Clase 07
Magnetostática en Materiales

Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 368 – 375

Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 381 – 420

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Continuamos nuestro análisis del campo magnético, extendido hacia medios materiales.
- Veremos propiedades, y los análogos a polarización y circuitos eléctricos.

Objetivos de Aprendizaje Involucrados:

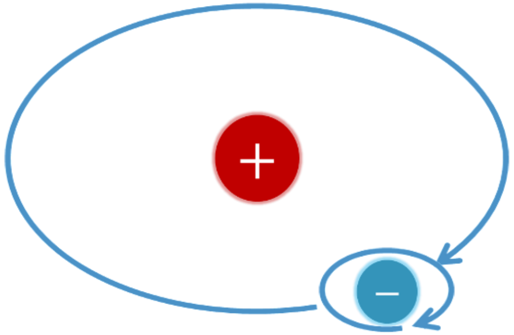
- **OA-06:** Plantear y resolver ecuaciones del electromagnetismo para resolver problemas en medios materiales (polarización y magnetización).
- **OA-07:** Plantear y resolver ecuaciones para campos magnéticos en circuitos magnéticos de complejidad media.

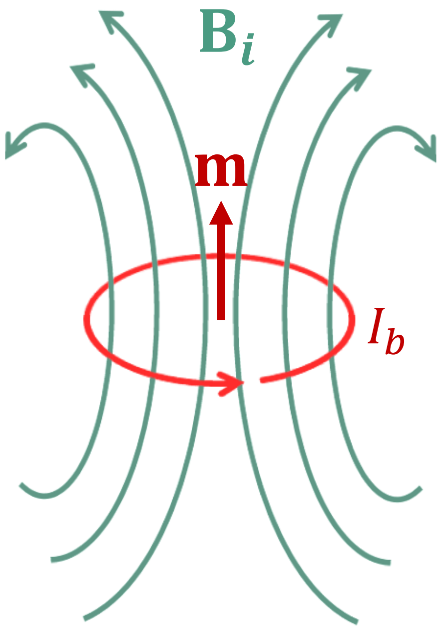
Contenidos

- Magnetización
- Materiales Magnéticos
- Circuitos Magnéticos
- Inductores e Inductancia
- Inductancia Mutua

Magnetización

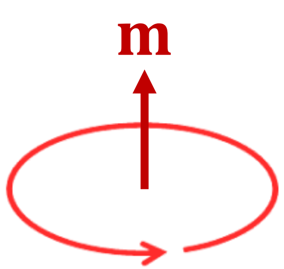
- Consideremos un modelo simple: el átomo de Hidrógeno.

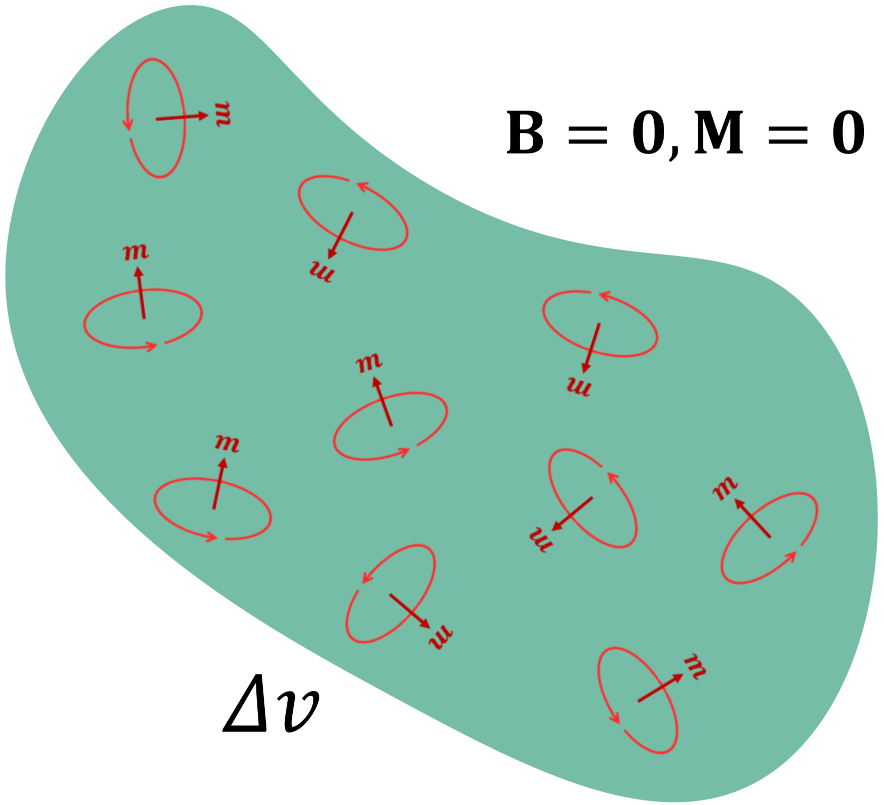




Magnetización

- Un material se compone de múltiples momentos dipolares magnéticos.





Magnetización

- Es el equivalente magnético a la polarización.

- Se define como el momento dipolar magnético por unidad de volumen.

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{m}}{\Delta v}}$$

Magnetización

- Consideremos el diferencial del potencial vectorial magnético:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}(\mathbf{M}dv') \times \mathbf{a}_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M} \times \frac{\mathbf{a}_r}{r^2}\, dv' = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) dv'$$

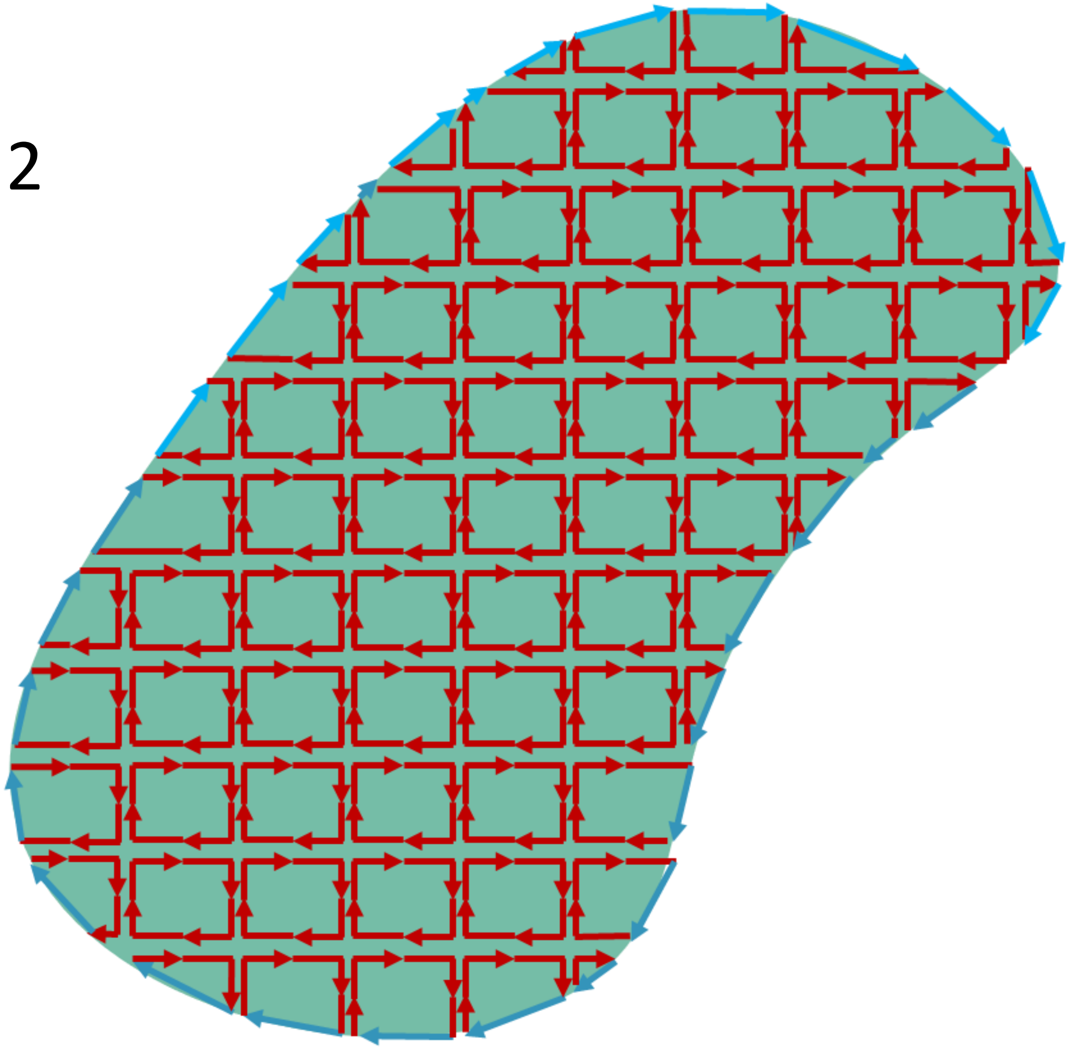
- Integrando y aplicando propiedades de nabla:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left(\frac{1}{r}\nabla' \times \mathbf{M} - \nabla' \frac{\mathbf{M}}{r}\right) dv' \qquad \int_V \nabla \times \mathbf{F}\; dv' = -\oint_S \mathbf{F} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{r}\nabla' \times \mathbf{M}\, dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{1}{R}\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n\, dS' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{r}\mathbf{J}_b v' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{1}{R}\mathbf{K}_b dS'$$

Magnetización

Producto de la magnetización nacen 2 densidades de corrientes ligadas:



$\mathbf{K}_b$: confinadas a la superficie.
$\mathbf{J}_b$: confinadas al volumen.

Magnetización

- Si incorporamos corrientes libres y consideramos solo las corrientes volumétricas, por ley de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H}_{\text{tot}} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}_{\text{tot}}}{\mu_0}\right) = \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})}$$

Campo en un Material

Susceptibilidad y permeabilidad magnética

- En algunos materiales, la magnetización es proporcional al campo aplicado a razón χ_m (susceptibilidad magnética):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

- Luego, podemos definir la permeabilidad magnética como:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r$$

μ_0: permeabilidad del vacío
μ_r: permeabilidad relativa

- Así

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}}$$

Campo en un Material

Materiales Magnéticos

Descartando los materiales no magnéticos ($\chi_m = 0$), hay 3 categorías principales:

- Materiales Diamagnéticos
- Materiales Paramagnéticos
- Materiales Ferromagnéticos

Materiales Magnéticos

Descartando los materiales no magnéticos ($\chi_m = 0$), hay 3 categorías principales:

- <u>Materiales Diamagnéticos</u> ($\chi_m \approx< 0$)
  El momento magnético interno de cada uno de sus átomos se cancela.
  Al aplicar un **H** externo, se genera un **m** opuesto a **H**.
  Caso especial: Superconductores ($\chi_m = -1$).
- Materiales Paramagnéticos
- Materiales Ferromagnéticos

Materiales Magnéticos

Descartando los materiales no magnéticos ($\chi_m = 0$), hay 3 categorías principales:

- Materiales Diamagnéticos
- <u>Materiales Paramagnéticos</u> ($\chi_m >\approx 0$)

  Los momentos de sus átomos no se cancelan completamente.

  Hay un pequeño **m** que se alinea con el campo externo.

  Son dependientes de la temperatura ($\chi_m = k/T$)
- Materiales Ferromagnéticos

Materiales Magnéticos

Descartando los materiales no magnéticos $(\chi_m = 0)$, hay 3 categorías principales:

- Materiales Diamagnéticos
- Materiales Paramagnéticos
- <u>Materiales Ferromagnéticos</u> $(\chi_m \gg 0)$

    Poseen sub-estructuras cristalinas llamadas dominios magnéticos.

    Cada dominio tiene su propio **m** dominante.

    Los dominios se alinean ante un **H** externo. Algunos permanecen así.

    El ferromagnetismo es inversamente proporcional a la temperatura.

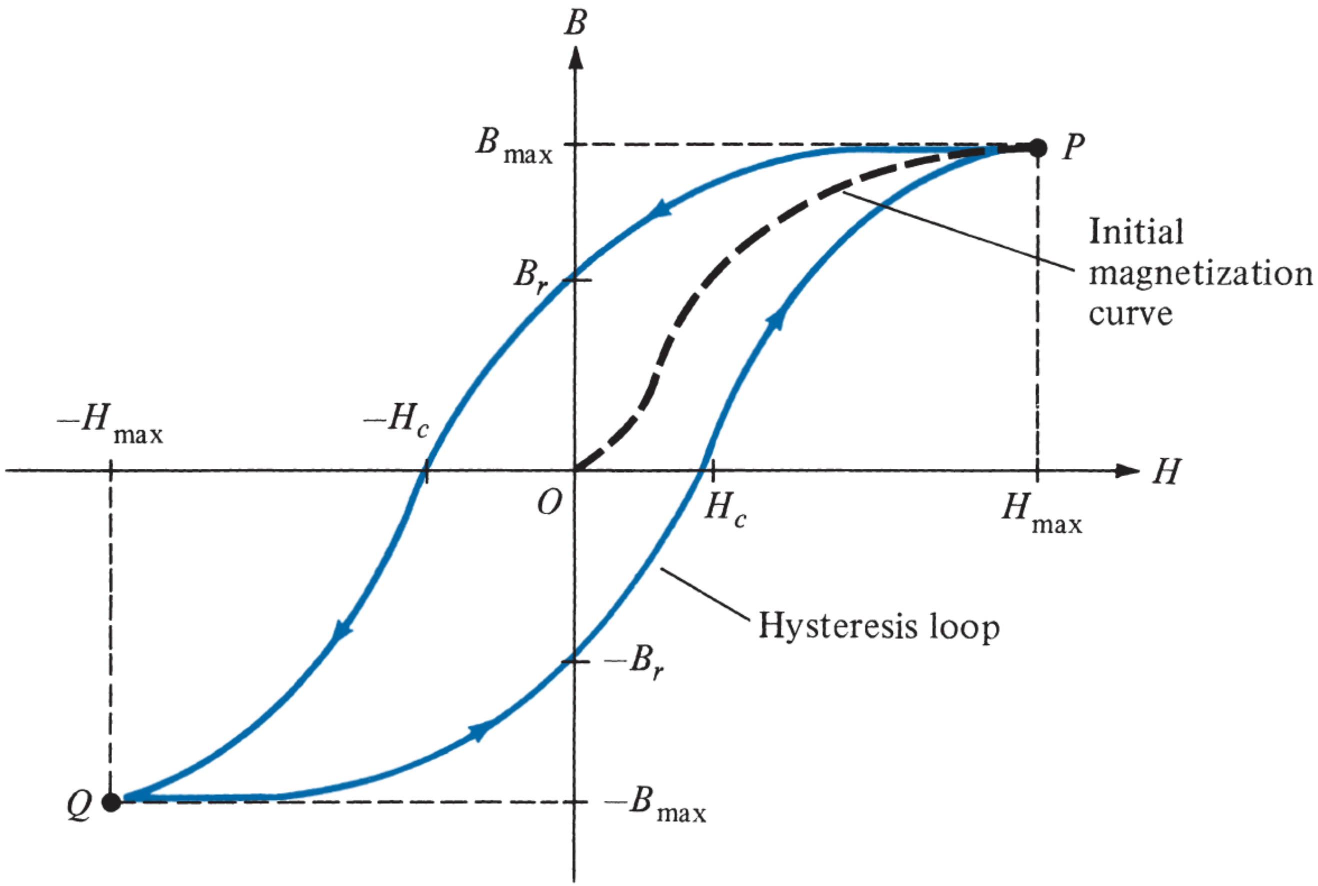
Histéresis Magnética

Remanencia (B_r)

- Capacidad de retener flujo magnético.
- Equivale a la "fuerza" del imán.

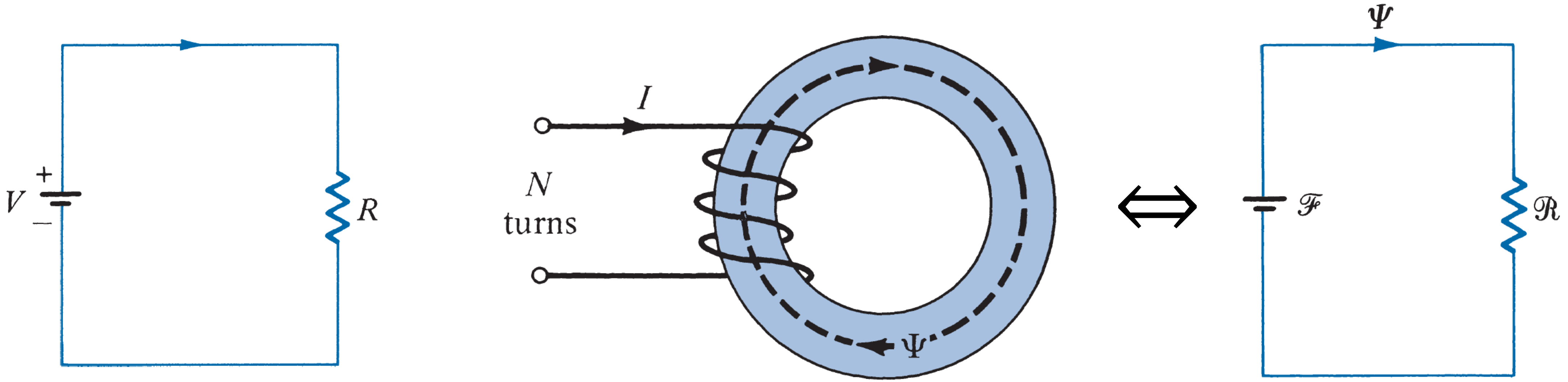
Coercitividad(H_c)

- H necesario para eliminar B_r.
- Equivale a la capacidad del imán de mantener sus características.



Circuitos Magnéticos

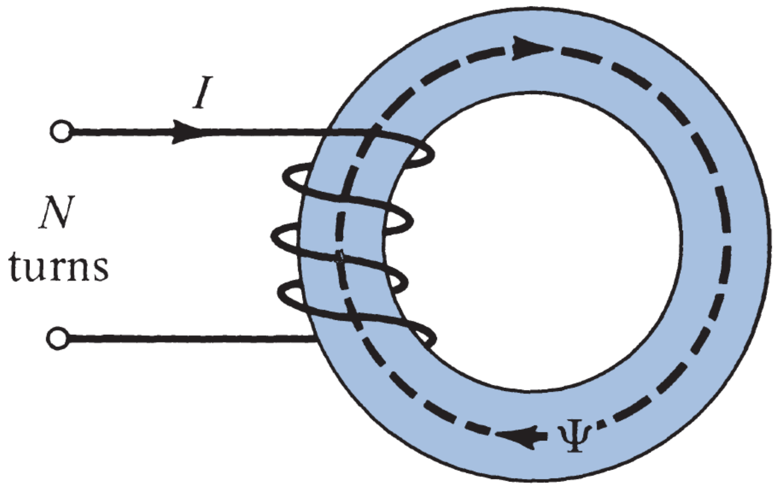
- Son el análogo magnético al caso de los circuitos eléctricos.
- Permiten analizar el comportamiento de transformadores, motores, generadores, etc.



Circuitos Magnéticos

Primero definamos 2 conceptos.

- Fuerza Magnetomotriz ($\mathcal{F}$)
- Reluctancia ($\mathcal{R}$)



Circuitos Magnéticos

Primero definamos 2 conceptos.

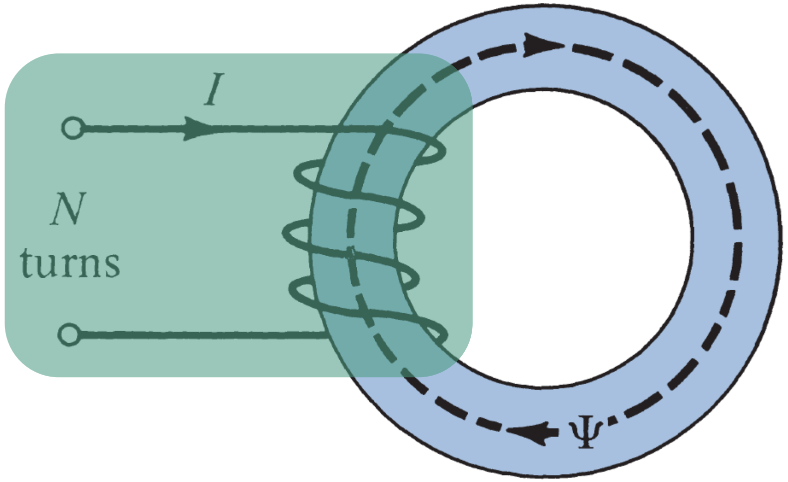
- <u>Fuerza Magnetomotriz ($\mathcal{F}$)</u>

Es el equivalente magnético al voltaje.

Fuente de flujo magnético en el circuito.

Generada por un devanado portador de corriente.

- Reluctancia ($\mathcal{R}$)



$$\boxed{\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}$$

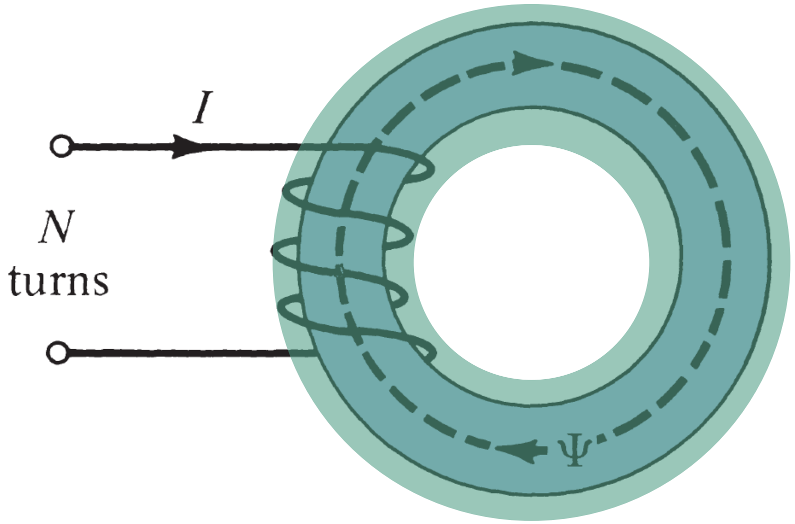
Circuitos Magnéticos

Primero definamos 2 conceptos.

- Fuerza Magnetomotriz ($\mathcal{F}$)
- <u>Reluctancia ($\mathcal{R}$)</u>

Equivalente magnético a la resistencia.

Resistencia a la circulación de flujo magnético.



$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}}$$

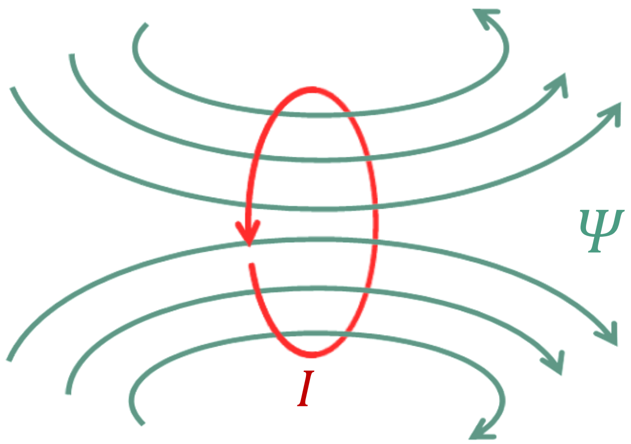
Circuitos Magnéticos

- Ahora podemos formular expresiones equivalentes:

Ohm macro.	$V = I\,R$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{F} = \Psi\,\mathcal{R}$	Hopkinson macro.
Ohm micro.	$J = \sigma\,E$	$\Leftrightarrow$	$B = \mu\,H$	Hopkinson micro.
Conductancia	$G = 1/R$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{P} = 1/\mathcal{R}$	Permeancia
Kirchhoff	$\sum I = 0$	$\Leftrightarrow$	$\sum \Psi = 0$	Kirchhoff
	$\sum V - \sum IR = 0$	$\Leftrightarrow$	$\sum \mathcal{F} - \sum \Psi\mathcal{R} = 0$	

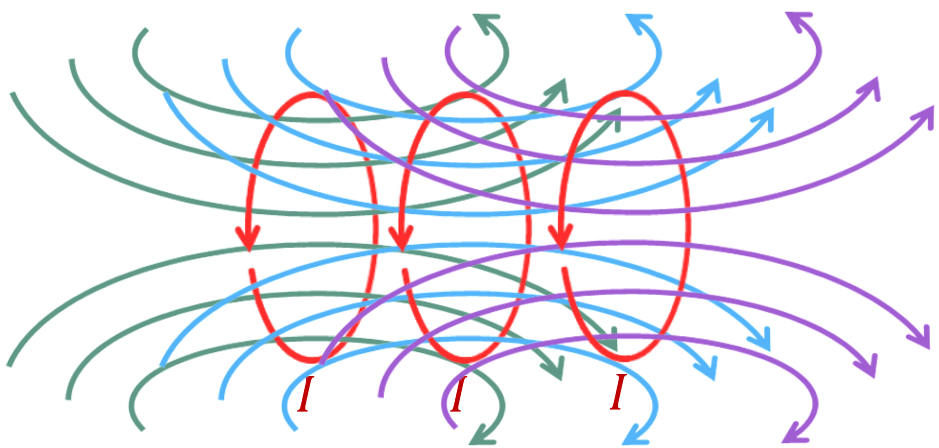
Inductores e Inductancia

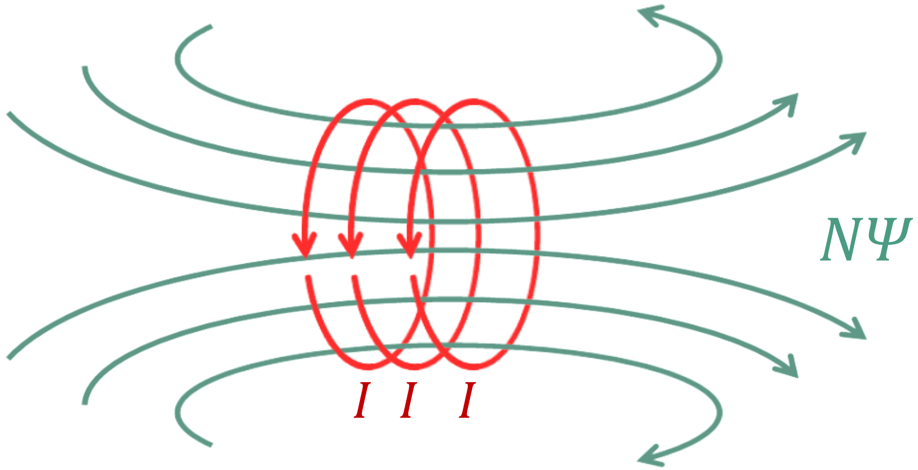
- Si tenemos un loop por el cual circula una corriente, estamos generando un flujo magnético:



Inductores e Inductancia

- Si ahora ponemos N loops empalmados, estaremos enlazando N veces el mismo flujo



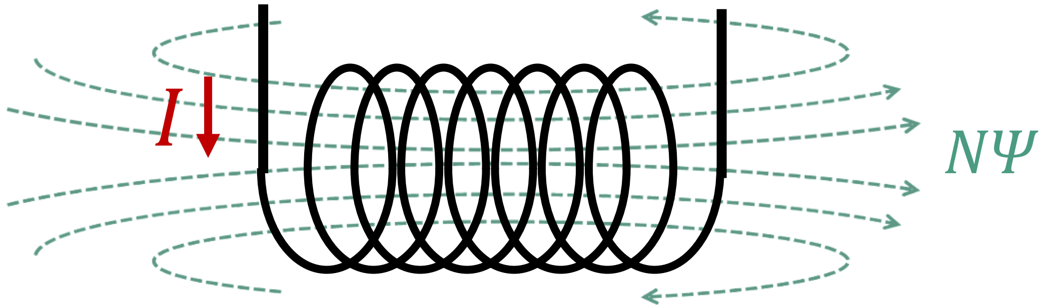


$$\boxed{\lambda = N\Psi}$$

Flujo enlazado

Inductores e Inductancia

- Un inductor es un cable enrollado N veces. De modo que por cada loop circula la misma corriente I. El flujo enlazado por unidad de corriente se conoce como inductancia.

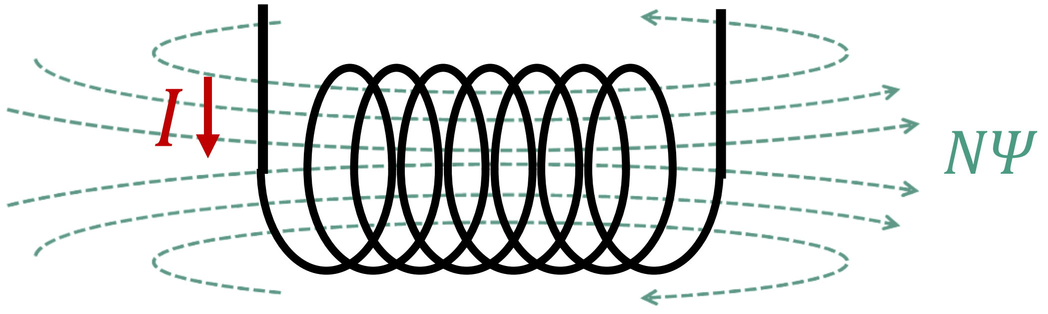


$$\boxed{L = \frac{N\Psi}{I}}$$

Inductancia

Inductores e Inductancia

- Un inductor es un cable enrollado N veces. De modo que por cada loop circula la misma corriente I. El flujo enlazado por unidad de corriente se conoce como inductancia.



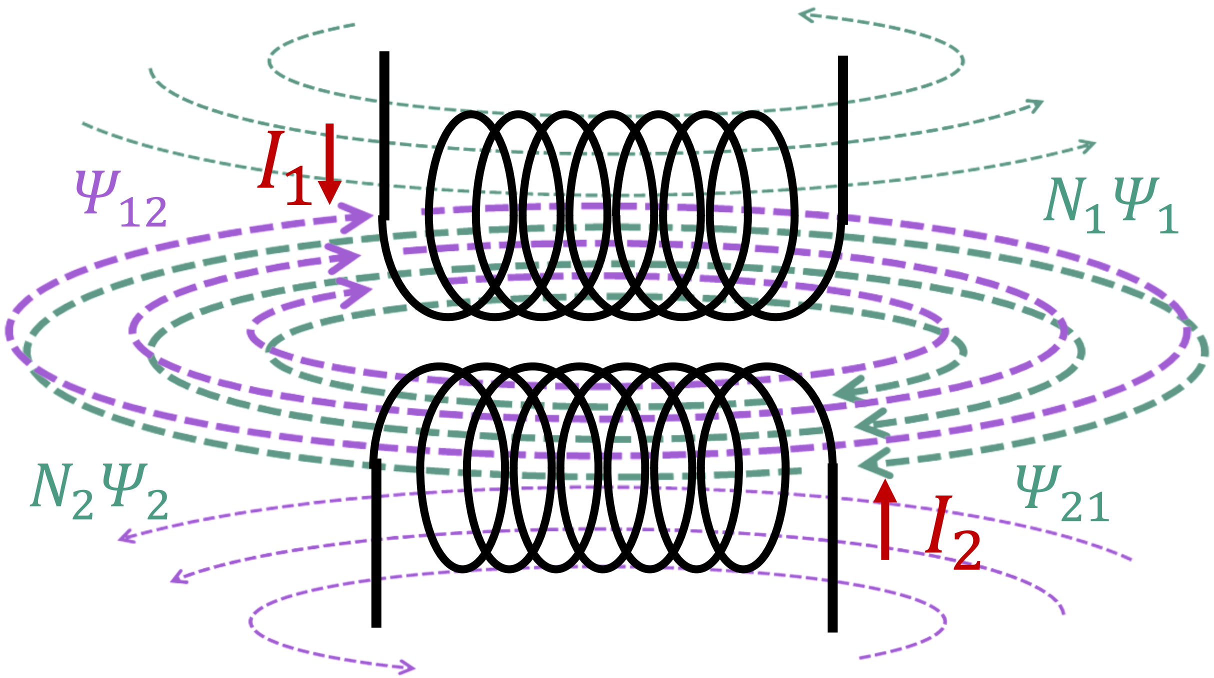
$$L = \frac{N}{I}\Psi = \frac{N}{I}\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{F}}{I}\frac{N}{\mathcal{R}}$$

$$\boxed{L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}}$$

Inductancia

Inductancia Mutua

- Si en lugar de una tenemos 2 inductancias, existirá una interacción entre los flujos de estas:



$$M_{12} = \frac{N_1 \Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1}{I_2} \int_{S_1} \mathbf{B}_2 d\mathbf{S}_1$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 d\mathbf{S}_2$$

Inductancias Mutuas

Inductancia Mutua

- Utilizando el potencial magnético:

$$\Psi_{12} = \oint_{L_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \qquad \Psi_{21} = \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

- Y aplicando la definición de potencial para un loop cerrado:

$$\Psi_{12} = \oint_{L_1} N_2 \oint_{L_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \qquad \Psi_{12} = \oint_{L_2} N_1 \oint_{L_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Inductancia Mutua

- Las inductancias mutuas serán:

$$M_{12} = N_1 N_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \qquad M_{21} = N_2 N_1 \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

- Podemos notar que las expresiones son idénticas. Luego:

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

Teorema de la Reciprocidad

Inductancia Mutua

- Finalmente:

$$M = \sqrt{M_{12}M_{12}} = \sqrt{\frac{N_1\Psi_{12}}{I_2}\frac{N_2\Psi_{21}}{I_1}\frac{\Psi_1}{\Psi_1}\frac{\Psi_2}{\Psi_2}} = \sqrt{\frac{\Psi_{12}}{\Psi_1}L_1\frac{\Psi_{21}}{\Psi_2}L_2}$$

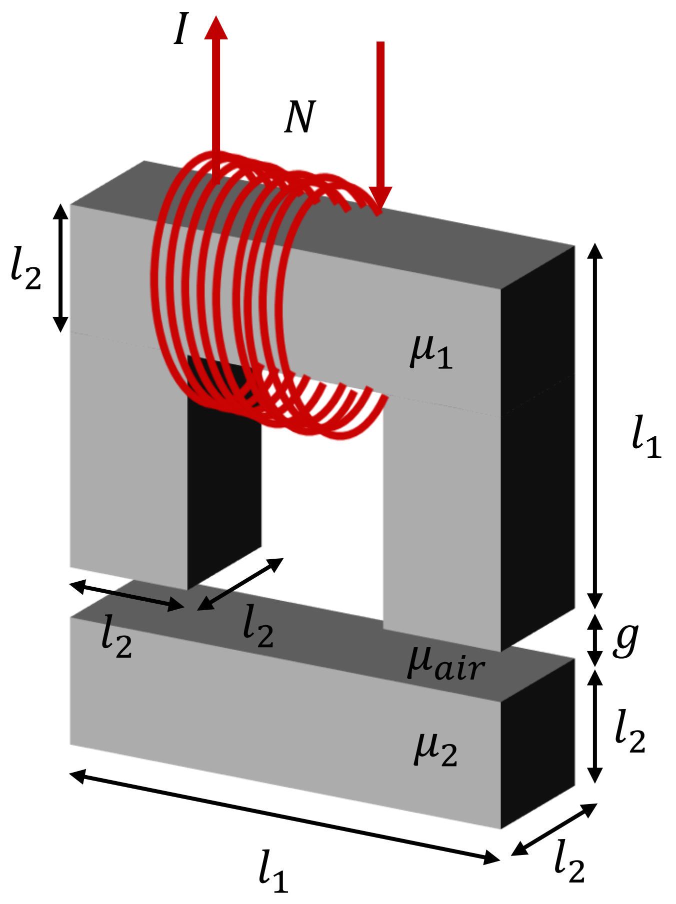
$$\boxed{M = k\sqrt{L_1L_2}}$$

con

$$\boxed{k = \frac{\Psi_{12}}{\Psi_1} = \frac{\Psi_{21}}{\Psi_2}}$$

Coeficiente de acoplamiento

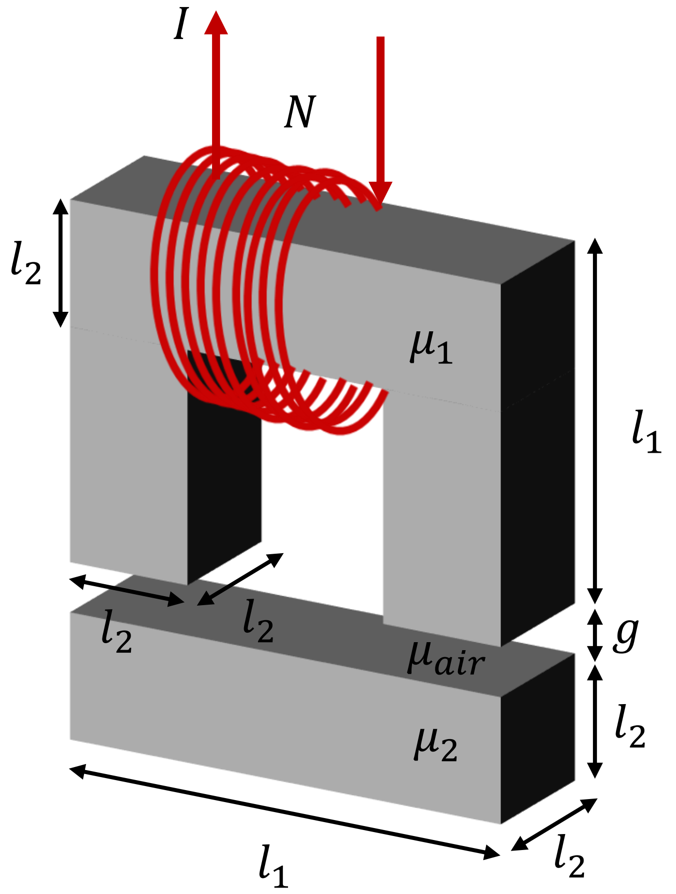
Ejemplo 1: Circuito Magnético

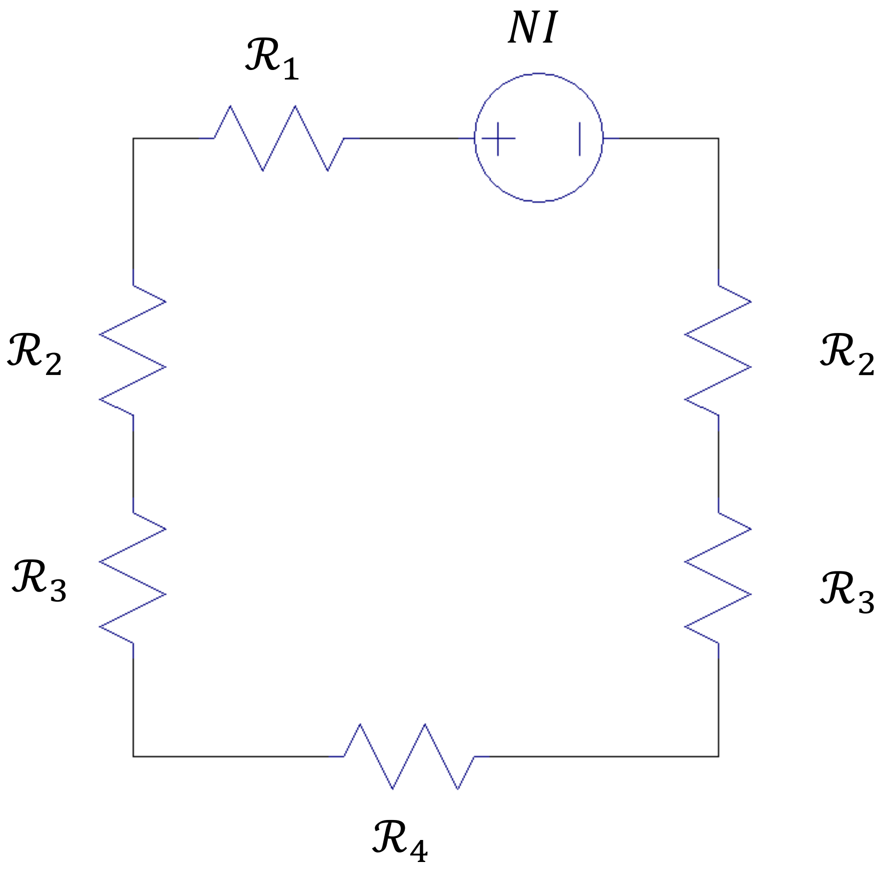


- Sea el siguiente circuito magnético, determine:

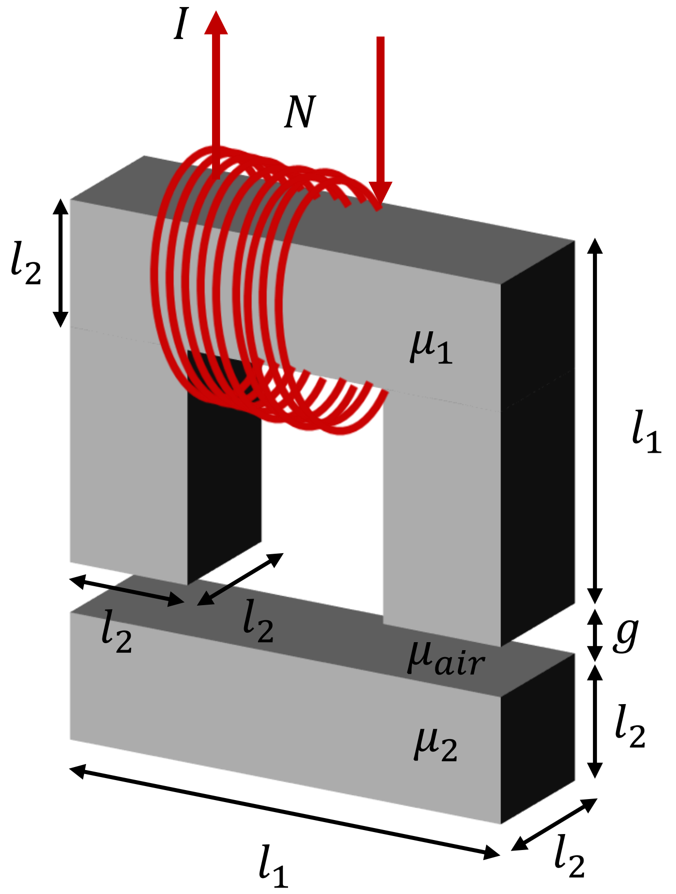
a) El circuito equivalente.
b) El valor de las reluctancias.
c) La inductancia en la bobina de alimentación.
d) El valor del flujo.

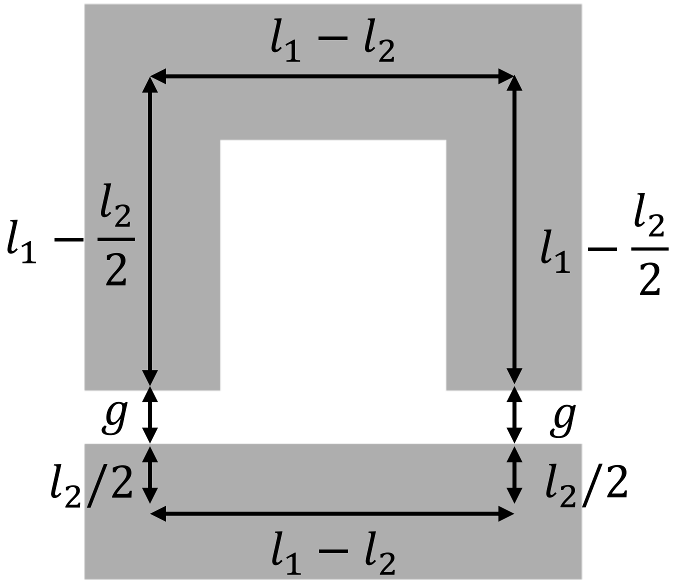
Ejemplo 1: Circuito Magnético



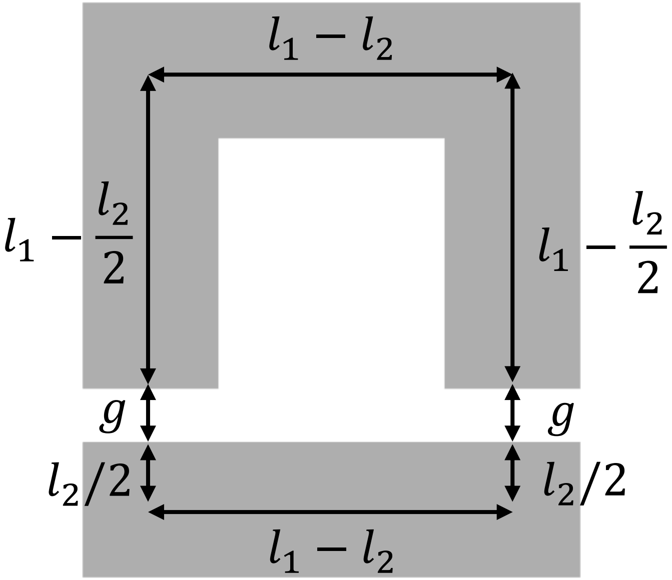


Ejemplo 1: Circuito Magnético





Ejemplo 1: Circuito Magnético



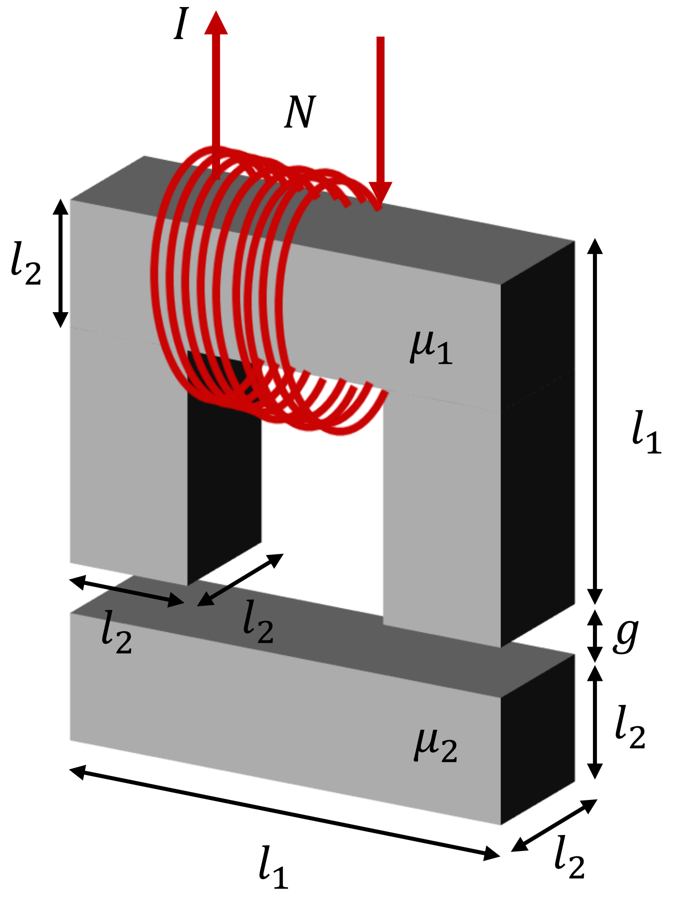
$$\mathcal{R}_1 = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{(l_1 - l_2)}{\mu_1 l_2^2}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{\left(l_1 - \frac{l_2}{2}\right)}{\mu_1 l_2^2}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{g}{\mu_{air} l_2^2}$$

$$\mathcal{R}_4 = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{(l_1 - l_2 + l_2)}{\mu_2 l_2^2}$$

Ejemplo 1: Circuito Magnético



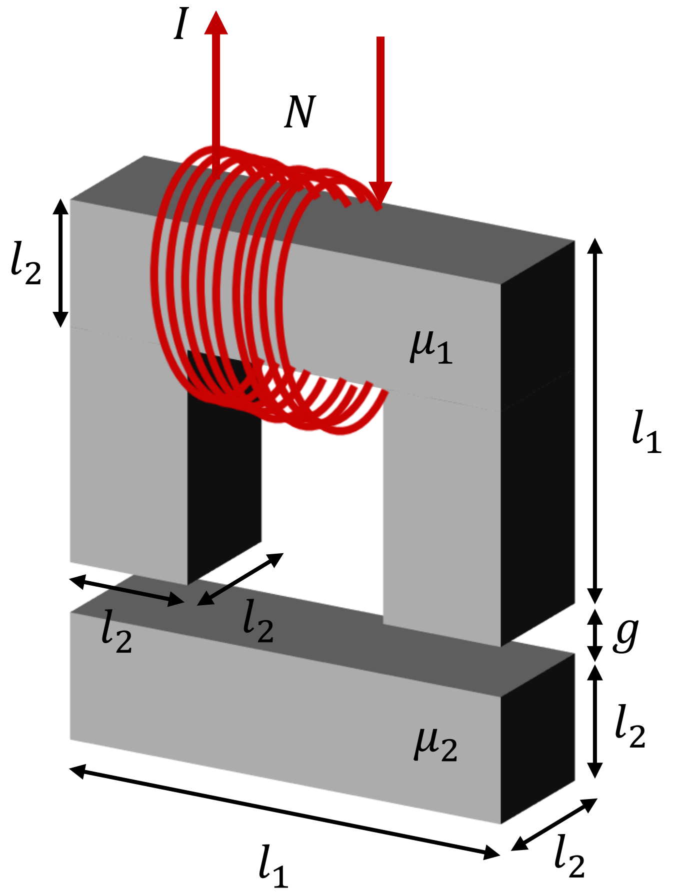
- El valor de la inductancia será:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_1 + 2\,\mathcal{R}_2 + 2\,\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4}$$

$$L = \frac{N^2}{\frac{(3l_1 - 2l_2)}{\mu_1 l_2^2} + \frac{2g}{\mu_{air} l_2^2} + \frac{l_1}{\mu_2 l_2^2}}$$

$$L = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_{air} l_2^2 N^2}{\mu_2 \mu_{air}(3l_1 - 2l_2) + \mu_1 \mu_2 2g + \mu_1 \mu_{air} l_1}$$

Ejemplo 1: Circuito Magnético



- El valor del flujo es :

$$\Psi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{eq}}$$

$$\Psi = \frac{\mu_1\mu_2\mu_{air}l_2^2 NI}{\mu_2\mu_{air}(3l_1 - 2l_2) + \mu_1\mu_2 2g + \mu_1\mu_{air}l_1}$$

Resumen

- Analizamos el fenómeno de magnetización y corrientes ligadas.
- Presentamos los distintos tipos de materiales magnéticos y analizamos su comportamiento ante la presencia de un campo externo.
- Analizamos el fenómeno de Histéresis Magnética.
- Aprendimos a formular y resolver un circuito magnético en base a transformarlo en su análogo eléctrico.
- Recordamos el inductor y analizamos el fenómeno de inductancia mutua.

Cerremos la clase de hoy

- Terminamos de analizar Electrostática y Magnetostática, tanto para el caso del vacío como en un solo material.
- ¿Qué ocurre si me muevo en distintos medios?,¿Qué pasa si la información que tengo es limitada?

Próxima Clase:

Condiciones de Borde

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 198 – 206

Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 225 – 249

Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 376 – 380

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Ecuaciones de Maxwell

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$