Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Tarea 2

Fecha de entrega: 02 de junio de 2024

Pregunta 1

Considere un onda de tipo RHEP (Right-Handed Elliptical Polarization), la cual viaja por el vacío e incide oblicuamente sobre un medio dieléctrico ($\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$), cuya superficie se encuentra en el plano $x - z$, ubicado a $y = 0$.

La componente paralela está contenida en el plano $x = 0$ y su comportamiento está descrito por:

$$E^{\parallel} = (a\hat{y} - b\hat{z})\cos(\omega t - 10\sqrt{3}y - 10z)\ [\mathbf{V/m}]$$

con $a, b > 0$. Se sabe además que la componente perpendicular tiene amplitud $|E^{\perp}| = \sqrt{3}$ y que esta equivale a un 25 % de la amplitud de la componente paralela.

(a) **[0.75 pt]** Realice un bosquejo que muestre la onda incidente a nivel tridimensional. Asuma que la onda incidente vive en $y < 0$.

(b) **[0.75 pt]** Determine el ángulo de incidencia θ_i, reflexión θ_r y transmisión θ_t.

(c) **[0.75 pt]** Determine los valores de las constantes a y b.

(d) **[0.75 pt]** Para ambos medios, determine los parámetros: ω, u, α, β, $|\eta|$ y $\angle\eta$.

(e) **[0.75 pt]** Determine los coeficientes de transmisión y reflexión para las ondas paralela y perpendicular: $(\Gamma^{\parallel}, T^{\parallel})$ y $(\Gamma^{\perp}, T^{\perp})$.

(f) **[0.75 pt]** Escriba las expresiones completas para las ondas eléctricas incidente, reflejada y transmitida. Comente lo sucedido.

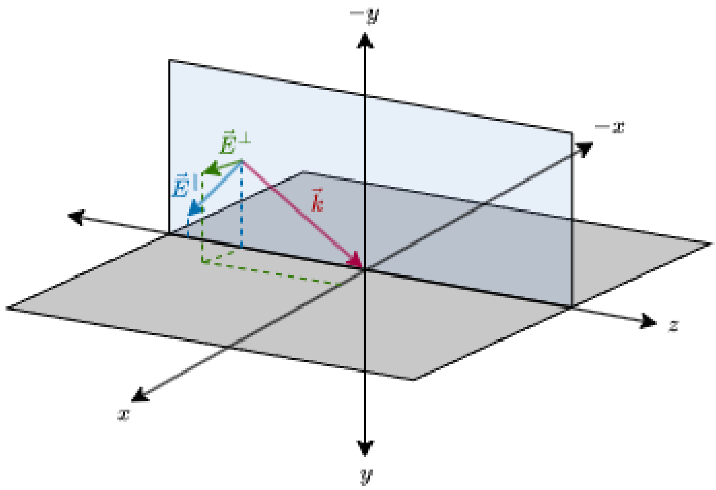
(g) **[0.75 pt]** Determine el flujo promedio de energía en la onda incidente, reflejada y transmitida.

(h) **[0.75 pt]** Utilizando el simulador del Taller 01, genere una animación que muestre el comportamiento de la onda incidente, reflejada y transmitida. En sus simulaciones Considere como “eje z” el vector de dirección de la onda.

Solución:

a)

A partir de la información entregada, el problema puede representarse por el siguiente diagrama:



b)

Para el ángulo de incidencia, basta con emplear la geometría del problema, de esta se desprende que:

$$\tan\theta_i = \frac{k_z}{k_y} = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Luego:

$$\boxed{\theta_i = 30^\circ}$$

Empleando ley de Snell con los coeficientes de refracción:

$$\boxed{\theta_r = \theta_i = 30^\circ}$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2\theta_t$$

$$\sqrt{\varepsilon_0}\sin(30^\circ) = \sqrt{\varepsilon_0}\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}}\sin\theta_t$$

$$\sin\theta_t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\theta_t = 60^\circ}$$

c)
Por un lado, de la relación de magnitudes se desprende que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{3}$$

Por otro lado, a partir del diagrama del inciso (a), se tiene que la relación geométrica entre a y b debe satisfacer que:

$$\tan\theta_i = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Combinando ambas expresiones:

$$\sqrt{a^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\boxed{a = 2\sqrt{3}\ ,\ b = 6}$$

d)

Primero determinamos la velocidad, pues esta solo depende de los parámetros del medio.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \quad \rightarrow \quad \boxed{u_1 = c}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{3}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{u_2 = \sqrt{3}c}$$

Dado que no se brinda información sobre k_x, podemos asumir que es nulo. A partir de la relación de dispersión y de la condición de borde $\omega_1 = \omega_2$ se tiene que:

$$\omega_1 = u_1|\vec{\mathbf{k}}| = u_1\sqrt{0 + 300 + 100} = 20c$$

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = 20c}$$

En cuanto al valor de β_1, para el medio 1 se desprende inmediatamente del vector $\vec{\mathbf{k}}_i = \langle 0, 10\sqrt{3}, 10\rangle$ que:

$$\boxed{\beta_1 = 20}$$

Para el medio 2 aplicamos la condición de borde $k_1^{\parallel} = k_2^{\parallel}$. En este caso, la unica componente de $\vec{\mathbf{k}}$ paralela al plano de incidencia es k_z. Por otro lado, k_y puede obtenerse a partir del ángulo de transmisión:

$$\tan(60°) = \sqrt{3} = \frac{10}{k_y}$$

$$k_y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

con lo cual $\vec{\mathbf{k}}_t = \langle 0, \frac{10}{\sqrt{3}}, 10\rangle$, y por tanto:

$$\boxed{\beta_2 = \frac{20}{\sqrt{3}}}$$

Notemos que en el medio dieléctrico la velocidad supera a la de la luz, lo cual es físicamente imposible. Osea que este dieléctrico, en la realidad, no existe.

Dado que el primer medio corresponde al vacío y el segundo medio corresponde a un dieléctrico ideal. Podemos determinar fácilmente sus impedancias.

$$\boxed{|\eta_1| = 377\Omega}$$

$$\boxed{\angle\eta_1 = 0°}$$

$$|\eta_2| = \sqrt{\frac{3\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{3}\eta_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{|\eta_2| = 653\Omega}$$

$$\boxed{\angle\eta_2 = 0°}$$

Igualmente, para el caso de α:

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$$

e)

Empleando las ecuaciones de Fresnel para el caso paralelo:

$$\Gamma^{\|} = \frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\varepsilon_0}\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\Gamma^{\|} = 0}$$

$$T^{\|}\cos\theta_t = (1 + \Gamma^{\|})\cos\theta_i$$

$$T^{\|} = \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{T^{\|} = \sqrt{3}}$$

Y para el caso perpendicular:

$$\Gamma^{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}}\frac{1}{2}}{\sqrt{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{3}}\frac{1}{2}} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Gamma^{\perp} = 0.5}$$

$$T^{\perp} = 1 + \Gamma^{\perp} \quad \rightarrow \quad \boxed{T^{\perp} = 1.5}$$

f)

- Onda incidente:

  Por un lado, la componente paralela será:

$$\vec{\mathbf{E}}_i^{\parallel} = \left(2\sqrt{3}\hat{y} - 6\hat{z}\right)\cos\left(20ct - 10\sqrt{3}y - 10z\right)$$

  Mientras que la perpendicular debe tener un desfase de $-\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{\mathbf{E}}_i^{\perp} = \left(j\sqrt{3}\hat{x}\right)\cos\left(20ct - 10\sqrt{3}y - 10z\right)$$

  Combinando ambas expresiones:

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}_i = \left(j\sqrt{3}\hat{x} + 2\sqrt{3}\hat{y} - 6\hat{z}\right)\cos\left(20ct - 10\sqrt{3}y - 10z\right)}$$

- Onda reflejada:
  En el caso de la componente paralela, se tiene de (e) que no hay componente reflejada, pues el ángulo de incidencia corresponde al ángulo de Brewster.

$$\vec{\mathbf{E}}_r^{\parallel} = 0$$

  De modo que la onda total reflejada ya no tendrá polarización elíptica, sino que en este caso es simplemente la componente perpendicular. Es decir, una polarización lineal. Con ello queda en evidencia el efecto polarizador del ángulo de Brewster:

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}_r = \left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x}\right)\cos\left(20ct + 10\sqrt{3}y - 10z\right)}$$

- Onda transmitida:
  Simplemente basta con tomar el caso incidente, ponderar por los respectivos coeficientes de transmisión y modificar el vector $\vec{\mathbf{k}}$ según lo obtenido en el inciso (d):

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}_t = \left(j\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{x} + 6\hat{y} - 6\sqrt{3}\hat{z}\right)\cos\left(20ct - \frac{10}{\sqrt{3}}y - 10z\right)}$$

g)

- Onda incidente:

$$\langle \vec{\mathbf{E}}_i \rangle = \frac{|\vec{\mathbf{E}}_i|^2}{2\eta_1} = \frac{3+12+36}{2 \cdot 377} = 0.067 \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

- Onda reflejada:

$$\langle \vec{\mathbf{E}}_r \rangle = \frac{|\vec{\mathbf{E}}_r|^2}{2\eta_1} = \frac{\frac{3}{4}}{2 \cdot 377} = 0.995 \times 10^{-3} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

- Onda transmitida:

$$\langle \vec{\mathbf{E}}_i \rangle = \frac{|\vec{\mathbf{E}}_i|^2}{2\eta_2} = \frac{\frac{27}{4}+36+108}{2 \cdot 653} = 0.115 \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

h)

- Onda incidente:
  De las componentes paralela y perpendicular se tiene que:

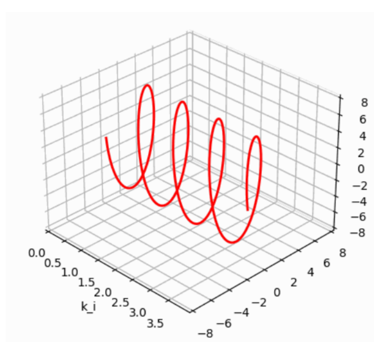
$$|\vec{\mathbf{E}}_i^{\parallel}| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = 6.92$$

$$|\vec{\mathbf{E}}_i^{\perp}| = \sqrt{3} = 1.73$$

  Luego, basta con tomar el simulador del control 8 e introducir como parámetros:

  `E0x = 6.92`, `E0y = 1.73`, `theta1 = 0`, `theta2 = -90`

  y ajustar un poco el rango de la gráfica.



- Onda reflejada:
  De las componentes paralela y perpendicular se tiene que:

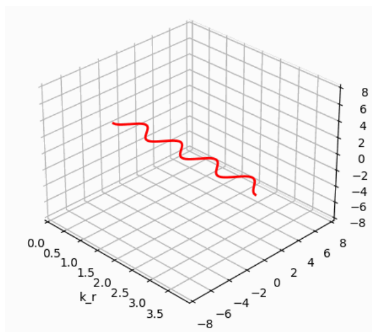
$$|\vec{\mathbf{E}}_r^{\parallel}| = 0$$

$$|\vec{\mathbf{E}}_r^{\perp}| = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86$$

  Luego, basta con tomar el simulador del Control 8 e introducir como parámetros:

  `E0x = 0`, `E0y = 0.86`, `theta1 = 0`, `theta2 = -90`

  y ajustar un poco el rango de la gráfica.



- Onda transmitida:
  De las componentes paralela y perpendicular se tiene que:

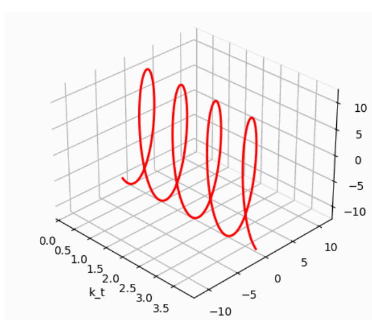
$$|\vec{\mathbf{E}}_t^{\parallel}| = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 12$$

$$|\vec{\mathbf{E}}_t^{\perp}| = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2.59$$

  Luego, basta con tomar el simulador del Control 8 e introducir como parámetros:

  `E0x = 12`, `E0y = 2.59`, `theta1 = 0`, `theta2 = -90`

  y ajustar un poco el rango de la gráfica.



Pregunta 2

En el contexto de su Práctica Profesional, usted ha decidido trabajar como practicante en la empresa IoWlabs. Durante su primera semana de práctica, su supervisor le comenta que planean retomar un antiguo proyecto, en el cual estaban desarrollando sensores para minería. Dado que el sensor opera con señales eléctricas de alta frecuencia, la conexión entre el sensor y el microcontrolador se realiza mediante un cable coaxial que utiliza un dieléctrico especial para aplicaciones mineras.

Desafortunadamente, en la empresa se han quedado sin dicho cable coaxial y el practicante anterior no dejó documentación respecto al modelo del cable, ni del proveedor. Adicionalmente, dado que ya cuentan con prototipos parcialmente ensamblados, no es rentable cambiar el modelo del cable. De momento usted solo cuenta con una muestra de 2.5 metros de cable y sus conocimientos en Líneas de Transmisión.

Usted decide aplicar pruebas al cable de muestra, a fin de determinar su constante dieléctrica ε_r. Tras someter la muestra a mediciones con una frecuencia 400 [MHz], se percata que al cortocircuitar el extremo del cable se registra una impedancia de entrada de $j75$ [Ω], mientras que al dejar el circuito abierto se registra una lectura de $-j75$ [Ω]. Adicionalmente, en la funda plástica del cable se tiene una inscripción que dice "Electrical lenght (min: 5, max: 5.25)".

(a) **[0.5 pt]** Investigue qué es "Electrical lenght" (largo eléctrico).

(b) **[1 pt]** Determine la impedancia característica del cable coaxial.

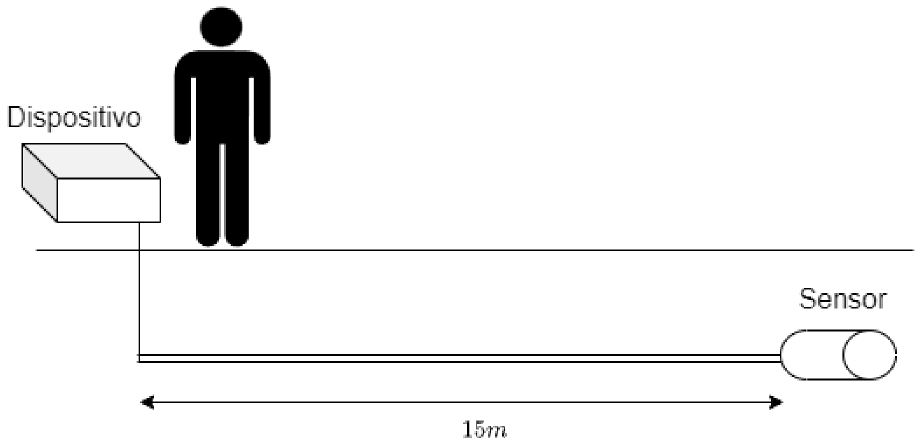
(c) **[1.5 pt]** Determine la constante dieléctrica del cable coaxial.
(*Hint:* Tal vez el largo eléctrico nos pueda ser de utilidad).

Durante la segunda semana de Práctica, su supervisor le solicita trabajar en la documentación del proyecto. Para esto le encarga generar una gráfica del voltaje en el dieléctrico del cable coaxial. En términos de especificaciones técnicas, los diámetros del conductor interno y del dieléctrico son de 1 [mm] y 5 [mm] respectivamente. En cuanto a las conexiones, la pantalla exterior del coaxial se conectará a tierra, mientras que por el cable interno estará sometido a un voltaje promedio de 5 [V].

Empleando el algoritmo de diferencias finitas visto en el Taller 02:

(d) **[2 pt]** Genere una gráfica en la cual se muestre el voltaje promedio al interior del dieléctrico. Utilice una grilla simétrica de 0.2[mm] y resuelva para una ventana simétrica de 5.6 [mm]. Incluya como criterio de detención que el algoritmo se detenga cuando la diferencia entre una iteración y otra sea menor a 0.01 [V].

Durante la tercera semana de práctica, se llevó uno de los prototipos a terreno, a fin de probar su operación. Para ello, 15 metros de cableado coaxial se entierran horizontalmente varios metros bajo el suelo, como muestra el diagrama de la Figura.



Tristemente, al momento de probar el sensor, se percatan de que no se registra ninguna lectura. Dado que el prototipo sí funcionaba en el laboratorio, la única explicación posible es que el cable se haya cortado en algún punto.

(e) **[1 pt]** En base a sus conocimientos de líneas de transmisión e impedancias de entrada, proponga una metodología que le permita identificar el punto exacto donde se encuentra cortado el cable. Sea específico en cuanto a: pasos a seguir, parámetros de interés (máximos y mínimos), conceptos teóricos en juego, ecuaciones a utilizar, e interpretación de los resultados.

IMPORTANTE:
Adicional al archivo .pdf con el desarrollo de su Tarea, deberá adjuntar el archivo .ipynb con los códigos empleados para el desarrollo de las preguntas de programación. Las celdas deberán estar ejecutadas. En caso de no contar con dicho archivo o no tener ejecutadas las celdas, las preguntas asociadas no recibirán puntaje.

a)

El largo eléctrico corresponde a la longitud del conductor normalizada por la longitud de onda a una frecuencia específica:

$$l_e = \frac{l}{\lambda}$$

Este parámetro es fuertemente empleado en la carta de Smith, pues en ella las longitudes aparecen normalizadas por la longitud de onda.

b)

$$Z_{ca} = \left[\frac{Z_L}{jZ_L \tan(\beta l)}\right] Z_0 = \frac{Z_0}{j\tan(\beta l)}$$

$$Z_0 = jZ_{ca}\tan(\beta l)$$

$$Z_{cc} = \left[\frac{jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0}\right] Z_0 = jZ_0\tan(\beta l)$$

$$Z_0 = \frac{Z_{cc}}{j\tan(\beta l)}$$

Multiplicando los dos resultados obtenidos:

$$Z_0^2 = Z_{ca}Z_{cc}$$

$$Z_0 = \sqrt{Z_{ca}Z_{cc}} = \sqrt{-(j75)^2}$$

$$\boxed{Z_0 = 75[\Omega]}$$

c)

Utilizaremos los mismos resultados de (b), pero esta vez despejaremos la tangente:

$$\tan(\beta l) = \frac{Z_0}{jZ_{ca}}$$

$$\tan(\beta l) = \frac{Z_{cc}}{jZ_0}$$

Multiplicando ambos resultados:

$$\tan^2(\beta l) = -\frac{Z_{cc}}{Z_{ca}} = 1$$

$$\tan(\beta l) = \sqrt{1} = 1$$

$$\beta l = \arctan(1) + n\pi = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

Necesitamos determinar el valor de n. Utilizando el largo de onda dado en el enunciado, tenemos que:

$$5 < \frac{l}{\lambda} < 5.25$$

Si multiplicamos todo por 2π, entonces:

$$10\pi < \beta l < 10.5\pi$$

Notemos que cuando $n = 10$, $\beta l = 10.25\pi$. De modo que este es el valor que satisface la condición de longitud eléctrica. Luego:

$$\beta = \frac{10.25\pi}{2.5} = 12.88$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{2\pi \cdot 400 \cdot 10^6}{300 \cdot 10^6}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{8\pi}{3}\sqrt{\varepsilon_r} = 12.88$$

$$\varepsilon_r = \left(\frac{12.88 \cdot 3}{8\pi}\right)^2$$

$$\boxed{\varepsilon_r = 2.36}$$

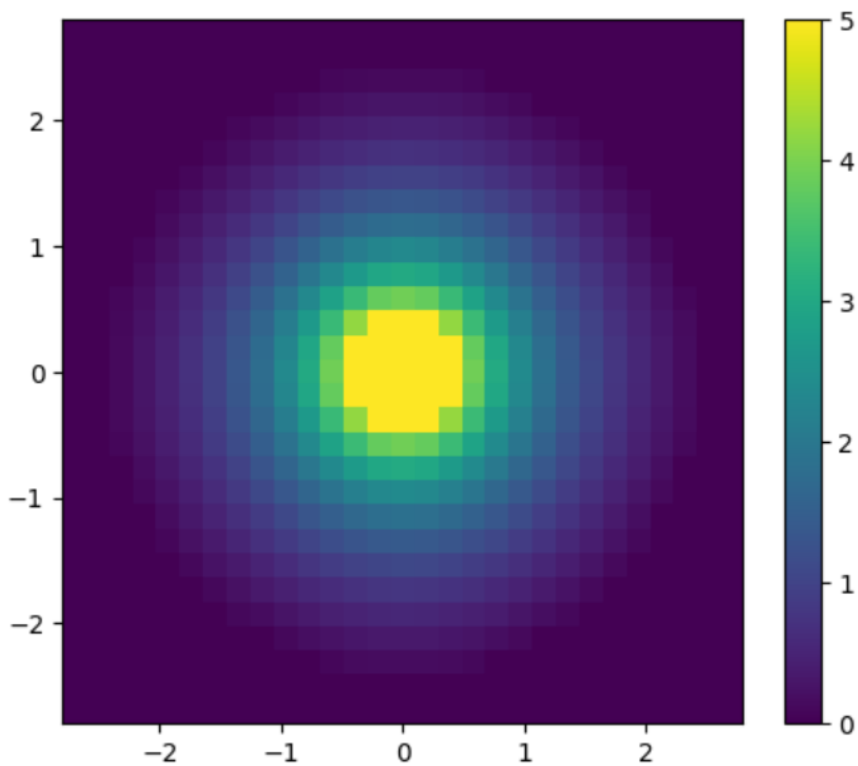
d)

A continuación se presenta un ejemplo de código:

```python
#Importamos los paquetes necesarios
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import tqdm
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from IPython.display import Image

#Generamos una malla para definir mas facilmente las condiciones de borde
yy, xx = np.mgrid[-2.8:3:0.2, -2.8:3:0.2]

#Condiciones de Borde
borde1 = 5.0 * (xx**2 + yy**2 <= 0.5**2)
borde2 = 0.0 * (xx**2 + yy**2 >= 2.5**2)
bordes = borde1 + borde2

#Nodos sobre los cuales vamos a iterar
nodes = 1.0 * (xx**2 + yy**2 > 0.5**2) * (xx**2 + yy**2 < 2.5**2)

#Potencial electrico sobre el cual vamos a iterar
V = bordes

#Iteracion
error = 1000                #Iniciamos con un error alto
```

```python
tol = 0.01                    #Tolerancia: dada por enunciado
N = np.sum(nodes)              #Numero de nodos sobre el cual se itera

while error >= tol:            #Iteramos
  mse = 0;
  for i in range(0,len(yy)):
    for j in range(0,len(xx)):
      if  (nodes[i,j]) == 1:  #Solo cambiamos los nodos de interes
        V_old = V[i,j]
        V[i,j] = (V[i-1,j] + V[i+1,j] + V[i,j-1] + V[i,j+1])/4 #Diferencias Finitas
        mse += (V_old - V[i,j])**2
  error = np.sqrt(mse/N)       #Actualizamos el valor del error

plt.figure(figsize=(6, 5))
plt.imshow(V, extent=[-2.8, 2.8, -2.8, 2.8], aspect='auto')
plt.colorbar()
plt.show()
```

Con dicho código, se obtiene el siguiente resultado:



e)

- Método 1:
La primera alternativa corresponde a realizar un barrido en frecuencia, partiendo desde una frecuencia que en longitud de onda sea equivalente al doble del largo original del cable. Es decir:

$$f_{max} = \frac{2v}{\lambda} = \frac{\frac{2}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}}{15} = \frac{2 \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 0.65}{15} = 26[MHz]$$

De esta manera, como el largo del cable es $\lambda/2$ estamos reflejando la impedancia de la terminación. Luego, hay que reducir paulatinamente la frecuencia hasta que la impedancia sea extremadamente grande. Esto equivale a hallar la máxima longitud $\lambda/2$ al cual se proyecta un circuito abierto a la impedancia de entrada. De este modo, cuando la impedancia medida a una frecuencia f_{ca} sea la equivalente a un circuito abierto. Simplemente calculamos $\lambda_{ca}/2$ y con ello tendremos la distancia a la cual el cable está cortado.

- Método 2:
Dado que conocemos la velocidad de propagación en el cable, enviaremos un pulso de alta frecuencia y veremos cuanto tarda en llegar la señal reflejada.
Conectamos al extremo accesible un generador de funciones y un osciloscopio. Mediante el generador enviamos una señal cuadrada de alta frecuencia y con el osciloscopio conectado a la entrada medimos la señal.
Dado que el cable está cortado, y por tanto, en circuito abierto, entonces el coeficiente de reflexión será de $\Gamma = 1$. De este modo, la señal vista en el osciloscopio serán 2 señales cuadradas, correspondientes a la original más la reflejada. Esta última estará más atenuada y tendrá un desfase. Por medio del osciloscopio, podemos medir el desfase generado entre las dos señales cuadradas, este desfase corresponderá al delta de tiempo que le tomó a la señal ir y volver. Luego, el largo de cable recorrido puede calcularse como:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\Delta t \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}$$