Clase 17
Introducción a LT

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 553-560

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Bienvenidos a un nuevo capítulo: Líneas de Transmisión.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

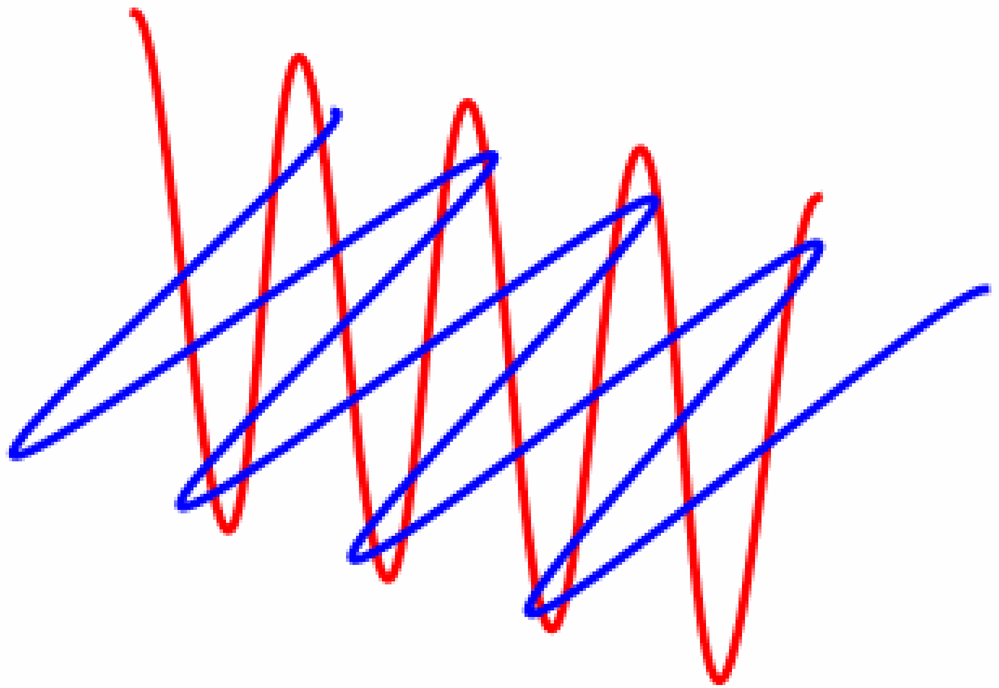
- **OA-14:** Distinguir las ecuaciones y el significado de una línea de transmisión general y las versiones correspondientes para líneas sin pérdidas, para pérdidas bajas, para pérdidas altas, y para líneas sin distorsión.

Contenidos

- Motivación
- Parámetros Concentrados
- Parámetros Distribuidos
- Parámetros de una LT
- Ecuaciones de una LT
- Soluciones a las ecuaciones de una LT
- Impedancia de una LT

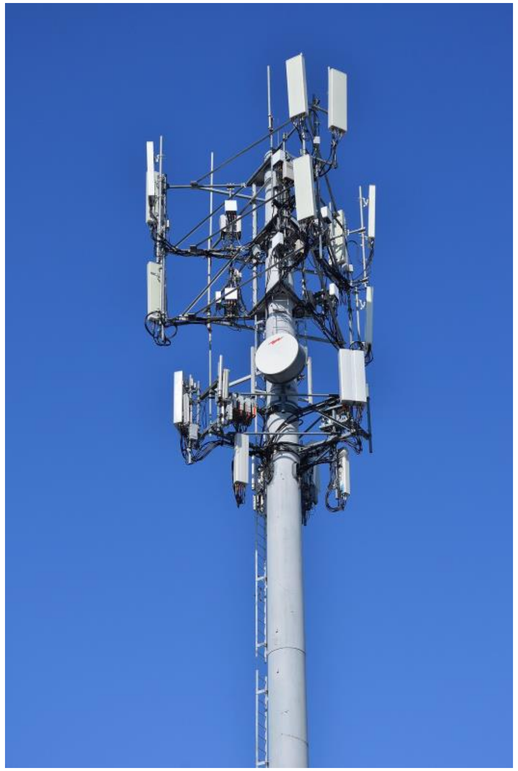
Motivación

- Hasta ahora estudiamos ondas que se propagaban libremente por el espacio, sin mayores restricciones o limitantes.



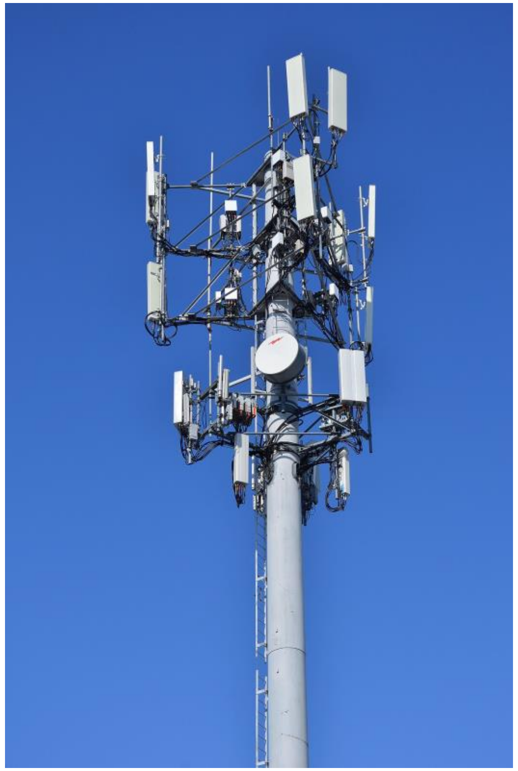
Motivación

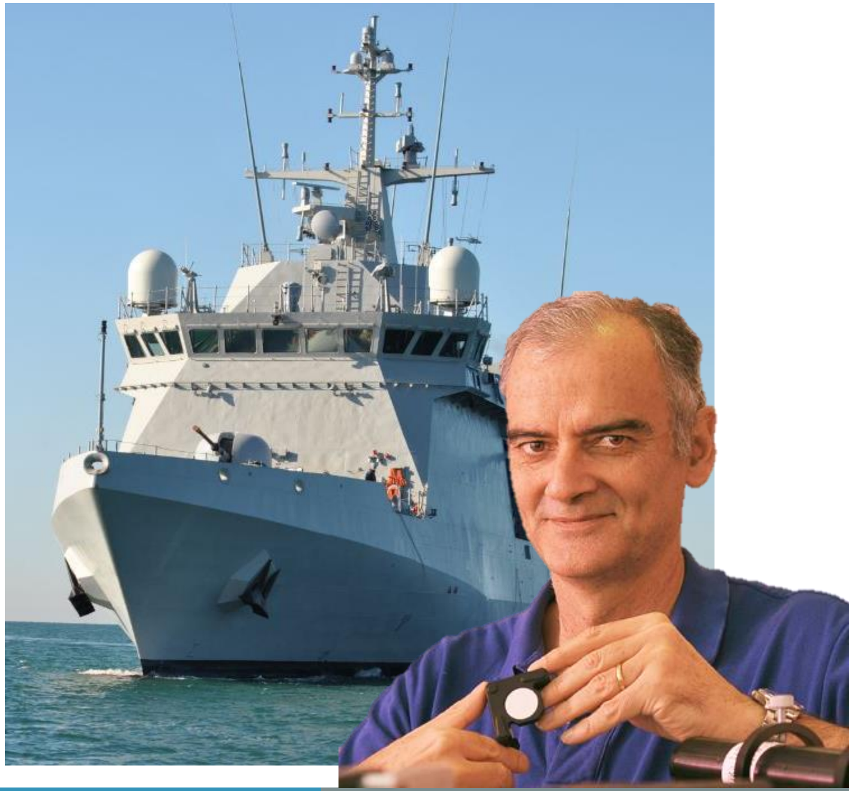
- Esta es una situación real, clásica del mundo de radioaficionados, TV, imágenes satelitales, estaciones meteorológicas, uso militar, etc.



Motivación

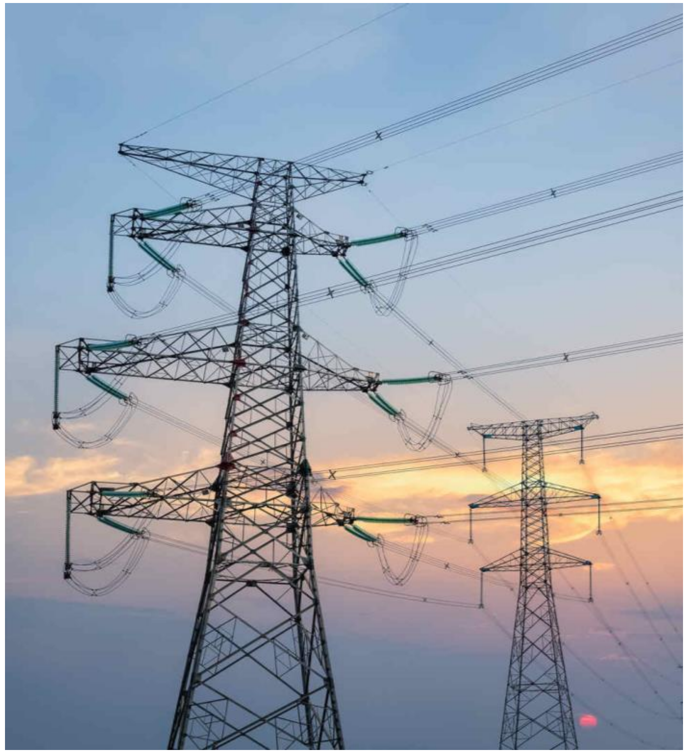
- Esta es una situación real, clásica del mundo de radioaficionados, TV, imágenes satelitales, estaciones meteorológicas, uso militar, etc.

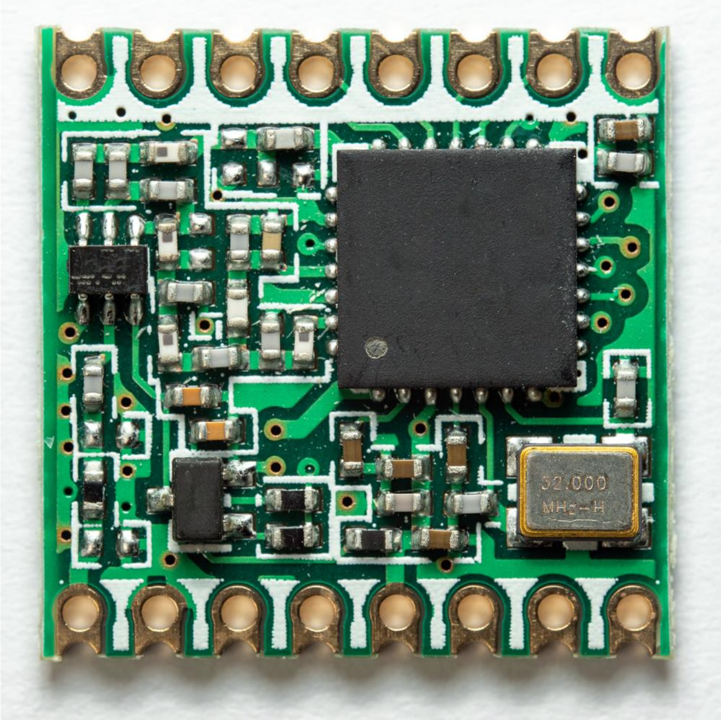




Motivación

- Pero **<u>no es la única</u>**. También tenemos ondas confinadas a medios bastante restringidos.





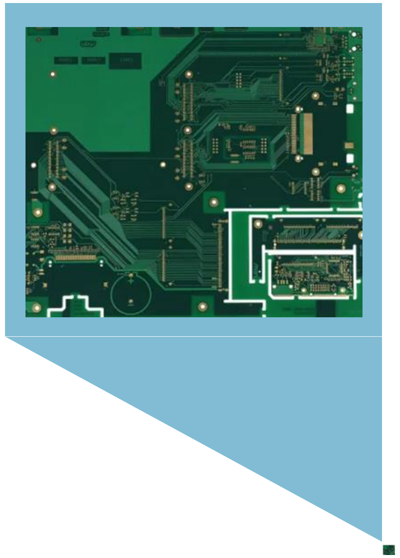
Parámetros Concentrados

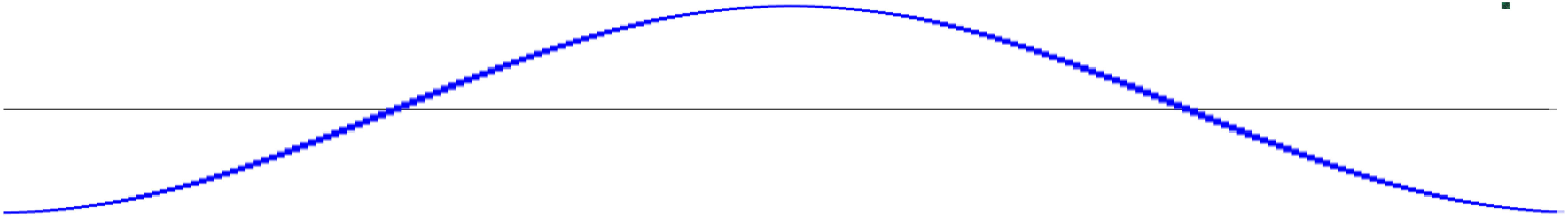
- La teoría de circuitos se basa en un supuesto fundamental: que la longitud de onda es mucho más grande que las dimensiones del circuito.

- Valor AC típico: $50[\mathrm{Hz}] \longrightarrow \quad \lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f} = 6000\ [\mathrm{km}]$
- Largo de una PCB “grande”: $10\ [\mathrm{cm}]$

Parámetros Concentrados

- Valor AC típico: $50[\text{Hz}] \longrightarrow \quad \lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f} = 6000\ [\text{km}]$
- Largo de una PCB “grande”: $10\ [\text{cm}]$



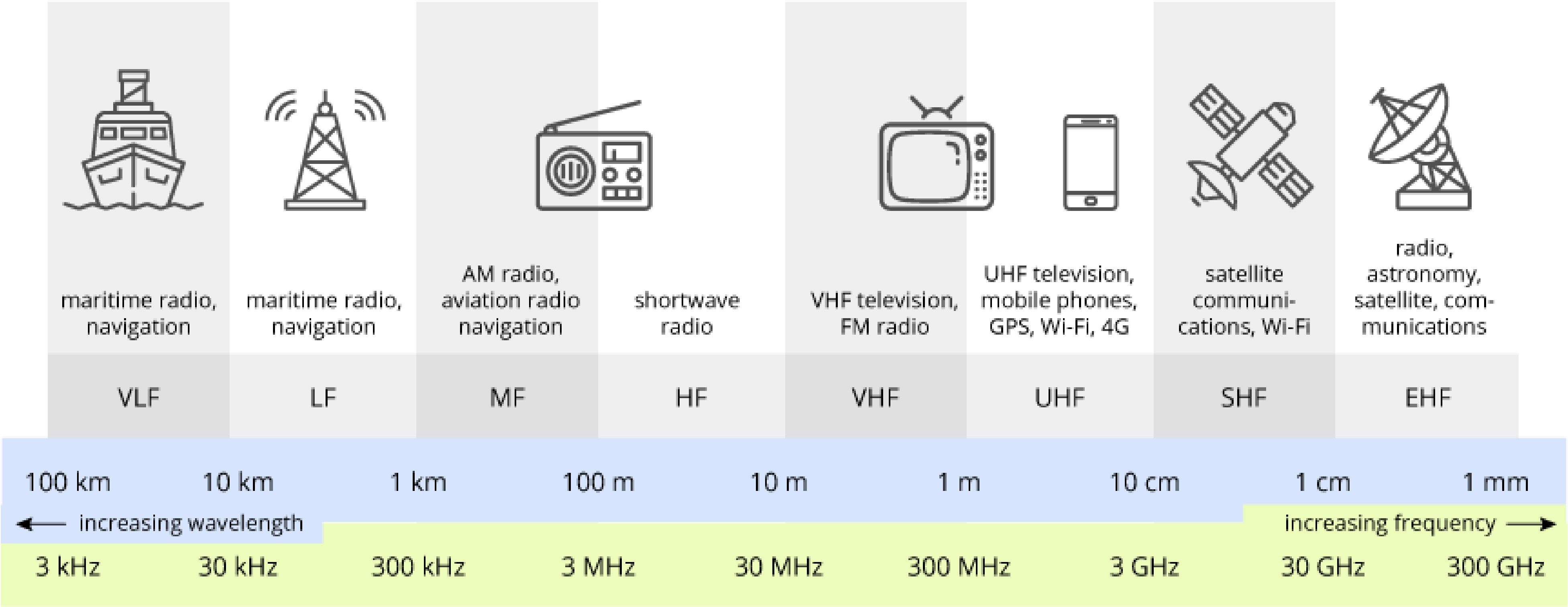


Parámetros Concentrados

- Como la longitud de onda es tan grande, podemos asumir que el circuito recibe un campo que varía homogéneamente.
- En otras palabras, los cambios de voltaje se sienten iguales en toda la placa y a lo largo de todos los elementos del circuito.
- Esto se conoce como Parámetros concentrados.

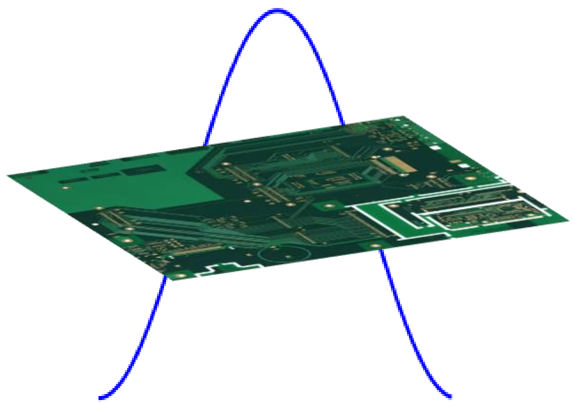
Parámetros Distribuidos

- Cuando este supuesto no se cumple, la teoría de circuitos falla. Por tanto, debemos recurrir a la teoría de Líneas de Transmisión.



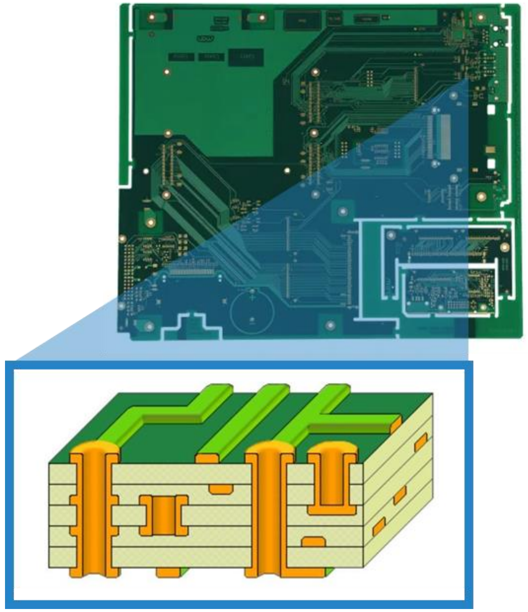
Parámetros Distribuidos

- En este caso, las longitudes de onda son comparables al tamaño del circuito, cables, o incluso de algunos componentes. Por lo que los valores de campos, voltaje y corriente pueden variar a lo largo de ellos.



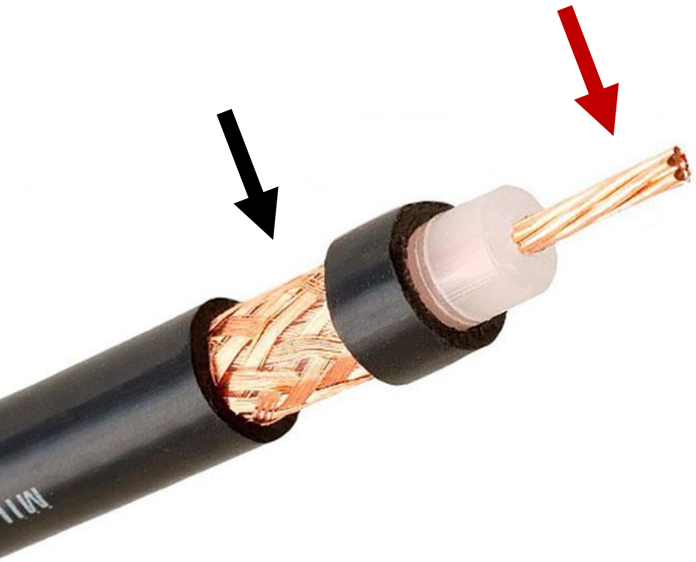
Parámetros Distribuidos

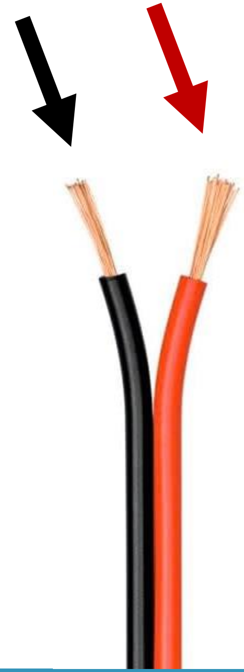
- Las líneas de transmisión son empleadas para transportar ondas electromagnéticas.
- En este capítulo nos centraremos principalmente en 3 tipos de LT: cables coaxiales, cables paralelos y microstrips.

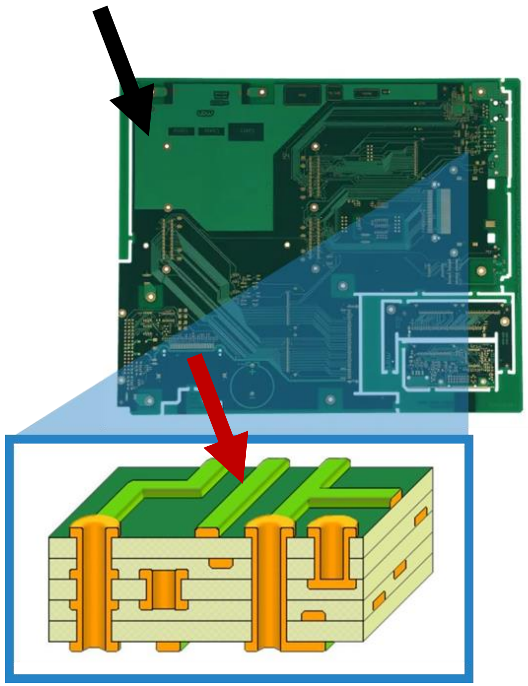


Parámetros de una línea de transmisión

- En general, podemos representar una línea de transmisión como dos conductores.







Parámetros de una línea de transmisión

- En general, podemos representar una línea de transmisión como dos conductores, que conectan un generador de ondas en un extremo, con una carga en el extremo opuesto.

Parámetros de una línea de transmisión

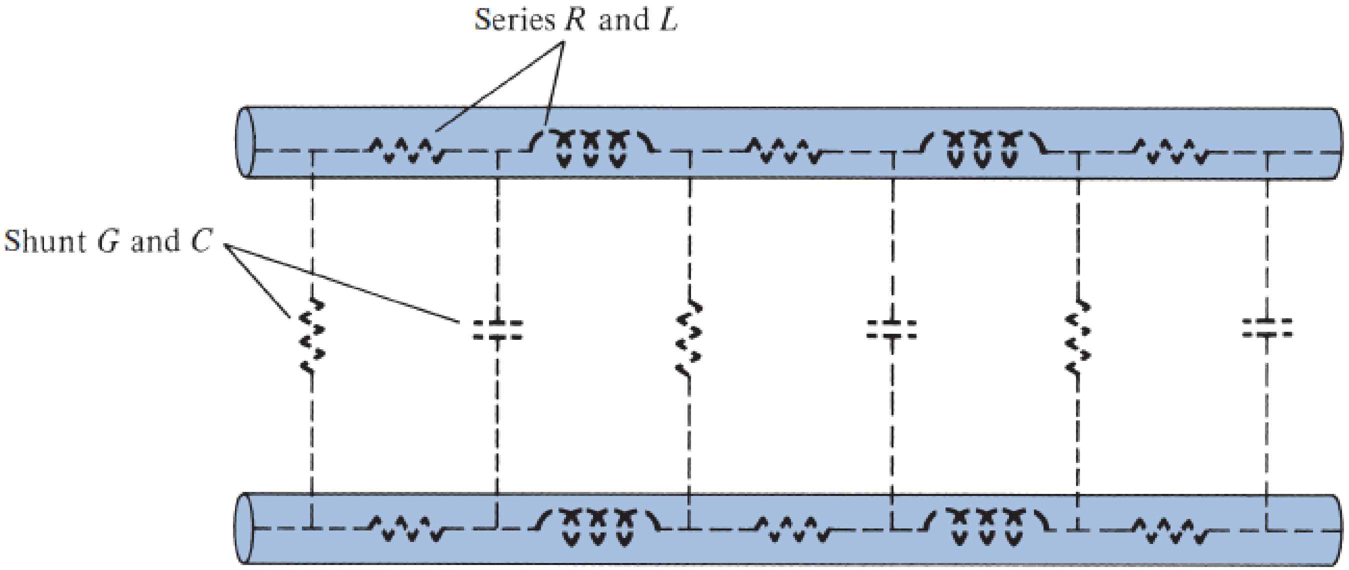
- Adicionalmente, estos dos conductores suelen estar separados por algún medio dieléctrico. De modo que:

Parámetros de una línea de transmisión

- Dado que la línea es un elemento conductor que transporta corriente. Tendrá una L y una resistencia R asociadas.
- Adicionalmente, como tenemos un dieléctrico, este tendrá cierta conductancia G, y generará una capacitancia C entre las líneas.

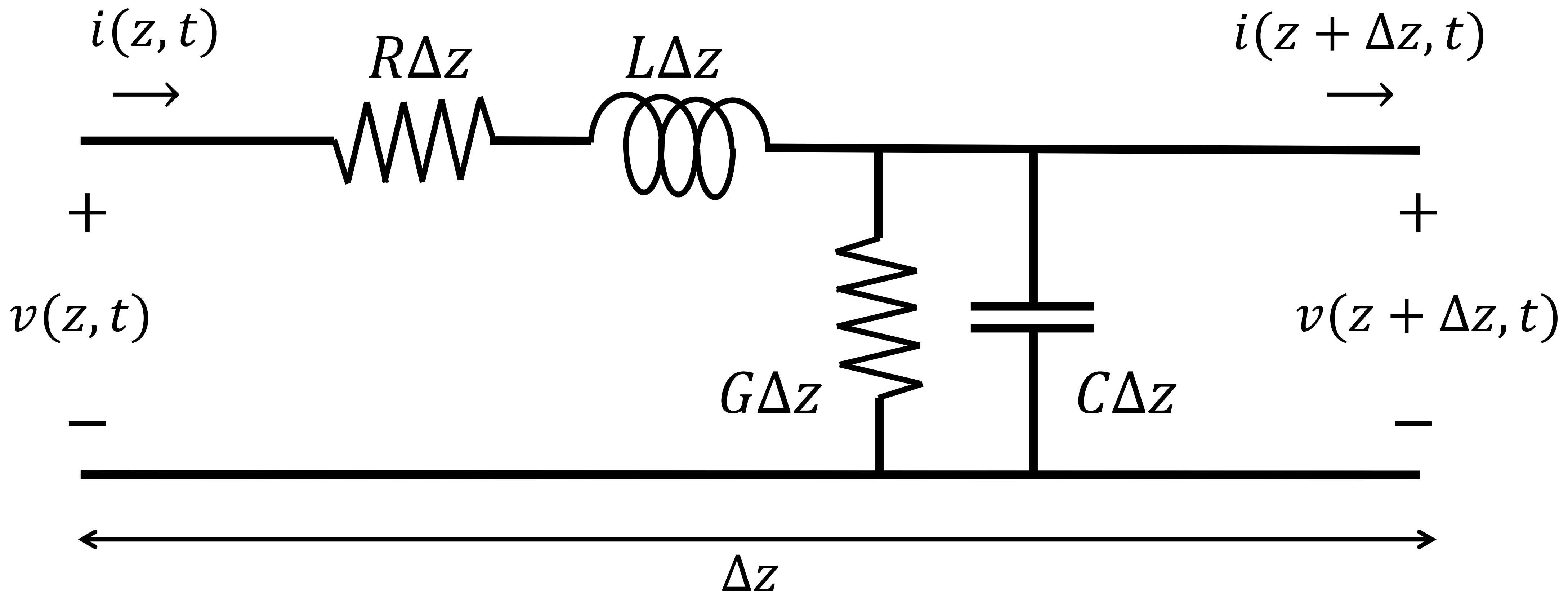
Parámetros de una línea de transmisión

- **¡PERO!** Ahora la longitud de onda es comparable a las dimensiones de la línea. Por lo que no podemos asumir que dichos parámetros como discretos.
- Ahora se distribuyen uniformemente a lo largo de la línea



Parámetros de una línea de transmisión

- Tomemos un trozo diferencial de la línea de transmisión.



Ecuaciones de una línea de transmisión

- A partir de la figura anterior, podemos escribir las ecuaciones para voltaje y corriente:

$$v(z+\Delta z,t) - v(z,t) = -R\Delta z\, i(z,t) - L\Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$i(z+\Delta z,t) - i(z,t) = -G\Delta z\, v(z,t) - \mathrm{C}\Delta z \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

Ecuaciones de una línea de transmisión

- Dividamos por Δz y tomemos el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$.
- Obtendremos las **Ecuaciones del Telegrafista**:

$$\boxed{\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R\, i(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -Gv(z,t) - \mathrm{C}\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}}$$

Ecuaciones de una línea de transmisión

- Asumamos régimen sinusoidal permanente, de modo que podamos escribir todo en notación fasorial:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \qquad \frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z)$$

- Derivando la primera e insertando la segunda, y viceversa:

$$\frac{d^2V(z)}{d^2z} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z) \qquad \frac{d^2I(z)}{d^2z} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)I(z)$$

Ecuaciones de una línea de transmisión

- Hagamos:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

- Reemplazando en las ecuaciones anteriores y reordenando, obtendremos las **Ecuaciones del Telefonista**:

$$\boxed{\frac{d^2V(z)}{d^2z} - \gamma^2 V(z) = 0} \qquad \boxed{\frac{d^2I(z)}{d^2z} - \gamma^2 I(z) = 0}$$

Ecuaciones de una línea de transmisión

- ¿Les resultan familiares?

$$\boxed{\frac{d^2V(z)}{d^2z} - \gamma^2 V(z) = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2I(z)}{d^2z} - \gamma^2 I(z) = 0}$$

Ecuaciones de una línea de transmisión

- ¿Les resultan familiares?

$$\boxed{\frac{d^2V(z)}{d^2z} - \gamma^2 V(z) = 0} \qquad \boxed{\frac{d^2I(z)}{d^2z} - \gamma^2 I(z) = 0}$$

- ¡Son ecuaciones de onda!
- ¿Cómo serán sus soluciones?

Solución a las ecuaciones de LT

- Fasorialmente, podríamos escribir las magnitudes de la solución a la ecuación de onda como:

$$V(z) = V_0 e^{-\gamma z} \qquad I(z) = I_0 e^{-\gamma z}$$

- Pero las líneas de transmisión tienen **2 cables**, de modo que también hay ondas que viajan en sentido contrario. Luego:

$$\boxed{V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}} \qquad \boxed{I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}}$$

Solución a las ecuaciones de LT

- Fasorialmente, podríamos escribir las magnitudes de la solución a la ecuación de onda como:

$$V(z) = V_0 e^{-\gamma z} \qquad\qquad I(z) = I_0 e^{-\gamma z}$$

- Pero las líneas de transmisión tienen **2 cables**, de modo que también hay ondas que viajan en sentido contrario. Luego:

$$\boxed{V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}} \qquad \boxed{I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}}$$

Impedancia de una LT

- Derivando el voltaje y reemplazando en la ecuación del Telegrafista:

$$-\gamma\,(V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}) = -(R + j\omega L)(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z})$$

- Trabajando cada fase por separado:

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{(R + j\omega L)}{\gamma} \qquad\qquad Z_0 = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{(R + j\omega L)}{\gamma}$$

- Notemos que la impedancia es la misma.

Impedancia de una LT

- Usando las impedancias, podemos escribir la corriente en función del voltaje:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

- Finalmente, las ecuaciones de onda en el dominio del tiempo serán:

$$v(z,t) = |V_0^+| e^{-\gamma z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_0^+) + |V_0^-| e^{\gamma z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_0^-)$$

$$i(z,t) = \frac{|V_0^+|}{Z_0} e^{-\gamma z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_0^+) - \frac{|V_0^-|}{Z_0} e^{\gamma z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_0^-)$$

Resumen

- Establecimos las diferencias entre la teoría de circuitos y la teoría de líneas de transmisión, definiendo parámetros concentrados y distribuidos.
- Definimos una línea de transmisión, algunos ejemplos y su modelo general.
- Analizamos los parámetros de una línea de transmisión y definimos las ecuaciones que la definen.
- Resolvimos la ecuación de onda para una LT y determinamos su impedancia característica.

Cerrando la clase de hoy

- Los parámetros de una línea de transmisión evidentemente dependerán del conductor y el dieléctrico.
- Analizaremos dichos casos la próxima clase.

Próxima Clase:

Líneas de transmisión con y sin pérdidas

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 560 – 571