior del anillo cuadrado se mueve en sentido saliente (hacia afuera de la hoja). Al alejarse el anillo, el flujo disminuirá, lo que equivale a un flujo en sentido contrario al original (entrante). Por ley de Faraday-Lenz, el flujo inducido debe oponerse a este cambio. En consecuencia, el flujo inducido será saliente, y la corriente inducida circulará en sentido **antihorario**.

Finalmente, para la potencia simplemente aplicamos ley de Joule:

$$\boxed{P = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 a^2 u I}{2\pi z\,(z+a)}\right]^2}$$



Pregunta I2 [6 puntos]

Un equipo científico se encuentra realizando estudios de cuencas en exoplanetas, con el fin de analizar las propiedades de estos cuerpos líquidos y la factibilidad de vida extraterrestre. Para llevar acabo este estudio, el equipo dispuso un arreglo de antenas en el fondo de una cuenca, las cuales se comunican con un satélite de acuerdo al siguiente itinerario:

- A las 6 am, el satélite se eleva por el horizonte.
- Al mediodía, el satélite se encuentra justo sobre la cuenca.
- A las 6 pm, el satélite se esconde por el horizonte.

El satélite envía señales correspondientes a ondas electromagnéticas, cuyo campo eléctrico tiene una magnitud instantánea de 150 $[V/m]$ y una frecuencia de 100 [MHz].

Considere que los estudios de composición han arrojado que la atmósfera de este planeta tiene una permitividad $\varepsilon_{atm} = 4\varepsilon_0$ y una permeabilidad $\mu_{atm} = \mu_0$, mientras que el líquido de la cuenca tiene $\varepsilon_{liq} = 3.5\varepsilon_0$ y $\mu_{liq} = \mu_0$.

(a) **[3 puntos]** Determine en qué rango horario las antenas logran recibir señales por parte del satélite.

Las antenas recibirán señal del sátelite siempre y cuando no haya reflexión interna total. De este modo, tenemos que determinar el ángulo crítico:

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3.5}}{\sqrt{4}} = 69.29°$$

Lo cual podemos aproximar a 70°. De este modo, durante los primeros y últimos 20°, toda la señal del satélite se verá reflejada.

Entre las 6AM y las 12PM hay un total de 360 minutos, repartidos en 90°. Esto da una razón de 4 minutos por cada grado recorrido. Para un ángulo de 20° esto equivale a 80 minutos. Luego, **las antenas reciben señales satelitales entre las 7:20AM y las 4:40PM**.

(b) **[3 puntos]** Determine la potencia de la señal satelital recibida por el arreglo de antenas a mediodía.

Esto es simple incidencia normal. En este caso, el coeficiente de transmisión estará dado por:

$$T = \frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{4} + \sqrt{3.5}} = 1.03$$

No sabemos la distancia entre el satélite y el sistema de antenas, de modo que no podemos hacer un cálculo cerrado para la potencia instantánea a un tiempo determinado. De este modo, el mejor método es emplear la potencia promedio transmitida, la cual estará dada por:

$$\bar{P} = \frac{(TE)^2}{2\eta} = \frac{(1.03 \cdot 150)^2}{2 \cdot \frac{120\pi}{\sqrt{3.5}}}$$

$$\boxed{\bar{P} = 59.61 \ [W/m^2]}$$