Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Tarea 1

Fecha de entrega: 15 de marzo de 2024

Pregunta 1

Considere el sistema de esferas dieléctricas de la Figura 1. En este, se tiene una esfera central de radio a, permitividad ε_1 y densidad de carga volumétrica ρ_1. La esfera anteriormente descrita se encuentra contenida dentro de otra esfera, de radio b. El espacio entre a y b corresponde a un medio dieléctrico con permitividad ε_2 y densidad de carga volumétrica ρ_2. El exterior del sistema corresponde al vacío, con permitividad ε_0 y ausencia de cargas.

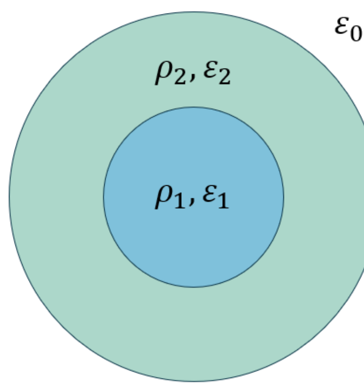


Figura 1: sistema de esferas dieléctricas

Determine:

a) El valor del campo eléctrico para cualquier punto ubicado a un radio r desde el centro del sistema (*Hint:* utilice Ley de Gauss).

b) Los potenciales eléctricos:
   - $V(r) - V(0)$ (con $r \leq a$)
   - $V(r) - V(a)$ (con $a < r \leq b$)
   - $V(r) - V(b)$ (con $b < r$)

c) El potencial eléctrico en el centro del sistema: $V(0)$.

Solución:

a)

<u>Caso $r \leq a$</u>:

Aplicamos Ley de Gauss para una superficie cerrada al interior de la primera esfera. Luego:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_V \rho_1 dV$$

$$(\varepsilon_1 E)\left(4\pi r^2\right) = \rho_1 \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\boxed{E = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_1} r}$$

<u>Caso $a < r \leq b$</u>:

Aplicamos Ley de Gauss para una superficie cerrada entre la primera y la segunda esfera. Luego:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_V \rho dV$$

$$(\varepsilon_2 E)\left(4\pi r^2\right) = \rho_1 \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) + \rho_2 \left(\frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3)\right)$$

$$\boxed{E = \frac{\rho_2}{3\varepsilon_2} r + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_2} \frac{1}{r^2}}$$

<u>Caso $b < r$</u>:

Aplicamos Ley de Gauss para una superficie cerrada fuera de la segunda esfera. Luego:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_V \rho dV$$

$$(\varepsilon_0 E)\left(4\pi r^2\right) = \rho_1 \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) + \rho_2 \left(\frac{4}{3}\pi (b^3 - a^3)\right)$$

$$\boxed{E = \left(\frac{\rho_2 b^3}{3\varepsilon_0} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_0}\right) \frac{1}{r^2}}$$

b)

Aplicando $\Delta V = -\int_L \vec{E} \cdot d\vec{L}$, determinamos los potenciales eléctricos en los distintos tramos:

Caso $r \leq a$:

$$V(r) - V(0) = -\int_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{\rho_1}{3\varepsilon_1}\int_{r=0}^{r} r dr = -\frac{\rho_1}{3\varepsilon_1}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r}$$

$$\boxed{V(r) - V(0) = -\frac{\rho_1}{6\varepsilon_1}r^2}$$

Caso $a < r \leq b$:

$$V(r) - V(a) = -\int_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\left(\frac{\rho_2}{3\varepsilon_2}\int_{r=a}^{r} r dr\right) - \left(\frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_2}\int_{r=a}^{r} r^{-2} dr\right)$$

$$V(r) - V(a) = -\frac{\rho_2}{3\varepsilon_2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=a}^{r} - \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_2}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r=a}^{r}$$

$$\boxed{V(r) - V(a) = -\frac{\rho_2}{6\varepsilon_2}\left(r^2 - a^2\right) + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right]}$$

Caso $b < r$:

$$V(r) - V(b) = -\int_L \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\left(\frac{\rho_2 b^3}{3\varepsilon_0} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_0}\right)\int_{r=b}^{r} r^{-2} dr$$

$$V(r) - V(b) = -\left(\frac{\rho_2 b^3}{3\varepsilon_0} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_0}\right)\left[-\frac{1}{r}\right]_{r=b}^{r}$$

$$\boxed{V(r) - V(b) = \left(\frac{\rho_2 b^3}{3\varepsilon_0} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right]}$$

c)

Sumando las expresiones de potencial para las distintas regiones:

$$V(0) = -\left[V(\infty) - V(b)\right] - \left[V(b) - V(a)\right] - \left[V(a) - V(0)\right]$$

$$V(0) = \left(\frac{\rho_2 b^3}{3\varepsilon_0} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{\infty}\right] + \frac{\rho_2}{6\varepsilon_2}\left(b^2 - a^2\right) + \frac{(\rho_1 - \rho_2)\, a^3}{3\varepsilon_2}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] + \frac{\rho_1}{6\varepsilon_1} a^2$$

Luego:

$$\boxed{V(0) = \frac{\rho_2}{3\varepsilon_0} b^2 + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{3\varepsilon_0}\frac{a^3}{b} + \frac{\rho_2}{6\varepsilon_2} b^2 - \frac{\rho_2}{6\varepsilon_2} a^2 + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{3\varepsilon_2} a^2 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{3\varepsilon_2}\frac{a^3}{b} + \frac{\rho_1}{6\varepsilon_1} a^2}$$

Criterio de Asignación de Puntaje

- **[2.4pt] Item (a):** 0.8 pt por cada uno de los 3 campos obtenidos. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.2pt (25 %), 0.5pt (75 %), o 0.8pt (100 %) por cada campo. **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.
- **[2.4pt] Item (b):** 0.8 pt por cada uno de los 3 potenciales obtenidos. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.2pt (25 %), 0.5pt (75 %), o 0.8pt (100 %) por cada potencial. **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.
- **[1.2pt] Item (c):** En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.5pt (25 %), 0.8pt (75 %), o 1.2pt (100 %) para la expresión completa. Se espera cierto grado de orden/factorización/baja entropía en la expresión final. **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.

Pregunta 2

Un estudiante de doctorado del Departamento de Ingeniería Eléctrica ha descubierto un nuevo tipo de material cristalino, al que ha decidido nombrar "guesalaguita", y que solo es capaz de formar trozos pequeños. Al caracterizar la permitividad del la guesalaguita, el alumno se ha percatado que la relación entre el desplazamiento eléctrico y la intensidad de campo está dada por:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 \\ 1 - y^2z^2 \\ 1 - y^2z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 1 \\ 0 & 1 & z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 E_x \\ \varepsilon_0 E_y \\ \varepsilon_0 E_z \end{bmatrix} = \varepsilon_r \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 E_x \\ \varepsilon_0 E_y \\ \varepsilon_0 E_z \end{bmatrix}$$

A partir de esta información:

a) Determine el campo eléctrico $\vec{E}$ de la guesalaguita (*Hint*: Desenpolve sus conocimientos de algebra lineal sobre matriz inversa).

b) Caracterice el material eléctrico en función de las 5 distintas propiedades vistas en clases.

c) Verifique si el campo de la guesalaguita cumple con la segunda ley de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

¿Es necesario imponer alguna condición?

Solución:

a)

Por enunciado tenemos:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 \\ 1 - y^2z^2 \\ 1 - y^2z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 1 \\ 0 & 1 & z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 E_x \\ \varepsilon_0 E_y \\ \varepsilon_0 E_z \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz ε_1:

$$det(\varepsilon_1) = x^2(y^2z^2 - 1)$$

La matriz adjunta estará dada por:

$$adj(\varepsilon_1) = cof(\varepsilon_1)^T = \begin{bmatrix} y^2z^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2z^2 & -x^2 \\ 0 & -x^2 & x^2y^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y^2z^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2z^2 & -x^2 \\ 0 & -x^2 & x^2y^2 \end{bmatrix}$$

Finalmente la inversa será:

$$\varepsilon_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z^2}{y^2z^2-1} & \frac{1}{1-y^2z^2} \\ 0 & \frac{1}{1-y^2z^2} & \frac{y^2}{y^2z^2-1} \end{bmatrix}$$

Resolvemos para encontrar $\vec{E}$:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z^2}{y^2z^2-1} & \frac{1}{1-y^2z^2} \\ 0 & \frac{1}{1-y^2z^2} & \frac{y^2}{y^2z^2-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^3 \\ 1-y^2z^2 \\ 1-y^2z^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} x \\ 1-z^2 \\ 1-y^2 \end{bmatrix}$$

b)

A partir de la matriz ε_1 se infiere que:

- La permitividad no depende del campo, por lo que es un material **lineal**.
- La matriz ε_1 tiene valores distintos a la diagonal, por lo que es un material **anisotrópico**.
- Los valores de la matriz dependen de la posición, por lo que es un material **no-homogéneo**.
- No es posible determinar si el material es un conductor o un aislante, pues esta propiedad depende de su conductividad y no de la permitividad. No obstante, el material depende de sus dimensiones al ser heterogéneo, pero como es pequeño, la permitividad será pequeña. En general, los materiales que poseen una permitividad relativa pequeña suelen ser dieléctricos.

Aplicando divergencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

De modo que el material tiene una densidad de carga de 1 Coulomb. Por tanto, tiene **presencia de fuentes**.

En resumen, es un dieléctrico lineal, anisotrópico, no homogéneo y con presencia de fuentes.

c)

Aplicando rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon_0}(z - y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es necesario imponer que $z = y$ para que el campo cumpla con la segunda ley de Maxwell.

Criterio de Asignación de Puntaje

- **[2pt] Item (a):** 1pt por resolver la matriz inversa. 1pt por determinar el vector de campo eléctrico. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.3pt (25 %), 0.6pt (75 %), o 1pt (100 %) en cada uno de los criterios. **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.
- **[2pt] Item (b):** No se asignará puntaje a la propiedad de conductividad, la idea era que reflexionaran respecto a esta característica. 0.25pt por cada uno de los 4 criterios restantes (linealidad, no-homogeneidad, anisotropía, fuentes). No hay otros puntajes intermedios.
- **[2pt] Item (c):** 1pt por resolver el rotacional. 1pt por imponer la condición $z = y$. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.3pt (25 %), 0.6pt (75 %), o 1pt (100 %) en cada uno de los criterios. **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.

Pregunta 3

Considere un campo magnético en el vacío, en ausencia de cargas y densidades de corriente ($\rho = 0,\ \vec{J} = 0$).

$$\vec{B} = \frac{\omega}{n} sin(\omega t - nx)\ \vec{a}_x + \frac{\omega\ y}{n} cos(\omega t - nx)\ \vec{a}_y$$

donde ω y n son constantes. Obtenga la componente tiempo-dependiente del campo eléctrico $\vec{E}$.

Solución:

Aplicando la Tercera Ley de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dado que no hay densidades de carga ni de corriente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dado que nos encontramos en el vacío:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Calculamos el rotacional de $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0\ \vec{a}_x + 0\ \vec{a}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \vec{a}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \omega y \sin(\omega t - nx)\ \vec{a}_z$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\omega y}{\mu_0 \varepsilon_0} \sin(\omega t - nx)\ \vec{a}_z$$

Integramos con respecto al tiempo:

$$\vec{E} = \omega y \int_0^t \sin(\omega t - nx) dt\ \vec{a}_z = -\frac{y}{\mu_0 \varepsilon_0} \cos(\omega t - nx)\ \vec{a}_z$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{y}{\mu_0 \varepsilon_0} \cos(\omega t - nx)\ \vec{a}_z}$$

Criterio de Asignación de Puntaje

- **[2pt]** Por aplicar tercera ley de Maxwell, imponer condiciones de ausencia de fuentes y vacío como medio. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.5pt (25 %), 1.5pt (75 %), o 2pt (100 %). **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.
- **[2pt]** Por calcular el rotacional. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.5pt (25 %), 1.5pt (75 %), o 2pt (100 %). **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.
- **[2pt]** Por resolver la integral respecto al tiempo. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.5pt (25 %), 1.5pt (75 %), o 2pt (100 %). **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.

Pregunta 4

Considere el transformador "excéntrico" de la Figura 2, cuyo núcleo es un conductor ideal de flujo magnético ($\mathcal{R}_{nucleo} = 0$).

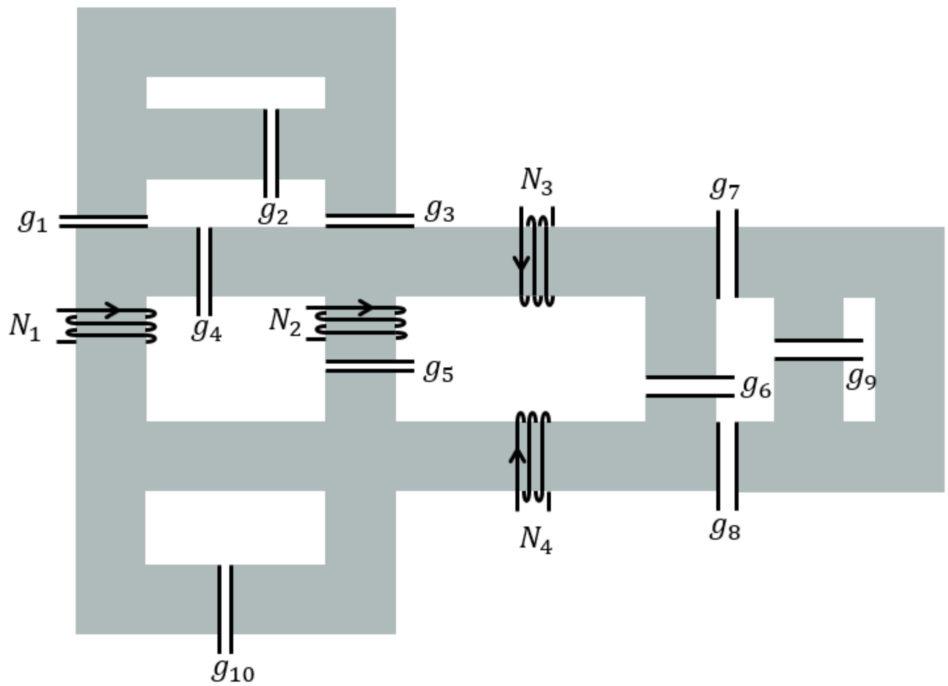


Figura 2: Transformador "excéntrico".

Considere que todos los gaps (μ_0) tienen la misma sección transversal de área S, y que la relación entre los gaps de aire es:

$$g_1 = g_2 = g_3 = \frac{1}{2}g_4 = g_5 = \frac{1}{2}g_6 = g_7 = g_8 = g_9 = g_{10}$$

Determine:

a) El circuito equivalente.

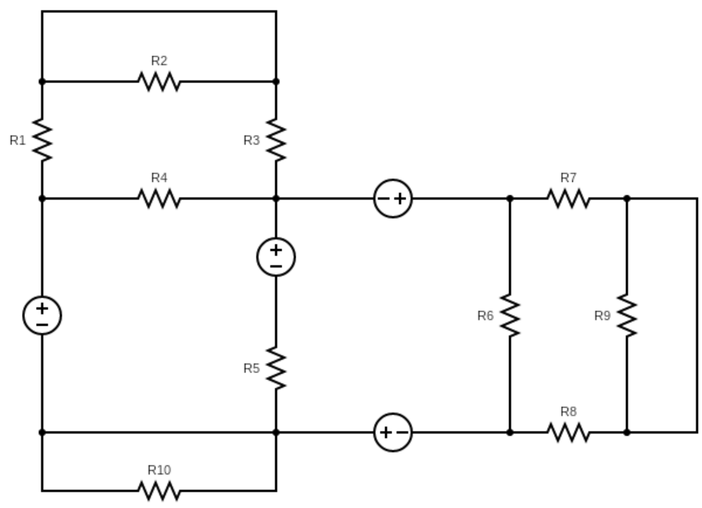
b) La inductancia en las distintas bobinas (a.k.a. autoinductancia).

c) La inductancia mutua entre las bobinas 1 y 2.

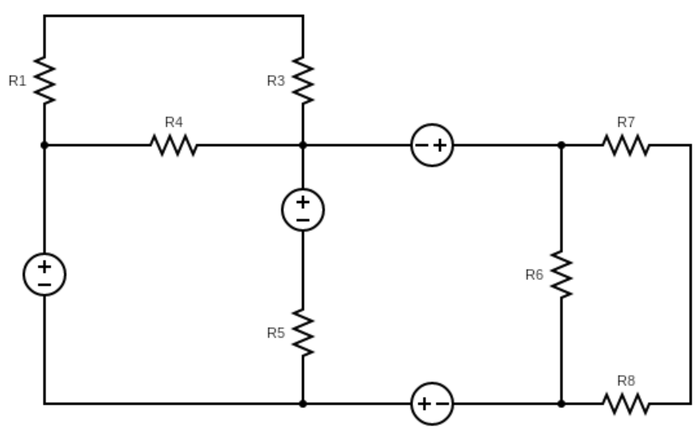
Solución:

a)

El circuito equivalente estará dado por:



Evidentemente, dado que hay cortocircuitos, es posible hacer una serie de simplificaciones. El circuito resultante será:



b)

Basta con determinar las reluctancias equivalentes para cada una de las 4 bobinas. Utilizando principio de superposición:

$$\mathcal{R}_{eq1} = [\mathcal{R}_{g_4}||(\mathcal{R}_{g_1} + \mathcal{R}_{g_3})] + \mathcal{R}_{g_5}||\,[\mathcal{R}_{g_6}||(\mathcal{R}_{g_7} + \mathcal{R}_{g_8})]$$

$$\mathcal{R}_{eq2} = \mathcal{R}_{g_5} + [\mathcal{R}_{g_4}||(\mathcal{R}_{g_1} + \mathcal{R}_{g_3})]\,||\,[\mathcal{R}_{g_6}||(\mathcal{R}_{g_7} + \mathcal{R}_{g_8})]$$

$$\mathcal{R}_{eq3} = \mathcal{R}_{eq4} = [\mathcal{R}_{g_6}||(\mathcal{R}_{g_7} + \mathcal{R}_{g_8})] + \mathcal{R}_{g_5}||\,[\mathcal{R}_{g_4}||(\mathcal{R}_{g_1} + \mathcal{R}_{g_3})]$$

Utilizando las equivalencias entre los gaps, es posible expresar todo en función de un solo gap. Tomemos por ejemplo el gap g_5:

$$\mathcal{R}_{eq1} = \mathcal{R}_{eq2} = \mathcal{R}_{eq3} = \mathcal{R}_{eq4} = \frac{3}{2}\mathcal{R}_{g_5} = \frac{g_5}{S\ \mu_{air}}$$

Luego, las autoinductancias estarán dadas por:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_{eq1}} = \frac{N_1^2\ S\ \mu_{air}}{g_5}$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_{eq2}} = \frac{N_2^2\ S\ \mu_{air}}{g_5}$$

$$L_3 = \frac{N_3^2}{R_{eq3}} = \frac{N_3^2\ S\ \mu_{air}}{g_5}$$

$$L_4 = \frac{N_4^2}{R_{eq4}} = \frac{N_4^2\ S\ \mu_{air}}{g_5}$$

c)

Dado que las ramas tienen la misma reluctancia equivalente, se desprende que el flujo de la bobina 2 se divide en partes iguales. De modo que $k_{12} = \frac{1}{2}$. Luego:

$$M_{12} = k_{12}\sqrt{L_1 L_2} = \frac{\mu_{air} S}{2g_5} N_1 N_2$$

Criterio de Asignación de Puntaje

- **[2pt]** 1pt por determinar el circuito equivalente directo. 1pt por realizar la simplificación de los cortocircuitos. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.5pt (25 %), 1.5pt (75 %), o 2pt (100 %). **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios.

- **[2pt]** 1pt por determinar las reluctancias equivalentes. 1pt por determinar las autoinductancias. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.3pt (25 %), 0.6pt (75 %), o 1pt (100 %) para cada uno de los 2 criterios. **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios. El resultado final debe ser expresado en función de los parámetros del problema (gaps, área transversal, número de vueltas, permeabilidad del aire).

- **[2pt]** Por determinar la inductancia mutua. En función del nivel de correctitud y desarrollo, asignar 0pt (0 %), 0.5pt (25 %), 1.5pt (75 %), o 2pt (100 %). **No hay 50 %** ni otros puntajes intermedios. El resultado final debe ser expresado en función de los parámetros del problema (gaps, área transversal, número de vueltas, permeabilidad del aire).