Clase 15
Incidencia Oblicua en Dieléctricos

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 517 – 528

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- La clase pasada nos centramos en el caso particular de la incidencia normal.
- Dicho caso carece de generalidad, por lo que hoy veremos el caso cuando la incidencia tiene cualquier ángulo arbitrario.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-12:** Determinar las expresiones para ondas eléctricas y magnéticas en casos de incidencia normal y oblicua entre dos o más medios.

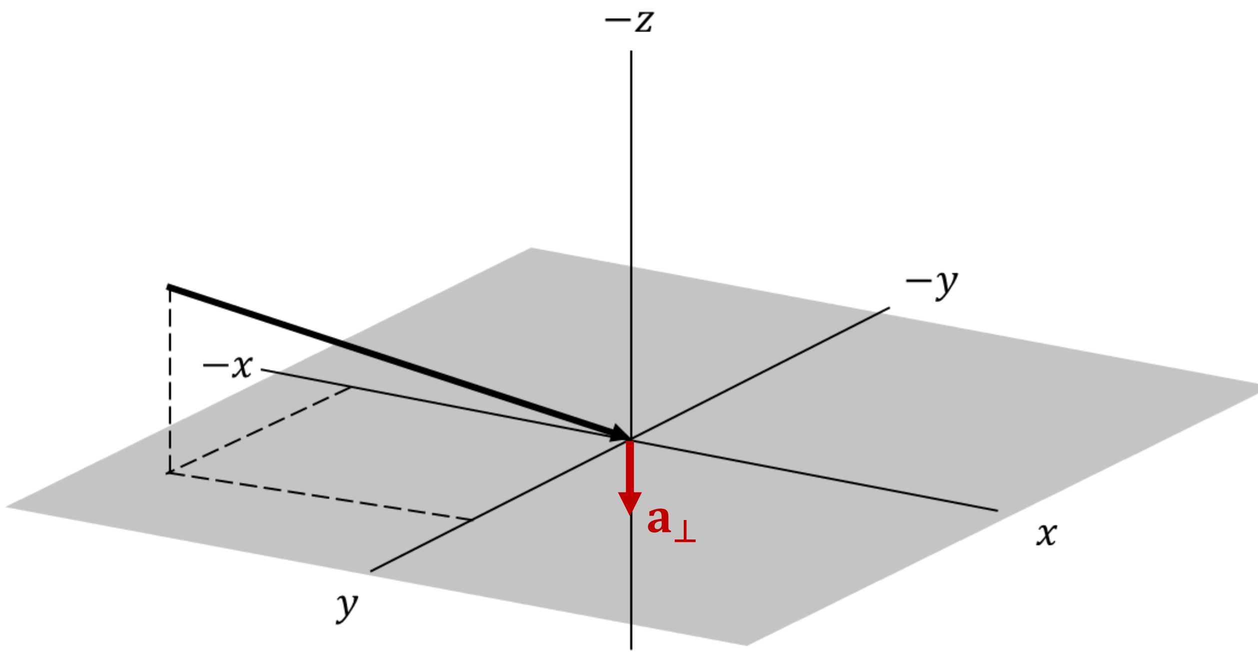
Contenidos

- Incidencia Oblicua
- Ley de Snell
- Polarización Paralela
- Polarización Perpendicular
- Ecuaciones de Fresnel
- Reflexión Interna Total

Incidencia Oblicua

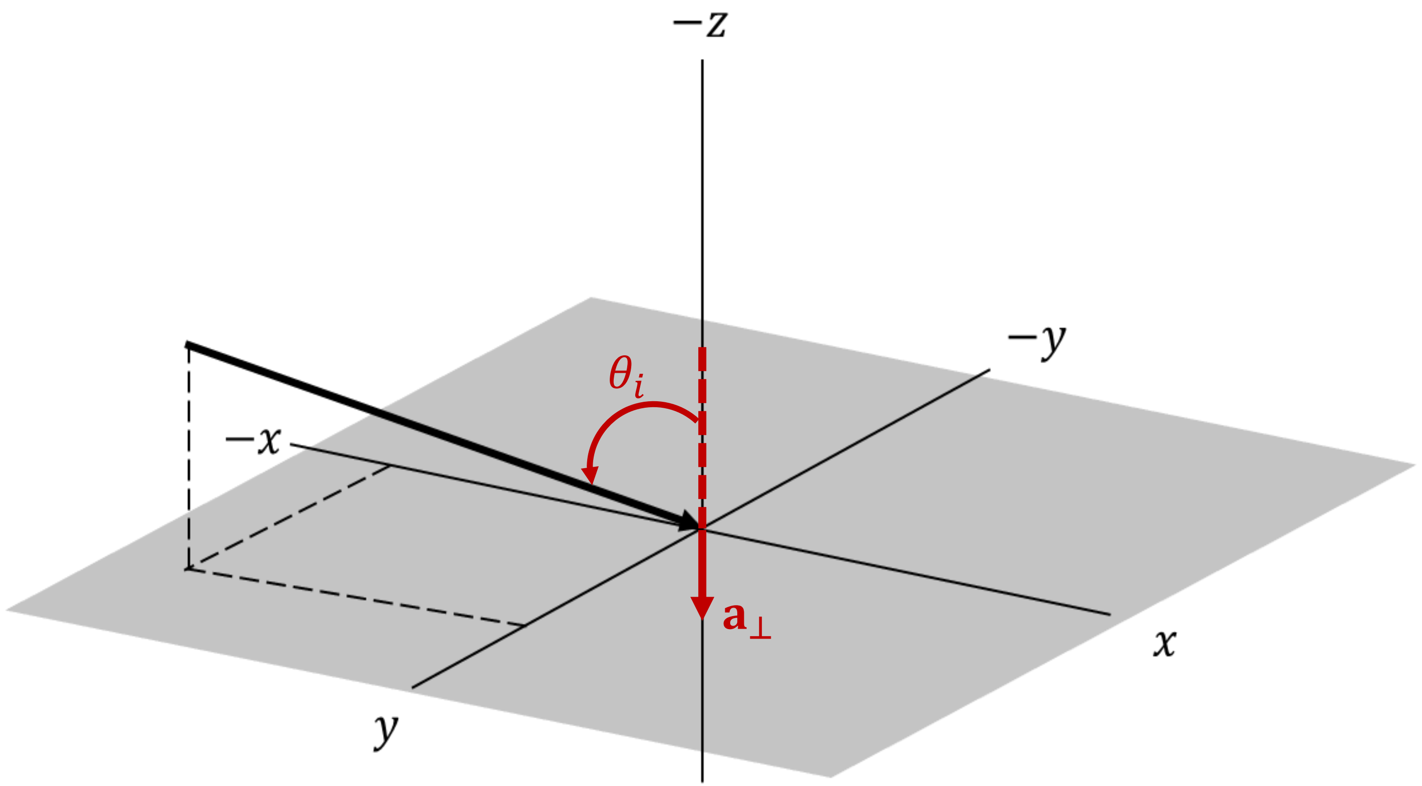
- Consideremos ahora el caso general de una onda que se propaga en una dirección arbitraria:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\ \mathbf{a}_{\mathrm{k}}$$



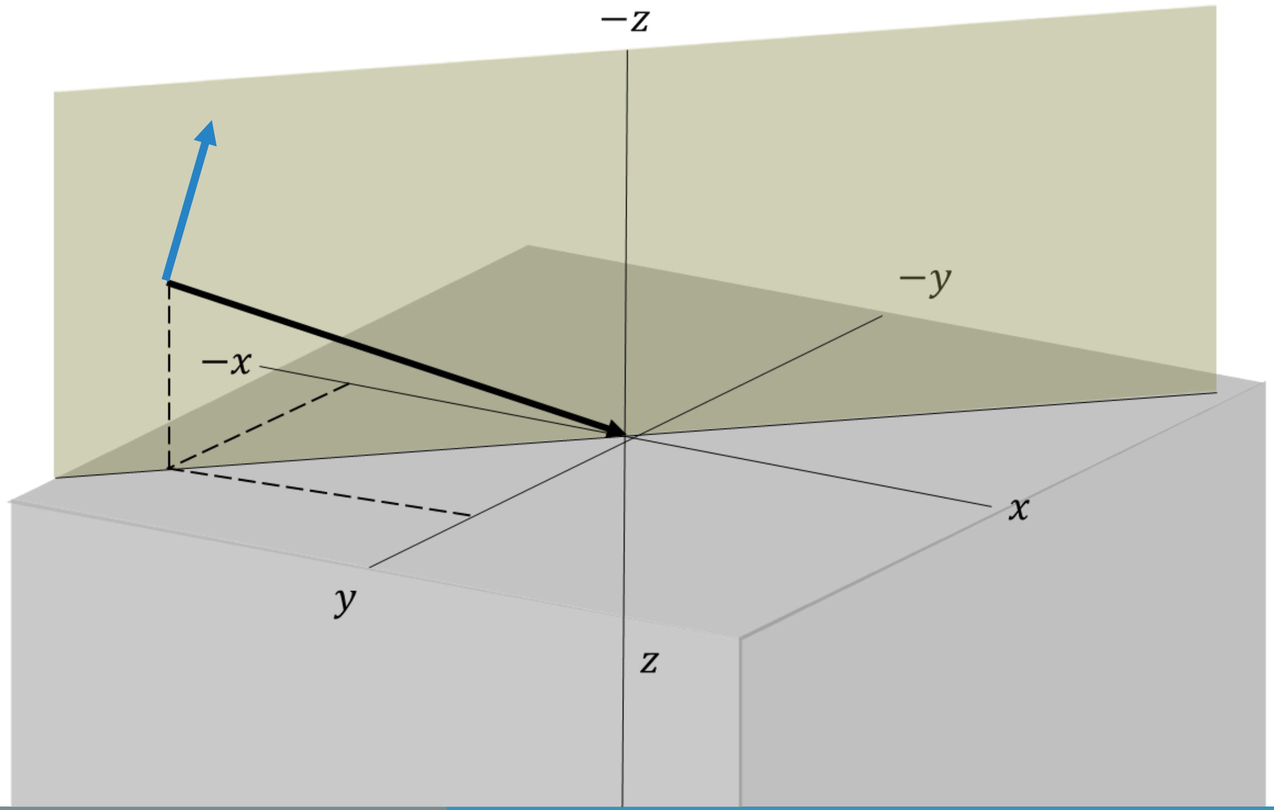
Incidencia Oblicua

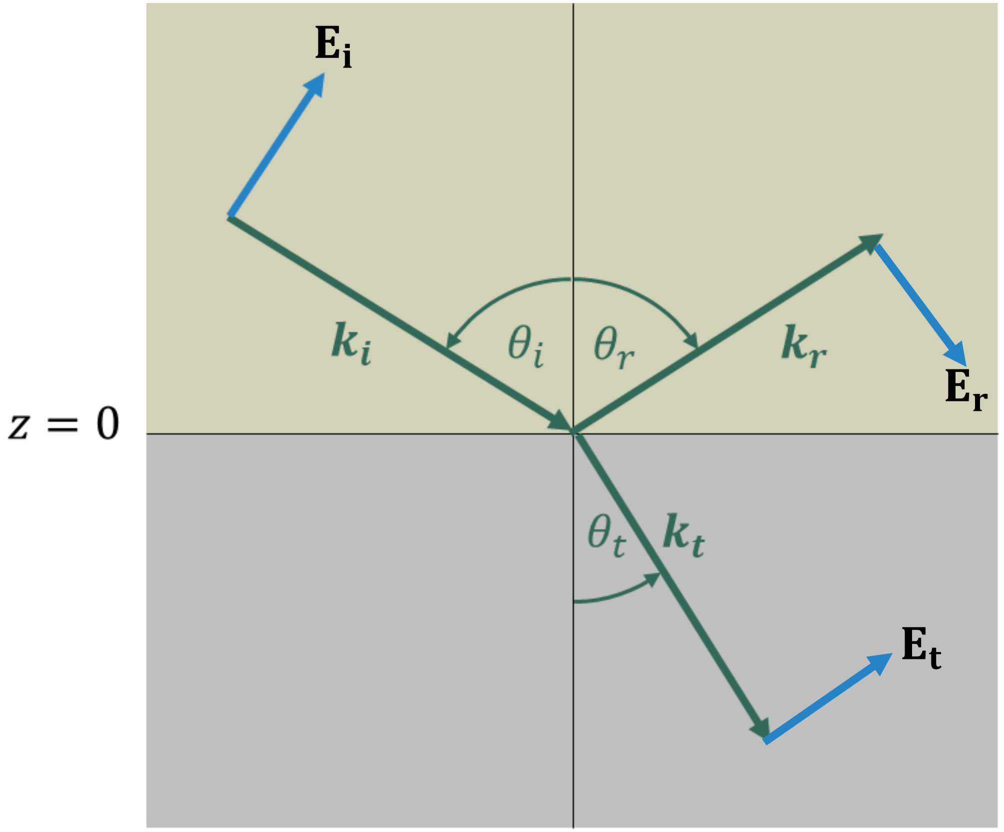
- El ángulo formado por $\mathbf{a}_k$ y $\mathbf{a}_\perp$ se conoce como **ángulo de incidencia**.



Ley de Snell

- Tomemos el plano oblicuo que contiene al campo $\mathbf{E}$ y al vector k_i.





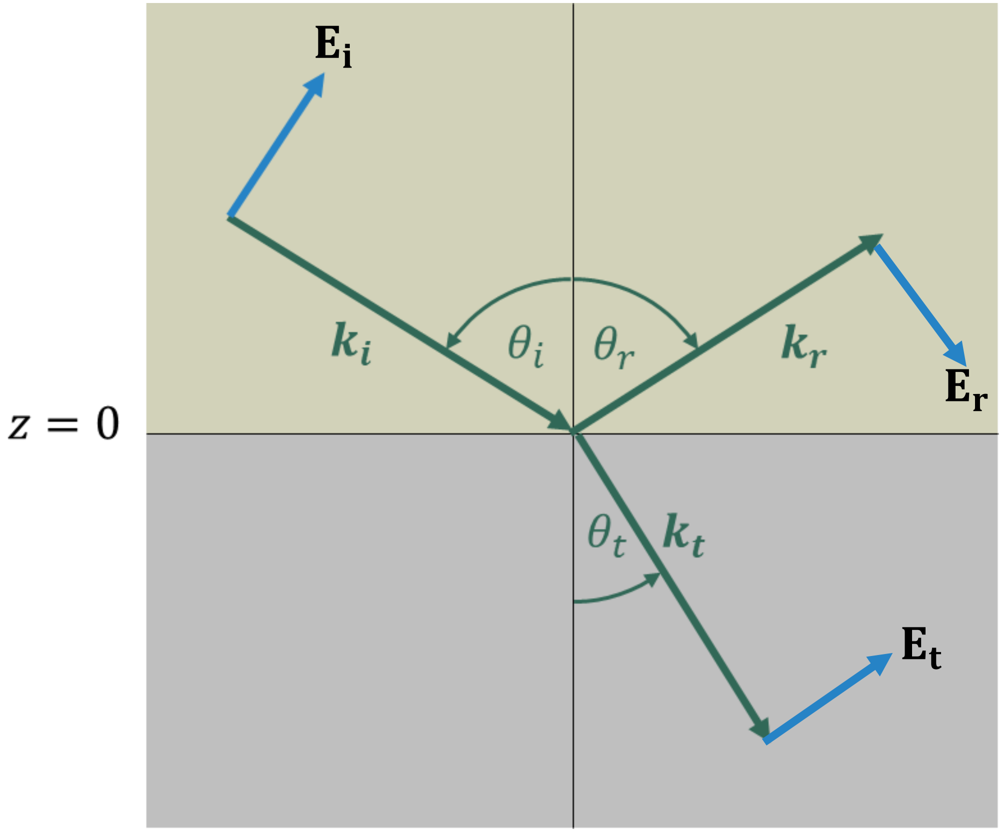
Ley de Snell

- Las ecuaciones para los 3 campos eléctrico involucrados son.

$$\mathbf{E}_i = \boldsymbol{E}_{0i}\cos(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}_r = \boldsymbol{E}_{0r}\cos(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}_t = \boldsymbol{E}_{0t}\cos(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})$$



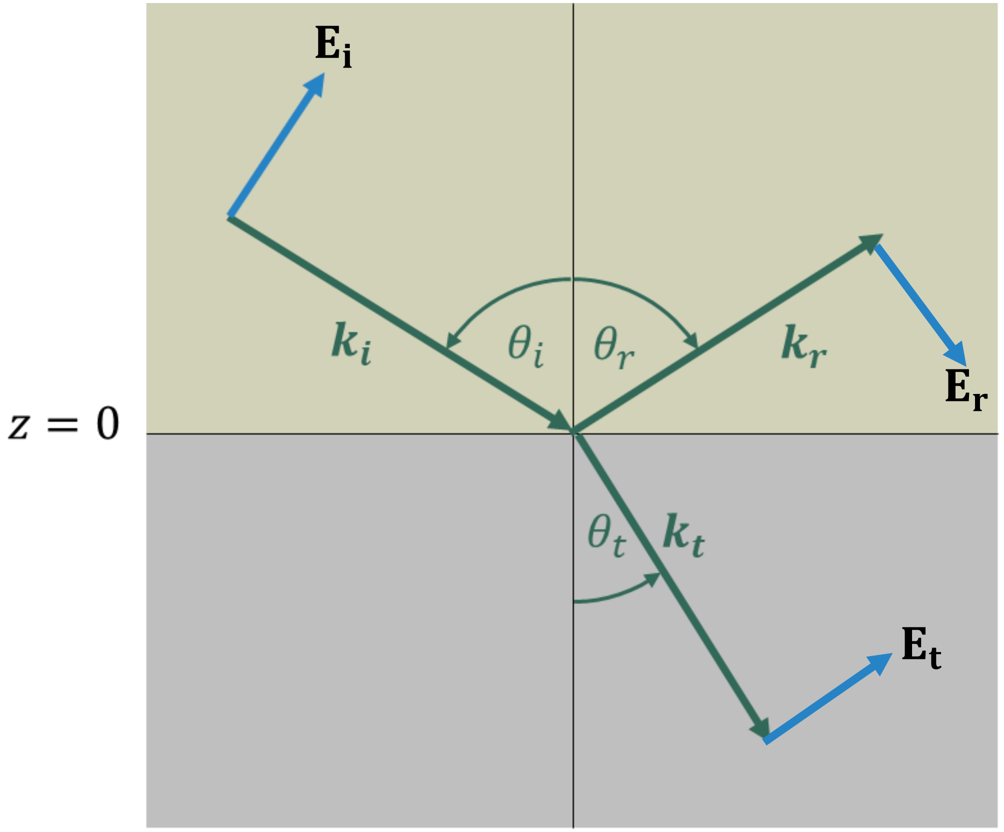
Ley de Snell

- Si evaluamos en la interfase.

$$\mathbf{E}_i = \boldsymbol{E}_{0i}\cos\left(\omega_i t - k_{ix}x - k_{iy}y\right)$$

$$\mathbf{E}_r = \boldsymbol{E}_{0r}\cos\left(\omega_r t - k_{ix}x - k_{iy}y\right)$$

$$\mathbf{E}_t = \boldsymbol{E}_{0t}\cos\left(\omega_t t - k_{ix}x - k_{iy}y\right)$$



Ley de Snell

- Si aplicamos las mismas condiciones de borde de la clase pasada:

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} = \mathbf{E}_2^{\parallel} \qquad\qquad \mathbf{H}_1^{\parallel} = \mathbf{H}_2^{\parallel}$$

$$\boldsymbol{E}_{0i}\cos\left(\omega_i t - k_{ix}x - k_{iy}y\right) + \boldsymbol{E}_{0r}\cos\left(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y\right) = \boldsymbol{E}_{0t}\cos\left(\omega_t t - k_{tx}x - k_{ty}y\right)$$

- Esto fuerza a que:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$$

$$\left.\begin{array}{l} k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x \\ k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y \end{array}\right\} \quad k_i^{\parallel} = k_r^{\parallel} = k_t^{\parallel} = k^{\parallel}$$

Ley de Snell

- Sea

$$k_i = \beta_1 = \sqrt{k_{ix}^2 + k_{iy}^2 + k_{iz}^2}$$

$$k_r = \beta_1 = \sqrt{k_{rx}^2 + k_{ry}^2 + k_{iz}^2}$$

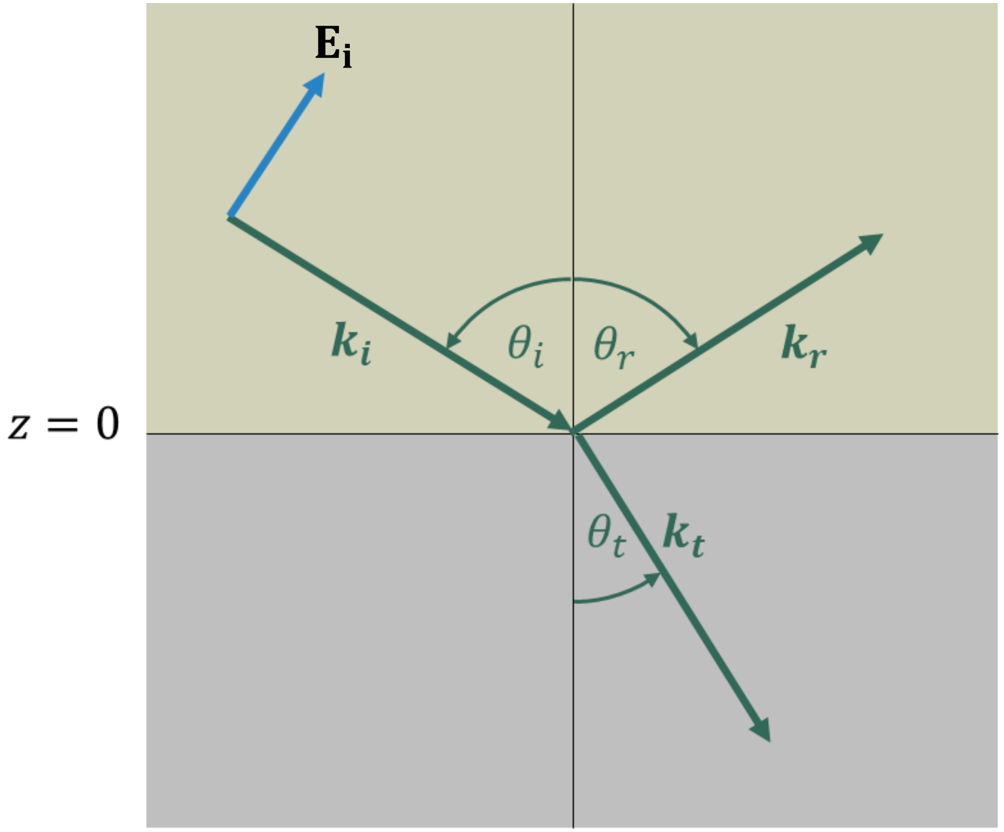
$$k_t = \beta_2 = \sqrt{k_{tx}^2 + k_{ty}^2 + k_{iz}^2}$$

- Entonces

$$k_i^{\parallel} = \beta_1 \sin\theta_i = \sqrt{k_{ix}^2 + k_{iy}^2}$$

$$k_r^{\parallel} = \beta_1 \sin\theta_r = \sqrt{k_{rx}^2 + k_{ry}^2}$$

$$k_t^{\parallel} = \beta_2 \sin\theta_t = \sqrt{k_{tx}^2 + k_{ty}^2}$$



Ley de Snell

- Imponiendo la condición: $k_i^{\parallel} = k_r^{\parallel} = k_t^{\parallel}$

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_1 \sin\theta_r = \beta_2 \sin\theta_t$$

- Separando la ecuación anterior en dos relaciones en función de la onda incidente, tenemos la formulación clásica de la **Ley de Snell**:

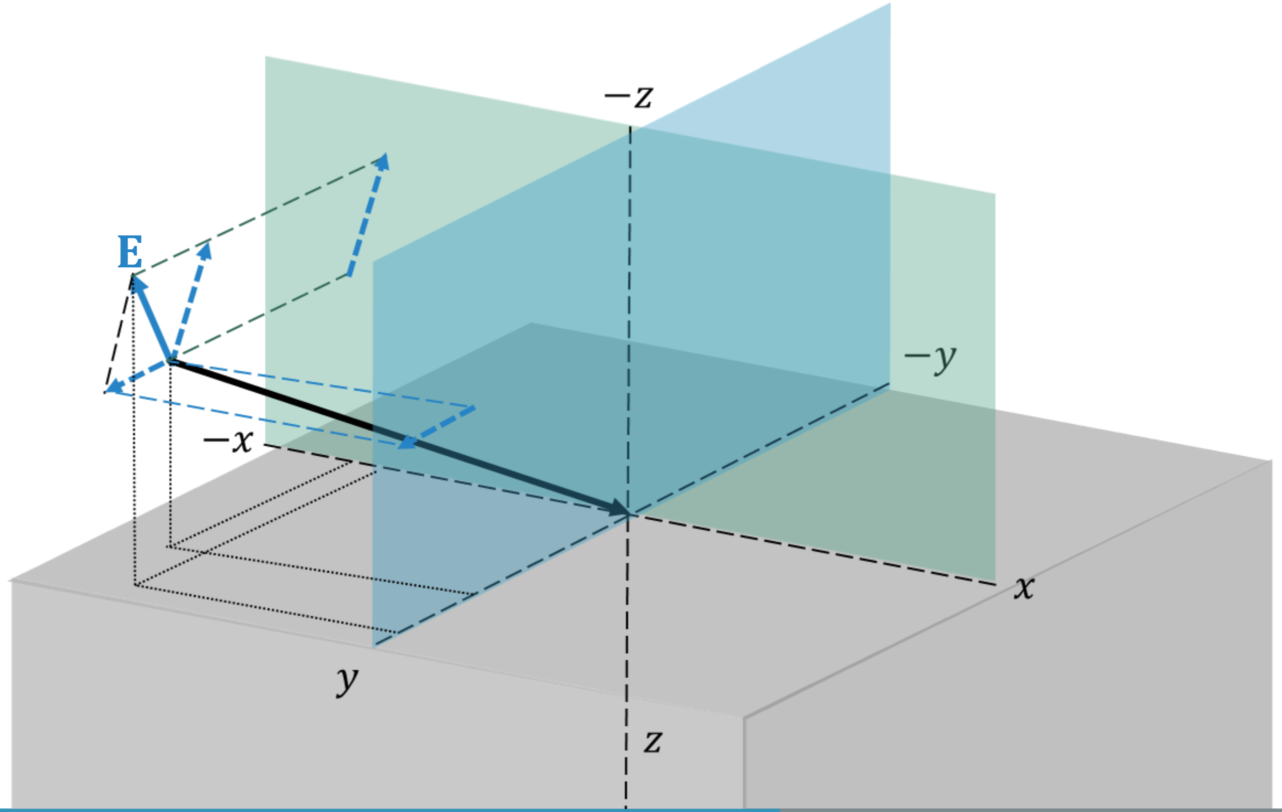
$$\boxed{\theta_i = \theta_r} \qquad \boxed{\beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t}$$

Reflexión y Transmisión en Incidencia Oblicua

- Por conveniencia, vamos a separar la onda en dos componentes:

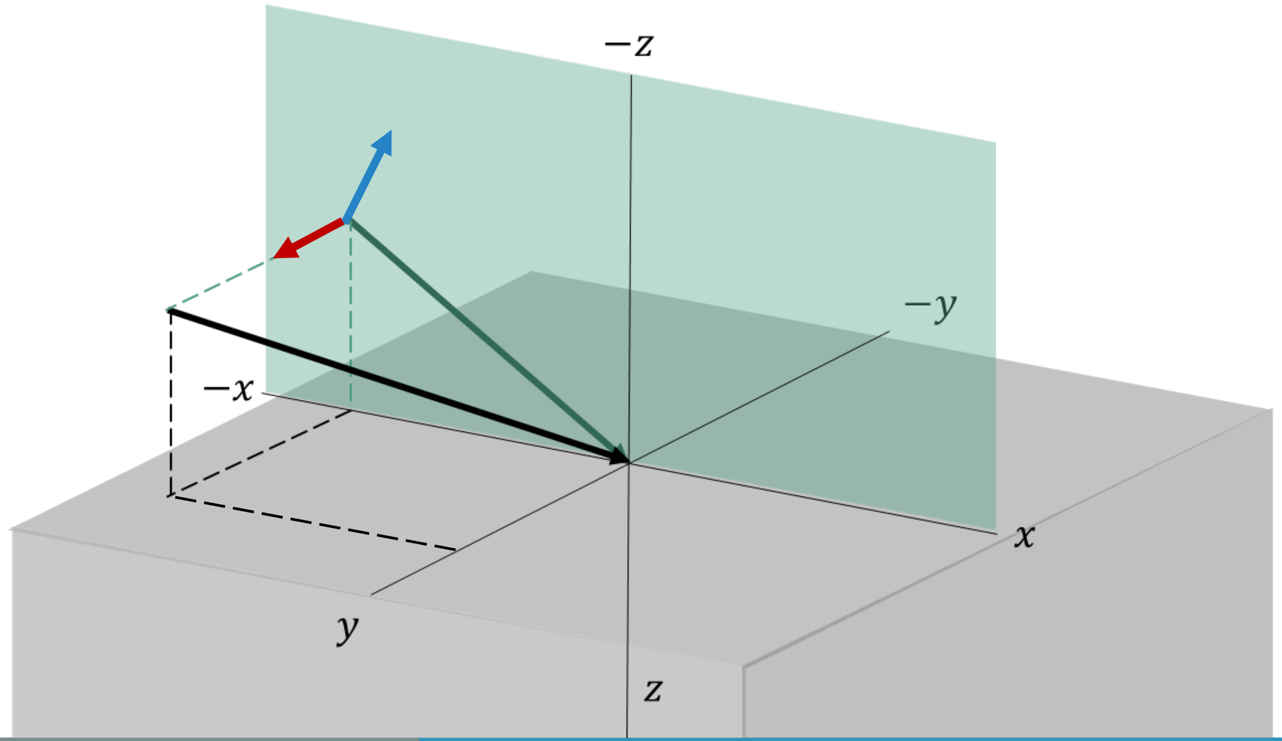
- Una con la componente eléctrica paralela al plano xz (polarización paralela).

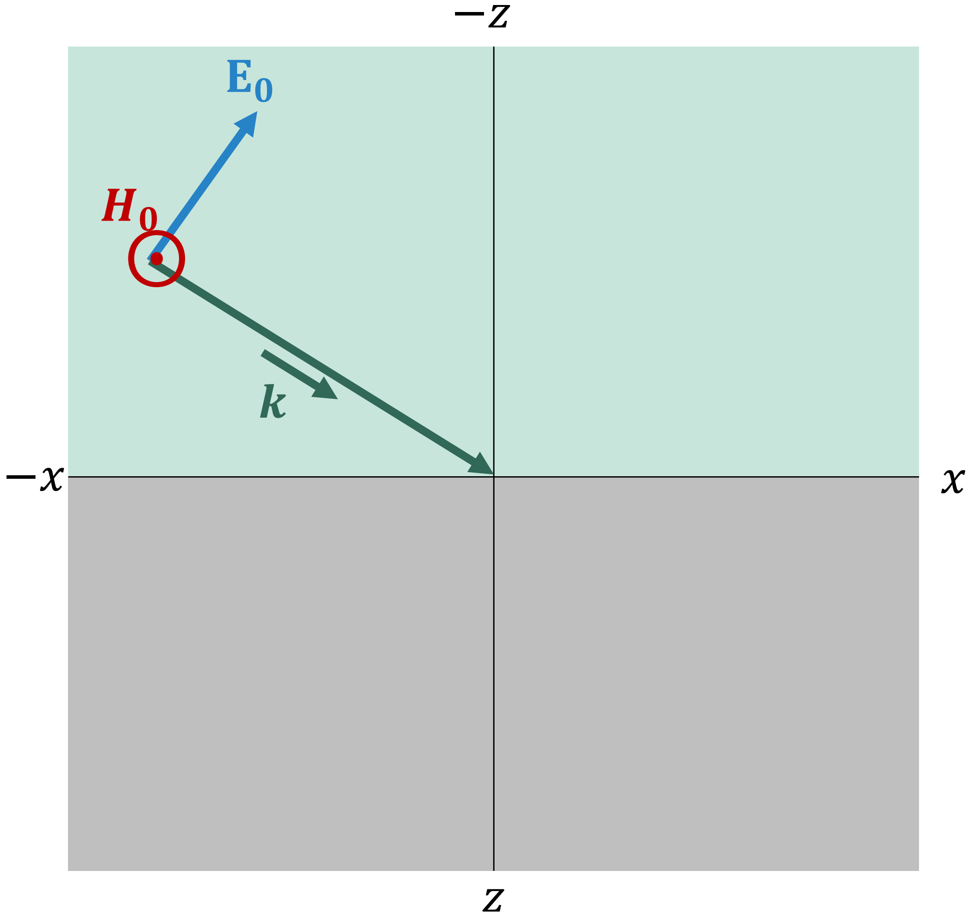
- Una con la componente eléctrica perpendicular al plano xz (polarización perpendicular).



Polarización Paralela

- En este caso, el vector de campo eléctrico yace en el plano xz.





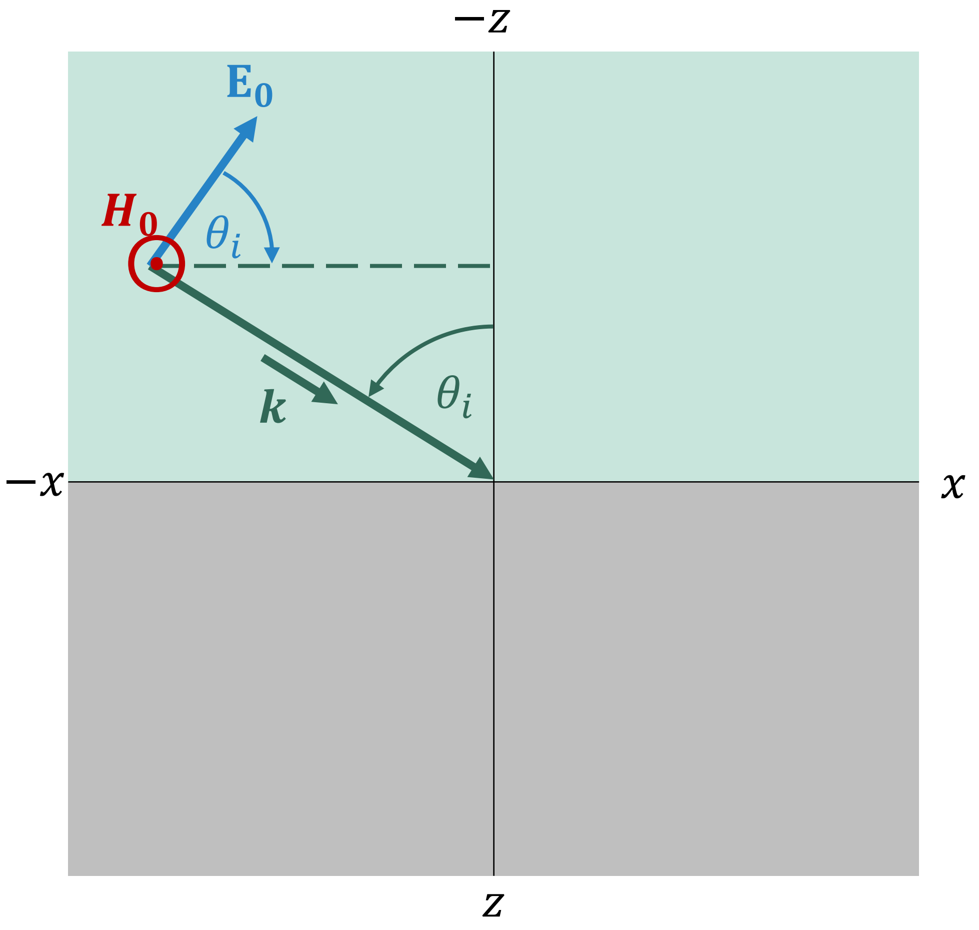
Polarización Paralela

- Los campos incidentes serán:

$$\mathbf{E_i} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E_i} = E_0(\cos\theta_i \;\; \mathbf{a}_x - \sin\theta_i \;\; \mathbf{a}_z)e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_i + z\,\cos\theta_i)}$$

$$\mathbf{H_i} = \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_i + z\,\cos\theta_i)} \; \mathbf{a}_y$$



Polarización Paralela

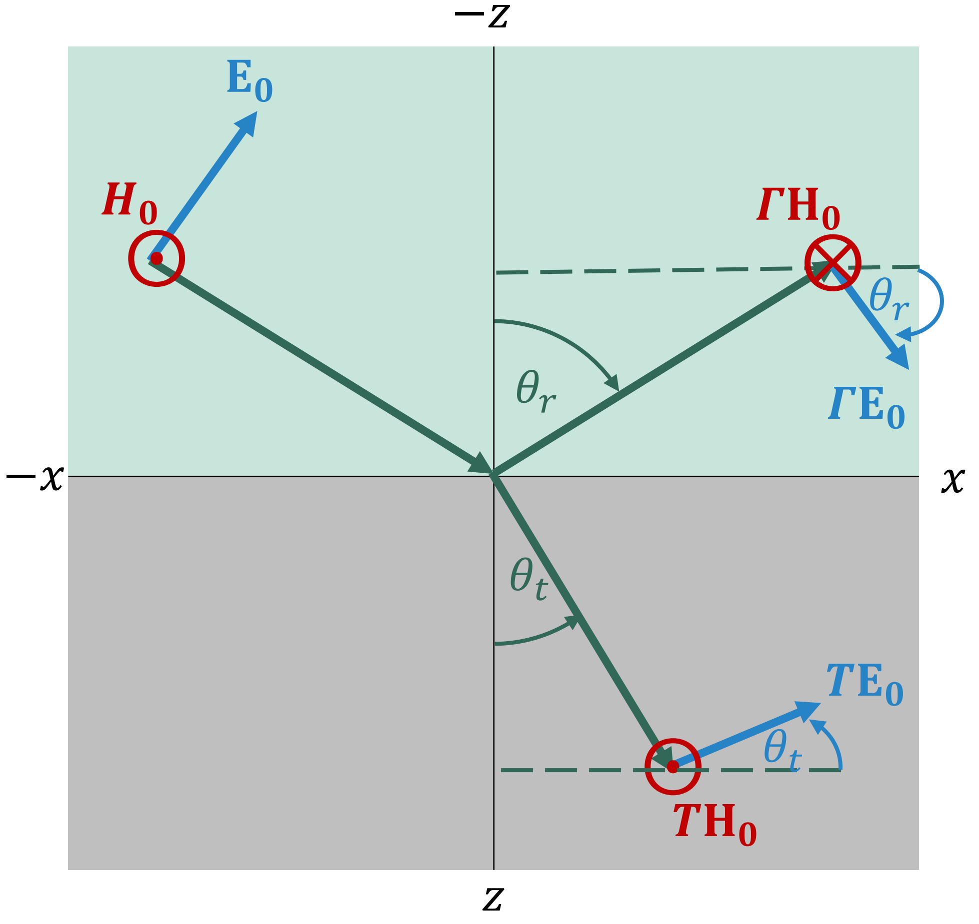
- Analicemos la onda reflejada y la transmitida:

$$\mathbf{E_r} = \Gamma E_0(\cos\theta_r \ \ \mathbf{a}_x + \sin\theta_r \ \ \mathbf{a}_z)e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_r\, -\, z\,\cos\theta_r)}$$

$$\mathbf{H_r} = -\frac{\Gamma E_0}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_r\, -\, z\,\cos\theta_r)}\ \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{E_t} = T E_0(\cos\theta_t \ \ \mathbf{a}_x - \sin\theta_t \ \ \mathbf{a}_z)e^{-j\beta_2(x\,\sin\theta_t\, +\, z\,\cos\theta_t)}$$

$$\mathbf{H_t} = \frac{T E_0}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x\,\sin\theta_t\, +\, z\,\cos\theta_t)}\ \mathbf{a}_y$$



Polarización Paralela

- Forzando continuidad entre las componentes tangenciales ($\mathbf{a}_x$):

$$\cos\theta_i \; e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} + \Gamma\cos\theta_r \; e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_r} = T\cos\theta_t \; e^{-j\beta_2 x\,\sin\theta_t}$$

$$\frac{1}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_r} = \frac{T}{\eta_2} e^{-j\beta_2 x\,\sin\theta_t}$$

- Aplicando ley de Snell:

$$\cos\theta_i \; e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} + \Gamma\cos\theta_i \; e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} = T\cos\theta_t \; e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i}$$

$$\frac{1}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} = \frac{T}{\eta_2} e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i}$$

Polarización Paralela

- Simplificamos y despejamos

$$\cos\theta_i + \Gamma\cos\theta_i = T\cos\theta_t$$

$$\frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2}$$

$$\frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{\cos\theta_i + \Gamma\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t}$$

$$\frac{1}{\eta_1} - \frac{T\cos\theta_t - \cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i} = \frac{T}{\eta_2}$$

$$\left(1 + \frac{\eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t}\right)\Gamma = 1 - \frac{\eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t}$$

$$\left(1 + \frac{\eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i}\right)T = \frac{2\eta_2}{\eta_1}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i}}$$

Polarización Paralela

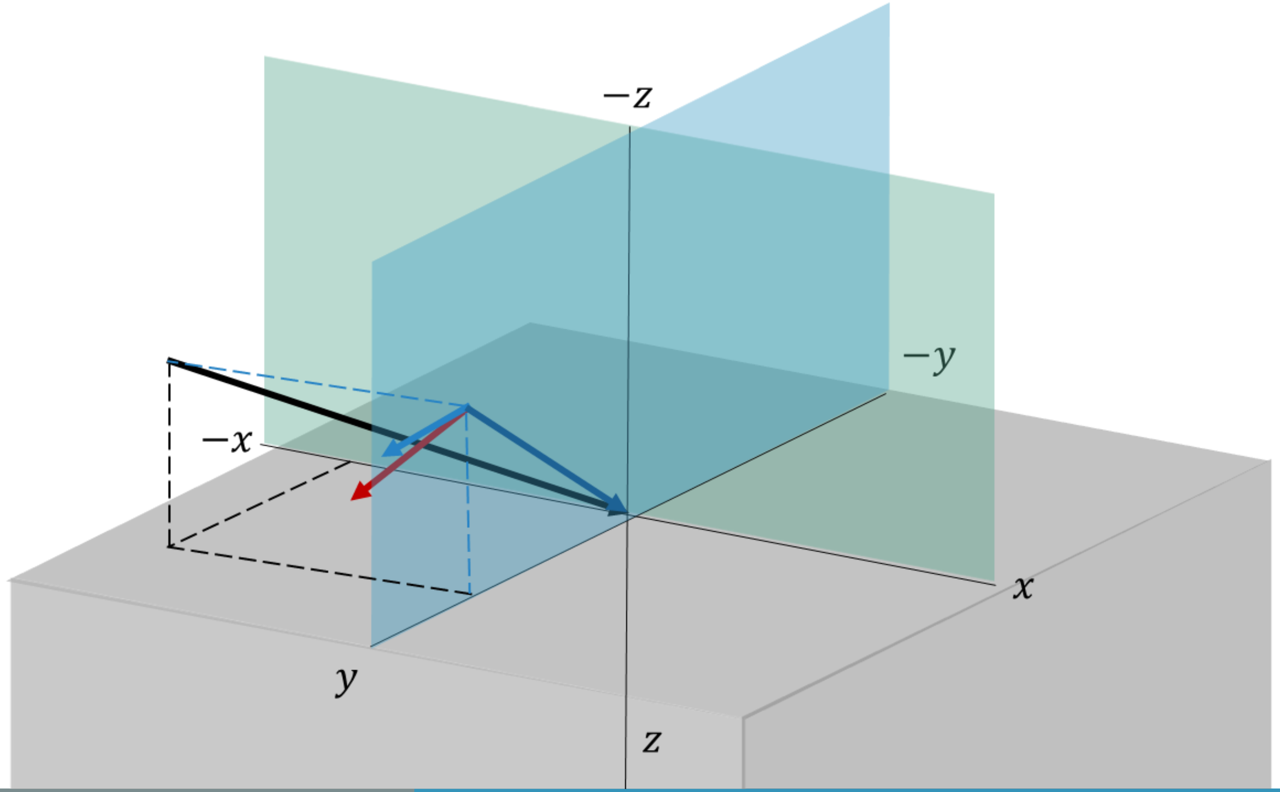
- Notemos que, si la incidencia es normal $(\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0)$, las ecuaciones se simplifican a las vistas la clase pasada:

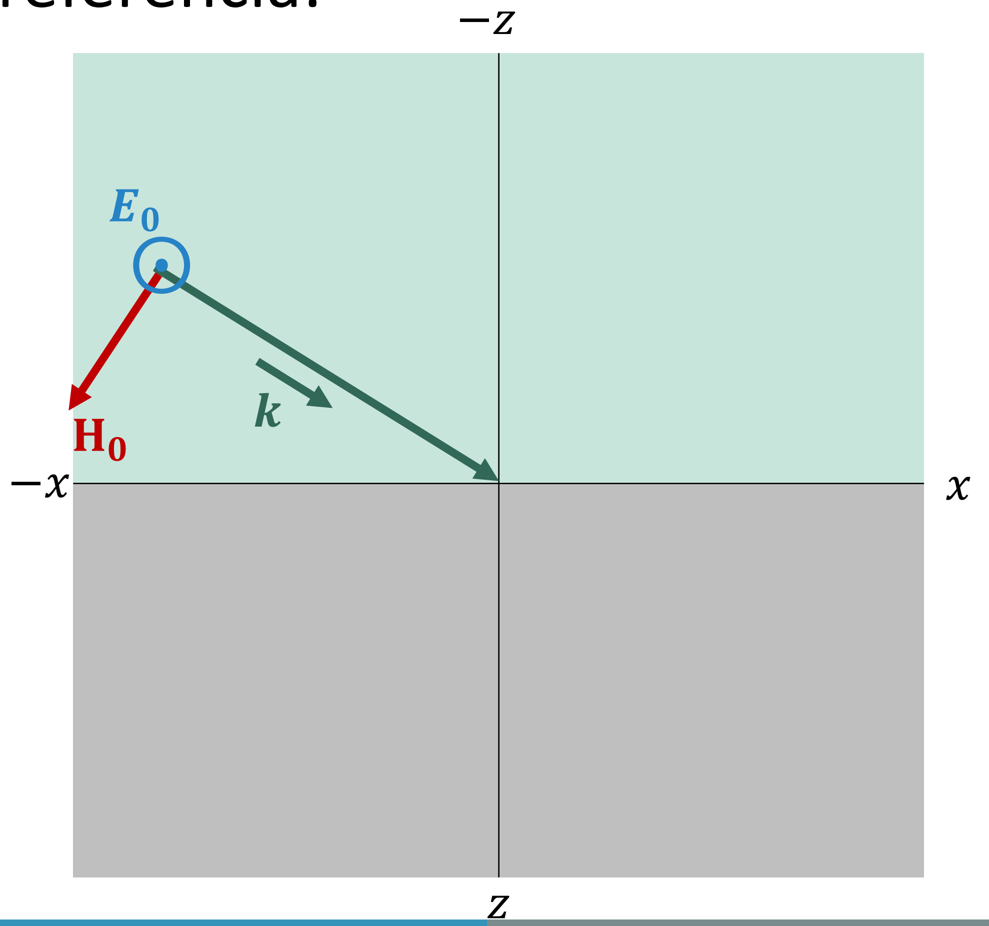
$$\boxed{\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

Polarización Perpendicular

- En este caso, el vector de campo eléctrico yace en el plano yz. Pero seguiremos usando el plano xz como referencia:



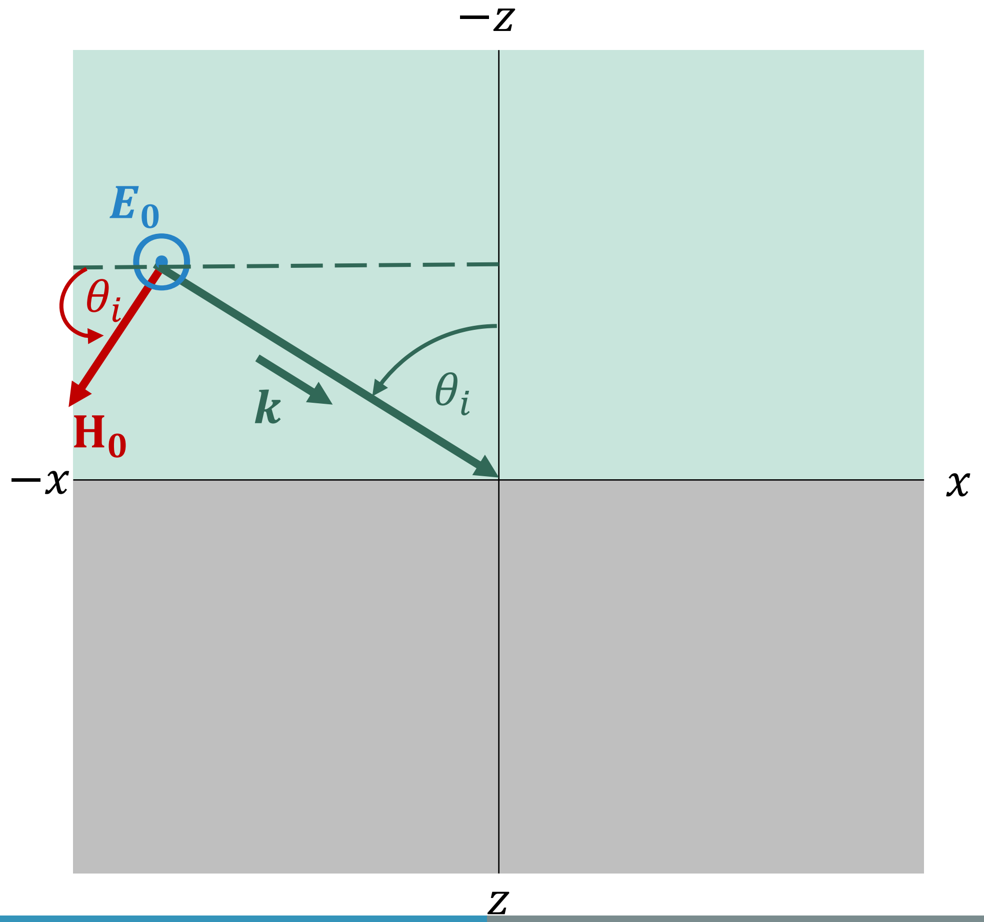


Polarización Perpendicular

- Los campos incidentes serán:

$$\mathbf{E_i} = E_0 e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_i + z\,\cos\theta_i)}\,\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H_i} = \frac{E_0}{\eta_1}(-\cos\theta_i\ \ \mathbf{a}_x + \sin\theta_i\ \ \mathbf{a}_z)e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_i + z\,\cos\theta_i)}$$



Polarización Perpendicular

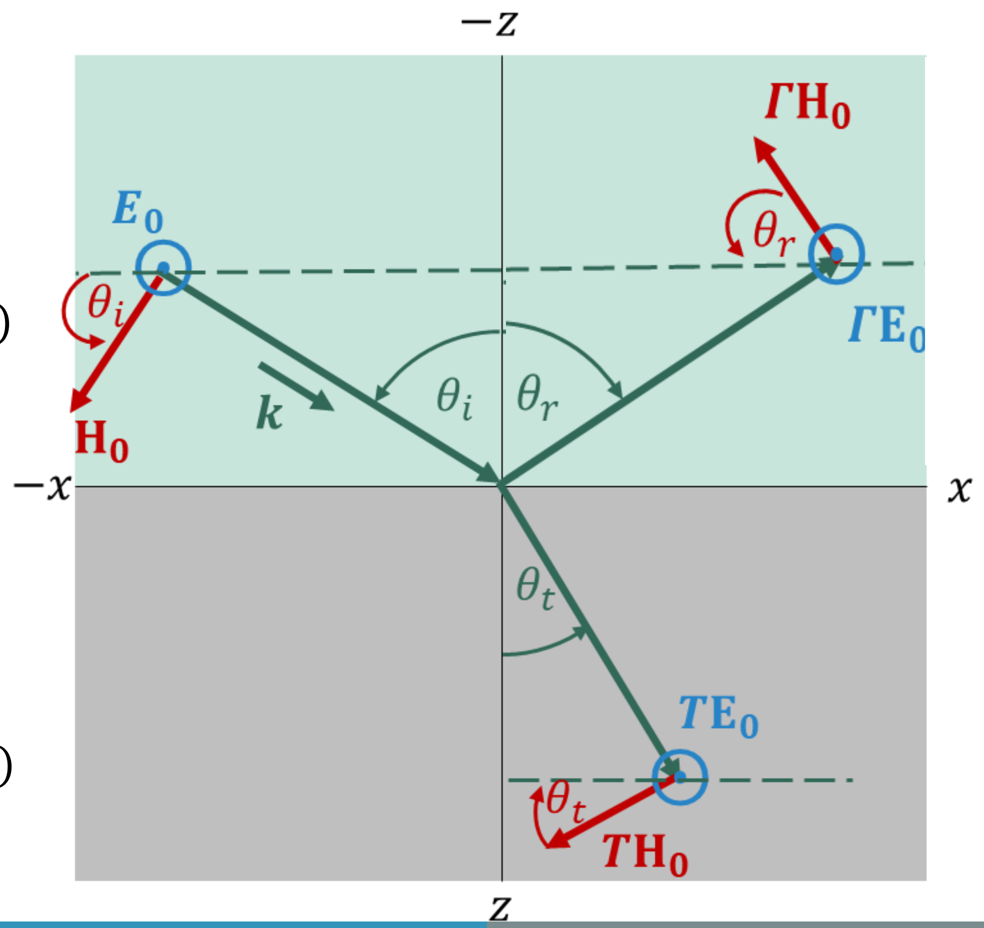
- Analicemos la onda reflejada y la transmitida:

$$\mathbf{E_r} = \Gamma E_0 e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_r\,-\,z\,\cos\theta_r)}\ \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H_r} = \frac{\Gamma E_0}{\eta_1}(\cos\theta_r\ \ \mathbf{a}_x + \sin\theta_r\ \ \mathbf{a}_z)e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_r\,-\,z\,\cos\theta_r)}$$

$$\mathbf{E_t} = TE_0 e^{-j\beta_2(x\,\sin\theta_t\,+\,z\,\cos\theta_t)}\ \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H_t} = \frac{TE_0}{\eta_2}(-\cos\theta_t\ \mathbf{a}_x + \sin\theta_t\ \mathbf{a}_z)e^{-j\beta_2(x\,\sin\theta_t\,+\,z\,\cos\theta_t)}$$



Polarización Perpendicular

- Forzando continuidad entre las componentes tangenciales ($\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_y$):

$$e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} + \Gamma e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_r} = T e^{-j\beta_2 x\,\sin\theta_r}$$

$$-\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} + \frac{\Gamma}{\eta_1}\cos\theta_r e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_r} = -\frac{T}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-j\beta_2 x\,\sin\theta_t}$$

- Aplicando ley de Snell:

$$e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} + \Gamma e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} = T e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i}$$

$$-\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} + \frac{\Gamma}{\eta_1}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i} = -\frac{T}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-j\beta_1 x\,\sin\theta_i}$$

Polarización Perpendicular

- Simplificamos y despejamos

$$1 + \Gamma = T$$

$$-\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_i + \frac{\Gamma}{\eta_1}\cos\theta_i = -\frac{1+\Gamma}{\eta_2}\cos\theta_t$$

$$\left(\frac{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}{\eta_1\eta_2}\right)\Gamma = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_1\eta_2}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}}$$

$$-\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_i + \frac{\Gamma}{\eta_1}\cos\theta_i = -\frac{T}{\eta_2}\cos\theta_t$$

$$-\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_i + \frac{T-1}{\eta_1}\cos\theta_i = -\frac{T}{\eta_2}\cos\theta_t$$

$$\left(\frac{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}{\eta_1\eta_2}\right)T = \frac{2}{\eta_1}\cos\theta_i$$

$$\boxed{T = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}}$$

Polarización Perpendicular

- Notemos que, si la incidencia es normal $(\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0)$, las ecuaciones también se simplifican a las vistas la clase pasada:

$$\boxed{\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

Recordemos de la Clase 11

b) Dieléctricos sin pérdidas

- Para el caso de dieléctricos, se define el **índice de refracción** como la medida de cuánto se reduce la velocidad de la luz dentro del medio.

$$\boxed{n = \frac{c}{u} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

- Si el material es transparente, $\mu_r \approx 1$

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

Recordemos de la Clase 11

- Notemos que si multiplicamos las impedancias por $\frac{1}{\eta_0}$ podemos reescribirlas como el coeficiente de refracción, asumiendo que el dieléctrico es transparente $(\mu \approx \mu_0)$:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{1}{n}$$

- Usemos este hecho para reescribir algunas expresiones

Ecuaciones de Fresnel

- Usando los índices de refracción, podemos escribir las **Ecuaciones de Fresnel** para los coeficientes de Reflexión y Transmisión.

- Polarización Paralela

$$\boxed{\Gamma = \frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i}}$$

$$\boxed{T = \frac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i}}$$

- Polarización Perpendicular

$$\boxed{\Gamma = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}}$$

$$\boxed{T = \frac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}}$$

Ley de Snell

- De manera similar, podemos reescribir la ley de Snell empleando el coeficiente de refracción.

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}$$

$$\boxed{n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t}$$

- Notemos que si $n_2 > n_1$:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} > 1$$

$$\sin\theta_i > \sin\theta_t$$

$$\theta_i > \theta_t$$

Ley de Snell

- De manera similar, podemos reescribir la ley de Snell empleando el coeficiente de refracción.

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}$$

$$\boxed{n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t}$$

- Notemos que si $n_2 > n_1$:

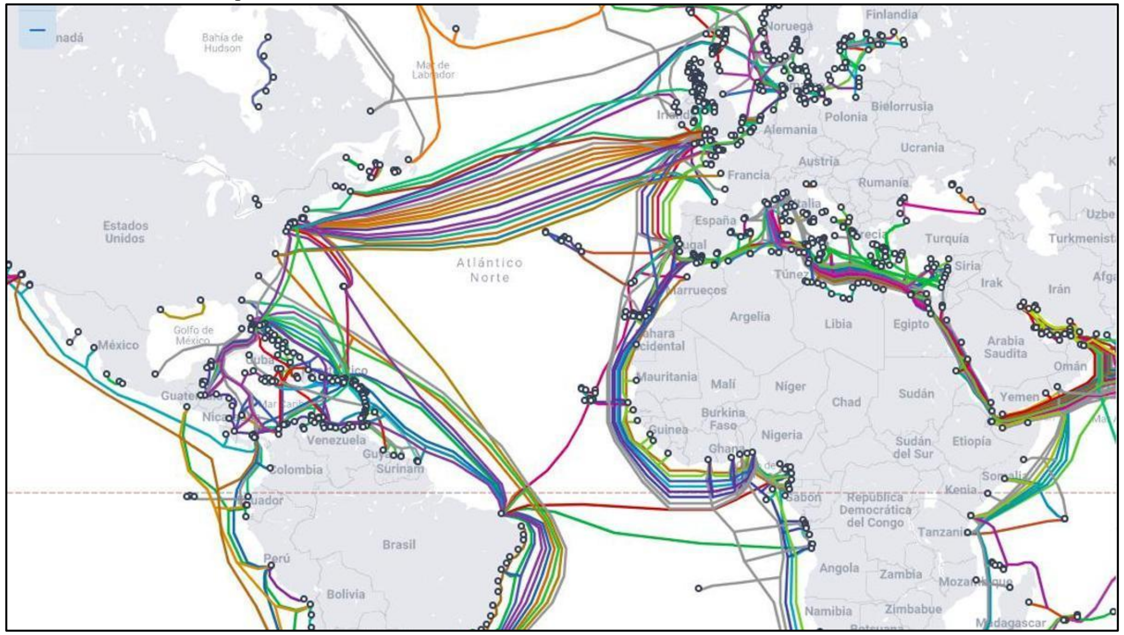
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} > 1$$

$$\sin\theta_i > \sin\theta_t$$

$$\theta_i > \theta_t$$

Ángulo Crítico (θ_c)

- Se define como el ángulo θ_i para el cual $\theta_t = 90°$.
- Para ángulos superiores a θ_c, $T = 0$. Esto se conoce como **reflexión interna total**.
- Es el principio en el cual se basa la fibra óptica.



Ángulo de Brewster (θ_b)

- Se define como el ángulo de incidencia para el cual no hay reflexión ($\Gamma = 0$). Para el caso de polarización paralela:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_b}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_b} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_b = 0$$

$$\eta_2 \cos\theta_t = \eta_1 \cos\theta_b$$

- Usando trigonometría y Snell

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\sin^2\theta_b}$$

Ángulo de Brewster (θ_b)

- Combinamos las expresiones

$$\frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}\cos^2\theta_b = 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\sin^2\theta_b$$

- Recordemos que $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, y que en dieléctricos. Y si asumimos que ambos medios son transparentes $\mu \approx \mu_0$

$$\frac{\mu_0\varepsilon_2}{\mu_0\varepsilon_1}\cos^2\theta_b = 1 - \frac{\varepsilon_1\mu_0}{\varepsilon_2\mu_0}\sin^2\theta_b$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos^2\theta_b = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b$$

Ángulo de Brewster (θ_b)

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(1-\sin^2\theta_b\right)=1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin^2\theta_b=1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sin^2\theta_b=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\sin^2\theta_b=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$\boxed{\sin\theta_b=\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon_1/\varepsilon_2}}}$$

Ángulo de Brewster (θ_b)

- Alternativamente:

$$\sin^2\theta_b = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$\cos^2\theta_b = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$\tan^2\theta_b = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\boxed{\tan\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$$

Ángulo de Brewster (θ_b)

- Para el caso de polarización perpendicular:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos\theta_b - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_b + \eta_1 \cos\theta_t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \eta_2 \cos\theta_b - \eta_1 \cos\theta_t = 0$$

$$\eta_1 \cos\theta_t = \eta_2 \cos\theta_b$$

- Usando trigonometría y Snell

$$\frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \cos^2\theta_b = 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2\theta_b$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cos^2\theta_b = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2\theta_b$$

Ángulo de Brewster (θ_b)

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$$

Ángulo de Brewster (θ_b)

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$$

- Pero al ser medios distintos $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_1$:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \neq 1$$

Ángulo de Brewster (θ_b)

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b \;= 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_b$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$$

- Pero al ser medios distintos $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_1$:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \neq 1$$

- La respuesta es simple: θ_b **<u>no existe</u>**.

Resumen

- Generalizamos el caso de incidencia de ondas a cualquier ángulo arbitrario.
- Establecimos la relación entre los ángulos de incidencia, transmisión y reflexión, por medio de la Ley de Snell.
- Dividimos el problema en dos casos: polarización paralela y perpendicular, y analizamos cada uno de ellos.
- Formulamos los coeficientes de reflexión y transmisión para ambos casos de polarización, y los reescribimos como las Ecuaciones de Fresnel.
- Definimos casos especiales de ángulos: ángulo crítico y ángulo de Brewster.

Cerrando la clase de hoy

- Hemos concluido el contenido de Ondas Electromagnéticas.
- Nos enfocaremos en otro tema de interés. Soluciones numéricas y simulaciones.

Próxima Clase:

Método de Diferencias Finitas en Tiempo Discreto (DFTD).

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 766 – 768