



Compilado de Ejercicios

1. Electrostática en el Vacío

Problema 1

Considere una barra cilíndrica de radio R_{bar} y densidad de carga volumétrica ρ_{bar} , la cual se extiende de manera vertical desde el origen hasta un largo L_{bar} . Sobre esta, una esfera de radio despreciable, m_{sphere} y carga Q_{sphere} puede moverse libremente en el eje vertical, gracias a un sistema de riel sin roce y de radio despreciable. Determine el valor de carga Q_{sphere} para la esfera, de modo que esta pueda elevarse a una altura de αL_{bar} ($\alpha > 1$).

Solución:

Resolveremos este problema equilibrando la fuerza eléctrica de la barra sobre la esfera en $\vec{P} = (0, 0, \lambda L_{bar})$ y el peso de la esfera.

Primero, simplificaremos el problema de la barra a un caso lineal, usando la relación entre cargas totales:

$$\begin{aligned} Q_{total} &= \int_L \lambda dL = \int_V \rho dV \\ \lambda_{bar} L_{bar} &= \rho_{bar} \pi R_{bar}^2 L_{bar} \\ \lambda_{bar} &= \rho_{bar} \pi R_{bar}^2 \end{aligned}$$

Con esta geometría reducida, la magnitud del vector $\vec{r} - \vec{r}'$ es simplemente:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = z - z' = \alpha L_{bar} - z'$$

Determinamos el campo eléctrico en \vec{P} , generado por la barra:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{bar} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L_{bar}} \frac{\lambda_{bar} dz'}{(\alpha L_{bar} - z')^2} \vec{a}_z = \frac{\lambda_{bar}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(\alpha L_{bar} - z')} \right]_0^{L_{bar}} \vec{a}_z \\ \vec{E}_{bar} &= \frac{\rho_{bar} \pi R_{bar}^2}{4\pi\epsilon_0 L_{bar}} \left(\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} \right) \vec{a}_z = \frac{\rho_{bar} R_{bar}^2}{4\epsilon_0 L_{bar} (\alpha^2 - 1)} \vec{a}_z \end{aligned}$$

Al agregar la esfera de carga Q_{sphere} como si fuese un carga de prueba, podemos obtener una expresión para la fuerza eléctrica $\vec{F}_{e,sphere}$ experimentada por la esfera. Luego, igualamos dicha fuerza al peso de la esfera $\vec{F}_{g,sphere}$:

$$\vec{F}_{e,sphere} = Q_{sphere} \vec{E}_{bar} = \frac{Q_{sphere} \rho_{bar} R_{bar}^2}{4\epsilon_0 L_{bar} (\alpha^2 - 1)} \vec{a}_z = m_{sphere} g \vec{a}_z = \vec{F}_{g,sphere}$$

$$Q_{sphere} = \frac{4\epsilon_0 L_{bar} m_{sphere} g (\alpha^2 - 1)}{\rho_{bar} R_{bar}^2}$$

Problema 2

Dos partículas q_1 y q_2 poseen la misma carga de +2 nC y se encuentran fijas en los puntos $P_1 = (-5, -4, 0)$ y $P_2 = (5, -4, 0)$ respectivamente. Adicionalmente en el sistema hay otra partícula más, q_3 , que tiene una carga de -4 nC, la cual está fija en el punto $P_3 = (0, -4, 0)$.

Determine el potencial en el punto $P_0 = (0, 0, 3)$ asumiendo que la referencia 0 del potencial se encuentra en el infinito.

Solución:

Para determinar el potencial eléctrico de N cargas puntuales $i = 1, 2, \dots, N$ se aplica el principio de superposición y la relación para el potencial de una carga puntual, quedando:

$$V(x, y, z) = \frac{W}{q_{test}} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Donde r_i es la distancia entre la carga puntual i y el punto en el cual quiero medir el potencial.

Ahora bien, en nuestro problema disponemos únicamente de 3 partículas, por lo que tendremos que el potencial en P es igual a la suma eléctrica de estos 3 potenciales individuales:

$$V = \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right) = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{2}{5\sqrt{2}} + \frac{2}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5} \right) \approx -2,12V$$

La fórmula para calcular distancia entre 2 puntos en un sistema coordenado (x,y,z) está dada por:

$$d(a, b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

Considerando $a = (x_a, y_a, z_a)$ y $b = (x_b, y_b, z_b)$

Problema 3

Considere los cubos de lado d de la Figura 1.

- Para el caso de la Figura 1 (a), la cual tiene una carga $+Q_0$ en el centro del cubo, determine el flujo a través de **una** de las caras del cubo.
- Para el caso de la Figura 1, donde la carga $+Q_0$ se ha movido a una de las esquinas del cubo, determine el flujo que pasa través de **cada una** de las caras del cubo.

(Hint: Emplee Ley de Gauss.)

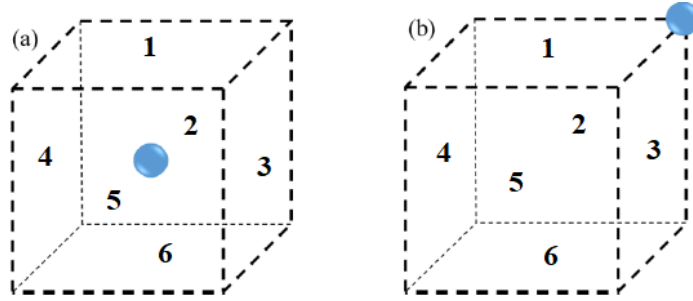


Figura 1: Carga en un cubo.

Solución:

a)

Aplicando ley de Gauss:

$$\Phi_{cubo} = \oint_{cubo} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$$

Aprovechando la simetría del problema, se evidencia que el flujo por cada cara es idéntico. De modo que:

$$\Phi_{caras} = \frac{Q_0}{6}$$

b)

En este caso, consideramos que la región de la Figura 1 corresponde a la octava parte de un super-cubo (Figura 2), que contiene en su centro a la carga $+Q_0$. Aplicando ley de Gauss:

$$\Phi_{super-cubo} = \oint_{super-cubo} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$$

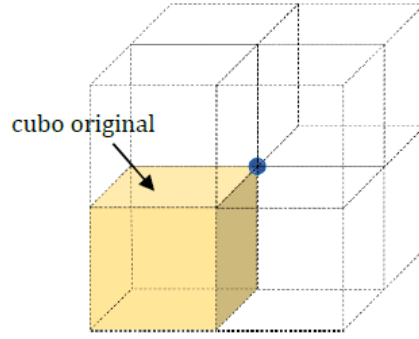


Figura 2: Supercubo

De modo que para cada super-cara:

$$\Phi_{super-cara} = \frac{Q_0}{6}$$

Volviendo al cubo original, notamos que las 3 caras que comparten esquina con la carga son paralelas a las líneas de flujo, de modo que para dichas caras el flujo es nulo:

$$\Phi_{cara1} = \Phi_{cara2} = \Phi_{cara3} = 0$$

Las cada una de las caras restantes tienen un área equivalente a un cuarto de una super cara. Luego:

$$\Phi_{cara4} = \Phi_{cara5} = \Phi_{cara6} = \frac{Q_0}{24}$$

Problema 4

El campo eléctrico de una configuración desconocida está dado por la expresión (en coordenadas esféricas):

$$V(\vec{r}) = A \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

donde A y λ son constantes. Encuentre el valor del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$, la densidad de carga $\rho(\vec{r})$ y la carga total Q .

Use el hecho de que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{a}_r}{r^2} \right) = 4\pi\delta(\vec{r}) \quad , \quad f(\vec{r})\delta(\vec{r}) = f(\vec{0})\delta(\vec{r}) \quad , \quad \iiint_{\Omega} \delta(\vec{r}) d\tau = 1 \quad , \quad \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$$

Solución:

Por relación campo-potencial sabemos que $\vec{E} = \vec{\nabla}V$. Luego:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(A \frac{e^{-\lambda r}}{r} \right) \vec{a}_r = A \frac{e^{-\lambda r}}{r^2} (1 + \lambda r) \vec{a}_r$$

$$\boxed{\vec{E} = A \frac{e^{-\lambda r}}{r^2} (1 + \lambda r) \vec{a}_r}$$

Aplicando primera ley de Maxwell diferencial, podemos encontrar la densidad de carga:

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 A \vec{\nabla} \cdot \left(e^{-\lambda r} (1 + \lambda r) \frac{\vec{a}_r}{r^2} \right)$$

Usando regla del producto:

$$\rho = \varepsilon_0 A \left(e^{-\lambda r} (1 + \lambda r) \right) \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{a}_r}{r^2} + \varepsilon_0 A \frac{\vec{a}_r}{r^2} \cdot \vec{\nabla} \left(e^{-\lambda r} (1 + \lambda r) \right)$$

$$\rho = \varepsilon_0 A \left(e^{-\lambda r} (1 + \lambda r) \right) 4\pi\delta(\vec{r}) + \varepsilon_0 A \frac{\vec{a}_r}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-\lambda r} (1 + \lambda r) \right) \vec{a}_r$$

$$\rho = \varepsilon_0 A 4\pi\delta(\vec{r}) + \varepsilon_0 A \frac{\vec{a}_r}{r^2} \cdot \left(-\lambda^2 r e^{-\lambda r} \vec{a}_r \right) = \varepsilon_0 A \left(4\pi\delta(\vec{r}) - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{r} \right)$$

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 A \left(4\pi\delta(\vec{r}) - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{r} \right)}$$

Para la carga total, simplemente integramos en torno a todo el espacio en coordenadas esféricas:

$$Q = \varepsilon_0 A \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\infty} \left(4\pi\delta(\vec{r}) - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda r}}{r} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = \varepsilon_0 A 4\pi \left[1 - \lambda^2 \int_{r=0}^{\infty} r e^{-\lambda r} dr \right] = \varepsilon_0 A 4\pi \left[1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2} \right] = 0$$

$$\boxed{Q = 0}$$

Problema 5

Encuentre la energía almacenada por la distribución de cargas hemiesférica:

$$\vec{E} = 2r \sin \theta \cos \phi \vec{a}_r + r \cos \theta \cos \phi \vec{a}_\theta + r \sin \phi \vec{a}_\phi$$

con $r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Solución:

La densidad de energía dw estará dada por:

$$dw = \frac{\vec{D} \cdot \vec{D}}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = 4r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = r^2 \cos^2 \phi (4 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + r^2 \sin^2 \phi$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = r^2 \cos^2 \phi (3 \sin^2 \theta + 1) + r^2 \sin^2 \phi$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = 3r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + (r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = r^2 (3 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + 1)$$

Integramos para obtener la energía total:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^\pi r^2 (3 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + 1) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^\pi r^4 (3 \cos^2 \phi \sin^3 \theta + \sin \theta) dr d\theta d\phi$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \left(3 \cos^2 \phi \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^\pi + [-\cos \theta]_0^\pi \right) d\phi$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{R^5}{5} \int_0^\pi \left(3 \cos^2 \phi \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^\pi + [-\cos \theta]_0^\pi \right) d\phi$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{R^5}{5} \int_0^\pi (4 \cos^2 \phi + 2) d\phi$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{R^5}{5} \left(4 \left[\frac{1}{2} \phi + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right]_0^\pi + 2\pi \right)$$

$$\boxed{W = \frac{\pi R^5}{5\varepsilon_0}}$$

Problema 6

Considere un cono invertido sin volumen ni base (similar a un cono de helado) cuyo radio y altura es h , con carga superficial uniforme σ :

- Obtenga $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ correspondiente a la superficie cargada del cono y su vértice. Calcule el potencial eléctrico en el vértice del cono (punto **a**) y déjelo expresado con las constantes del problema.
- Obtenga $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ correspondiente a la superficie cargada del cono invertido y el centro de la parte de arriba de él (punto **b**). Expresé el potencial eléctrico en el centro de la parte de arriba del cono como una integral.
- Desafío:** Determine la diferencia de potencial entre el vértice y el centro de la parte de arriba del cono. **HINT:** No descarte usar sustitución trigonométrica.

Solución:

a)

En la Figura 3 se muestra el cono invertido. Para determinar $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ se puede utilizar coordenadas esféricas. Por simplicidad, se considera al punto **a** como el origen de coordenadas. Además, como se trata de un cono con radio y altura iguales, $\varphi = 45^\circ$ constante. Se tiene:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} = 0 \mathbf{a}_\rho + 0 \mathbf{a}_\theta + 0 \mathbf{a}_\varphi$$

$$\mathbf{r}' = \rho' \mathbf{a}_\rho + \theta' \mathbf{a}_\theta + \frac{\pi}{4} \mathbf{a}_\varphi$$

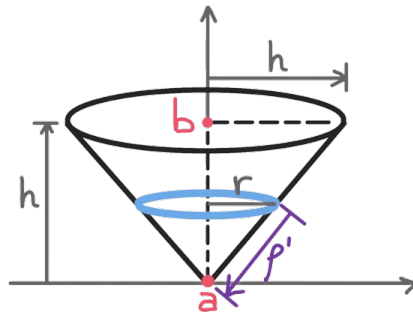


Figura 3: Cono invertido para obtener potencial en vértice **a**

Luego, considerando $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ y $z = \rho \cos \varphi$:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \rho'$$

Para obtener el diferencial de área dS , la integral de la superficie del cono se puede interpretar como la suma de circunferencias concéntricas al eje z cartesiano, que aumentan gradualmente su radio. Entonces:

$$dS = \frac{2\pi\rho'}{\sqrt{2}}d\rho'$$

Los límites de la integral son $\rho' = 0$ a $\rho' = \sqrt{2}h$. Dado que la carga en la superficie del cono es constante y de valor σ , el potencial eléctrico en el punto **a** es:

$$V(\mathbf{a}) = \int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\rho'}{\sqrt{2}\rho'} d\rho'$$

$$V(\mathbf{a}) = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0}$$

b)

Para obtener el potencial en el punto **b**, se analiza el cono según se muestra en la figura 4. Por inspección, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es $\bar{\rho}$ en la figura.

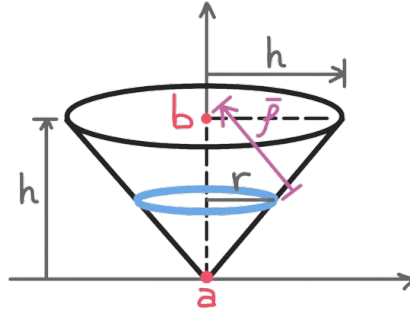


Figura 4: Cono invertido para obtener potencial en punto **b**

Utilizando el mismo diferencial de potencial que para la primera parte, nuestra integral queda:

$$V(\mathbf{b}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\sigma 2\pi\rho'}{\sqrt{2}\bar{\rho}} d\rho'$$

La distancia entre el punto **b** y la superficie cargada puede ser obtenida utilizando el teorema del coseno en la figura. Paso a paso, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} = h \mathbf{a}_\rho + 0 \mathbf{a}_\theta + 0 \mathbf{a}_\varphi$$

$$\mathbf{r}' = \rho' \mathbf{a}_\rho + \theta' \mathbf{a}_\theta + \frac{\pi}{4} \mathbf{a}_\varphi$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 = r^2 + (r')^2 - 2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = h^2 + (\rho')^2 - 2\rho' \frac{h}{\sqrt{2}} = \left(\rho' - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \bar{\rho}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\left(\rho' - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

La integral del potencial eléctrica en el punto **b** es:

$$V(\mathbf{b}) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\rho}{\sqrt{\left(\rho - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}} d\rho$$

c)

El diferencia de potencial entre los puntos **a** y **b** corresponde a la diferencia entre sus potenciales eléctricos. Debido a que ya fue calculado $V(\mathbf{a})$, se obtendrá $V(\mathbf{b})$.

Para resolver la integral del ítem anterior, se usará sustitución trigonométrica, considerando que $\rho' - \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}\tan(\alpha)}$ (dibuja un triángulo rectángulo, con hipotenusa ρ' y cateto adyacente $\frac{h}{\sqrt{2}}$). Con esta relación, se sustituye:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\rho'}{\sqrt{\left(\rho' - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}} d\rho' \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\left[\frac{h}{\sqrt{2}}(1 + \tan(\alpha))\right] \left[\frac{h}{\sqrt{2}}\sec^2(\alpha)d\alpha\right]}{\frac{h}{\sqrt{2}}\sqrt{\sec^2(\alpha)}} \\ &= \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sec(\alpha) (1 + \tan(\alpha)) d\alpha \end{aligned}$$

Ahora, la integral se resuelve y evalúa en $\alpha_1 = -\pi/4$ y $\alpha_2 = \pi/4$:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{b}) &= \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec(\alpha) + \sec(\alpha)\tan(\alpha)d\alpha \\ &= \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \left[\ln(|\tan(\alpha) + \sec(\alpha)|) + \sec(\alpha) \right] \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \left[\ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(-1 + \sqrt{2}) + 0 \right] \\ &= \frac{\sigma h}{4\epsilon_0} \cdot 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \\ &= \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Por último, para obtener la diferencia de potencial, se debe recordar que el potencial se define con un signo negativo antes (ya que se considera su integral desde el punto en cuestión hasta el infinito). Queda entonces:

$$-V(\mathbf{b}) - (-V(\mathbf{a})) = -\frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) - \left(-\frac{\sigma h}{2\epsilon_0}\right)$$

$$V(\mathbf{a}) - V(\mathbf{b}) = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \left(1 - \ln(1 + \sqrt{2})\right)$$

2. Expansión Multipolar

Problema 1

Sea la distribución de cargas en coordenadas esféricas:

$$\rho(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta$$

Calcule la expansión multipolar del potencial eléctrico hasta el caso cuadripolo, para un punto lejano en el eje z.

Considere las integrales notables:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx &= n! & \int_0^\theta \sin^3 x dx &= \left[-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} \right]_0^\theta \\ \int_0^\theta \sin^3 x \cos^2 x dx &= \left[-\frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{\cos^5(x)}{5} \right]_0^\theta \end{aligned}$$

Solución:

La expansión multipolar del potencial eléctrico estará dada por:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int_{\Omega} (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{\mathbf{r}}') d\tau'$$

Examinemos primero el caso monopolo ($n = 0$):

$$\begin{aligned}
V_{mono}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho(\vec{\mathbf{r}}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} 2\pi \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} \frac{1}{64\pi} (r')^2 e^{-r'} \sin^2 \theta' (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' \\
V_{mono}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} 2\pi \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} \frac{1}{64\pi} (r')^4 e^{-r'} \sin^3 \theta' dr' d\theta' \\
V_{mono}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{128\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{r'=0}^{\infty} (r')^4 e^{-r'} dr' \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^3 \theta' d\theta' \\
V_{mono}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{128\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} (4!) \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

Examinemos el caso dipolo ($n = 1$):

$$\begin{aligned}
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} r' \cos \theta \rho(\vec{\mathbf{r}}') d\tau' \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} 2\pi \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} (r') \cos \theta' \frac{1}{64\pi} (r')^2 e^{-r'} \sin^2 \theta' (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{128\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} (r')^5 \cos \theta' e^{-r'} \sin^3 \theta' dr' d\theta' \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{128\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{r'=0}^{\infty} (r')^5 e^{-r'} dr' \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^3 \theta' \cos \theta' d\theta' \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{128\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{r'=0}^{\infty} (r')^5 e^{-r'} dr' \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^3 \theta' \cos \theta' d\theta' \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{128\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (5!) \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

Examinemos el caso cuadripolo ($n = 2$):

$$\begin{aligned}
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_{\Omega} (r')^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta' - 1) \rho(\vec{\mathbf{r}}') d\tau' \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} 2\pi \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} (r')^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta' - 1) \frac{1}{64\pi} (r')^2 e^{-r'} \sin^2 \theta' (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{256\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_{r'=0}^{\infty} (r')^6 e^{-r'} dr' \left(\int_{\theta'=0}^{\pi} 3 \cos^2 \theta' \sin^3 \theta' d\theta' - \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^3 \theta' d\theta' \right) \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{256\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (6!) \left(\frac{12}{15} - \frac{4}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$V_{cuad}(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{3}{r^3}$$

Luego:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{6}{r^3} \right)$$

Problema 2

Considere un anillo circular en el plano xy , de radio R y centrado en el origen, el cual posee una densidad de carga lineal λ . Determine los primeros 2 términos no nulos de la expansión multipolar del potencial eléctrico $V(r, \theta)$.

Considere la integral notable:

$$\int_a^b \cos^2(\alpha - x) dx = \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(-2x + 2\alpha) \right) \right]_a^b$$

Solución:

Primero establecemos el sistema de coordenadas para los vectores \vec{r} y \vec{r}' . Usando coordenadas esféricas:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \vec{a}_x + r \sin \theta \sin \phi \vec{a}_y + r \cos \theta \vec{a}_z$$

$$\vec{r}' = R \cos \phi' \vec{a}_x + R \sin \phi' \vec{a}_y + 0 \vec{a}_z$$

El ángulo entre ambos vectores estará dado por:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rR \cos \phi' \sin \theta \cos \phi + rR \sin \phi' \sin \theta \sin \phi$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rR \sin \theta \cos(\phi - \phi') = rR \cos \alpha$$

De modo que el $\cos \alpha$ que se introduce en el Polinomio de Legendre de la expansión multipolar estará dado por:

$$\cos \alpha = \sin \theta \cos(\phi - \phi')$$

Desarrollamos el monopolo ($n = 0$):

$$V_{mono}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \lambda R d\theta' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda R}{r} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{r}$$

Desarrollamos el dipolo ($n = 1$):

$$\begin{aligned}
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{\Omega} r' \cos \alpha \rho(\vec{\mathbf{r}}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} R \sin \theta \cos(\phi - \phi') \lambda R d\phi' \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 \lambda \sin \theta}{r^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') d\phi' \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 \lambda \sin \theta}{r^2} [\cos \phi \sin \phi' - \sin \phi \cos \phi']_{\phi'=0}^{2\pi} \\
V_{dip}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 \lambda \sin \theta}{r^2} [-\sin \phi + \sin \phi]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Desarrollamos el cuadripolo ($n = 2$):

$$\begin{aligned}
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_{\Omega} (r')^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \alpha - 1) \rho(\vec{\mathbf{r}}') d\tau' \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \int_{\phi'=0}^{2\pi} R^3 \frac{1}{2} (3 (\sin \theta \cos(\phi - \phi'))^2 - 1) \lambda d\phi' \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda R^3 \sin^2 \theta}{2r^3} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos^2(\phi - \phi') d\phi' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi \lambda R^3}{2r^3} \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda R^3 \sin^2 \theta}{2r^3} \left[\frac{1}{2} \left(\phi' - \frac{1}{2} \sin(-2\phi' + 2\phi) \right) \right]_{\phi'=0}^{2\pi} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi \lambda R^3}{2r^3} \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\lambda R^3 \sin^2 \theta}{2r^3} [\pi] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi \lambda R^3}{2r^3} \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi \lambda R^3}{2r^3} (3 \sin^2 \theta - 2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi \lambda R^3}{2r^3} (3 - 3 \cos^2 \theta - 2) \\
V_{cuad}(\vec{\mathbf{r}}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi \lambda R^3}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) = -\frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R^3}{r^3} P_2(\cos \theta)
\end{aligned}$$

Con esto ya tenemos los primeros 2 términos no nulos. Luego:

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\lambda}{4\epsilon_0} \left(\frac{2R}{r} - \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos \theta) \right)$$

Problema 3

Considere un dipolo ideal centrado en el origen, el cual apunta en la dirección del eje z . Una carga eléctrica se libera desde el reposo en un punto del plano xy . Muestre que la carga comienza a moverse oscilatoriamente, siguiendo un arco semicircular, como si se tratase de un péndulo sostenido al origen.

(*Hint*: modele la fuerza en un péndulo y compárela con la fuerza experimentada por una carga de prueba ante el campo eléctrico de un dipolo.)

Solución:

Consideremos el diagrama de la Figura 5:

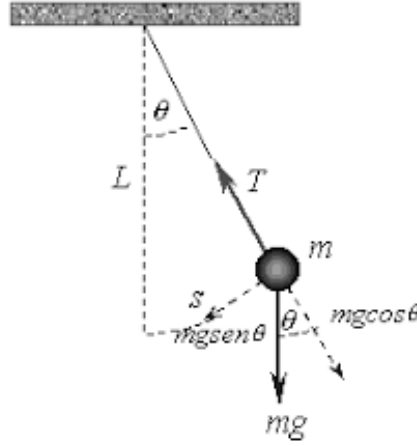


Figura 5: Diagrama de fuerzas de un péndulo.

El modelo físico de un péndulo está dado por:

$$\vec{F}_{pendulo} = m\vec{a} = -T \vec{a}_r + mg \cos \theta_{pendulo} \vec{a}_r - mg \sin \theta_{pendulo} \vec{a}_{\theta_{pendulo}}$$

Equilibrando fuerzas en torno a la componente radial, e incorporando aceleración centrípeta como la aceleración radial del sistema:

$$\frac{mv^2}{L} = T - mg \cos \theta_{pendulo}$$

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL \cos \theta_{pendulo}$$

$$v^2 = 2gL \cos \theta_{pendulo}$$

De modo que:

$$2mg \cos \theta_{pendulo} = T - mg \cos \theta_{pendulo}$$

$$T = 3mg \cos \theta_{pendulo}$$

Dejemos el sistema del péndulo referido a las mismas coordenadas que el dipolo. Migramos el sistema del péndulo a esféricas y notamos que:

$$\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta_{pendulo}) = -\cos(\theta_{pendulo})$$

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta_{pendulo}) = \sin(\theta_{pendulo})$$

$$\vec{a}_\theta = -\vec{a}_{\theta_{pendulo}}$$

Reemplazamos:

$$T = -3mg \cos \theta$$

Reemplazando todo en la ecuación original de fuerzas:

$$\vec{F}_{pendulo} = 3mg \cos \theta \vec{a}_r - mg \cos \theta \vec{a}_r + mg \sin \theta \vec{a}_\theta$$

$$\vec{F}_{pendulo} = mg [2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

Por otro lado, la fuerza eléctrica experimentada por la carga Q a causa del campo del dipolo será:

$$\vec{F}_{dipolo} = Q\vec{E}_{dipolo} = \frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta]$$

Notemos la analogía:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{dipolo} &= \frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta] \\ \vec{F}_{pendulo} &= mg [2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta] \\ \frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 r^3} &\longleftrightarrow mg \end{aligned}}$$

Problema 4

Dos cargas puntuales, $3q$ y $-q$, están separadas a una distancia a . Para cada uno de los arreglos de la Figura 6, determine:

1. El momento monopolar
2. El momento dipolar

3. El potencial eléctrico, en coordenadas esféricas, a una distancia r .

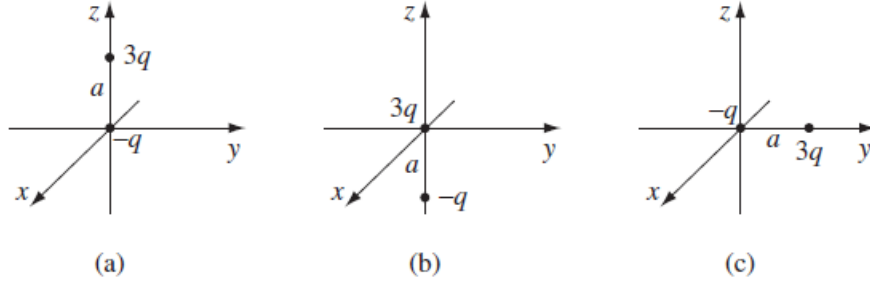


Figura 6: Arreglos de cargas para el Problema 4.

Solución:

1.

El momento monopolar corresponde simplemente a la carga total de cada sistema. Evidentemente, para los tres casos es la misma. Luego:

$$Q_a = Q_b = Q_c = 2q$$

2.

Consideremos que inicialmente el sistema de cargas de a está centrado en el origen. Luego, el momento dipolar estará dado por:

$$\vec{p} = \left(\frac{3}{2}aq + \frac{1}{2}aq \right) \vec{a}_z = 2qa \vec{a}_z$$

Aprovechando la propiedad de cambio de origen del momento dipolar, podemos determinar fácilmente los momentos dipolares de (a) y (b).

Para el caso de (a) el origen se desplazó en $-\frac{a}{2} \vec{a}_z$

$$\vec{p}_a = \vec{p} - Q_a \vec{r}_a = 2qa \vec{a}_z - (2q) \left(-\frac{a}{2} \right) \vec{a}_z = 3qa \vec{a}_z$$

Para el caso de (b), el origen se desplazó en $+\frac{a}{2} \vec{a}_z$

$$\vec{p}_b = \vec{p} - Q_b \vec{r}_b = 2qa \vec{a}_z - (2q) \left(+\frac{a}{2} \right) \vec{a}_z = -qa \vec{a}_z$$

Este método no es aplicable a (c) pues en este caso hubo una rotación del sistema. Pero podemos notar que simplemente es el caso (a) a lo largo de el eje y .

$$\vec{p}_c = 3qa \vec{a}_y$$

De este modo:

$$\begin{aligned}\vec{p}_a &= 3qa \vec{a}_z \\ \vec{p}_b &= -qa \vec{a}_z \\ \vec{p}_c &= 3qa \vec{a}_y\end{aligned}$$

3

Los momentos monopoles son constantes, de modo que:

$$V_{a,mono} = V_{a,mono} = V_{c,mono} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r}$$

Para el caso de los momentos dipolares, primero definamos el vector posición normalizado (no confundirlo con el vector dirección radial de coordenadas esféricas):

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{0}}{|\vec{r} - \vec{0}|} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Empleando coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \sin \theta \cos \phi \vec{a}_x + r \sin \theta \sin \phi \vec{a}_y + r \cos \theta \vec{a}_z \\ \vec{a}_r &= \sin \theta \cos \phi \vec{a}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{a}_y + \cos \theta \vec{a}_z\end{aligned}$$

Luego los potenciales dipolares serán:

$$\begin{aligned}V_{a,dip} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qa}{r^2} \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qa \cos \theta}{r^2} \\ V_{b,dip} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{r^2} \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos \theta}{r^2} \\ V_{c,dip} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qa}{r^2} \vec{a}_y \cdot \vec{a}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qa \sin \theta \sin \phi}{r^2}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}V_{a,dip}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qa \cos \theta}{r^2} \\ V_{b,dip}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa \cos \theta}{r^2} \\ V_{c,dip}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qa \sin \theta \sin \phi}{r^2}\end{aligned}$$

3. Electrostática en Materiales

Problema 1

Considere 2 cascarones esféricos metálicos concéntricos de radio a y b , $b > a$, que están separados por un material conductor débil de conductividad σ (constante). La diferencia de potencial entre ambos cascarones es V .

- a) Determine la corriente y resistencia entre ambas superficies.
- b) Considere la Figura 7, donde 2 cascarones esféricos de radio a se encuentran alejados, con una diferencia de potencial V entre ambos y rodeadas de un medio con conductividad σ . Utilice el resultado anterior para determinar la corriente y resistencia entre ambas.
HINT: $b \gg a$.

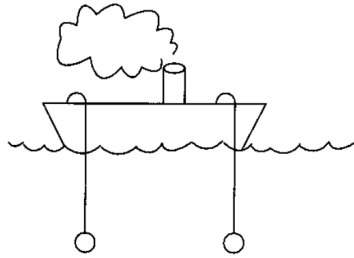


Figura 7: Problema 1.b.

Solución:

a)

Debido a la diferencia de potencial eléctrica (por lo tanto, de un campo eléctrico \mathbf{E}) y de un medio conductor de conductividad σ , la corriente entre las esferas serán corrientes de conducción $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. La corriente se expresa como:

$$I = \int_b^a \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \sigma \underbrace{\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}}_{\text{Ley de Gauss}} = \sigma \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Para encontrar \mathbf{E} , se define arbitrariamente Q como la carga del cascarón de radio a (cascarón interno). Entonces, por Ley de Gauss, el campo eléctrico entre las esferas es:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

La diferencia de potencial entre ambas esferas $V(a) - V(b) = V$ es:

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_b^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Se despeja $Q = \frac{4\pi\epsilon_0 V}{(1/a - 1/b)}$, por lo que la corriente I queda:

$$I = \frac{4\pi\sigma V}{1/a - 1/b}$$

Para determinar la resistencia, se utiliza la Ley de Ohm:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V}{\frac{4\pi\sigma V}{1/a - 1/b}}$$

Es decir:

$$R = \frac{1/a - 1/b}{4\pi\sigma}$$

b)

Si se considera que ambas esferas están en una configuración como la del ítem anterior, se puede decir que $b \gg a$. La resistencia principalmente estará alrededor del cascarón interior y, a medida que se aleja más y más el cascarón de radio b , menor será su contribución por el factor $4\pi r^2$. Entonces la resistencia individual de ambas esferas será:

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma a}$$

En este caso, es posible considerar las resistencias en serie, por lo que la resistencia total de ambas será la suma, quedando:

$$R_{tot} = \frac{1}{2\pi\sigma a}$$

La corriente I se despeja de la Ley de Ohm, por lo tanto:

$$I = 2\pi\sigma a V$$

Problema 2

Considere el cono truncado del circuito de la Figura 8, el cual tiene altura h , bases circulares de radio a y b , y resistividad ρ .

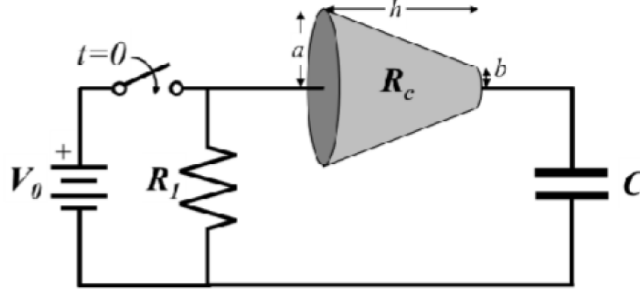


Figura 8: Caption

- Determine la resistencia R_c equivalente de este elemento cuando se conecta según el circuito de la Figura.
- El interruptor de la figura se cierra en $t = 0$. ¿Cuál es la energía disipada en R entre $t = 0$ y $t = \infty$? Asuma que el condensador se encontraba descargado en $t = 0$.

Solución:

a)

A modo general, la resistencia macroscópica de un material viene dada por:

$$R_c = \frac{\rho l}{A}$$

Tomaremos un enfoque diferencial y dividiremos el cono en muchos discos de radio decreciente y ancho infinitesimal. De este modo:

$$dR_c = \frac{\rho dx}{A} = \frac{\rho dx}{\pi r(x)^2}$$

Necesitamos definir el radio decreciente en función de x . Notemos que esto se puede modelarse como la recta:

$$r(x) = a + \frac{b-a}{h}x$$

Reemplazamos en la formulación diferencial e integramos a lo largo de x (de 0 a h):

$$R_c = \int_0^h \frac{\rho}{\pi \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2} dx = \frac{\rho h}{\pi(b-a)} \left[-\frac{1}{a + \frac{b-a}{h}x} \right]_0^h = \frac{\rho h}{\pi(b-a)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\boxed{R_c = \frac{rh}{\pi ba}}$$

b)

Para encontrar la potencia disipada empleamos la ley de Joule ($P = I^2 R$). Tenemos la resistencia, nos falta encontrar la corriente. Para el caso del capacitor sabemos que $Q_C = CV_C$. Derivando en el tiempo:

$$\frac{dQ_C}{dt} = I = C \frac{dV_C}{dt}$$

El potencial en la rama $R_c - C$ es V_0 . Sumando las caídas de potencial:

$$V_0 = V_C + IR_c = V_C + \frac{dV_C}{dt} R_c C$$

Resolviendo la EDO:

$$V_c(t) = Ae^{\frac{-t}{R_c C}} + B$$

Aplicamos las condiciones iniciales:

$$V_c(0) = Ae^{\frac{0}{R_c C}} + B = A + B = 0$$

$$V_c(\infty) = Ae^{\frac{-\infty}{R_c C}} + B = B = V_0$$

De modo que $B = V_0$ y $A = -V_0$. Luego:

$$V_c(t) = V_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{R_c C}}\right)$$

Calculamos la corriente:

$$I = C \frac{d}{dt} \left(V_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{R_c C}}\right) \right) = \frac{V_0}{R_c} e^{\frac{-t}{R_c C}}$$

Para determinar la energía disipada, simplemente resta integrar la potencia en el tiempo:

$$W = \int_0^\infty P = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R_c^2} e^{\frac{-2t}{R_c C}} R_c = \frac{V_0^2}{R_c} \int_0^\infty e^{\frac{-2t}{R_c C}}$$

$$W = \frac{CV_0^2}{2} \left[-e^{\frac{-2t}{R_c C}} \right]_0^\infty$$

$$\boxed{W = \frac{CV_0^2}{2}}$$

Problema 3

Una esfera sólida de radio a y constante dieléctrica ε_r tiene una densidad de carga volumétrica uniforme de ρ_0 .

a) Muestre que al centro de la esfera el potencial eléctrico está dado por:

$$V = \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}(2\varepsilon_r + 1)$$

b) Determine el potencial eléctrico en la superficie de la esfera.

(Hint: Aplique ley de Gauss)

Solución:

a)

Aplicamos Ley de Gauss para una superficie al interior de la esfera ($r \leq a$). Luego:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$
$$\varepsilon_0\varepsilon_r E (4\pi r^2) = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right)$$
$$E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Aplicando definición de potencial eléctrico $V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$V(0) - V(a) = \int_0^a \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} dr = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\varepsilon_r} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a = \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Repetimos el procedimiento, pero esta vez en el exterior de la esfera.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$
$$\varepsilon_0 E (4\pi r^2) = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \right)$$
$$E = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Determinamos el potencial eléctrico:

$$V(a) - V(\infty) = \int_a^\infty \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^\infty = \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$$

Sumamos los potenciales de ambos tramos, con lo que obtenemos:

$$V(0) - V(a) + V(a) - V(\infty) = \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$$

$$V(0) - V(\infty) = \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}(1 + 2\varepsilon_r)$$

Dado que el potencial en el infinito es 0:

$$V(0) = \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0\varepsilon_r}(2\varepsilon_r + 1)$$

b)

Ya obtuvimos esto como un resultado residual del segundo análisis con Ley de Gauss en el inciso (a).

$$V(a) - V(\infty) = \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$$

$$V(a) = \frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$$

Problema 4

Un elemento en forma de triángulo rectángulo isósceles, de constante dieléctrica ε_r , lado a y grosor d cabe “justo” entre 2 placas capacitivas cuadradas de lado a y separación d . Los terminales del capacitor se conectan a una batería de voltaje V_0 . Inicialmente el dieléctrico se encontraba fuera del capacitor ($x = 0$) y este último había permanecido un tiempo muy largo conectado a la batería.

- Determine la corriente (en función de x) que circula desde la batería al capacitor cuando el dieléctrico comienza a insertarse entre las placas a una velocidad constante v de la forma mostrada en la figura inferior.
- ¿Cuál es el trabajo realizado para insertar completamente el dieléctrico entre las placas (desde $x = 0$ hasta $x = a$)?

(*Hint*: Desprecie los efectos ocasionados por los bordes y asuma que la batería, cable y placas son *ideales*, es decir, sin resistencias internas.)

Solución:

a)

La corriente estará dada por $I = \frac{dQ}{dt}$. De modo que necesitamos determinar la carga en el capacitor. En cuanto a la carga en el capacitor, esta viene dada por $Q = CV$, donde $C = \frac{S\epsilon}{d}$, donde S es el área de las placas y d es la distancia entre ellas.

En este problema tendremos 2 capacitancias que irán variando en función del área efectiva. Por un lado, tendremos el área del espacio vacío, con permitividad ϵ_0 , que disminuirá a medida que ingrese el dieléctrico. Por otro lado, tendremos el área del dieléctrico, con permitividad $\epsilon_0\epsilon_r$, que incrementará conforme introducimos el material entre las placas. Así:

$$S_0 = a^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$S_d = \frac{x^2}{2}$$

En términos de capacitancias, tendremos:

$$C_0 = \frac{\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right) \epsilon_0}{d}$$

$$C_d = \frac{\frac{x^2}{2} \epsilon_0 \epsilon_r}{d}$$

Dado que ambas capacitancias se encuentran sometidas al mismo potencial eléctrico V_0 , la configuración es de tipo paralelo y podemos sumar ambas capacitancias. Luego, la carga será:

$$Q = \left(\frac{\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right) \epsilon_0}{d} + \frac{\frac{x^2}{2} \epsilon_0 \epsilon_r}{d} \right) V_0 = \frac{V_0 \epsilon_0}{d} \left(a^2 + \frac{x^2}{2} (\epsilon_r - 1) \right)$$

Derivamos para obtener la corriente:

$$I = \frac{V_0 \epsilon_0}{d} (\epsilon_r - 1) x \frac{dx}{dt}$$

Notemos que por enunciado, el dieléctrico se desplaza a través de las placas a velocidad v . Luego $\frac{dx}{dt} = v$. De modo que:

$$I = \frac{V_0 \epsilon_0}{d} (\epsilon_r - 1) v x$$

b)

El trabajo realizado corresponderá a la diferencia de energía almacenada entre los estados final ($x = a$) e inicial ($x = 0$):

$$W = W_f - W_i = \frac{V_0^2}{2} \left(\frac{a^2 \varepsilon_0}{2d} + \frac{a^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{2d} \right) - \frac{V_0^2}{2} \frac{a^2 \varepsilon_0}{d}$$

$$W = \frac{a^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) V_0^2}{4d}$$

4. Relatividad Especial

Problema 1

Una nave espacial A con una masa en reposo de $1,4 \cdot 10^5$ kg y una longitud propia de 1 m se mueve en una dirección paralela a su longitud, viajando hacia la tierra con una rapidez ν . Los ocupantes de la nave están de pie con sus torsos paralelos a la dirección de viaje. Según un observador de la Tierra, los ocupantes miden alrededor de 0,5m de alto y 0,4m de ancho.



Figura 9: La nave izquierda corresponde a la nave A, mientras que la derecha corresponde a la B.

- Si la nave espacial A tiene un momentum relativista de magnitud $3,15 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, ¿a qué rapidez ν viaja la nave espacial A hacia un observador en la Tierra?
- ¿Cuál es la longitud de la nave espacial A medida por un observador en la Tierra?
- ¿Cuál es la altura y el ancho de los ocupantes según los demás en la nave A?
- El observador de la tierra detecta otra nave B que se aproxima a la tierra con una velocidad 0,9c. ¿Qué velocidad tendrá la segunda nave B con respecto a la primera?

Solución:

- El momentum relativista está dado por la siguiente expresión:

$$p' = \frac{m_0 u'}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$$

Donde u' en este caso sería la velocidad de la nave A vista desde el marco de referencia de la Tierra (ν). Llevando a cabo una breve manipulación algebraica para despejar ν llegamos a:

$$\nu^2 = \frac{p'^2}{m_0^2 + p'^2/c^2}$$

Tomando la raíz cuadrada:

$$|\nu| = \frac{|p'|}{\sqrt{m_0^2 + p'^2/c^2}}$$

A partir del enunciado sabemos que $p' = |p| = 3,15 \cdot 10^{13} \text{kg} \cdot \text{m/s}$ y $m_0 = 1,4 \cdot 10^5 \text{kg}$. Reemplazando en la expresión anterior obtenemos:

$$\boxed{\nu = 1,8 \cdot 10^8 \text{m/s}}$$

b) La contracción espacial según el modelo de relatividad espacial está dada por:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Esta expresión se puede obtener tomando la transformación de Lorentz en el eje x para dos puntos diferentes:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$$

Estos puntos representan los bordes un objeto, por lo que $x'_2 - x'_1$ sería la longitud de dicho objeto en el marco S' , mientras que $x_2 - x_1$ sería la longitud vista desde el marco S . Restando ambas expresiones y reemplazando $x'_2 - x'_1$ por L_0 y $x_2 - x_1$ por L se obtiene la ecuación inicial. Reemplazando los valores del enunciado llegamos a que:

$$\gamma = 1,25$$

Y por ende:

$$\boxed{L = \frac{1m}{1,25} = 0,8m}$$

- c) Para este inciso usamos la misma expresión de contracción temporal. Ahora bien, debido a que no existe un movimiento relativo en el eje paralelo al ancho de los cuerpos, las personas de la nave van a ver el mismo ancho que las personas de la tierra (0,4m). Por otro lado, la altura según las personas de la nave sería:

$$L_0 = L \cdot \gamma = 0,5m \cdot 1,25$$

$$L_0 = 0,625m$$

- d) La transformación de velocidad según la mecánica relativista está dada por:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

En este caso u'_x sería la velocidad de la nave B visto por una persona en la nave A . u_x es la velocidad de la nave según B en el marco de la tierra, y v es la velocidad de la nave A . Reemplazando obtenemos:

$$u'_x = 0,974c$$

Problema 2

Si la vida media de los muones, medida en su propio marco es de $2,2 \cdot 10^{-6}s$, ¿qué distancia promedio viajarían en el vacío antes de decaer en el marco de referencia en el que su velocidad se mide como $0,6c$?

Solución:

La velocidad que recorre un objeto en un marco cualquiera es su velocidad vista en dicho marco, multiplicada por el tiempo transcurrido. Ahora bien, debido a que la velocidad de los muones es comparable con la velocidad de la luz, el tiempo transcurrido en el marco de los muones es diferente al tiempo en el marco del observador. Con esto en mente, se necesita encontrar una transformación de tiempo para obtener Δt en el marco del observador. Usando la expresión de dilatación temporal obtenemos:

$$\Delta t_{\text{observador}} = \gamma \Delta t_{\text{muon}}$$

$$\Delta t_{\text{observador}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,6^2}} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}s = 2,75 \cdot 10^{-6}s$$

Multiplicando por la velocidad del muón obtenemos:

$$d = v \cdot \Delta t_{\text{observador}}$$

$$d = 494,66m$$

Problema 3

Este problema se divide en tres partes. Para responder cada pregunta se recomienda ir respondiendo en orden.

- a) Considere el siguiente sistema de placas infinitas separadas por una distancia d , con densidad de carga σ_0 . Ahora, este sistema (S) comienza a desplazarse a lo largo del eje x con velocidad v_0 , con respecto al sistema (S_0). ¿Qué ocurre con las componentes del campo eléctrico entre las placas?.

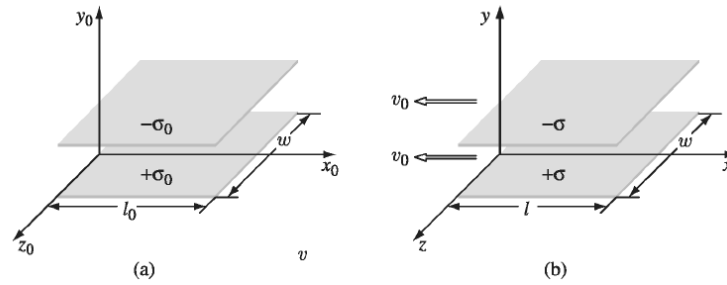


Figura 10: Placas paralelas

HINT1: Considere que ocurre con la densidad de carga debido a dicho desplazamiento.

HINT2: Analice el comportamiento del campo en su componente, perpendicular a las placas y paralelo a ellas.

- b) Una carga puntual q se encuentra en reposo en el sistema de origen S_0 . ¿Cuál es el campo eléctrico de dicha carga con respecto a un punto P cualquiera en el sistema S , que se mueve a lo largo del eje $+x$ con velocidad v_0 con respecto a S_0 ?
- c) Nuevamente, se tienen placas paralelas cargadas y en movimiento como en la figura 4. Esta existen corrientes superficiales $\vec{K}_{\pm} = \mp \sigma v_0 \hat{x}$ en S con respecto al sistema S_0 . Ahora, un tercer sistema \bar{S} se mueve con velocidad v con respecto al sistema S . Determine los campos \vec{E} y \vec{B} en el sistema \bar{S} .

Solución:

- a) Al ser placas paralelas e infinitas, en el sistema estacionario se tiene un campo eléctrico $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y}$. Luego, sabemos que la carga en las placas no varía, y el ancho (w) no ha cambiado, pero el largo (l) se ve afectado por las contracciones de Lorentz por un factor:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Así, como la carga no varía pero sí su largo tenemos:

$$\sigma_0 l w = \sigma'_0 l' w$$

De esta última expresión, se desprende que $\sigma'_0 = \gamma_0 \sigma_0$. Así mismo, el campo eléctrico en su componente perpendicular:

$$\boxed{E^\perp = \gamma_0 E_0 \perp}$$

Por otro lado, la distancia d no sufre contracciones de Lorentz, por lo que sus componentes paralelas al movimiento no se ven afectadas, es decir,

$$\boxed{E^\parallel = E_0^\parallel}$$

- b) En el sistema S_0 , el campo eléctrico es:

$$\begin{aligned} E_{x0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{y0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{z0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Como se vió en el ítem anterior, solo se ven afectadas las componentes del campo eléctrico que se encuentran en paralelo con el movimiento de las cargas. Por lo tanto, desde el sistema S se tiene que el campo es:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_y &= \gamma_0 E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_z &= \gamma_0 E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Cabe destacar, que el campo sigue siendo expresado en término de las coordenadas del sistema S_0 , que sufren las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned}x_0 &= \gamma_0(x + v_0 t) = \gamma_0 R_x \\y_0 &= y = R_y \\z_0 &= z = R_z\end{aligned}$$

Donde \vec{R} , es el vector desde la carga q hasta el punto P . Luego, usando coordenadas esféricas (ϕ azimutal y θ polar) se tiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q}{(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \vec{R}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q (1 - v_0^2/c^2)}{[(1 - v_0^2/c^2)(\sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)]^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R^2}$$

- c) De acuerdo a la figura 4, y por ley de Ampere usando un loop amperiano rectangular, se tiene que el campo magnético debido a las corrientes superficiales es:

$$\begin{aligned}\int \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 K_+ l \\ 2Bl &= -\mu_0 \sigma v_0 l(\hat{z}) \\ \int \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 K_- l \\ 2Bl &= \mu_0 \sigma v_0 l(-\hat{z})\end{aligned}$$

Donde la dirección del campo magnético viene dado por la regla de la mano derecha, resultando en un campo neto a lo largo del eje \hat{z} : $B_z = -\mu_0 \sigma v_0$.

Así, en el tercer sistema \bar{S} los campos eléctrico y magnéticos son:

$$\bar{E}_y = \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0}, \quad \bar{B}_z = -\mu_0 \bar{\sigma} \bar{v}$$

Se tiene que \bar{v} es la velocidad relativa de \bar{S} con respecto a S_0 .

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}}$$

y también:

$$\bar{\sigma} = \bar{\gamma}\sigma_0$$

Así, se pueden expresar los campos \bar{E} y \bar{B} , en términos de E y B . Usando expresiones encontradas previamente, obtenemos lo siguiente:

$$\bar{E}_y = \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \bar{B}_z = -\left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right) \mu_0 \sigma \bar{v}$$

Con un poco de álgebra, podemos obtener que:

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}} = \frac{1 + vv_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right),$$

De esta forma, tenemos \bar{E}_y y \bar{B}_z expresado en términos de E y B en S :

$$\bar{E}_y = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c^2 \epsilon_0 \mu_0} B_z\right),$$

$$\bar{B}_z = -\gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right) \mu_0 \sigma \left(\frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}\right) = \gamma (B_z - \mu_0 \epsilon_0 v E_y)$$

Como sabemos que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, las expresiones anteriores se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} \bar{E}_y &= \gamma (E_y - v B_z) \\ \bar{B}_z &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{aligned}$$

EXTRA: Realizando un procedimiento similar, pero con este capacitor infinito paralelo a los planos xy y paralelo a los planos xz, se pueden encontrar como se transforman las distintas componentes del campo eléctrico y magnético.

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= E_x, & \bar{E}_y &= \gamma (E_y - v B_z), & \bar{E}_z &= \gamma (E_z + v B_y), \\ \bar{B}_x &= B_x, & \bar{B}_y &= \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right), & \bar{B}_z &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right). \end{aligned}$$

Desafío: Demostrar la componente \bar{B}_x usando un solenoide alineado con el eje x.

Problema 4

Un posible reloj se muestra en la figura. Consiste de un tubo de luz F y una fotocelda P colocada de tal forma que sólo recibe señales que reboten desde el espejo M a una distancia fija d del sistema tubo-fotocelda. La electrónica de la caja actúa de tal forma que, cuando la fotocelda responde al *flash* de luz desde el espejo, el tubo de luz es activado con un *delay* despreciable y emite un pequeño *flash* hacia el espejo. El reloj así avanza una vez cada $2d/c$ segundos cuando se encuentra en reposo.

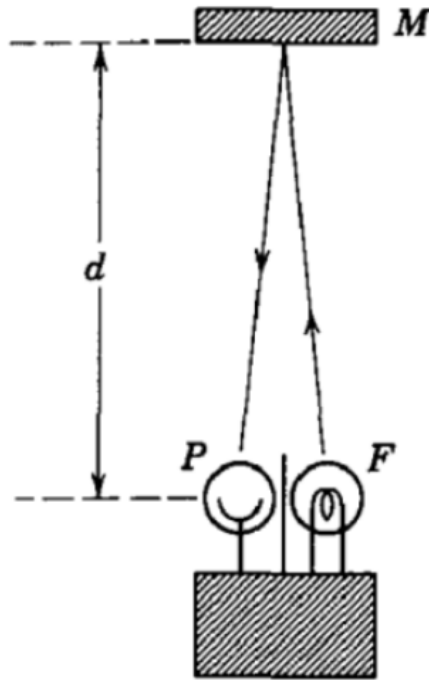


Figura 11: Sistema de Fotocelda, Tubo de Luz y Espejo

- Suponga que el reloj se mueve con una velocidad uniforme v , perpendicular a la línea entre PF y M , relativo a un observador. Demuestre usando herramientas geométricas o algebraicas que el observador observa dilatación temporal relativista a medida que el reloj se mueve.
- Suponga que el reloj se mueve con velocidad v paralelo a la línea entre PF y M . Verifique que aquí, también, se observa que el reloj avanza más lento, por el mismo factor de dilatación.

Solución:

a) El reloj se mueve perpendicular a la luz. Sea Δt el tiempo que le toma a la luz ser emitida y luego recibida.

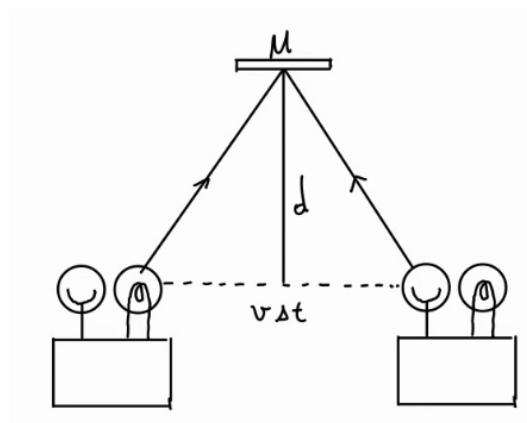


Figura 12: Reloj desplazado en el tiempo

Basado en el diagrama anterior, se tiene la siguiente ecuación (que puede ser obtenida geoméricamente o algebraicamente):

$$\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} = \frac{2d}{\gamma c}$$

b) Esta vez el movimiento es vertical:

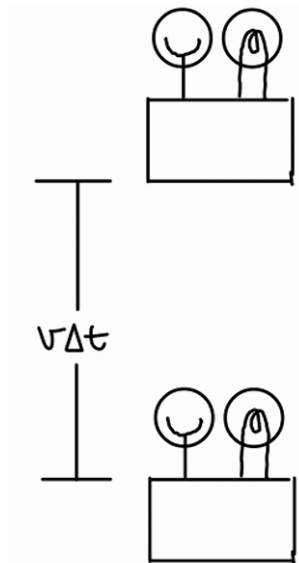


Figura 13: Reloj desplazado horizontalmente

Esta vez, usamos el resultado del ítem (a) (sí, la idea del ítem anterior era encontrar el factor de dilatación relativista). Así, la distancia entre el espejo y la fotocelda es $d = d_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$. El intervalo de tiempo que le toma a la luz en viajar desde el flash al espejo es Δt_1 , y en viajar desde el espejo a la fotocelda es Δt_1 :

$$\Delta t_1 = \frac{d_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} - v \Delta t}{c}; \Delta t_2 = \frac{d_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} + v \Delta t}{c}; \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

$$\Delta t = \frac{2d}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2d}{\gamma c}$$

Esto quiere decir, que el factor de dilatación es el mismo independiente de la dirección del movimiento.

Problema 5

Una partícula de masa m se encuentra sujeta a una fuerza constante F y comienza en reposo desde el origen en $t = 0$. Encuentre su posición x en función del tiempo.

Solución:

Recordemos que la fuerza se define:

$$\frac{dp}{dt} = F \longrightarrow p(t) = Ft + C$$

No obstante, como sabemos que $p(0) = 0$, y recordando que el momentum relativista es:

$$p = \gamma_0 m u = \frac{m u}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft$$

De acá, despejamos la velocidad u :

$$u = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}$$

Podemos notar que el numerador corresponde a la respuesta clásica (no relativista), lo cual es aproximadamente correcto si $(F/m)t \ll c$. No obstante, el denominador relativista asegura que u nunca exceda c . De hecho, a medida que $t \longrightarrow \infty$, $u \longrightarrow c$.

Para conocer la posición en el tiempo integramos la velocidad:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F}{m} \int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2}} dt' \\ &= \frac{mc^2}{F} \sqrt{1 + (Ft'/mc)^2} \Big|_0^t = \frac{mc^2}{F} [\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2} - 1] \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{F} [\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2} - 1]$$

Problema 6

En mecánica clásica, la segunda ley de Newton se puede escribir en su forma más tradicional en la forma $\vec{F} = m\vec{a}$. La ecuación relativista, en cambio, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ no es tan simple de expresar.

Demuestre, que su expresión relativista corresponde a:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\vec{a} + \frac{\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{a})}{c^2 - u^2} \right]$$

donde $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ es la aceleración ordinaria.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[\gamma m \mathbf{u}] = \frac{d}{dt} \left[\frac{m \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \\ &= m \left[\mathbf{u} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} \left(f \frac{1}{c^2} 2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \frac{\frac{d\mathbf{u}}{dt}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \\ &= m \left[\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 (1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}} + \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 (1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{a} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)} + \mathbf{a} \right]}$$

Problema 7

Demuestre que la aceleración (ordinaria) de una partícula de masa m y carga q , que se mueve a a velocidad \vec{u} , bajo la influencia de los campos magnéticos \vec{E} y \vec{B} , está dado por la siguiente expresión:

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} [\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{E})]$$

HINT: Use la expresión del ejercicio 6.

Solución:

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 - u^2} \right] = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)} = \frac{q}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

De acá, se puede despejar que \mathbf{a} es:

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)} + \frac{q}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Ahora, podemos buscar a qué equivale el término $\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)}$. Para esto, hacemos producto punto con \mathbf{u} en la última expresión:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) + \frac{u^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2(1 - u^2/c^2)} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{(1 - u^2/c^2)} = \frac{q}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}_{=0}]$$

Esta vez, multiplicamos toda la expresión por el vector \mathbf{u} :

$$\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)} = \frac{q}{m} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})}{c^2}$$

Reemplazando, en la ecuación anterior se tiene que \mathbf{a} es:

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{q}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})]}$$

5. Magnetostática en el Vacío

Problema 1

Considere un alambre recto delgado que porta una corriente constante I y está colocado a lo largo del eje x como se muestra en la figura. Determine la dirección y una expresión para magnitud del campo magnético en el punto P debido a esa corriente. Luego desarrolle considerando un alambre infinitamente largo.

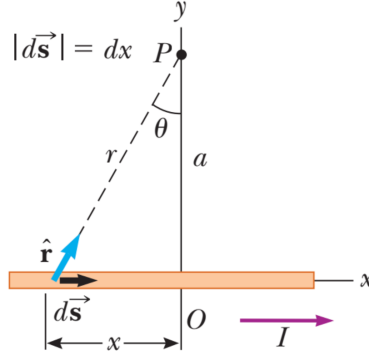


Figura 14: Diagrama Problema 1

Solución:

Recordemos que la ley de Biot-Savart nos dice que la magnitud del campo magnético \vec{B} es proporcional a la corriente que el mismo campo produce. Así, es esperable para este problema que la magnitud del campo sea proporcional a la corriente en el alambre y también que esta disminuya a medida que aumente la distancia desde el alambre al punto P.

Comenzamos entonces evaluando el producto cruz en la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{s} \times \hat{r} = |d\vec{s} \times \hat{r}| \hat{k} = \left[dx \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \hat{k} = (dx \cos \theta) \hat{k}$$

Reemplazamos esto en la expresión completa de la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cos \theta}{r^2} \hat{k}$$

Queremos que la expresión quede en términos de una sola variable, θ . Por geometría buscamos relaciones para r y dx:

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \rightarrow r = \frac{a}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \rightarrow x = a \tan \theta \rightarrow dx = a \sec^2 \theta d\theta = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Reemplazando lo anterior:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a d\theta \cos \theta \cos \theta^2}{a^2 \cos \theta^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

Ahora hacemos la integral para poder despejar B:

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{x=\theta_1}^{x=\theta_2} \cos \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

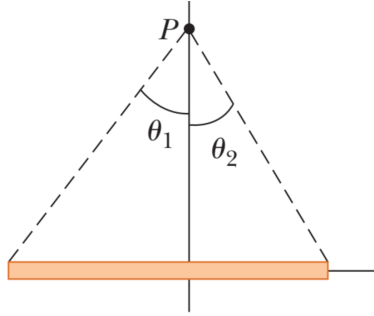


Figura 15: Geometría del problema.

Finalmente, si consideramos que el alambre es infinitamente largo tendremos que $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ y $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, quedándonos la magnitud de B como:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Problema 2

Un cilindro recto largo de radio R porta una corriente I estable que se distribuye de forma uniforme a través de la sección transversal del cilindro. Calcule el campo magnético a una distancia r desde el centro del alambre en las regiones $r \geq R$ y $r < R$.

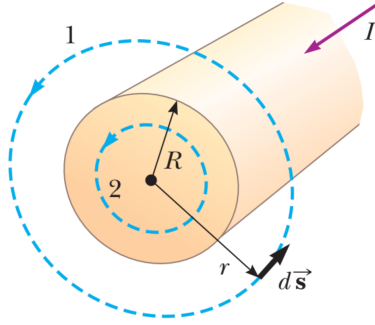


Figura 16: Diagrama Problema 2

Solución:

Recuerde que la ley de Ampère nos dice que la integral de línea de $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a $\mu_0 I$, donde I es la corriente total estable que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

El campo magnético en cualquier punto se puede calcular a partir de la ley de Ampère usando una trayectoria circular de radio arbitrario r , que es concéntrica con el cilindro.

Además, dada la simetría del problema, \vec{B} debe ser constante en magnitud y paralelo a $d\vec{s}$ en todo punto. Esto se puede notar usando ley de la mano derecha, donde \vec{B} queda paralelo a la trayectoria circular del cilindro y por ende a $d\vec{s}$.

Resolvamos primero para el campo magnético exterior al cilindro ($r \geq R$), para lo cual tendremos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint d\vec{s} = B \int_0^{2\pi} r d\theta = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{para } r \geq R)$$

Resolvamos ahora para el interior del alambre donde $r < R$. Para este caso es claro que la corriente I^* que pasa a través del plano del círculo es menor que la corriente total I , ya que considera un radio menor al radio total del cilindro.

Podemos establecer la siguiente relación entre la corriente total y la fracción de corriente que se abarca en este caso con las trayectorias circulares involucradas:

$$\frac{I^*}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

Podemos despejar I^* de la relación anterior y obtenemos lo siguiente:

$$I^* = \frac{r^2}{R^2} I$$

Conociendo esto aplicamos ley de Ampère al círculo que corresponde a la trayectoria de radio r donde $r < R$ y calculamos B :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint d\vec{s} = B \int_0^{2\pi} r d\theta = B(2\pi r) = \mu_0 I^* = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \text{ (para } r < R\text{)}$$

6. Magnetostática en Materiales

Problema 1

Considere la estructura magnética hecha de 2 materiales distintos, como la mostrada en la Figura 17. El material blanco tiene permeabilidad relativa es 250, mientras que en el del material gris es 650. La corriente de la bobina es de 0,5 A. Determine el circuito equivalente y calcule sus reluctancias, la inductancia de la bobina de alimentación y flujo. Busque las unidades de cada uno de los parámetros en el Sistema Internacional de Unidades.

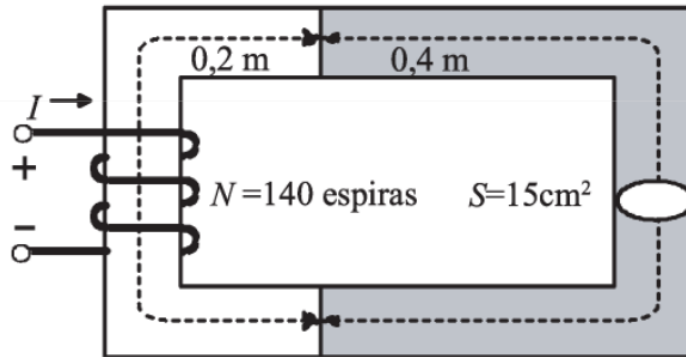


Figura 17: Problema 1.

Solución:

El circuito equivalente se muestra en la Figura 18.

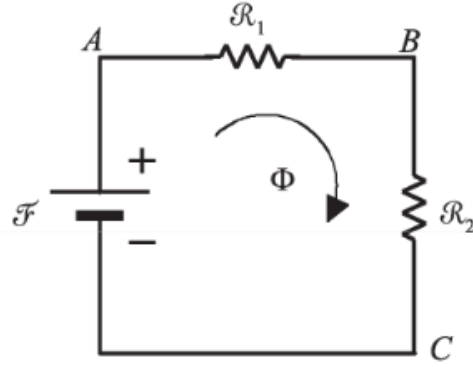


Figura 18: Circuito equivalente del Problema 1.

Se calcula:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{0,2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 250 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 0,4244 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{0,4}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 650 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 0,3265 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{140^2}{0,4244 \cdot 10^6 + 0,3265 \cdot 10^6} = 0,0261 \text{ H}$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{140 \cdot 0,5}{0,4244 \cdot 10^6 + 0,3265 \cdot 10^6} = 0,3729 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Problema 2

Calcule la intensidad de corriente que debe aplicarse a la bobina de la estructura magnética de la Figura 19 para que la columna de la derecha tenga un flujo de 10^{-3} Wb . La permeabilidad relativa es 400, la sección transversal $S = 10 \text{ cm}^2$ y la longitud $\ell = 10 \text{ cm}$. Obtenga el flujo de los otros 2 brazos.

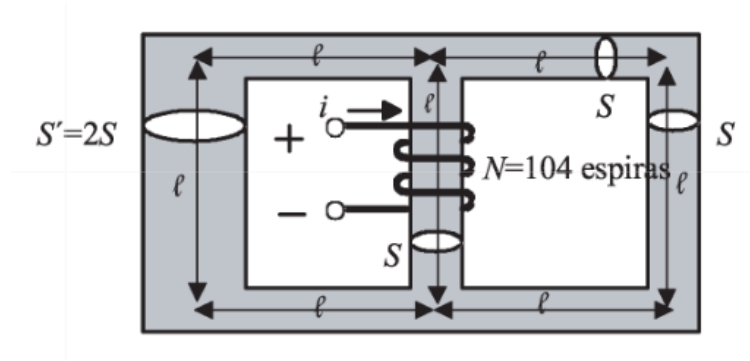


Figura 19: Problema 2.

Solución:

El circuito equivalente se muestra en la Figura 20.

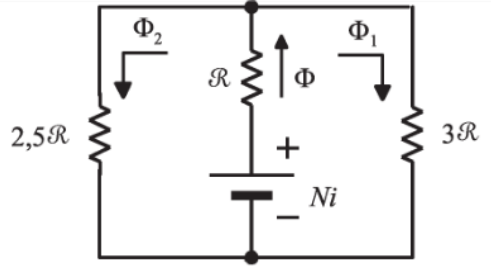


Figura 20: Circuito equivalente del Problema 2.

Se obtienen las reluctancias:

$$\mathcal{R}_{central} = \mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S} = \frac{0,1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 1,989 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_{derecha} = \frac{3\ell}{\mu S} = 3\mathcal{R}$$

$$\mathcal{R}_{izquierda} = \frac{\ell}{\mu 2S} + \frac{2\ell}{\mu S} = 2,5\mathcal{R}$$

Ahora, considerando la Ley de Kirchhoff de nodos magnética:

$$\Phi_{central} = \Phi = \Phi_{derecha} + \Phi_{izquierda} = \Phi_1 + \Phi_2$$

Y la Ley de Kirchhoff de mallas magnética:

$$Ni = \Phi_{central}\mathcal{R}_{central} + \Phi_{derecha}\mathcal{R}_{derecha} = \Phi\mathcal{R} + \Phi_1 3\mathcal{R}$$

$$Ni = \Phi_{central}\mathcal{R}_{central} + \Phi_{izquierda}\mathcal{R}_{izquierda} = \Phi\mathcal{R} + \Phi_2 2,5\mathcal{R}$$

Expresando Φ y Φ_2 en término de N , i , Φ_1 y \mathcal{R} , se llega a:

$$5Ni = 26\Phi_1\mathcal{R}$$

Por lo tanto, si se despeja i , se obtiene:

$$i = \frac{26 \cdot 10^{-3} \cdot 1,989 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 104} = 9,95 \text{ A}$$

Ahora, se calculan los otros 2 flujos con el valor de corriente:

$$\Phi = \frac{104 \cdot 9,95 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1,989 \cdot 10^{-5}}{1,989 \cdot 10^{-5}} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = \frac{104 \cdot 9,95 - 2,5 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,989 \cdot 10^{-5}}{1,989 \cdot 10^{-5}} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Problema 3

El circuito magnético de la Figura 21 está hecho con un material de permeabilidad infinita. Las reluctancias magnéticas de los 3 entrehierros son \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 y \mathcal{R}_3 según se muestran. Las bobinas tienen N_1 y N_2 espiras. Calcule:

- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua de los devanados.
- Coeficiente de acoplamiento magnético de las bobinas.

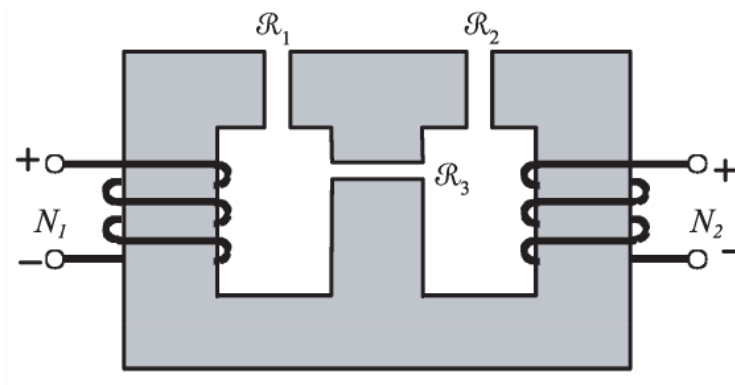


Figura 21: Problema 3.

Solución:

a)

Se analizará cada bobina por separado. Primero, la bobina izquierda se alimenta con una corriente i_1 mientras que la bobina derecha se deja abierta (corriente nula), tal como se muestra en el dibujo izquierdo de la Figura 22. El flujo total producido por la bobina 1 es Φ_{11} . Parte de él, Φ_{21} , atraviesa la bobina 2, mientras que otra parte, Φ_{d1} o flujo de dispersión, se cierra por el brazo central.

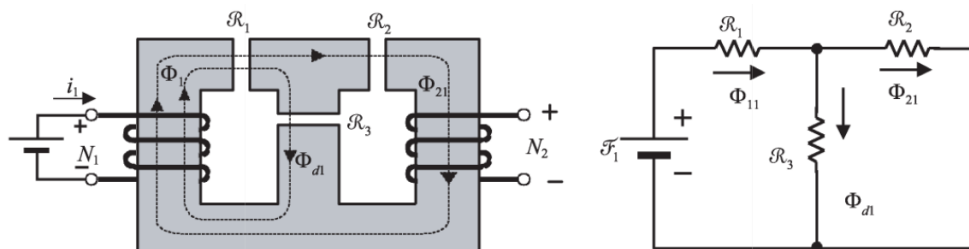


Figura 22: Circuito equivalente del Problema 3, para análisis de bobina 1.

Basándose en el circuito equivalente en la derecha de la Figura 22, el flujo Φ_{11} es:

$$\Phi_{11} = \frac{\overbrace{N_1 i_1}^{\mathcal{F}_1}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 || \mathcal{R}_3} = \frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1} N_1 i_1$$

Entonces, la autoinductancia de la bobina de la izquierda es:

$$L_{11} = N_1 \frac{\Phi_{11}}{i_1} = N_1^2 \frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1}$$

El flujo Φ_{21} se puede encontrar considerando un “divisor de corriente-flujo”:

$$\Phi_{21} = \Phi_{11} \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1} N_1 i_1$$

Entonces, la inductancia mutua L_{21} es:

$$L_{21} = N_2 \frac{\Phi_{21}}{i_1} = N_1 N_2 \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1}$$

Ahora, al alimentar la bobina de la derecha con la corriente i_2 y dejar abierta la otra bobina, se obtienen los diagramas de la Figura 23. El flujo total de la bobina derecha es Φ_{22} , mientras que Φ_{12} es el flujo que atraviesa la bobina izquierda producido por la bobina derecha, y Φ_{d2} es el flujo de dispersión de la bobina 2.

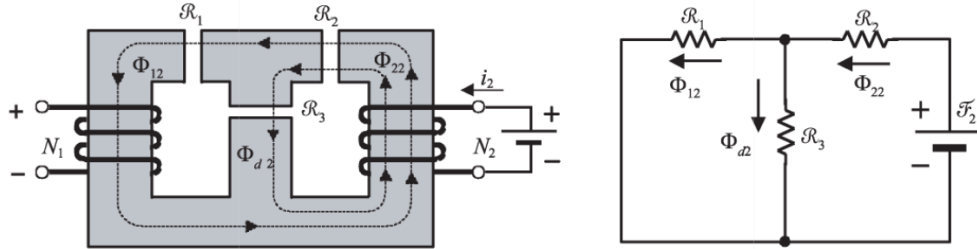


Figura 23: Circuito equivalente del Problema 3, para análisis de bobina 2.

Entonces, el flujo Φ_{22} es:

$$\Phi_{22} = \frac{\overbrace{N_2 i_2}^{\mathcal{F}_2}}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 || \mathcal{R}_3} = \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1} N_2 i_2$$

Y el coeficiente de autoinducción es:

$$L_{22} = N_2 \frac{\Phi_{22}}{i_2} = N_2^2 \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1}$$

El flujo Φ_{12} , según el circuito equivalente de la Figura, se obtiene:

$$\Phi_{12} = \Phi_{22} \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1} N_2 i_2$$

Y el coeficiente de inducción mutua es:

$$L_{12} = N_1 \frac{\Phi_{12}}{i_2} = N_1 N_2 \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1}$$

Es posible observar que las inductancias mutuas L_{21} y L_{12} son iguales:

$$L_{21} = L_{12} = M = N_1 N_2 \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1}$$

b)

El coeficiente de acoplamiento del devanado 1 k_1 se obtiene como:

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}$$

De igual manera, se obtiene el acoplamiento del devanado 2 k_2 :

$$k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{\mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3}$$

Finalmente, el acoplamiento total entre los devanados 1 y 2 k :

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{\mathcal{R}_3}{\sqrt{(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3)(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3)}}$$

Y se cumple: $M = k\sqrt{L_{11}L_{22}}$.

Problema 4

Utilice la curva de histéresis de la Figura 24 para determinar la permeabilidad relativa del material, en a) $H = 70$, b) $H = 100$, c) $H = 200$, d) $H = 500$, e) $H = 500$ A·vuelta/m.

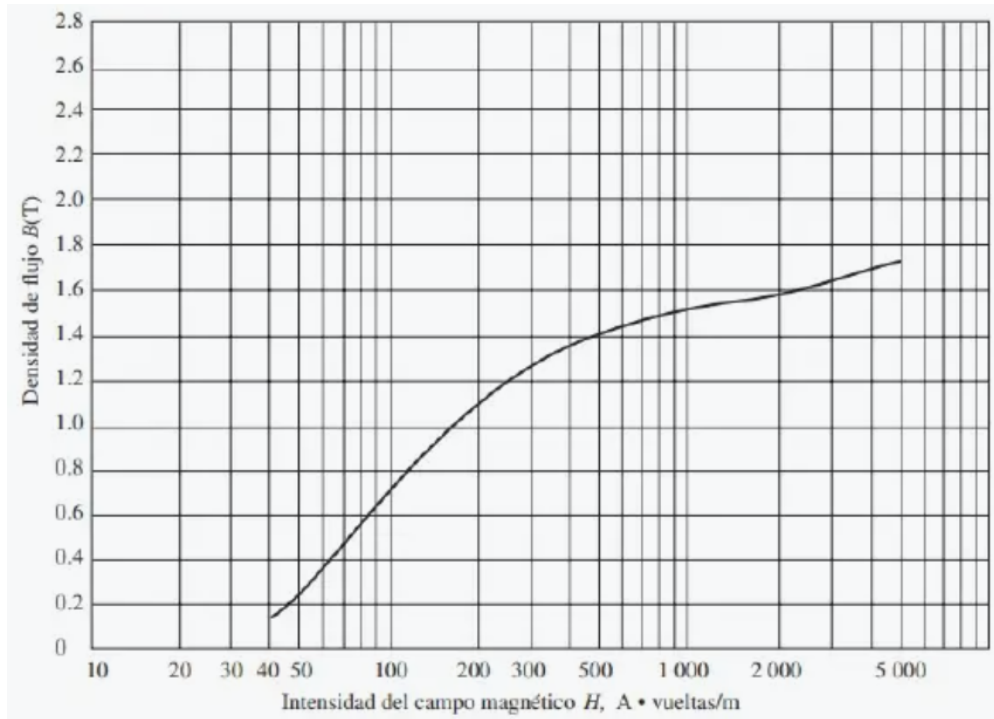


Figura 24: Curva de histéresis del Problema 4.

Solución:

Considerando que $B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$ y que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, aproximadamente se tiene:

- a) $H = 70 \Rightarrow B \approx 0,5 \Rightarrow \mu_r = 5684$
- b) $H = 100 \Rightarrow B \approx 0,7 \Rightarrow \mu_r = 5570$
- c) $H = 200 \Rightarrow B \approx 1,1 \Rightarrow \mu_r = 4376$
- d) $H = 500 \Rightarrow B \approx 1,4 \Rightarrow \mu_r = 2228$
- e) $H = 4000 \Rightarrow B \approx 1,7 \Rightarrow \mu_r = 338$

7. Condiciones de Borde

Problema 1

Dos materiales dieléctricos, isotrópicos, extensos y homogéneos se encuentran en el plano $z = 0$. Para $z \geq 0$, $\epsilon_{r1} = 4$, y para $z \leq 0$ $\epsilon_{r2} = 3$. Un campo eléctrico uniforme $E_1 = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$ [kV/m] se encuentra en $z \geq 0$.

- a) Encuentre el campo E_2 para $z \leq 0$.
- b) El ángulo que hacen los campos E_1 y E_2 en la interfase

Solución:

Para la resolver el problema, usaremos la siguiente figura:

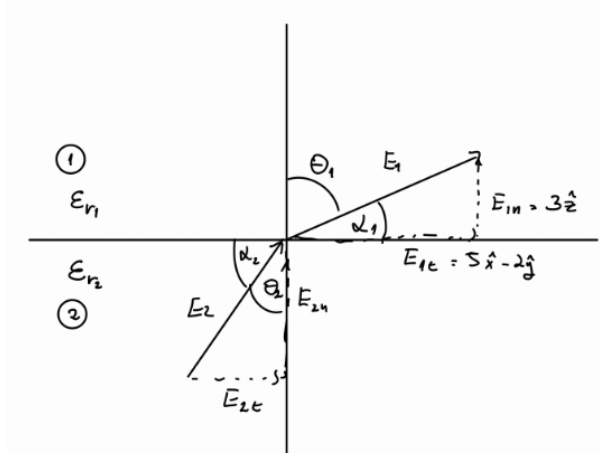


Figura 25: Materiales dieléctricos representados en el plano xz

- a) Como la componente \hat{z} es normal al plano que limita los dieléctricos, obtenemos las componentes normales de la siguiente forma:

$$E_{1n} = \mathbf{E}_1 \cdot \hat{n} = \mathbf{E}_1 \cdot \hat{z} = 3$$

$$\mathbf{E}_{1n} = 3\hat{z}$$

$$E_{2n} = (\mathbf{E}_{2n} \cdot \hat{z})\hat{z}$$

Además,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = 5\hat{x} - 2\hat{y}$$

De esta forma,

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = 5\hat{x} - 2\hat{y}$$

Similarmente,

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \Rightarrow \epsilon_{r2}E_{2n} = \epsilon_{r1}E_{1n}$$

$$\mathbf{E}_{2n} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}E_{1n} = 4\hat{z}$$

Finalmente,

$$\boxed{\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2n} + \mathbf{E}_{2t} = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z}}$$

- b) Sean α_1 y α_2 los ángulos que \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 hacen con la interfase, y sean θ_1 y θ_2 los ángulos que hacen con la normal de la interfase. Así, se tiene la siguiente relación entre ángulos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 90^\circ - \theta_1 \\ \alpha_2 &= 90^\circ - \theta_2\end{aligned}$$

Como tenemos $|E_{1n}| = 3$ y $|E_{1t}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Luego, $\tan \theta_1 = E_{1t}/E_{1n} = 1,795 \Rightarrow \theta_1 = 69,9^\circ$. Por lo tanto, $\alpha = 29,1^\circ$. Realizando el mismo procedimiento para \mathbf{E}_2 , se tiene que $\theta_2 = 53,4^\circ$ y $\alpha_2 = 36,6^\circ$.

Así:

$\alpha_1 = 29,1^\circ$	$\alpha_2 = 36,6^\circ$
-------------------------	-------------------------

Notar que la relación, $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$ se satisface.

Problema 2

La región $y \leq 0$ consiste de un conductor perfecto mientras que $y \geq 0$ es un medio dieléctrico con $\epsilon_{1r} = 2$. Si hay una carga superficial de $2nC/m^2$ en el conductor, determine \mathbf{E} y \mathbf{D} en los puntos:

- a) A(3, -2, 2)
- b) B(-4, 1, 5)

Solución:

- a) Como el punto A se encuentra dentro del material conductor $y = -2 < 0$, se tiene que el campo interno es:

$\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$

- b) El punto B se encuentra dentro del material dieléctrico $y = 1 > 0$. Luego, tenemos:

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV \\ -D_1^\perp \Delta S + D_2^\perp \Delta S &= \rho_s \Delta S \\ -D_1^\perp + D_2^\perp &= \rho_s\end{aligned}$$

Como ya vimos que en el material conductor $D_1^\perp = 0$, tenemos que $D_2^\perp = \rho_s$, es decir, $\mathbf{D}_2 = 2nC/m^2 \hat{y}$.

Luego,

$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 113,1V/m \hat{y}.$

Problema 3

Una barra de metal conductora de conductividad σ es doblada para formar un sector de 90° plano de radio interior a , radio exterior b y grosor t .

- Encuentre la resistencia de la barra entre las superficies curvadas en $\rho = a$ y $\rho = b$.
- Encuentre la resistencia entre las superficies horizontales en $z = 0$ y $z = t$.

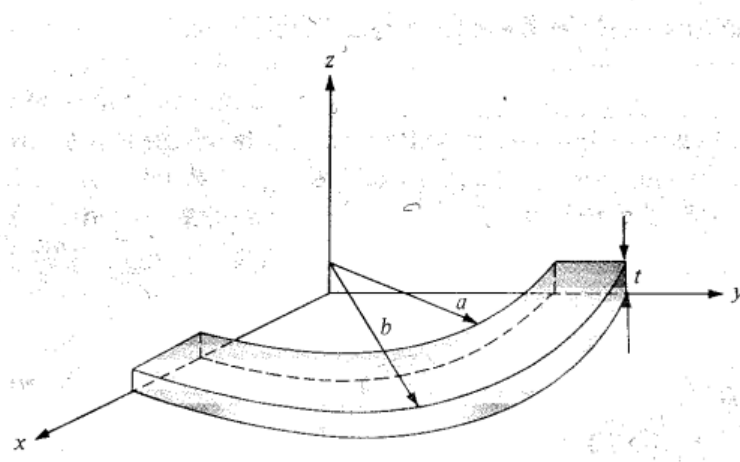


Figura 26: Barra doblada en 90°

Solución:

- Entre las superficies curvadas de radio $\rho = a$ y $\rho = b$, la barra tiene una sección transversal no uniforme, y por lo tanto, la ecuación $R = \rho \frac{l}{A}$ no aplica. Para lidiar con este problema, tendremos que usar la ecuación:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

Sea V_0 un potencial que se mantiene entre las superficies a analizar, tal que $V(\rho = a) = 0$ y $V(\rho = b) = V_0$. Resolvemos para V en la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Como $V = V(\rho)$:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

Como el caso $\rho = 0$ está excluido, podemos multiplicar por ρ e integrar una vez:

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A \longrightarrow \frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

Integramos nuevamente, obteniendo:

$$V = A \ln \rho + B$$

Ahora, determinamos A y B usando las condiciones de borde $V(\rho = a) = 0$ y $V(\rho = b) = V_0$.

$$V(\rho = a) = 0 \Rightarrow 0 = A \ln a + B \longrightarrow B = -A \ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \Rightarrow V_0 = A \ln b + B = A \ln b - A \ln a = A \ln b/a \longrightarrow A = \frac{V_0}{\ln b/a}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$V(\rho) = \frac{V_0}{\ln b/a} \ln \rho/a$$

Luego,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho} \hat{\rho} = -\frac{V_0}{\rho \ln b/a} \hat{\rho}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz \hat{\rho}$$

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z_0}^t \frac{\sigma V_0}{\rho \ln b/a} dz \rho d\phi = \frac{\pi}{2} \frac{t V_0 \sigma}{\ln b/a}$$

Finalmente,

$$\boxed{R = \frac{V_0}{I} = \frac{2 \ln b/a}{\sigma \pi t}}$$

- b) Nuevamente, sea V_0 el potencial entre las dos superficies horizontales tal que $V(z = 0) = 0$ y $V(z = t) = V_0$, $V = V(z)$, así la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ es:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Integrando dos veces, obtenemos:

$$V(z) = Az + B$$

Aplicamos las condiciones de borde para determinar A y B :

$$V(z = 0) = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$V(z = t) = V_0 \longrightarrow V_0 = At$$

Por lo tanto,

$$V = \frac{V_0}{t} z$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\hat{z} = -\frac{V_0}{t}\hat{z} \\
\mathbf{J} &= \sigma\mathbf{E} = -\frac{\sigma V_0}{t}\hat{z}, \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi d\rho \hat{z} \\
I &= \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=a}^b \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{V_0\sigma}{t} \rho d\phi d\rho \\
&= \frac{V_0\sigma}{t} \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_a^b = \frac{V_0\sigma\pi(b^2 - a^2)}{4t}
\end{aligned}$$

Así,

$$R' = \frac{V_0}{I} = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$

En este caso, se podía resolver más fácilmente, pues la sección transversal si es uniforme y se podría haber utilizado la ecuación típica $R = \rho \frac{l}{A}$ llegando al mismo resultado.

8. Ecuaciones de Maxwell

Problema 1

La espira que muestra la figura se encuentra dentro de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 50mWb/m^2 \hat{x}$. Si el lado DC de la espira, atraviesa las líneas de flujo a una velocidad de $50Hz$, y la espira se encuentra en el plano yz en el instante $t = 0$, obteniendo el máximo de flujo, determine:

- La fem inducida en el instante $t = 1ms$
- La corriente inducida en el instante $t = 3ms$

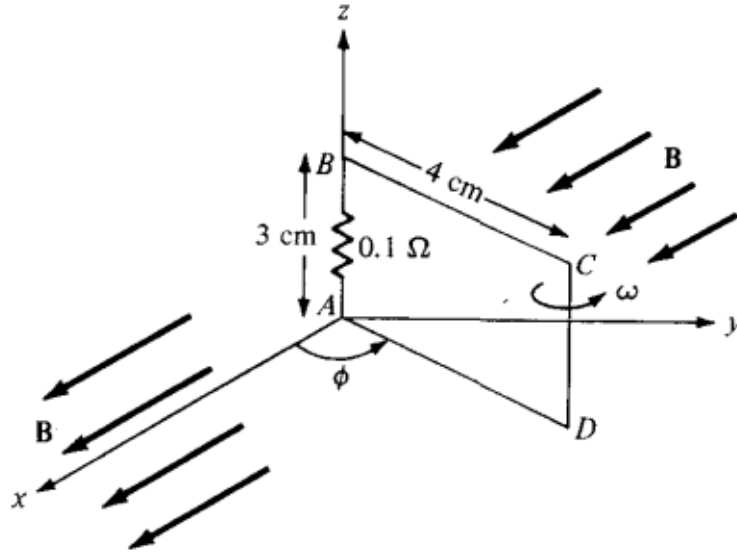


Figura 27: Sistema a analizar

Solución:

a) Para resolver este problema, podemos usar la ley de Faraday-Lenz:

$$V = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Sabemos que el movimiento de la espira, provocará una variación sinusoidal del flujo magnético a través de la espira. Como en el instante $t = 0$, se tiene el máximo de flujo, sabemos que el flujo tendrá la siguiente forma:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_{max} \cos(2\pi ft)$$

En este caso, se tiene que $\Phi_{max} = 50 \text{ mWb/m}^2 \cdot 0,04 \text{ m} \cdot 0,03 \text{ m} = 60 \mu \text{Wb}$.

Así, se tiene que la fem inducida es:

$$V = -\frac{d}{dt} \Phi(t) = 60 \mu \text{Wb} \cdot 2\pi f \sin(2\pi ft)$$

Evalutando $f = 50 \text{ Hz}$ y $t = 1 \text{ ms}$ se tiene que la fem inducida en dicho instante es de:

$V = 5,825 \text{ mV}$

b) La corriente inducida, viene dada por la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{60\mu Wb \cdot 2\pi f \sin(2\pi ft)}{0,1\Omega}$$

$$\boxed{I = 0,152A}$$

Problema 2

En un medio caracterizado por $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$, ϵ_0 y:

$$\mathbf{E} = 20 \sin(10^8 t - \beta z) \hat{y} \text{ V/m}$$

Encuentre β y \mathbf{H} .

Solución:

A partir de la ley de Gauss para campo eléctrico, se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E}{\partial y} = 0$$

Luego, usando la ley de Faraday-Lenz, tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \int \nabla \times \mathbf{E} dt$$

Calculamos el rotacional de \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} \\ &= 20\beta \cos(10^8 t - \beta z) \hat{x} + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\mu} \int \cos(10^8 t - \beta z) dt \hat{x}$$

$$\boxed{\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{10^8 \mu} \sin(10^8 t - \beta z) \hat{x}}$$

Es importante destacar que se cumple la ley de Gauss para campos magnéticos:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

Luego, la ley de Ampere nos dice:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Como $J = \sigma \mathbf{E} = 0$, se tiene:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \int \nabla \times \mathbf{H} dt$$

Donde,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_x}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \hat{z} \\ &= \frac{20\beta^2}{10^8 \mu} \cos(10^8 t - \beta z) \hat{y} + 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para el campo eléctrico, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{20\beta^2}{10^8 \mu \epsilon} \int \cos(10^8 t - \beta z) dt \hat{y} \\ &= \frac{20\beta^2}{10^{16} \mu \epsilon} \sin(10^8 t - \beta z) \hat{y} \end{aligned}$$

Comparando con el campo eléctrico entregado, se tiene:

$$\frac{20\beta^2}{10^{16} \mu \epsilon} = 20$$

Finalmente,

$$\beta = \pm 10^8 \sqrt{\mu \epsilon} = \pm 10^8 \sqrt{\mu \cdot 4\epsilon_0}$$

$$\boxed{\beta = \pm \frac{2}{3}}$$