Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Control 6

23 de abril de 2024

Nombre:

Pregunta 1: Ecuación de Onda [2 puntos]

Sea la ecuación de onda:

$$\nabla^2 E - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Muestre que la ecuación:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \theta_0)$$

satisface la ecuación de onda siempre y cuando se cumpla la relación de dispersión:

$$\frac{\omega^2}{|\vec{\mathbf{k}}|^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}$$

Solución:

Reemplazamos la ecuación de $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$ en la ecuación de onda. Evaluemos cada término por separado, luego los combinaremos:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \theta_0)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -|\vec{\mathbf{k}}|^2 \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \theta_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\omega \vec{\mathbf{E}}_0 \sin(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \theta_0)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = -\omega^2 \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \theta_0)$$

Reemplazando en la ecuación de onda:

$$\nabla^2 E - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$-|\vec{\mathbf{k}}|^2 \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \theta_0) + \mu\varepsilon\omega^2 \vec{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \theta_0) = 0$$

$$-|\vec{\mathbf{k}}|^2 + \mu\varepsilon\omega^2 = 0$$

$$|\vec{\mathbf{k}}|^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

Lo cual equivale a la relación de dispersión:

$$\frac{\omega^2}{|\vec{\mathbf{k}}|^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}$$

Asignación de puntajes:

- 0.5pt por determinar correctamente el laplaciano. 0.2pt si llega a una expresión similar con **errores menores**.
- 0.5pt por determinar correctamente la derivada temporal de segundo orden. 0.2pt si llega a una expresión similar con **errores menores**.
- 1.0pt por reemplazar en la ecuación de onda y despejar la relación de dispersión. 0.4 pt si llega a una expresión similar con **errores menores**.

Pregunta 2: Impedancia Compleja [2 puntos]

Sea la impedancia para un medio conductor con pérdidas:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}}$$

Demuestre que la magnitud y fase de dicha impedancia están dados por:

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}} \qquad \theta_\eta = \angle\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

Solución:

Comencemos por la magnitud. Reordenamos términos y multiplicamos por "1".

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1 - j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}}}{\sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} \sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}}$$

El módulo de un complejo puede definirse como $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Si además consideramos la propiedad $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$:

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} \sqrt{\left(1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\left(1 - j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)} = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} \sqrt{\sqrt{\left(1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\left(1 - j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}}$$

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\left(1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right)^{1/2}} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right)^{1/4} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right)^{1/4-1/2}$$

$$\boxed{|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right]^{-1/4}}$$

Ahora la fase. Consideremos la expresión reordenada y elevémosla al cuadrado:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu/\varepsilon}{1 - \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} \sqrt{1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} \qquad \rightarrow \qquad \eta^2 = \frac{\mu/\varepsilon}{1 - \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\left(1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)$$

La fase de este numero complejo estará dada por:

$$\angle(\eta^2) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\mu/\varepsilon}{1-\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}{\frac{\mu/\varepsilon}{1-\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}(1)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)$$

Notemos que en notación fasorial:

$$\eta^2 = |\eta^2| e^{\angle(\eta^2)}$$

De modo que si aplicamos raiz:

$$\eta = \sqrt{|\eta^2|} e^{\frac{1}{2}\angle(\eta^2)}$$

Luego:

$$\boxed{\angle(\eta) = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}$$

Asignación de puntajes:

- 1pt por determinar correctamente la magnitud. Dependiendo del nivel de desarrollo logrado se asignarán puntajes intermedios de 0.25pt, 0.5pt, ó 0.75pt para desarrollos parciales.

- 1pt por determinar correctamente la fase. Dependiendo del nivel de desarrollo logrado se asignarán puntajes intermedios de 0.25pt, 0.5pt, ó 0.75pt para desarrollos parciales.

Nota al corrector: Evidentemente hay más de una alternativa para resolver este problema (e.g., resolver todo con notación fasorial). Considerar dichas alternativas como correctas en caso de ser un desarrollo consistente que llegue al mismo resultado.

Pregunta 3: Polarización Compleja [2 puntos]

Sea la onda:

$$\vec{\mathbf{E}}(z,t) = E_{0x}\cos(\omega t - k_0 z)\ \vec{\mathbf{a}}_x + E_{0y}\cos(\omega t - k_0 z - \pi/2)\ \vec{\mathbf{a}}_y$$

Encuentre la expresión para el campo magnético $\vec{\mathbf{H}}(z,t)$ en notación fasorial. Factorice a la expresión más sencilla posible.

Solución:

Para pasar a campo magnético, asumimos un medio dieléctrico. Convertimos las magnitudes usando el factor η y las direcciones usando regla de mano derecha:

$$\vec{\mathbf{H}}(z,t) = \frac{E_{0x}}{\eta}\cos(\omega t - k_0 z)\ \vec{\mathbf{a}}_y - \frac{E_{0y}}{\eta}\cos(\omega t - k_0 z - \pi/2)\ \vec{\mathbf{a}}_x$$

Empleando notación fasorial:

$$\vec{\mathbf{H}}(z,t) = \frac{E_{0x}}{\eta}e^{j(\omega t - k_0 z)}\ \vec{\mathbf{a}}_y - \frac{E_{0y}}{\eta}e^{j(\omega t - k_0 z - \pi/2)}\ \vec{\mathbf{a}}_x$$

Dado que $e^{-j\pi/2} = -j$, la expresión puede ser aún más reducida. Luego:

$$\boxed{\mathbf{H}(z,t) = \frac{1}{\eta}(E_{0x}\vec{\mathbf{a}}_y + jE_{0y}\vec{\mathbf{a}}_x)e^{j(\omega t - k_0 z)}}$$

Notemos que este caso corresponde a una polarización elíptica. Si $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ tendremos una polarización circular:

$$\mathbf{H}(z,t) = \frac{E_0}{\eta}(\vec{\mathbf{a}}_y + j\vec{\mathbf{a}}_x)e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

Por último, si el desfase fuera cero ($e^{-j0} = 1$) y $E_{0x} \neq E_{0y}$, tenemos otra forma de escribir la polarización lineal.

$$\mathbf{H}(z,t) = \frac{1}{\eta}(E_{0x}\vec{\mathbf{a}}_y + E_{0y}\vec{\mathbf{a}}_x)e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

Estas representaciones son clásicas de enunciados de prueba. Se recomienda que las estudien y sepan hacer la conversión entre representación fasorial y trigonométrica.

Asignación de puntajes:

- 0.5pt por convertir correctamente la magnitud.
- 0.5pt por determinar correctamente las direcciones.
- 0.5pt por identificar que $e^{-j\pi/2} = -j$.
- 0.5pt por entregar la expresión reducida. Tiene que haber identificado el j del desfase, de lo contrario no se considera como simplificado.
- La asignación de puntaje es binaria, no hay puntajes intermedios.