Clase 12
Polarización y Energía

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 498 – 505

Javier Silva Orellana

jjsilva8@uc.cl

Contexto

- Nos centraremos en 2 aspectos.
- Por un lado, solo hemos tomado ejemplos donde los campos eléctrico y magnético tienen una única componente. Generalizaremos el caso.
- Por otro lado, nos hemos limitado a estudiar la geometría y la forma en la que se propagan las ondas, pero no hemos considerado la energía de estas.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-11:** Determinar las expresiones correspondientes a ondas eléctricas, magnéticas y potencia asociada para condiciones de propagación libre en distintos tipos de medios.

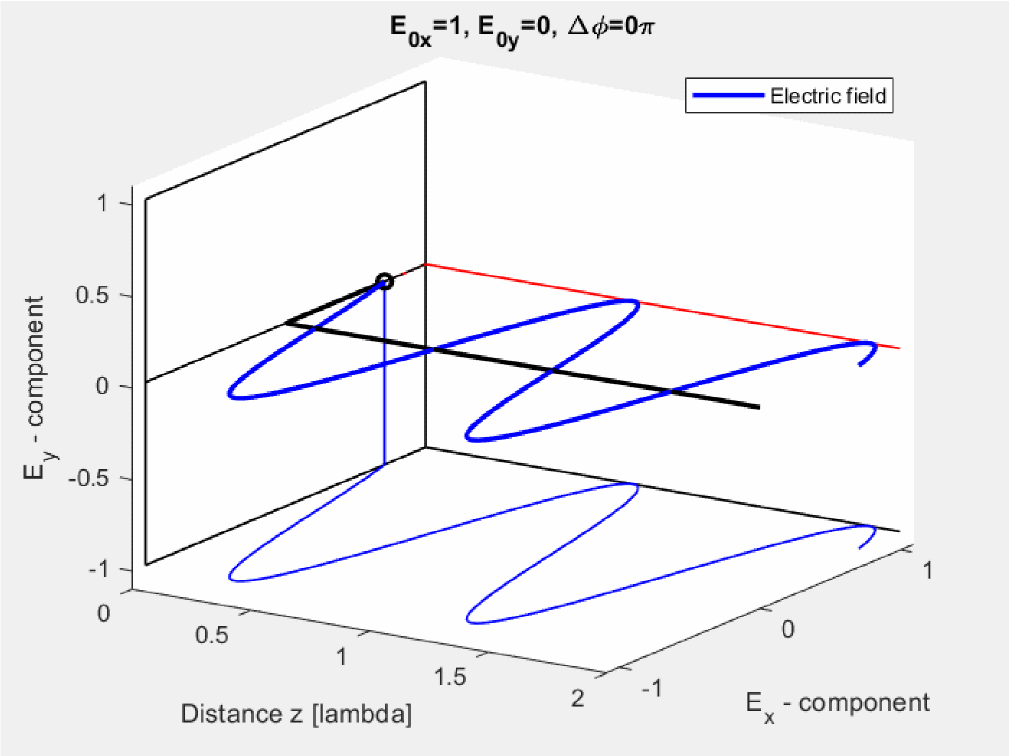
Contenidos

- Polarización
- Energía en Ondas EM
- Teorema de Poynting
- Valores instantáneos y RMS
- Energía e Impedancia

Polarización de ondas

- En clases anteriores vimos el caso de ondas con una única componente.

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_0}\cos(\omega t - \beta z + \theta_0)\ \mathbf{a}_x$$



Polarización de ondas

- Si agregamos una segunda componente de igual o distinta magnitud, pero que está en fase, entonces:

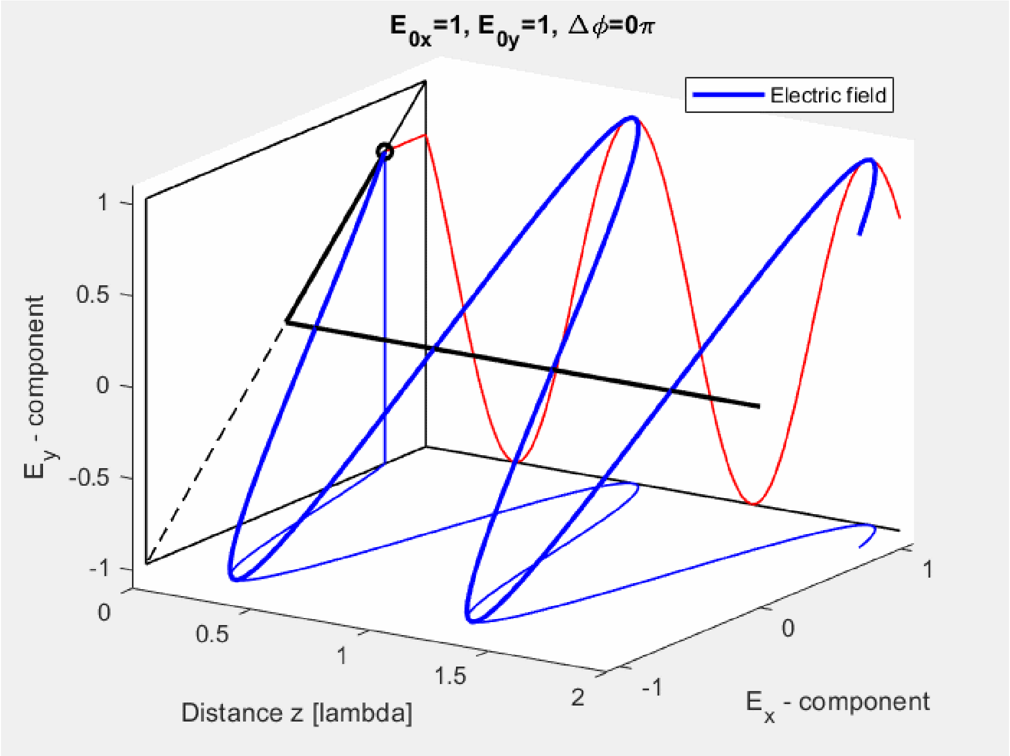
$$\begin{bmatrix} \mathbf{E_x}(z,t) \\ \mathbf{E_y}(z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0\mathrm{x}} \\ \mathbf{E}_{0y} \end{bmatrix} \cos(\omega t - \beta z + \theta_0) = \begin{bmatrix} E_{0x} E_x \\ E_{0y} E_y \end{bmatrix}$$

- Y se cumple que:

$$E_x = \left(\frac{E_{0x}}{E_{0y}} \right) E_y$$

Polarización de ondas

- Esto se denomina **polarización lineal.**



Polarización de ondas

- Si las amplitudes en ambas componentes son iguales y están desfasadas por un múltiplo impar de $\pi/2$ entonces:

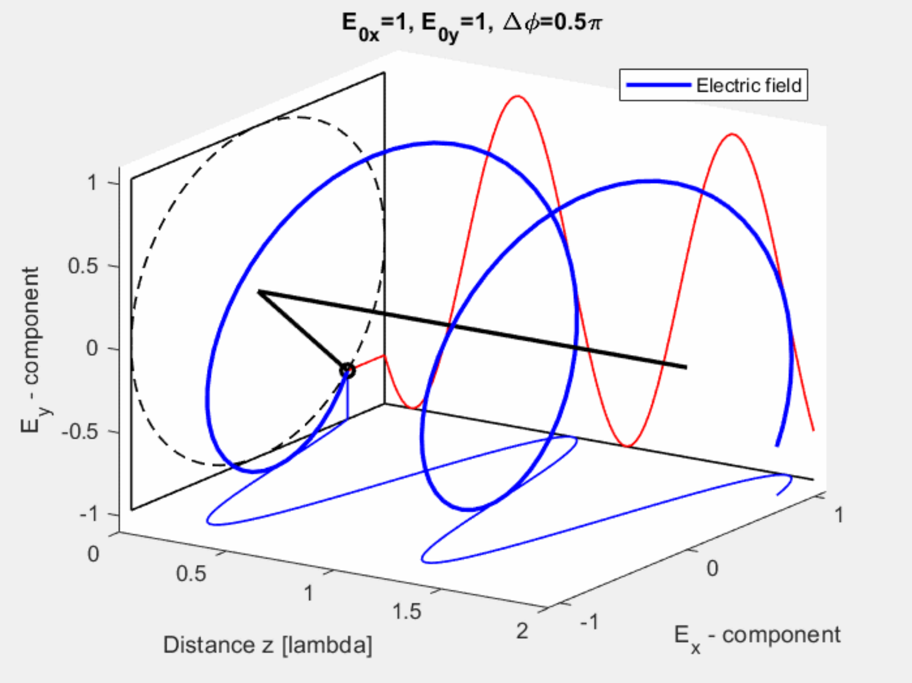
$$\begin{bmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \beta z + \theta_{0x}) \\ \cos(\omega t - \beta z + \theta_{0y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 E_x \\ E_0 E_y \end{bmatrix}$$

- Y se cumple que:

$$\left(\frac{E_x}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2 = 1$$

Polarización de ondas

- Esto se conoce como **polarización circular.**
- En este caso, dependiendo de cómo se de el desfase, tenemos polarización con rotación hacia la izquierda (LHCP) y derecha (RHCP).



Polarización de ondas

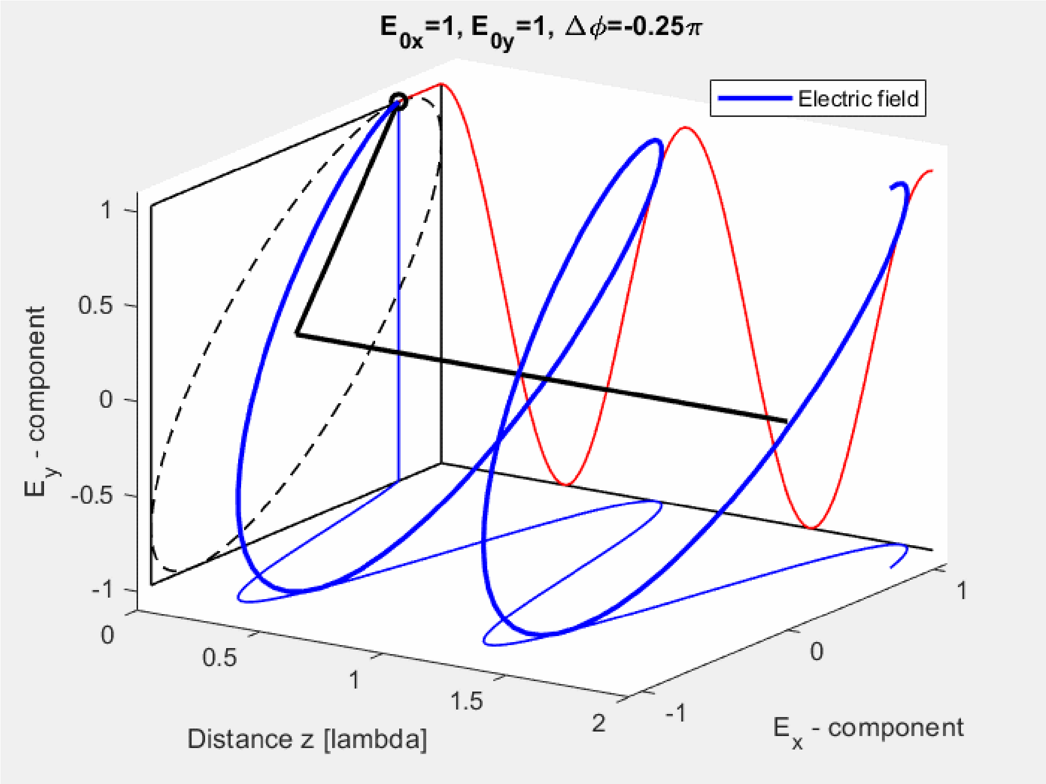
- Si los valores de amplitud son distintos, tendremos una **polarización elíptica**, donde:

$$\begin{bmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - \beta z + \theta_{0x}) \\ E_{0y}\cos\left(\omega t - \beta z + \theta_{0y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}E_x \\ E_{0y}E_y \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\left(\theta_{0x} - \theta_{0y}\right) = \sin^2\left(\theta_{0x} - \theta_{0y}\right)$$

Polarización de ondas

- Del mismo modo, tenemos polarización con rotación hacia la izquierda (LHEP) y derecha (RHEP).



Energía en Ondas EM

- Como mencionamos en clases anteriores, las ondas transportan energía.

- Empleando las Ecuaciones de Maxwell, podemos deducir la tasa de cambio de esa energía en el tiempo.

Energía en Ondas EM

- Tomemos la ecuación:

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Análogamente:

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Energía en Ondas EM

- Restamos las 2 ecuaciones obtenidas:

$$\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

$$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})-\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})=-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial(\mu\mathbf{H})}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot(\sigma\mathbf{E})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\sigma E^2$$

- Notemos que: $\dfrac{\partial A^2}{\partial t}=2A\dfrac{\partial A}{\partial t} \quad\Leftrightarrow\quad A\dfrac{\partial A}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial A^2}{\partial t}$

Energía en Ondas EM

- Aplicando la observación anterior:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \varepsilon \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} - \sigma E^2$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right] - \sigma E^2$$

- Integramos en torno a un volumen:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right] dV - \int_V \sigma E^2\, dV$$

Energía en Ondas EM

- Aplicamos Teorema de Divergencia:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right] dV - \int_V \sigma E^2 \, dV$$

- Y definiremos el **vector de Poynting** como:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}}$$

Teorema de Poynting

- Reordenando la expresión, tenemos el **Teorema de Poynting**:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left[\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right] dV = -\oint_S \boldsymbol{\mathcal{P}} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \sigma E^2 \, dV$$

Tasa de cambio de la energía total para el campo EM dentro de V

Flujo de energía que abandona el volumen V

Pérdidas óhmicas debido a que el campo ejerce trabajo sobre las cargas al interior del volumen V

Valor Instantáneo y RMS

- **Volvamos por hoy al caso de materiales no conductores.**
- Hasta ahora solo hemos trabajado con valores de tipo instantáneo. Es decir, valores del tipo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E_0} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_0)$$

- Esto es verdaderamente molesto, pues necesitamos conocer para cada instante de tiempo el valor del campo.
- En la práctica, esto es infactible.

Valor Instantáneo y RMS

- Sería ideal tener un valor “promedio”. Como si la sinusoide en realidad fuera un valor constante todo el tiempo.

- ¡Una primera alternativa sería usar directamente el promedio!

$$\bar{E} = \frac{1}{T}\int_0^T E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)dt$$

Valor Instantáneo y RMS

- Sería ideal tener un valor “promedio”. Como si la sinusoide en realidad fuera un valor constante todo el tiempo.

- ¡Una primera alternativa sería usar directamente el promedio!
- Pero sabemos que en un periodo de sinusoide

$$\bar{E} = 0$$

Valor Instantáneo y RMS

- Una alternativa es emplear el **valor eficaz o RMS**.

- Este se define como la raíz del promedio de cuadrados (*Root Mean Square*).

$$E_{RMS} = \langle E \rangle = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T E_0^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)dt}$$

Valor Instantáneo y RMS

- Realicemos el cálculo:

$$\langle E \rangle = \sqrt{\frac{E_0^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)dt}$$

$$\langle E \rangle = \sqrt{\frac{E_0^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)}{2}dt} = \sqrt{\frac{E_0^2}{2T}\int_0^T 1dt} = \sqrt{\frac{E_0^2}{2T}T}$$

$$\langle E \rangle = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Valor Instantáneo y RMS

- De este modo, el valor RMS nos permite hacer más sencillos los cálculos, pues podemos despreocuparnos de la componente temporal.

$$\langle E \rangle = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \qquad \langle H \rangle = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Energía e Impedancia

- Del Teorema de Poynting notamos unas expresiones familiares:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left[\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right] dV = -\oint_S \boldsymbol{\mathcal{P}} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \sigma E^2 \, dV$$

- Los términos destacados corresponden a las densidades de energía del campo eléctrico y magnético.

Energía e Impedancia

- Podemos reescribir dichas densidades de energía empleando los valores RMS que vimos anteriormente:

$$\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon \langle E \rangle^2}{2} \qquad \langle w_H \rangle = \frac{\mu \langle H \rangle^2}{2}$$

$$\boxed{\langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon E_0^2}{4}} \qquad \boxed{\langle w_H \rangle = \frac{\mu H_0^2}{4}}$$

Energía e Impedancia

- Notemos qué ocurre al calcular la razón entre las densidades de energía:

$$\frac{\langle w_E \rangle}{\langle w_H \rangle} = \frac{\varepsilon E_0^2}{\mu H_0^2} = \frac{\varepsilon E_0^2}{\mu \frac{B_0^2}{\mu^2}} = \mu\varepsilon \frac{E_0^2}{B_0^2} = \mu\varepsilon u^2 = \mu\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{\langle w_E \rangle}{\langle w_H \rangle} = 1}$$

- De modo que la energía se comparte **a partes iguales** entre ambos campos.

Energía e Impedancia

- Anteriormente definimos el vector de Poynting como:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- Adicionalmente, la clase pasada definimos la impedancia del medio como:

$$\eta = \frac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{H}_0}$$

- Luego:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{H}}{\eta}\, \mathbf{a}_k = \frac{E^2}{\eta} \mathbf{a}_k = \eta H^2\, \mathbf{a}_k$$

Energía e Impedancia

- Estas expresiones corresponden al **flujo instantáneo** de energía por unidad de tiempo que atraviesa perpendicularmente una superficie:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{E^2}{\eta}\mathbf{a}_k \qquad\qquad \boldsymbol{\mathcal{P}} = \eta H^2\,\mathbf{a}_k$$

- Empleando nuevamente los valores RMS, podemos definir el **flujo promedio** de energía:

$$\langle\boldsymbol{\mathcal{P}}\rangle = \frac{\mathrm{E}_0^2}{2\eta}\mathbf{a}_k \qquad\qquad \langle\boldsymbol{\mathcal{P}}\rangle = \frac{\eta H_0^2}{2}\mathbf{a}_k$$

Energía e Impedancia

- Equivalentemente, podemos reescribir este flujo en términos de la energía promedio:

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{P}} \rangle = \frac{\mathrm{E}_0^2}{2\eta} \mathbf{a}_k \qquad\qquad \langle w_E \rangle = \frac{\varepsilon E_0^2}{4}$$

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{P}} \rangle = \frac{2\langle w_E \rangle}{\varepsilon\eta} \mathbf{a}_k = \frac{\langle w_E + w_E \rangle}{\varepsilon\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \mathbf{a}_k = \langle w_E + w_H \rangle \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}} \mathbf{a}_k$$

$$\boxed{\langle \boldsymbol{\mathcal{P}} \rangle = \langle w \rangle\, \boldsymbol{u}}$$

Resumen

- Analizamos el balance de energía para una onda EM, y logramos deducir el Teorema de Poynting.
- Definimos el valor RMS como una alternativa para trabajar las ondas en términos de valores promedio.
- En base al valor RMS, redefinimos las formulaciones para la energía y analizamos su comportamiento para los campos EM en medios no conductores.

Cerrando la clase de hoy

- Con el análisis realizado, solamente nos falta extendernos otra vez al caso de materiales conductores.

Próxima Clase (16/Abril):

Ondas en Conductores

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 489 – 498