Clase 21
Carta de Smith

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 572-584

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- La clase anterior vimos como la terminación de una línea puede variar dependiendo de la distancia que tomamos de ella.
- Hoy presentaremos una herramienta gráfica que nos permite trabajar este tipo de problemas.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-16:** Utilizar la carta de Smith para compensar líneas de transmisión sin perdidas y para determinar parámetros de impedancia, voltaje y corriente a lo largo de la línea.

Contenidos

- Ejemplo Clase Pasada
- Coeficiente de Reflexión
- Carta de Smith

Ejemplo

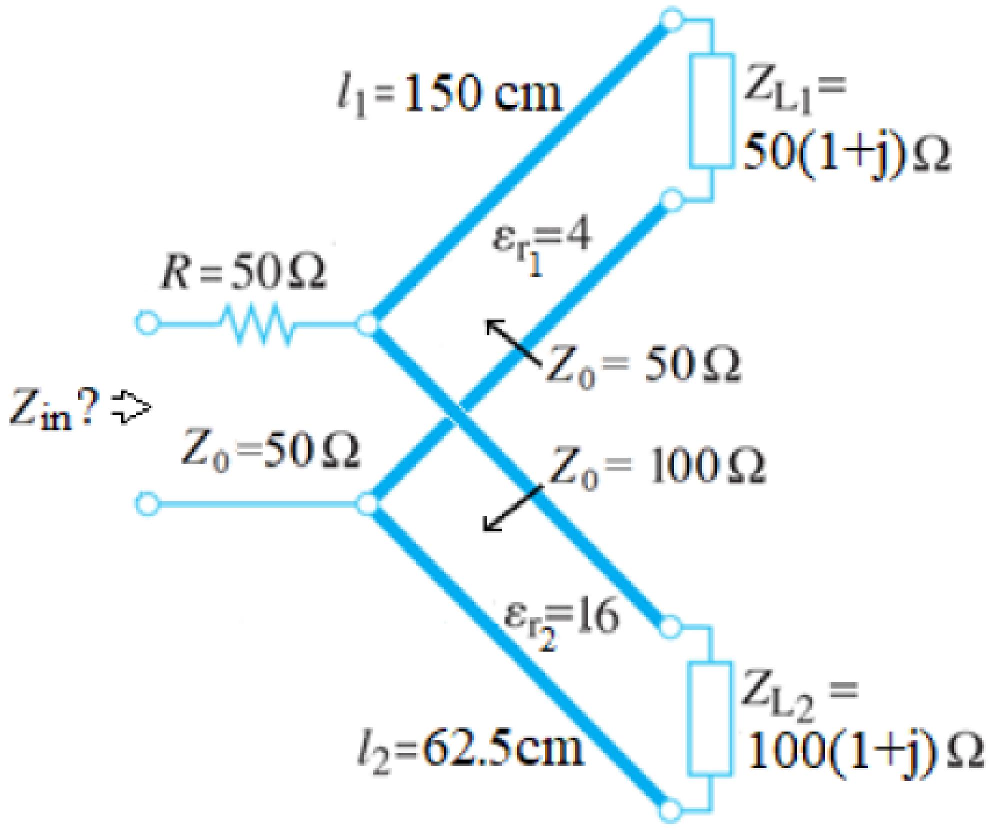
El circuito RF de la figura opera a 150 MHz y consta de 2 líneas coaxiales sin pérdidas que alimentan cargas complejas Z_{L1} y Z_{L2}. Determine:

a) (4 puntos) La impedancia total Z_{in} vista desde la entrada al circuito (ver figura)

b) (2 puntos) Para un voltaje de 100 V entregado a la entrada del circuito, encuentre la potencia activa promedio **total** (watts) entregada **a las cargas** Z_{L1} y Z_{L2}.

Notas importantes:

- Los tramos de longitudes despreciables son aquellos de líneas delgadas
- Note que los dieléctricos e impedancias características de las líneas son distintas



Solución

Antes de entrar a la LT:

- Longitud de onda generador: $\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{300M}{150M} = 2[m]$.

LT-1 ($l = 150[cm], \varepsilon_r = 4, \ Z_L = 50(1 + j1)$):

- Longitud de onda: $\lambda_{L1} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} = \frac{2}{2} = 1[m]$
- Longitud de línea: $l = 1.5[\mathrm{m}] = 3 * \frac{\lambda_{L1}}{2}$
- Equivale a 3 líneas $\frac{\lambda}{2}$, no cambia la impedancia: $Z_{in} = 50(1 + j1)$

Solución

<u>LT-2 ($l = 62.5[cm], \varepsilon_r = 16,\ \ Z_L = 100(1 + j1)$):</u>

- Longitud de onda: $\lambda_{L2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} = \frac{2}{4} = 0.5[m]$
- Longitud de línea: $l = 0.625[\mathrm{m}] = 3 * \frac{\lambda_{L2}}{2} + \frac{\lambda_{L2}}{4}$
- Equivale a 3 líneas $\frac{\lambda}{2}$, no cambia la impedancia, luego le sigue un transformador $\frac{\lambda}{4}$: $Z_{in} = 50(1 - j1)$.

La resistencia equivalente será el paralelo:

$$Z_{eq} = 50(1 - j)||50(1 + \mathrm{j}) = 50$$

Solución

La carga está perfectamente balanceada a 50Ω.

De este modo, no hay reflexión y por tanto la potencia es:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} = \frac{100^2}{2 \cdot 50} = 100[\mathrm{W}]$$

Coeficiente de Reflexión

- Anteriormente, definimos el coeficiente de reflexión justo en aquel punto donde pasamos de la línea a la carga:

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

- En estricto rigor, esto equivale a $\Gamma(0)$

- En líneas de transmisión **la distancia importa**.

  ¿Qué pasará con $\Gamma(z = -l)$?

Coeficiente de Reflexión

- Podemos definir $\Gamma(l) = \Gamma(z = -l)$ usando la onda incidente y reflejada en su forma general para una distancia cualquiera:

$$\Gamma(l) = \frac{Z_L(l) - Z_0}{Z_L(l) + Z_0}$$

- Normalicemos por la impedancia de la línea:

$$\Gamma(l) = \frac{\frac{Z_L(l)}{Z_0} - 1}{\frac{Z_L(l)}{Z_0} + 1} = \frac{z_n(l) - 1}{z_n(l) + 1}$$

Coeficiente de Reflexión

- Luego, despejando z_n:

$$z_n(l) = \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} = \frac{1 + |\Gamma(0)|e^{j(\theta_L - 2\beta l)}}{1 - |\Gamma(0)|e^{j(\theta_L - 2\beta l)}}$$

- ¿Qué gano con hacer esto?

Coeficiente de Reflexión

- Recordemos que tanto $\Gamma(l)$ como $z_n(l)$ son números complejos:

$$\Gamma(l) = \Gamma_r(l) + j\Gamma_i(l)$$

$$\mathrm{z_n}(l) = r(l) + jx(l)$$

- Al tener la relación $z_n(l) = \frac{1+\Gamma(l)}{1-\Gamma(l)}$, podemos graficar la impedancia normalizada z_n como función de Γ.

Coeficiente de Reflexión

- Usando un poco de álgebra de complejos:

$$\boxed{\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2}$$

Componente Resistiva (r)

$$\boxed{(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

Componente Reactiva (x)

- ¿Qué geometría describen estas ecuaciones?

Coeficiente de Reflexión

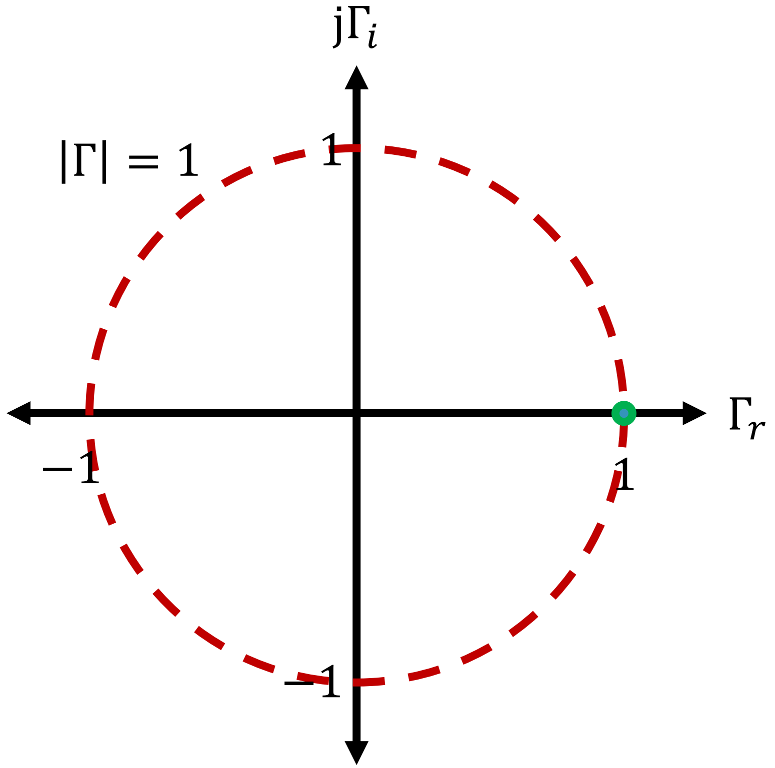
- Analicemos un poco: $$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

- $r = 0$ (cortocircuito, $|\Gamma| = 1$):

$$\boxed{\Gamma_r^2 + \Gamma_i^2 = 1}$$

- $r = \infty$ (circuito abierto, $|\Gamma| = 1$):

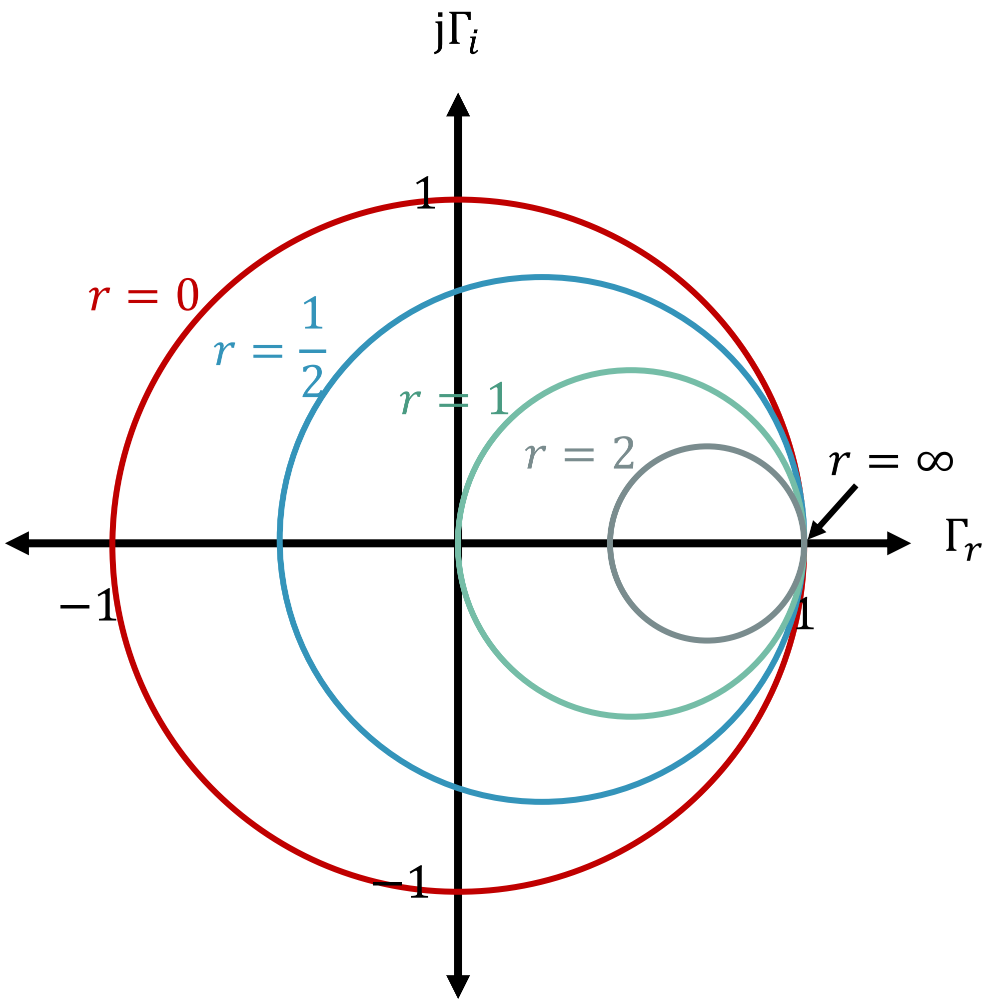
$$\boxed{(\Gamma_r - 1) + \Gamma_i^2 = 0}$$



Coeficiente de Reflexión

- Y de modo general:

$$\boxed{\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2}$$



Coeficiente de Reflexión

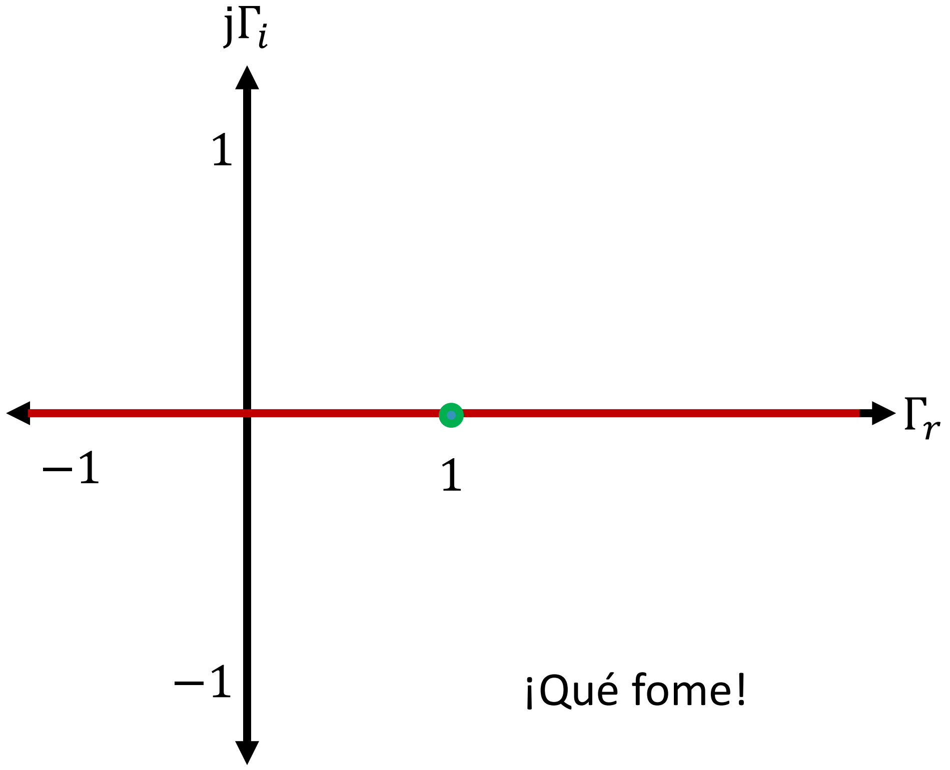
- Analicemos un poco: $$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

- $x = 0$

$$\boxed{(\Gamma_r - 1)^2 = \infty}$$

- $x = \infty$

$$\boxed{(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i)^2 = (0)^2}$$



¡Qué fome!

Coeficiente de Reflexión

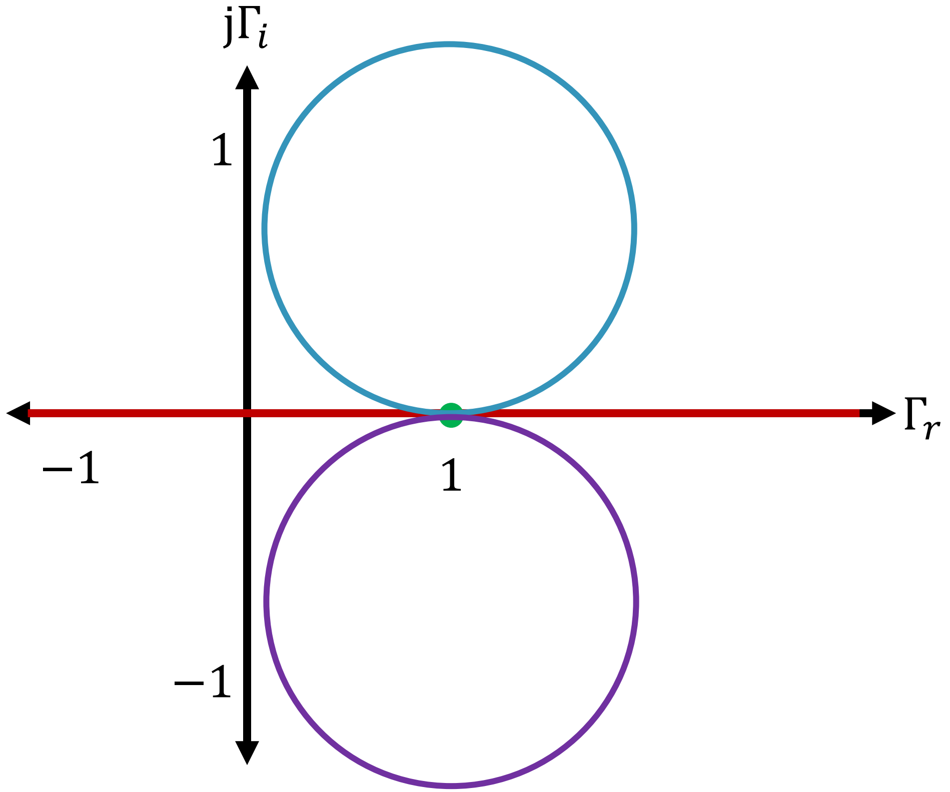
- Veamos otros 2 casos:

- $x = 1$

$$\boxed{(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i - 1)^2 = 1^2}$$

- $x = -1$

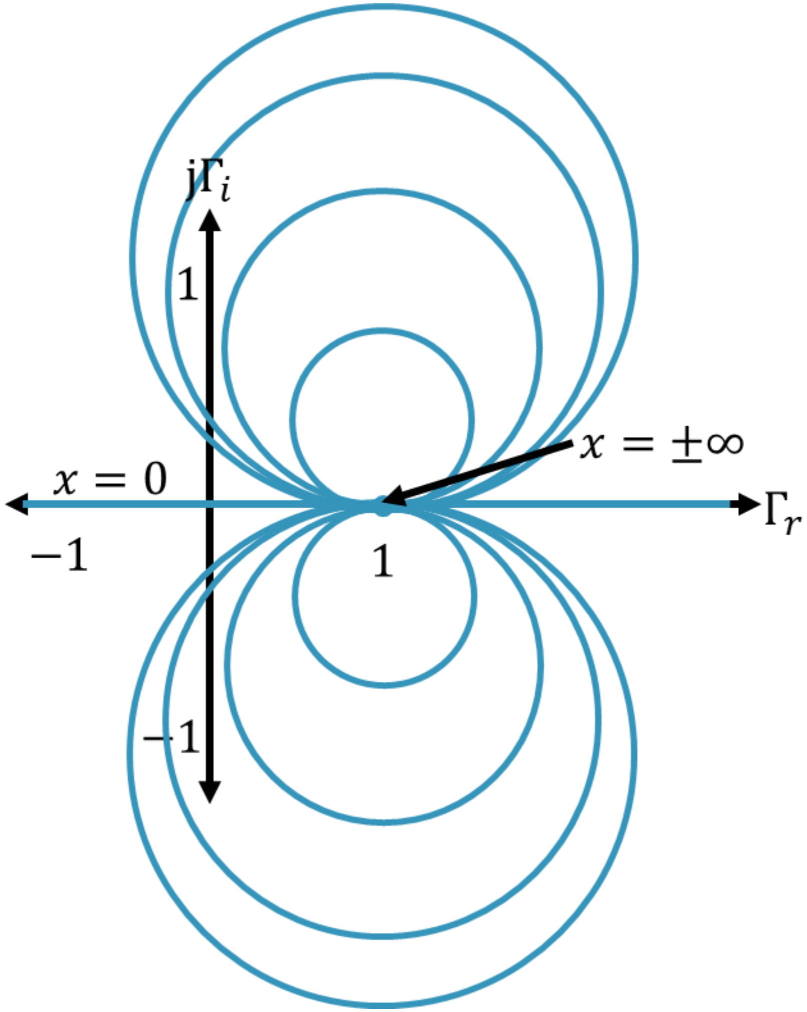
$$\boxed{(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i - 1)^2 = 1^2}$$



Coeficiente de Reflexión

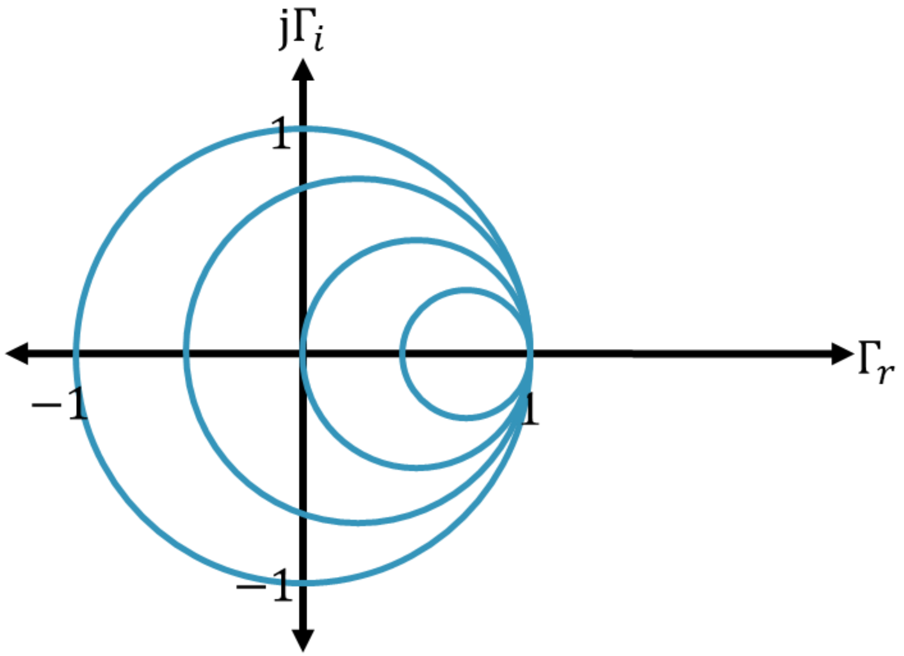
- Y de modo general:

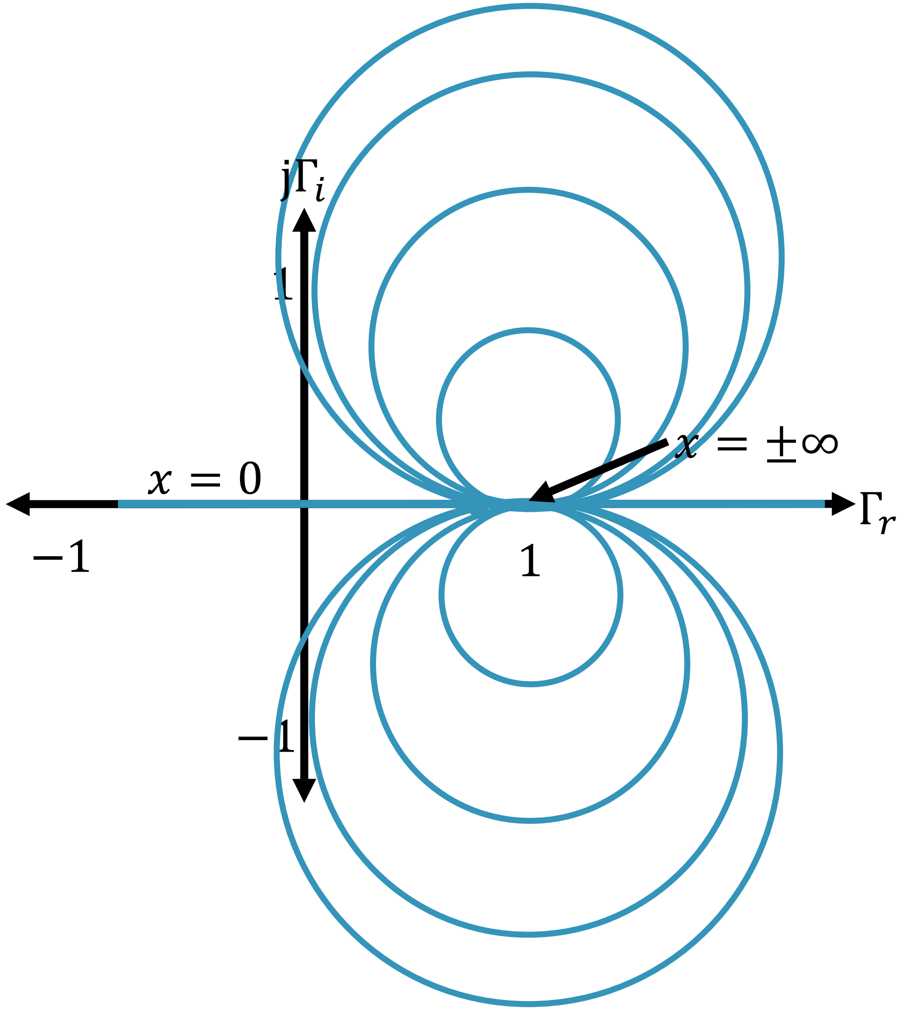
$$\boxed{(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$



Carta de Smith

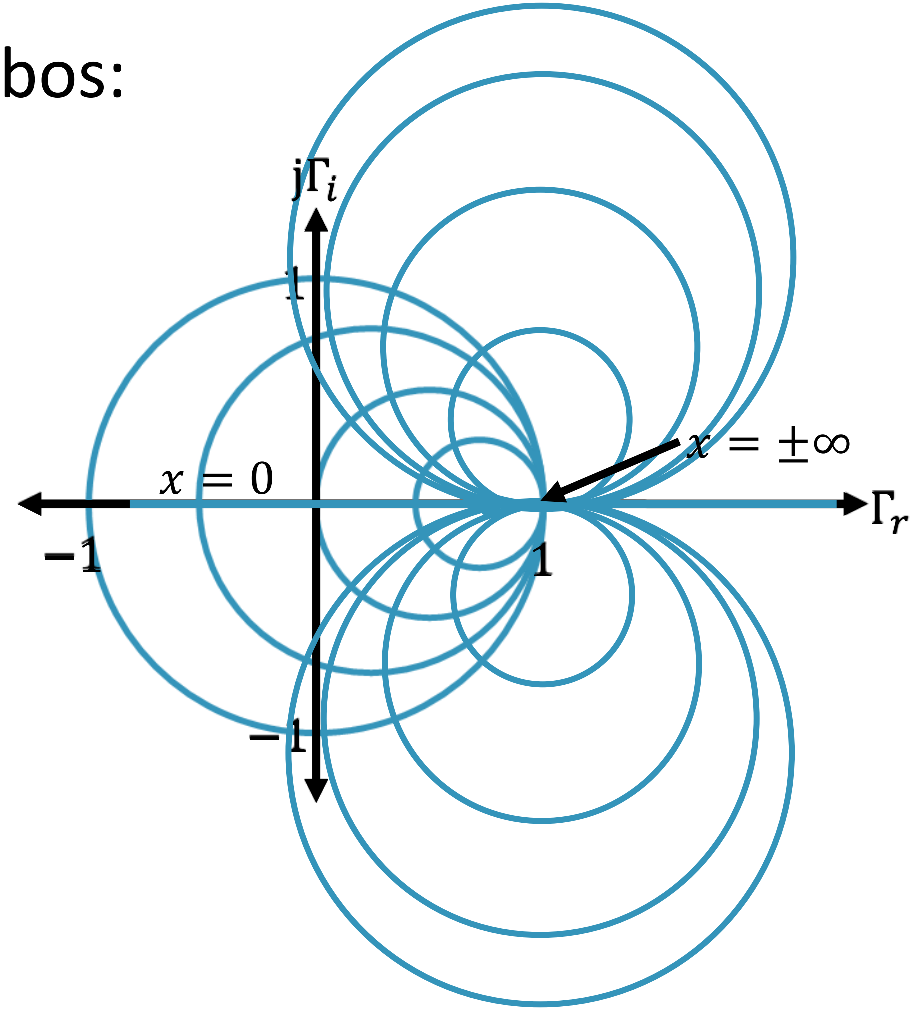
- Si combinamos ambos:





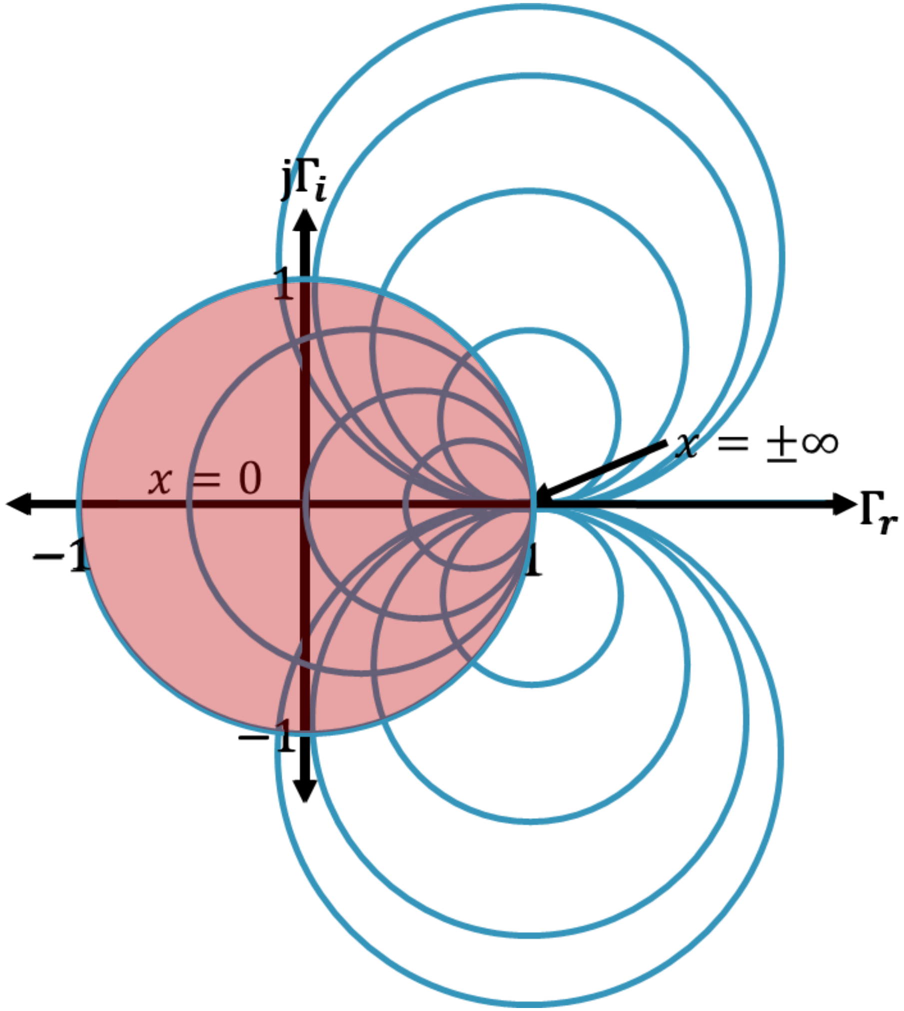
Carta de Smith

- Si combinamos ambos:

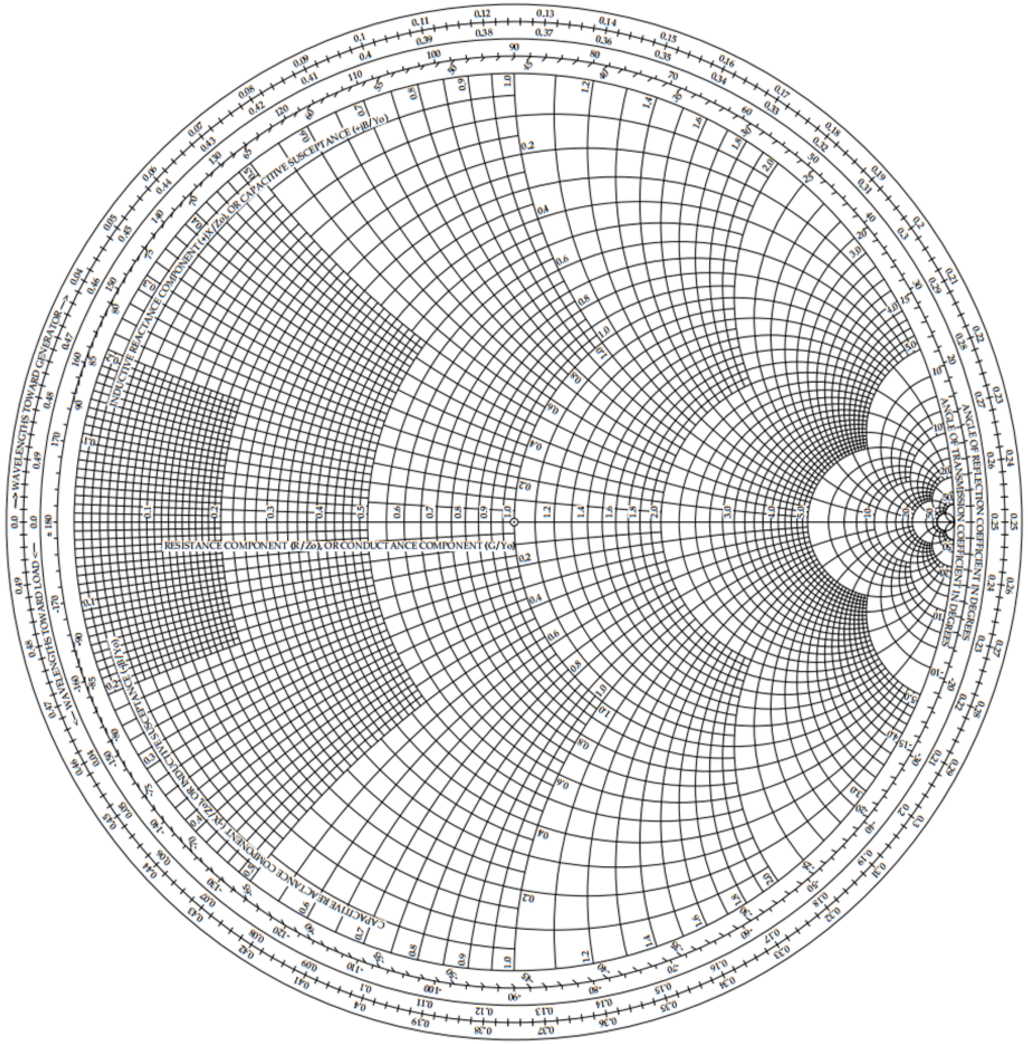


Carta de Smith

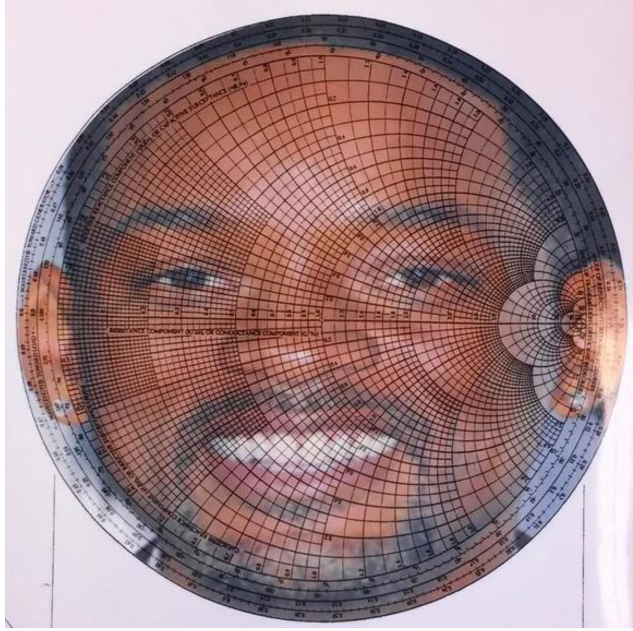
- Para r factibles

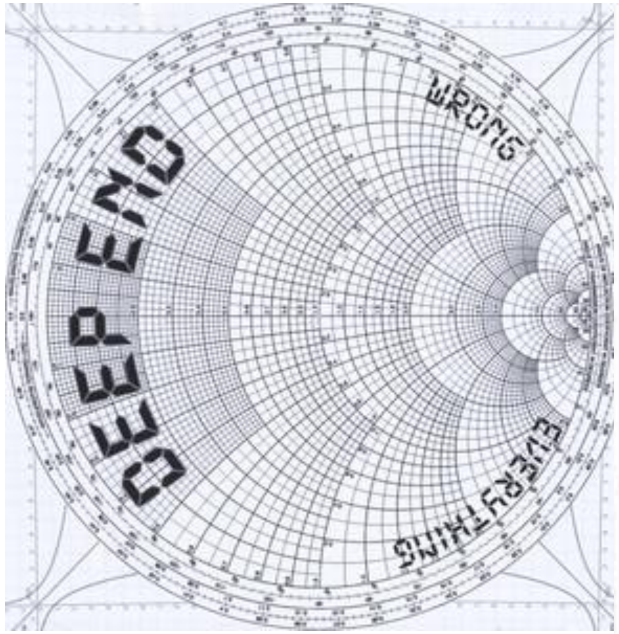


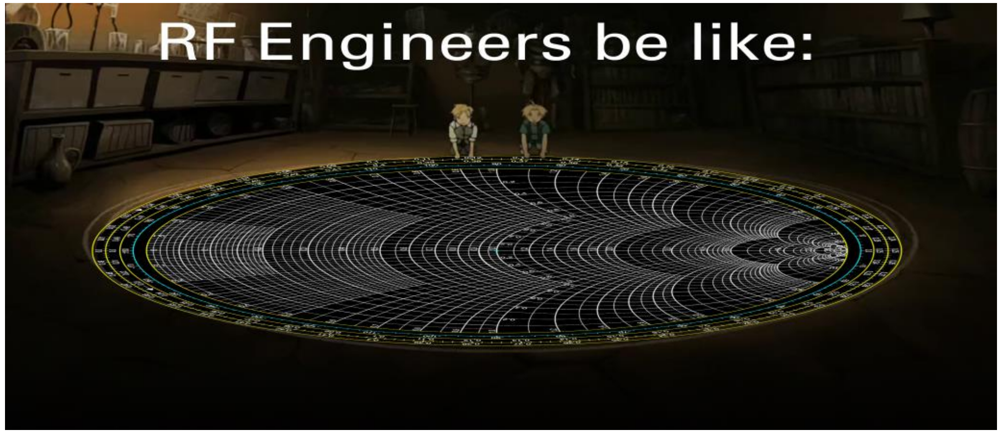
Carta de Smith

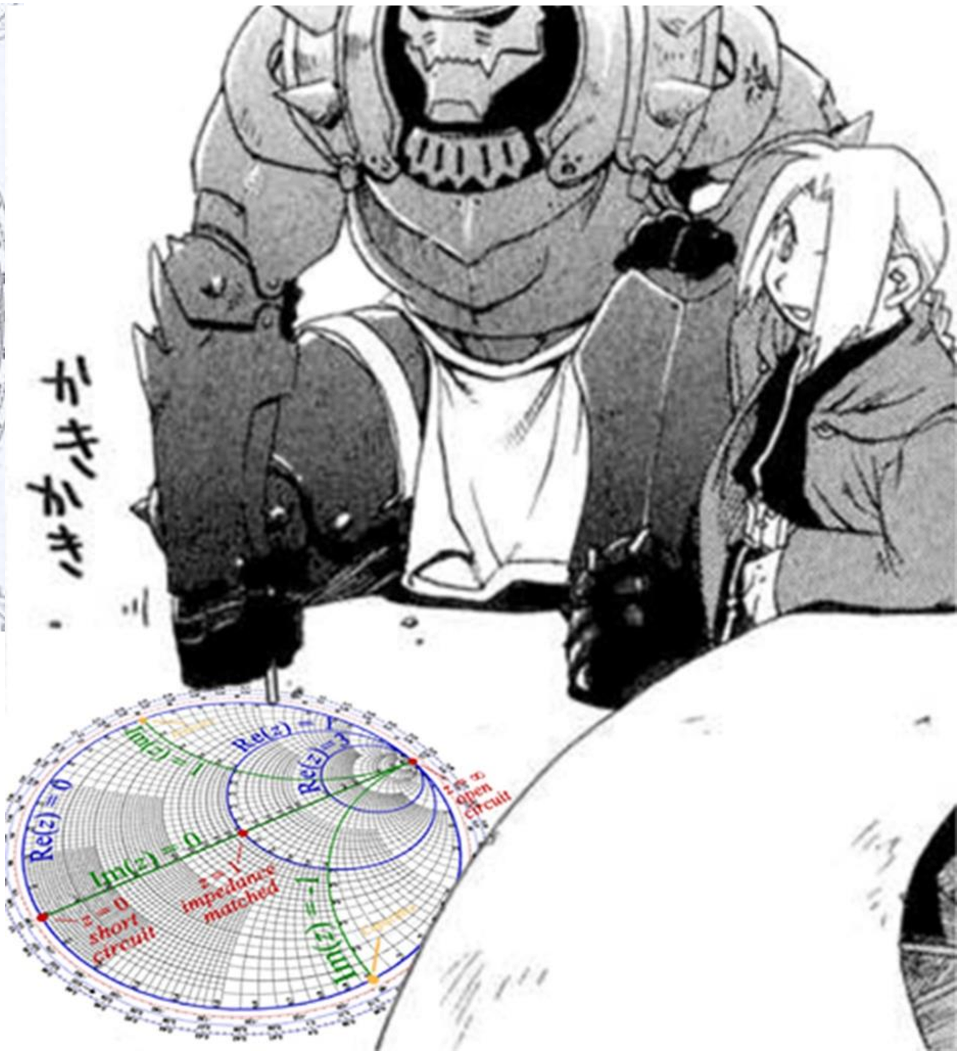


Mandala/Ouija/Círculo de Transmutación







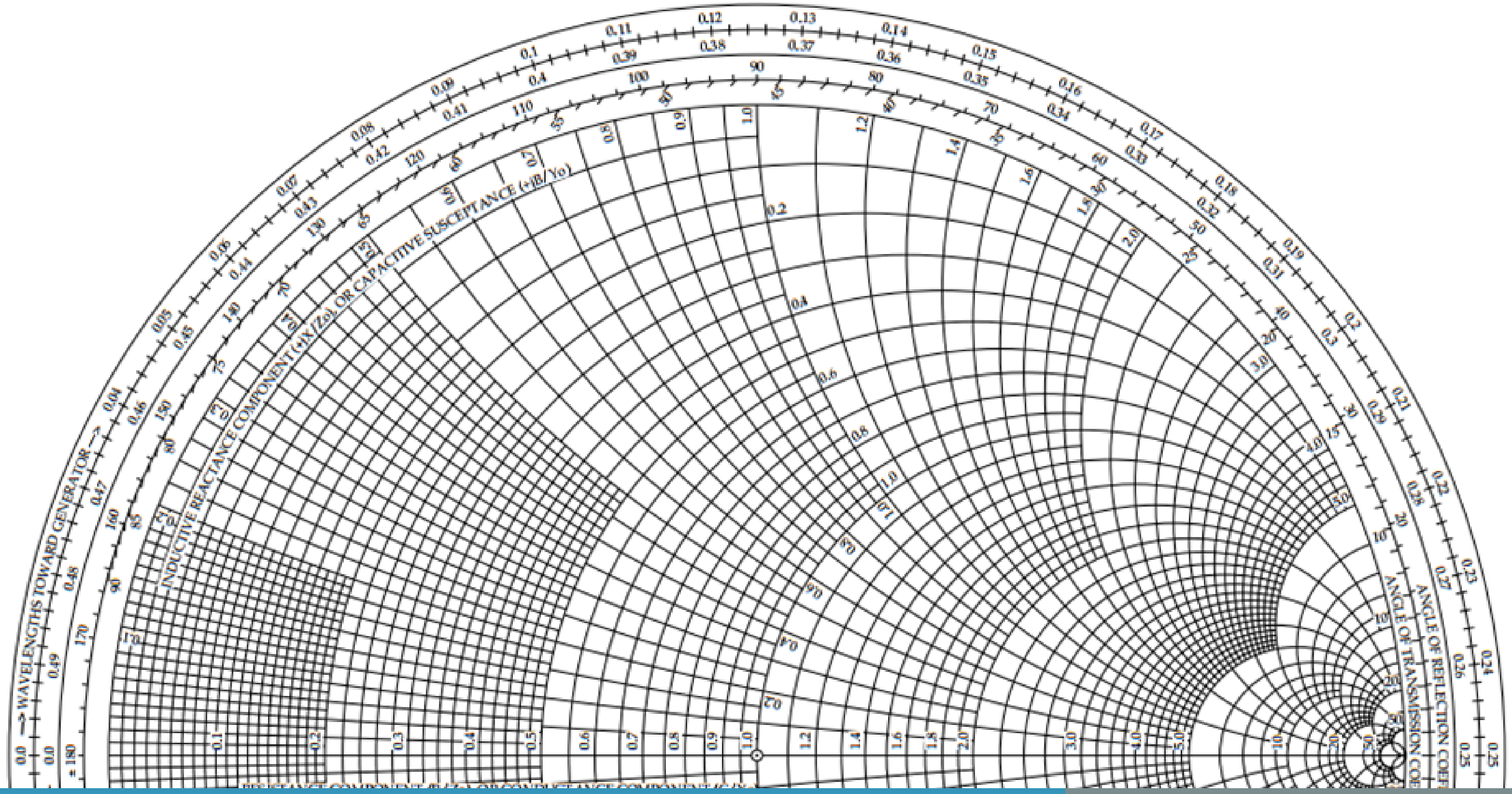


Carta de Smith: Graficando Impedancias

- Los círculos centrados en el eje $\Gamma_r = 0$ nos permiten graficar resistencia.
- Los arcos de círculo centrados en $j\Gamma_i = 1$ nos permiten graficar reactancia.

Ejemplo:

$$z_n = 2 + j1.5$$

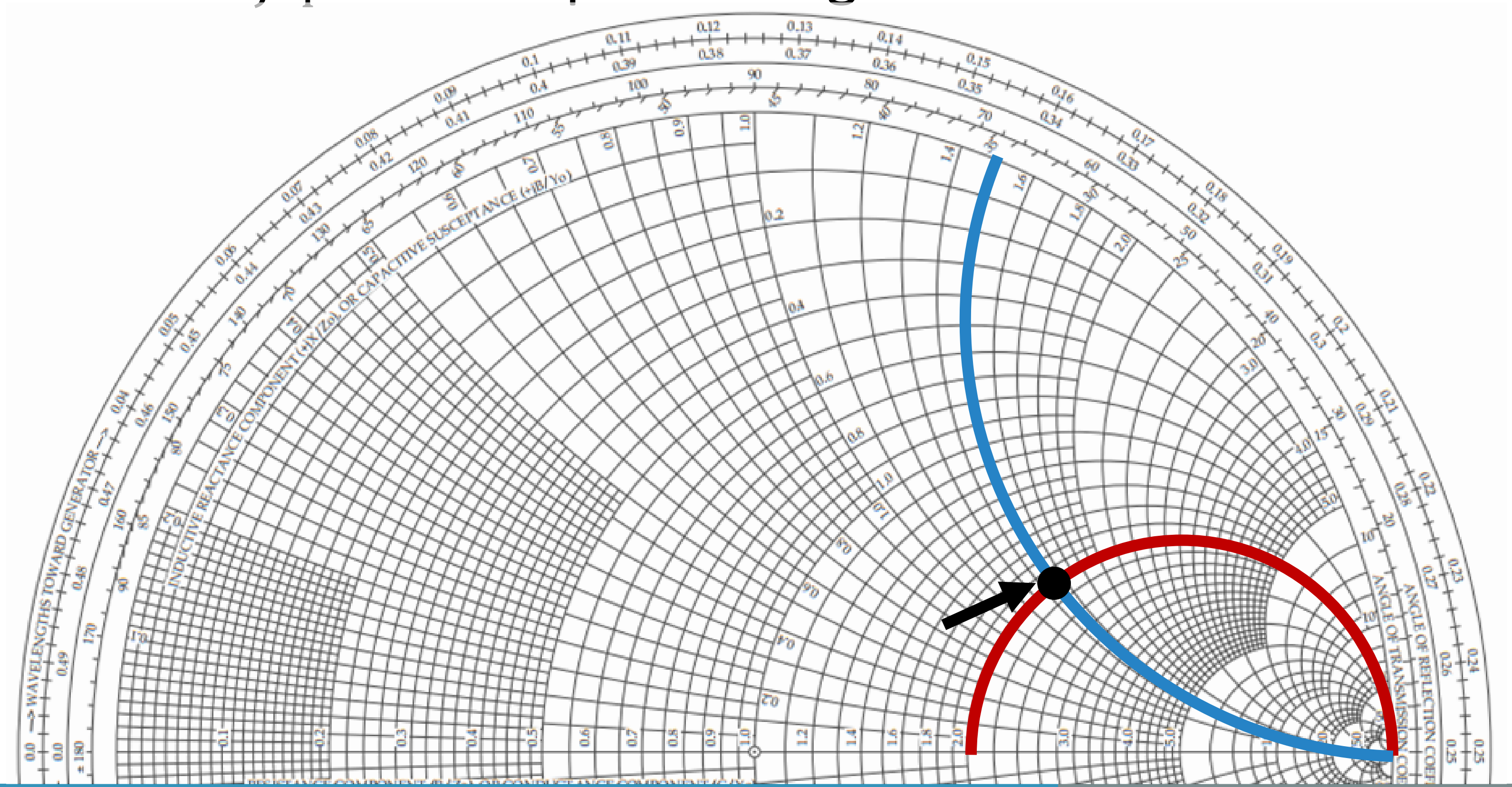


Carta de Smith: Graficando Impedancias

- Los círculos centrados en el eje $\Gamma_r = 0$ nos permiten graficar resistencia.
- Los arcos de círculo centrados en $j\Gamma_i = 1$ nos permiten graficar reactancia.

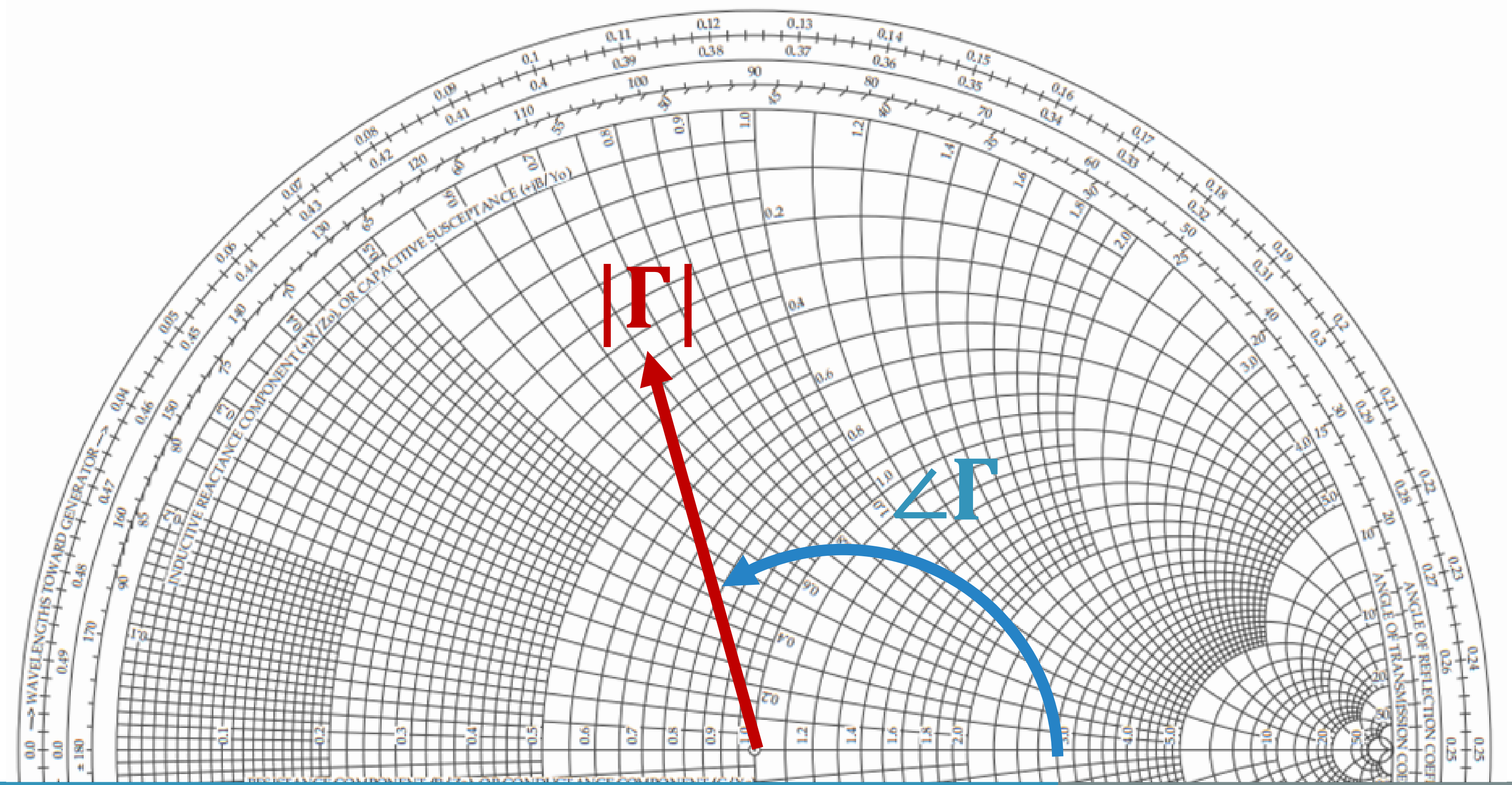
Ejemplo:

$$z_n = 2 + j1.5$$



Carta de Smith: Graficando Impedancias

- Analogamente, podemos graficar polarmente el coeficiente Γ



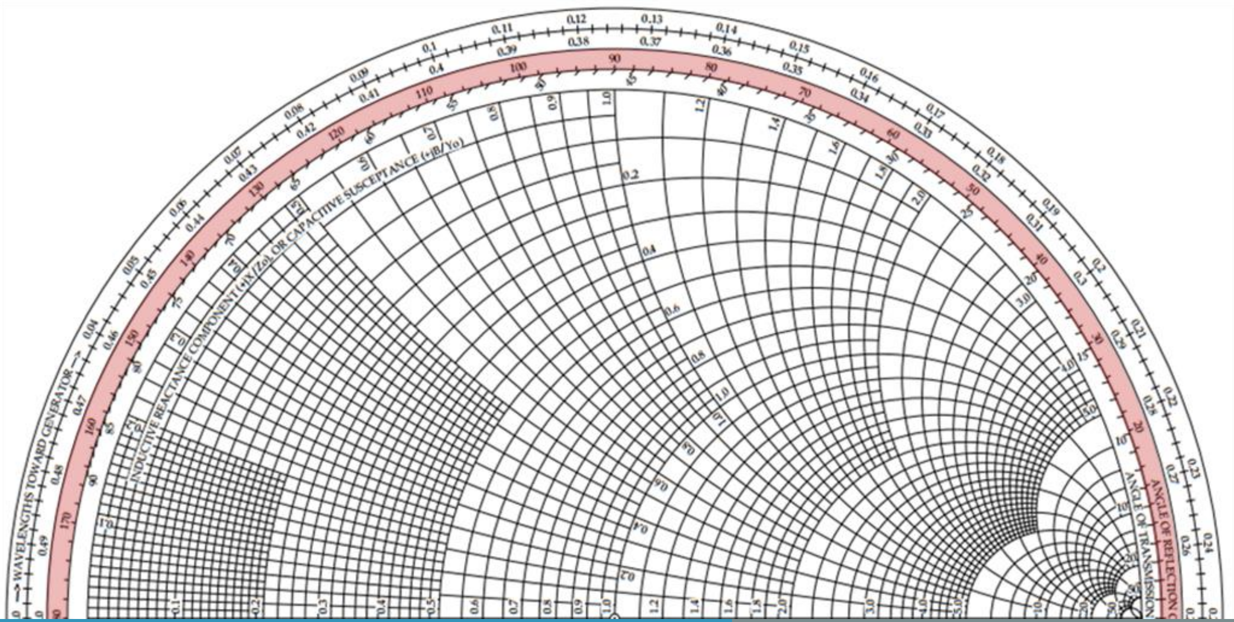
Carta de Smith: Desfase en [°]

- Nos permite agregar desfase en función de nuestra posición en la LT.

- ¿Cómo lo calculamos?

$$\Delta\theta = 2\beta\Delta z = 4\pi\frac{\Delta z}{\lambda_z}$$

$$\boxed{\Delta\theta = 720° \cdot \frac{\Delta z}{\lambda_z}}$$



Carta de Smith: Desfase en [°]

- Nos permite agregar desfase en función de nuestra posición en la LT.

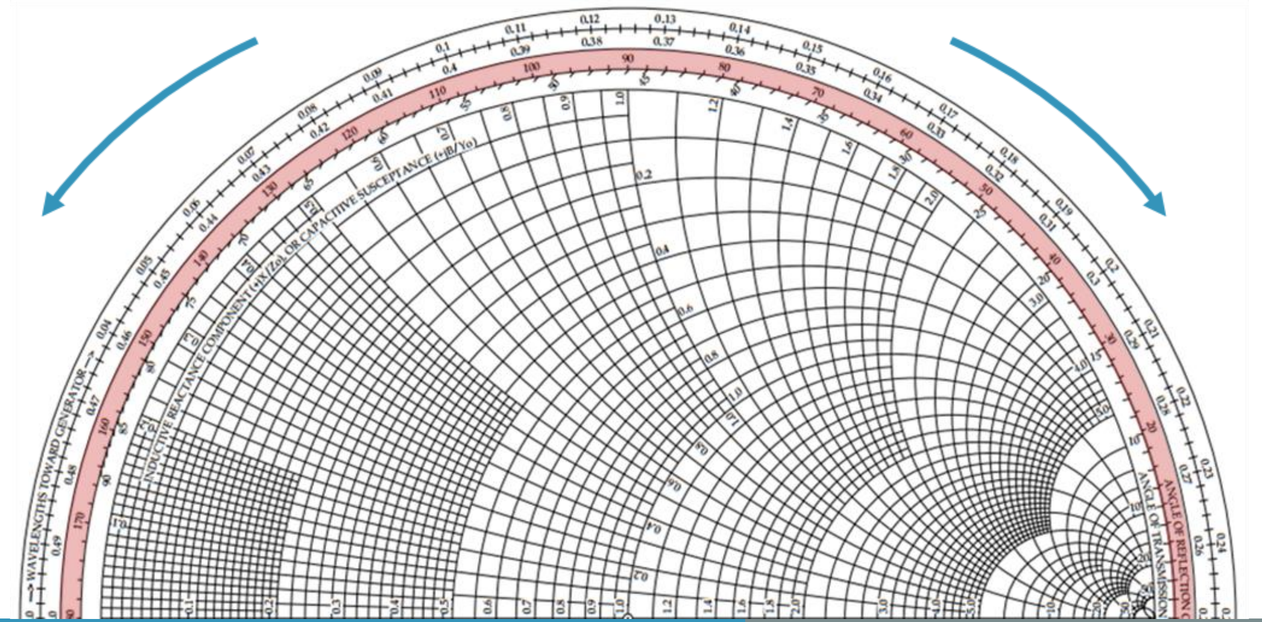
- ¿Cómo lo calculamos?

$$\Delta\theta = 2\beta\Delta z = 4\pi\frac{\Delta z}{\lambda_z}$$

$$\boxed{\Delta\theta = 720° \cdot \frac{\Delta z}{\lambda_z}}$$

$\Delta\theta > 0$
(nos acercamos la carga)

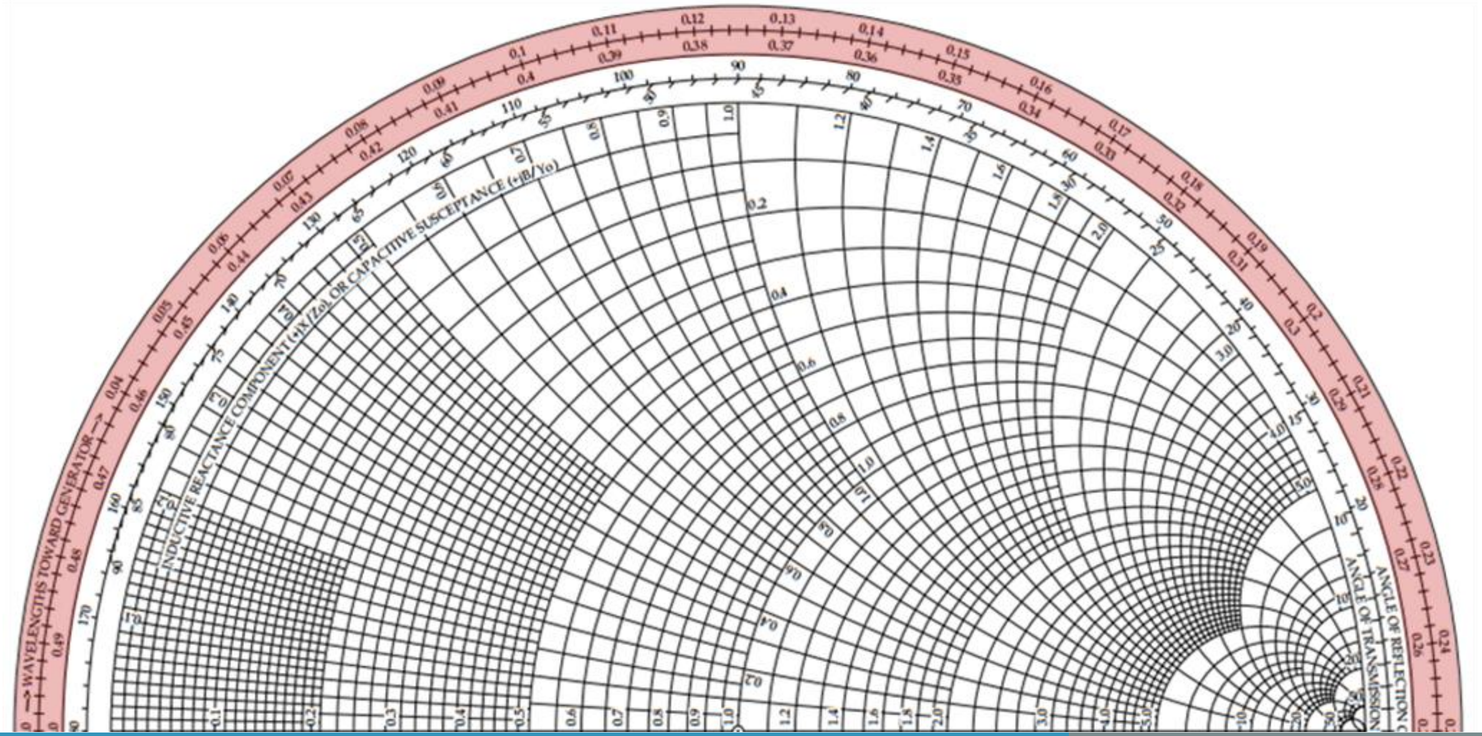
$\Delta\theta < 0$
(nos acercamos al generador)



Carta de Smith: Desfase en $\Delta z/\lambda$

- La carta también cuenta con una guía para expresar el desfase en fracciones de longitud de onda.

- Veamos casos notables



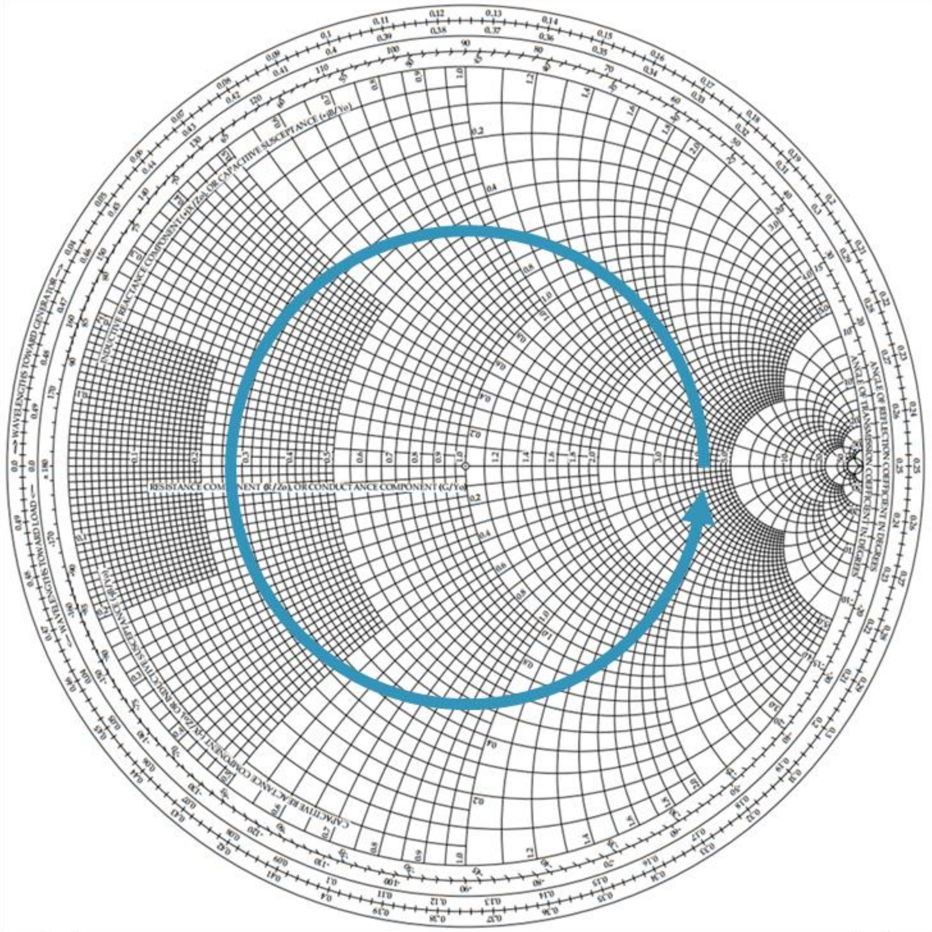
Carta de Smith: Desfase en $\Delta z/\lambda$

- La carga se repite periódicamente, pues equivale a dar una vuelta completa a la Carta de Smith.

- Consistente con el análisis de la clase pasada.

- Podemos replicar la impedancia extendiendo o acortando la línea tantos múltiplos de $\lambda/2$ como queramos.

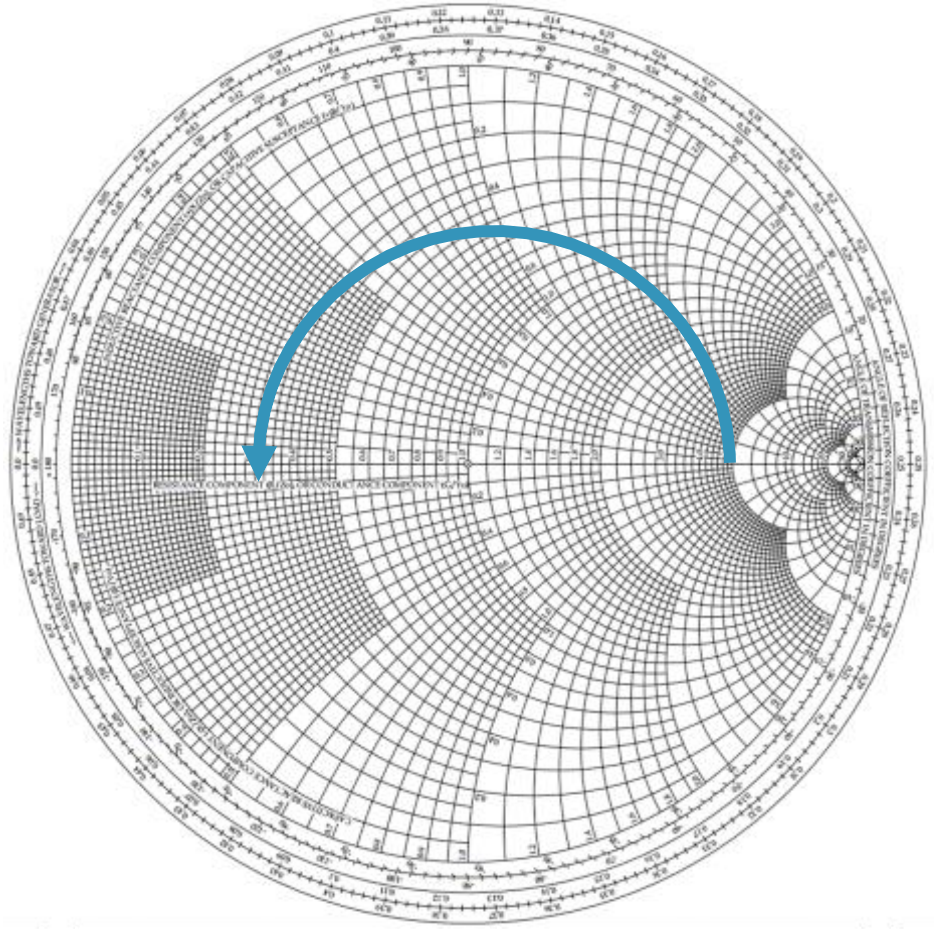
0.5λ



Carta de Smith: Desfase en $\Delta z/\lambda$

- Equivale a media vuelta en la Carta de Smith.
- Consistente con el análisis de la clase pasada.
- Equivale a convertir la impedancia z_n en admitancia $y_n = \frac{1}{z_n}$

0.25λ



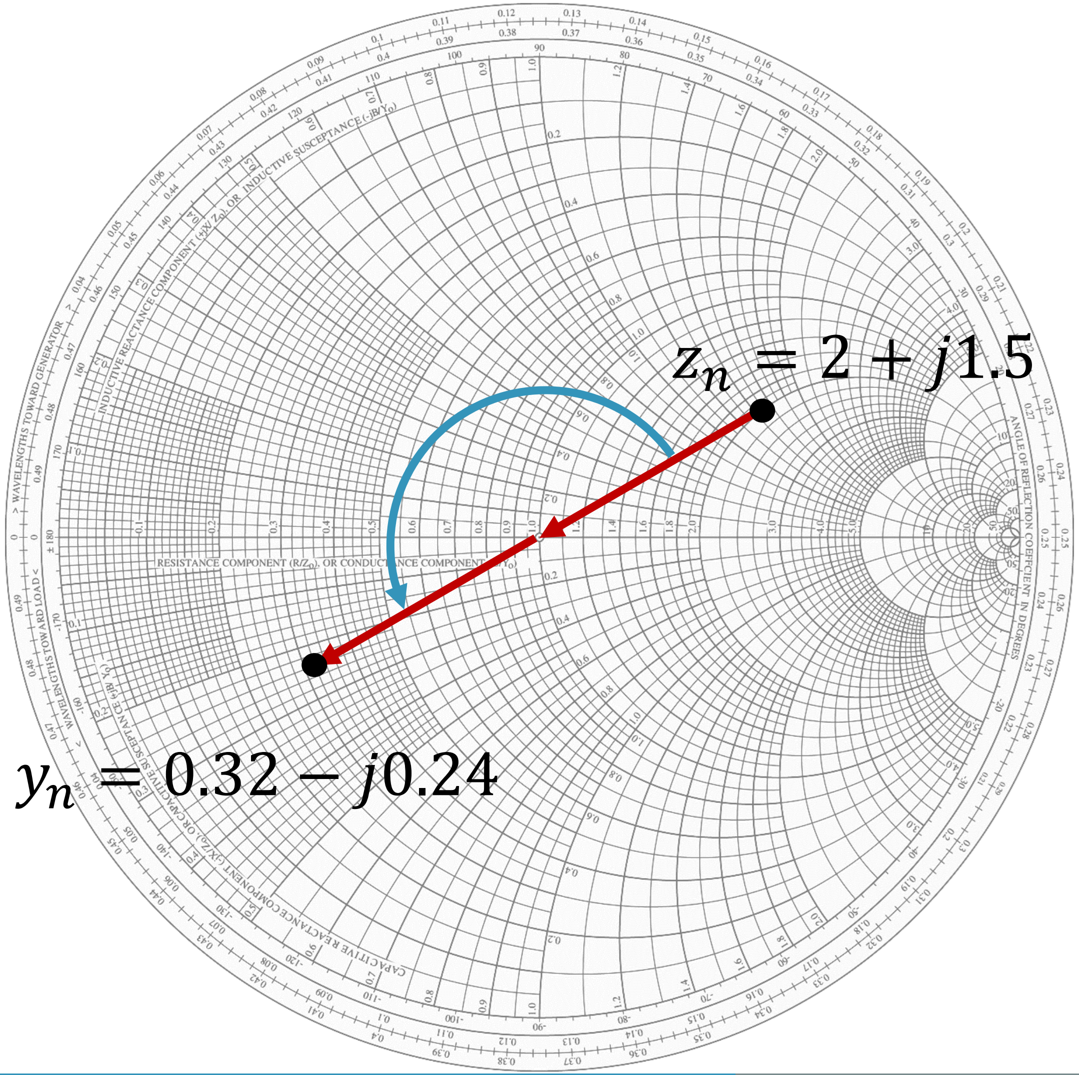
Carta de Smith: Desfase en $\Delta z/\lambda$

$$z_n = 2 + j1.5$$

$$y_n = \frac{1}{2 + j1.5} \cdot \frac{2 - j1.5}{2 - j1.5}$$

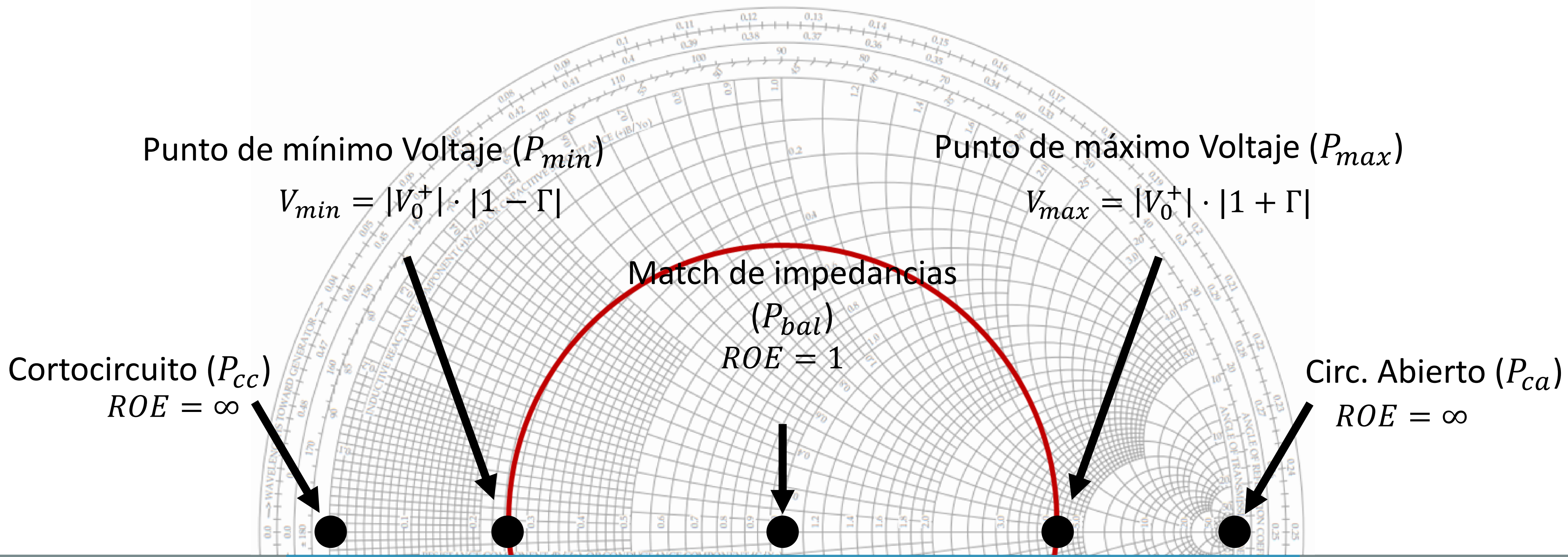
$$y_n = \frac{2 - j1.5}{4 + 2.25} = \frac{2 - j1.5}{6.25}$$

$$y_n = 0.32 - j0.24$$



Carta de Smith: ROE

- Notemos 5 puntos de particular interés, dado un coeficiente de reflexión de magnitud $|\Gamma|$.



Carta de Smith: ROE

- Usemos las definiciones de ROE y Γ en un punto arbitrario de la LT

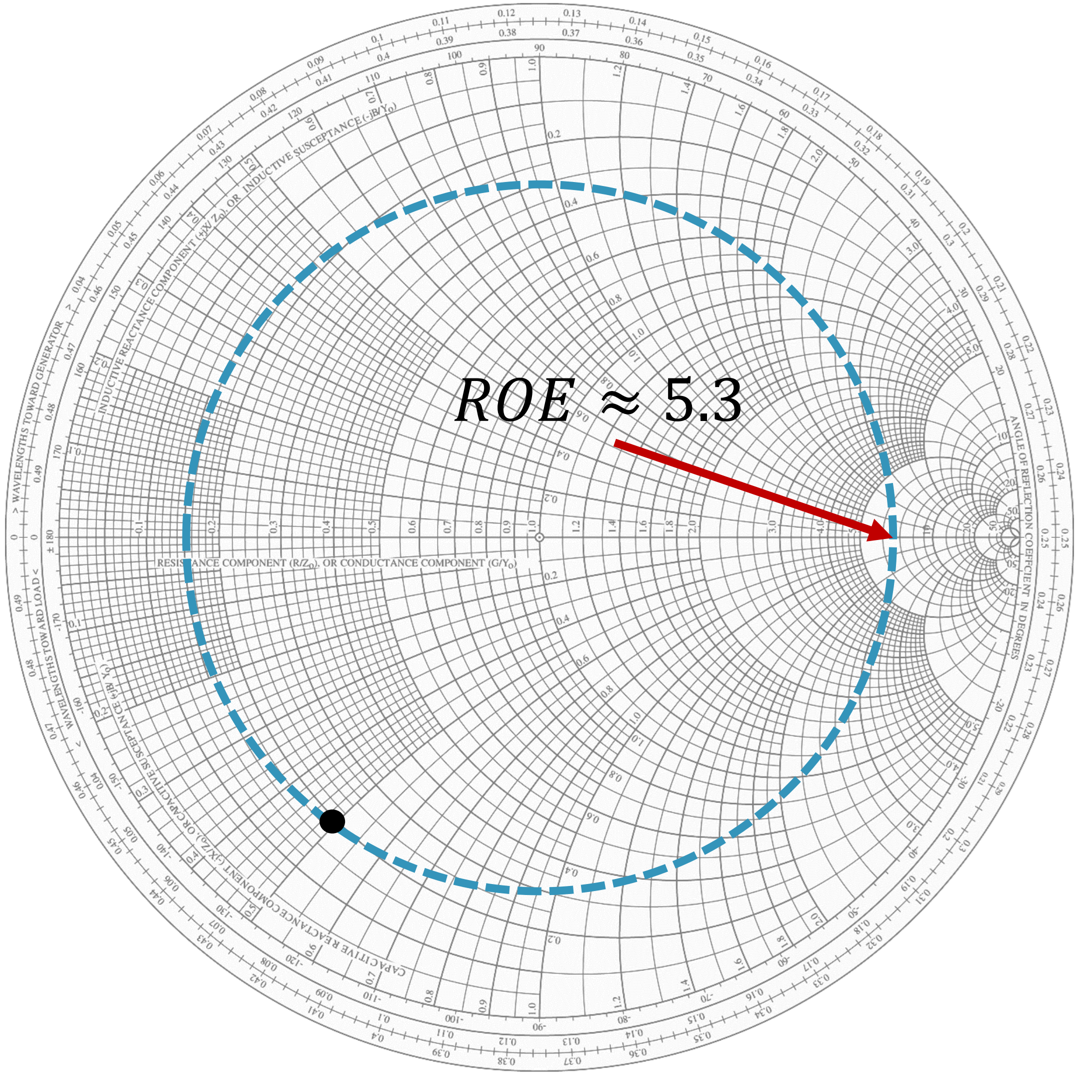
$$ROE(l) = \frac{1 + |\Gamma(l)|}{1 - |\Gamma(l)|} \qquad \Gamma = \frac{z_n(l) - 1}{z_n(l) + 1}$$

- Si nos paramos en P_{max}, notemos que $z_n(l) = r + 0j$
- Dado que además r en P_{max} cumple que $r \geq 1$

$$|\Gamma| = \frac{r-1}{r+1} \qquad ROE(l) = \frac{1 + \frac{r-1}{r+1}}{1 - \frac{r-1}{r+1}} \rightarrow \boxed{ROE(l) = r}$$

Carta de Smith: ROE

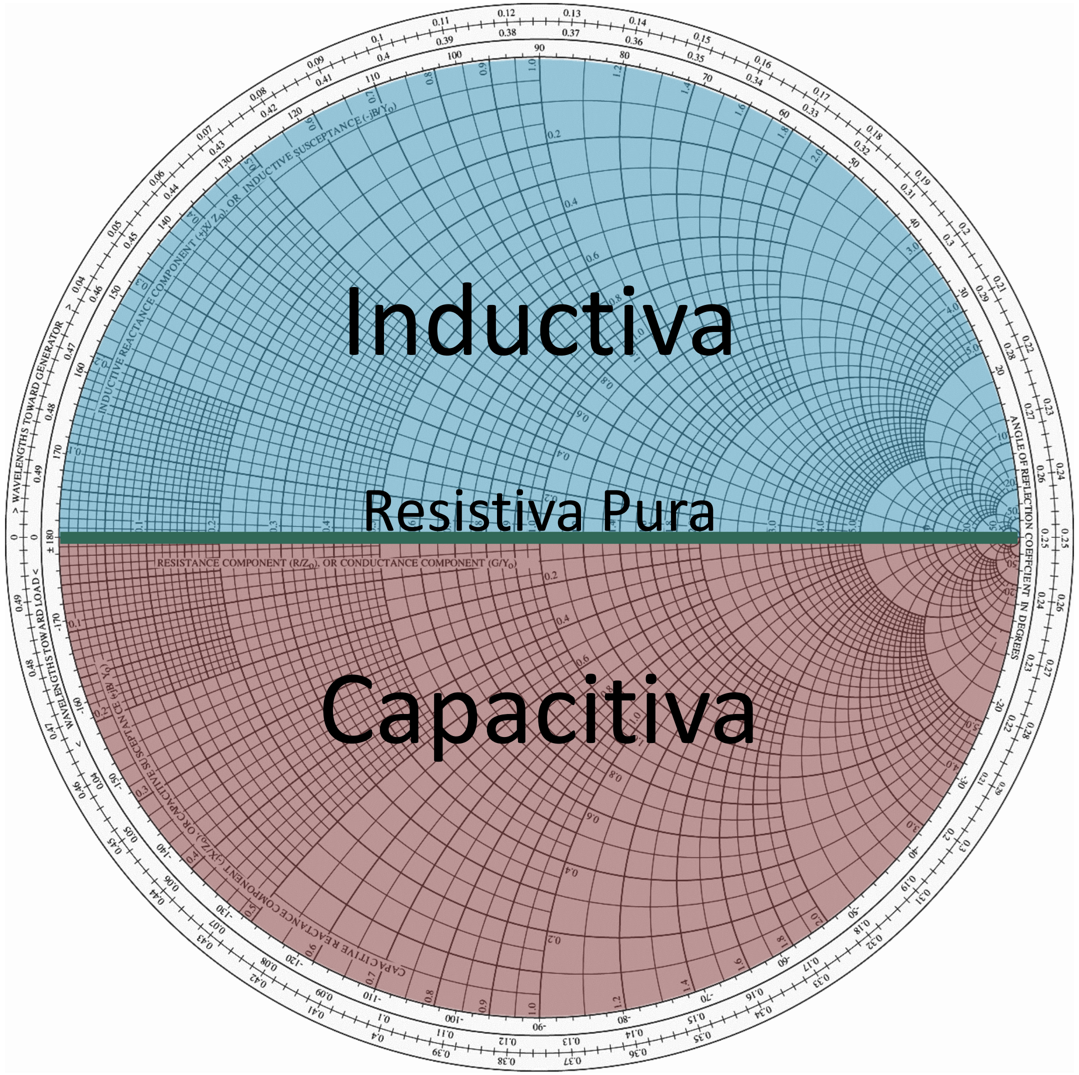
- Es decir que podemos determinar la ROE simplemente encontrando la intersección con el semi-eje $r > 1$



Carta de Smith: Naturaleza de la Impedancia

- Por último, la Carta de Smith también nos permite determinar la naturaleza de la impedancia.

- Esto se hace en base a los valores de reactancia.



Resumen

- Establecimos la deducción completa de la herramienta conocido como carta de Smith.
- Estudiamos los distintos elementos de la carta y el cómo trabajarla.

Cerrando la clase de hoy

- Ya caracterizamos cargas desbalanceadas pero, ¿será posible hacer arreglos para balancearlas y maximizar la potencia transferida?

Próxima Clase:

Ajuste de Impedancias.

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 585 – 591