Clase 26
WG Rectangulares: Propagación

Sadiku, M. (2018).*Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 654 – 665

Javier Silva Orellana

jjsilva8@uc.cl

Contexto

- Ya hicimos un análisis de las ondas presentes en una WG rectangular.
- Ahora nos preocuparemos de otros aspectos asociados a la propagación de estas ondas.

- Objetivos de Aprendizaje:

  OA-18: Diseñar una guía de onda rectangular y determinar sus modos de propagación posibles, así como las pérdidas provocadas por el uso de conductores no perfectos.

Contenidos

- Frecuencia de Corte
- Modo dominante TE_{10}

Frecuencia de corte

- De capítulos anteriores, definimos que la frecuencia de una onda en un dieléctrico sin pérdidas está dada por:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{uk}{2\pi} = \frac{k}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- Por otro lado, para guías de ondas rectangulares establecimos que:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{m\pi}{a} + \frac{n\pi}{b}$$

Frecuencia de corte

- Anteriormente, mencionamos que k_c correspondía al número de onda de corte. De modo que la frecuencia de corte será:

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

- De este modo, podemos reescribir el coeficiente de propagación:

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f^2 - f_c^2}$$

Frecuencia de corte

- Tenemos:

$$\beta = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f^2 - f_c^2}$$

- Esta expresión nos dice que solamente existirá propagación de un modo $\boldsymbol{mn}$ si $f > f_c$.
- En caso contrario, β tomará un valor imaginario, y pasará a convertirse en el **coeficiente de atenuación $\boldsymbol{\kappa}$.**
- En este sentido, la WG se comporta como un **filtro pasa-altos**.

Frecuencia de corte mínima

- Evidentemente, para un valor fijo de a y b, la frecuencia de corte será menor mientras más bajos sean los índices m y n.

- Caso TE_{mn}: en este caso corresponde al modo TE_{10}.

$$f_{c_{10}}^{TE} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- Caso TM_{mn}: vimos que el mínimo modo válido es TM_{11}

$$f_{c_{11}}^{TM} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Frecuencia de corte mínima

- Evidentemente, para un valor fijo de a y b, la frecuencia de corte será menor mientras más bajos sean los índices m y n.

- Caso TE_{mn}: en este caso corresponde al modo TE_{10}.

$$f_{c_{10}}^{TE} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- Caso TM_{mn}: vimos que el mínimo modo válido es TM_{11}.

$$f_{c_{11}}^{TM} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Notemos que $f_{c_{11}}^{TM} > f_{c_{10}}^{TE}$

Analicemos con un ejemplo

- Considere una guía de onda rectangular con $a = 6cm$ y $f = 10GHz$.
- Por dicha guía se propagan los modos TE_{10}, TE_{20}, TE_{30} y TE_{40}.
- Analice que ocurre con k, β y el ángulo de incidencia θ_i.

<u>Modo TE_{10}</u>

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 10^{10}}{3 \times 10^{8}} = 209.4$$

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{0.06} = 52.35$$

$$\beta = \sqrt{\mathrm{k}^2 - k_c^2} = 202.75$$

$$\theta_i = \sin^{-1}\frac{\beta}{k} = 75.52°$$

Analicemos con un ejemplo

- Considere una guía de onda rectangular con $a = 6cm$ y $f = 10GHz$.
- Por dicha guía se propagan los modos $TE_{10}, TE_{20}, TE_{30}$ y TE_{40}.
- Analice que ocurre con k, β y el ángulo de incidencia θ_i.

Modo TE_{20}

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 10^{10}}{3 \times 10^{8}} = 209.4$$

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{0.06} = 104.7$$

$$\beta = \sqrt{\mathrm{k}^2 - k_c^2} = 181.34$$

$$\theta_i = \sin^{-1}\frac{\beta}{k} = 60°$$

Analicemos con un ejemplo

- Considere una guía de onda rectangular con $a = 6cm$ y $f = 10GHz$.
- Por dicha guía se propagan los modos TE_{10}, TE_{20}, TE_{30} y TE_{40}.
- Analice que ocurre con k, β y el ángulo de incidencia θ_i.

<u>Modo TE_{30}</u>

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 10^{10}}{3 \times 10^{8}} = 209.4$$

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \frac{3\pi}{a} = \frac{3\pi}{0.06} = 157.1$$

$$\beta = \sqrt{\mathrm{k}^2 - k_c^2} = 138.45$$

$$\theta_i = \sin^{-1}\frac{\beta}{k} = 41.39°$$

Analicemos con un ejemplo

- Considere una guía de onda rectangular con $a = 6cm$ y $f = 10GHz$.
- Por dicha guía se propagan los modos $TE_{10}, TE_{20}, TE_{30}$ y TE_{40}.
- Analice que ocurre con k, β y el ángulo de incidencia θ_i.

<u>Modo TE_{40}</u>

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 10^{10}}{3 \times 10^{8}} = 209.4$$

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \frac{4\pi}{a} = \frac{4\pi}{0.06} = 209.4$$

$$\beta = \sqrt{\mathrm{k}^2 - k_c^2} = 0$$

$$\theta_i = \sin^{-1}\frac{\beta}{k} = 0°$$

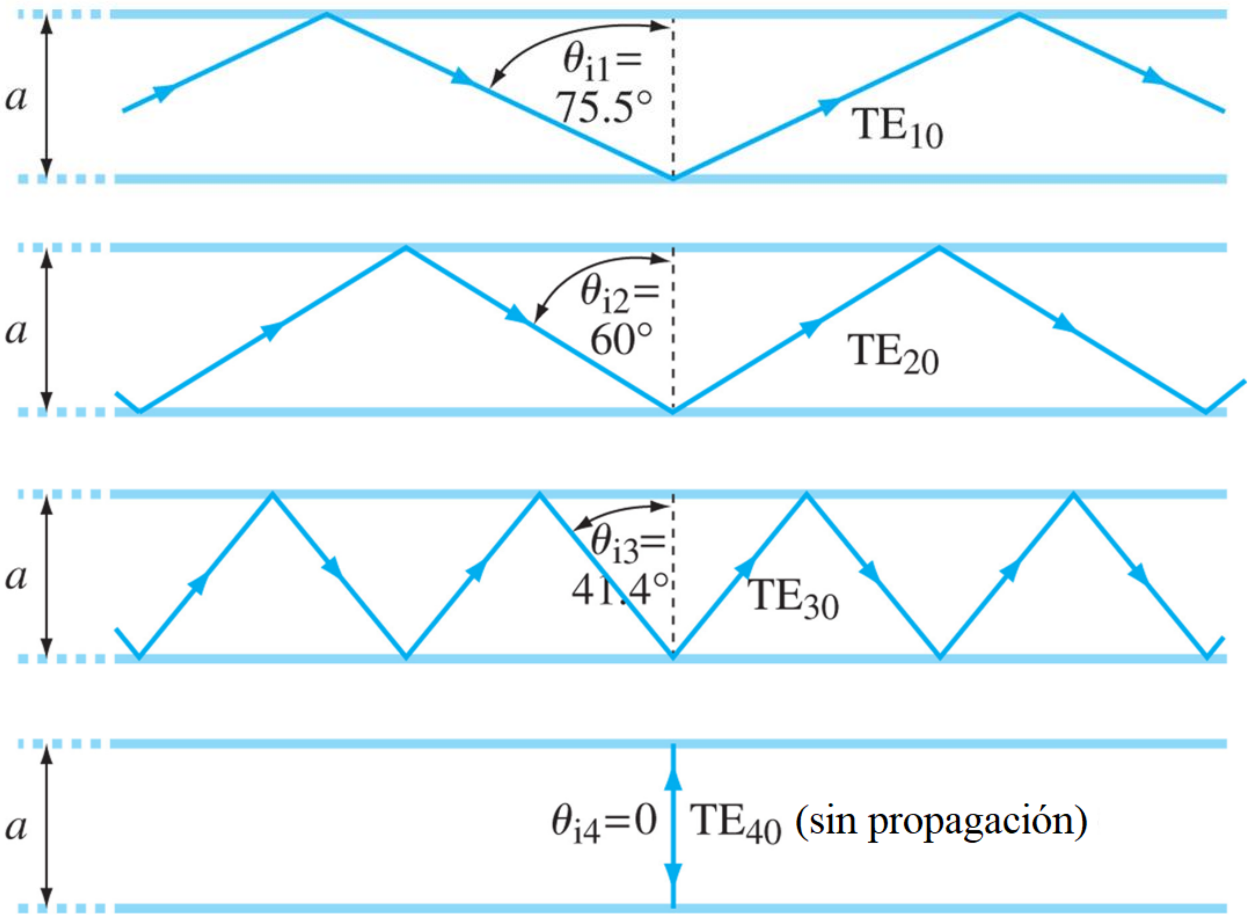
Analicemos con un ejemplo

- Notemos que, conforme aumenta m, β disminuye hasta llegar a 0.

- Notemos que cada modo tiene β distinto, lo cual se traduce en velocidades distintas.

- <u>Conclusión:</u>

  Transmitir distintos modos en simultáneo genera **dispersión modal**



Modo dominante TE_{10}

- De todos los modos, el más importante es el modo TE_{10}.
- Por esto mismo, las guías de onda están generalmente diseñadas para propagar este modo.
- De esta manera, se minimizan las pérdidas (menos reflexiones) y se evita dispersión modal (menos distorsiones).

- Formulemos las ecuaciones del modo TE_{10}

Modo dominante TE_{10}

- Reemplazando $m = 0$ y $n = 0$ en las ecuaciones generales:

$$H_x = \frac{j\beta\pi}{k_c^2 a} A_{10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu\pi}{k_c^2 a} A_{10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}$$

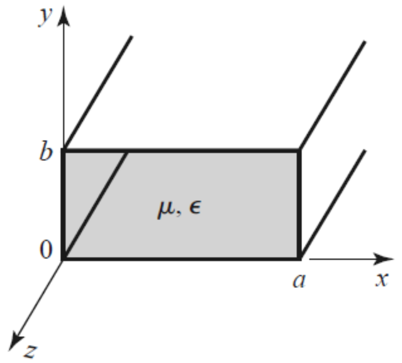
$$H_z = A_{10} \cos\frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$k_c = \frac{\pi}{a}$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Modo dominante TE_{10}



- Determinemos la potencia en este modo:

$$\bar{P}_{10} = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\vec{E}\times\vec{H}^{*}\cdot\hat{z}\,dx\,dy\right\}$$

- Como hay producto punto con $\hat{z}$, solo nos interesa la componente z del producto cruz:

$$\bar{P}_{10} = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\left(E_xH_y^{*} - E_yH_x^{*}\right)dx\,dy\right\} = -\frac{1}{2}\Re\left\{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}E_yH_x^{*}\,dx\,dy\right\}$$

$$\bar{P}_{10} = -\frac{1}{2}\Re\left\{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\frac{-j\omega\mu\pi}{k_c^2a}A_{10}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta z}\frac{-j\beta\pi}{k_c^2a}A_{10}^{*}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{+j\beta z}\,dx\,dy\right\}$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

$$P_{10} = -\frac{1}{2}\Re\left\{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\frac{-j\omega\mu\pi}{k_c^2 a}A_{10}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta z}\frac{-j\beta\pi}{k_c^2 a}A_{10}^{*}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{+j\beta z}\,dx\,dy\right\}$$

$$\bar{P}_{10} = +\frac{\pi^2\omega\mu}{2k_c^4a^2}|A_{10}|^2\Re\{\beta\}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\,dy$$

$$\bar{P}_{10} = \frac{\pi^2\omega\mu}{2\frac{\pi^4}{a^4}a^2}|A_{10}|^2\Re\{\beta\}\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$\boxed{P_{10} = \frac{\omega\mu a^3 b|A_{10}|^2}{4\pi^2}\Re\{\beta\}}$$

Guías Rectangulares: Caso TEM

$$P_{10} = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \frac{-j\omega\mu\pi}{k_c^2 a} A_{10}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \frac{-j\beta\pi}{k_c^2 a} A_{10}^{*}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{+j\beta z}\, dx\, dy\right\}$$

$$\bar{P}_{10} = \frac{\pi^2\omega\mu}{2k_c^4 a^2}|A_{10}|^2\Re\{\beta\}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx\, dy$$

$$\bar{P}_{10} = \frac{\pi^2\omega\mu}{2\frac{\pi^4}{a^4}a^2}|A_{10}|^2\Re\{\beta\}\left(\frac{ab}{2}\right)$$

Solo hay potencia real cuando hay propagación

$$\boxed{P_{10} = \frac{\omega\mu a^3 b|A_{10}|^2}{4\pi^2}\Re\{\beta\}}$$

Atenuación

- Cuando $f < f_c$:

$$\beta = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f^2 - f_c^2} = j2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{|f^2 - f_c^2|}$$

- Al convertirse en un valor imaginario, β genera una atenuación que se incorpora a la constante κ.

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{cz}$$

- Los modos que generan esta situación se conocen como **modos de corte** o **modos evanescentes**.

Atenuación

- Consideremos otros tipos de pérdidas no asociadas a modos.
- En este caso estarán principalmente dadas por el dieléctrico y por las paredes conductoras.

Pérdidas en el dieléctrico

- En este caso necesitamos usar permitividad compleja:

$$\gamma = \alpha_d + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \sqrt{k_c^2 - k^2 + jk^2\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

- En la práctica, las pérdidas en los dieléctricos son bajas, **pero no nulas**, por lo que podemos usar la expansión de Taylor

$$\sqrt{a^2 + x^2} \approx a + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}, \quad \text{para } x \ll a$$

Pérdidas en el dieléctrico

- Luego:

$$\gamma \approx \sqrt{k_c^2 - k^2} + j\frac{\sigma k^2}{2\omega\varepsilon\sqrt{k_c^2 - k^2}} = j\beta + j\frac{\sigma k^2}{2\omega\varepsilon j\beta}$$

$$\gamma \approx \frac{\sigma k^2}{2\omega\varepsilon\beta} + j\beta$$

- De modo que:

$$\boxed{\alpha_d = \frac{\sigma k^2}{2\omega\varepsilon\beta}}$$

Pérdidas en las paredes conductoras

- Dado que hay una componente eléctrica transversal, esta incide normalmente sobre las paredes del conductor, generando una corriente $\mathbf{J}_t$. Para el modo TE_{10} la corriente por unidad de área es:

$$\mathbf{J}_t = \sigma \mathbf{E}_x = \sigma E_{0x} T e^{-\gamma z}\, \mathbf{a}_x \quad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

- Para tener la corriente superficial total por unidad de ancho:

$$\mathbf{J}_s = \int_0^{\infty} \mathbf{J}_t dz = \sigma E_{0x} T \left(\int_0^{\infty} e^{-\gamma z} dz \right) \mathbf{a}_x = \frac{\sigma E_{0x} T}{\gamma} \mathbf{a}_x \; \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

Pérdidas en las paredes conductoras

- Al inicio de este capítulo, mencionamos que las paredes conductoras en la guía de onda son prácticamente ideales:

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad \gamma = (1+j)\frac{1}{\delta} \qquad \eta = (1+j)\frac{1}{\sigma\delta}$$

- Luego, usando η, podemos determinar el valor de T:

$$T = \frac{2\eta}{\eta + \eta_0}$$

Pérdidas en las paredes conductoras

- Finalmente, podemos determinar la potencia perdida en el conductor por unidad de superficie como:

$$P_c = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_V \mathbf{E}_x \cdot \mathbf{J}_t^* dv\right\} = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{\infty}(\hat{x}E_{0x}Te^{-\gamma z})\cdot(\hat{x}\sigma E_{0x}Te^{-\gamma z})^* dxdydz\right\}$$

$$P_c = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_V \mathbf{E}_x \cdot \mathbf{J}_t^* dv\right\} = \frac{1}{2}\sigma|E_{0x}|^2|T|^2\int_{z=0}^{\infty}(\hat{x}e^{-2\alpha z})dz$$

$$\boxed{P_c = \frac{\sigma|E_{0x}|^2|T|^2}{4\alpha}}$$

Velocidad de fase

- Por un lado, si el medio fuera el dieléctrico de la guía de onda, pero sin las restricciones de las paredes (un espacio libre), la longitud de onda sería:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- Al estar restringido a las paredes de la guía, la longitud de onda en la guía será:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$$

Velocidad de fase

- Dado que la frecuencia de corte es positiva:

$$k_c = k - \beta > 0$$

$$k > \beta$$

- En consecuencia:

$$\frac{1}{\beta} > \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} > \frac{2\pi}{k} = \lambda}$$

Velocidad de fase

- Dado que la frecuencia de corte es positiva:

$$k_c = k - \beta > 0$$

$$k > \beta$$

- En consecuencia:

$$\frac{1}{\beta} > \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} > \frac{2\pi}{k} = \lambda}$$

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta} > \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

Velocidad de fase

- Dado que la frecuencia de corte es positiva:

$$k_c = k - \beta > 0$$

$$k > \beta$$

- En consecuencia:

$$\frac{1}{\beta} > \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} > \frac{2\pi}{k} = \lambda}$$

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta} > \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

La onda se mueve más rápido en la guía que en el espacio libre

Control – Para Viernes 14 (20:00)

- Demuestre que la velocidad de grupo en una guía de onda está dada por:

$$v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Resumen

- Analizamos la frecuencia de corte de una WG y sus efectos en los distintos modos.
- Caracterizamos el modo dominante TE_{10}.
- Analizamos las pérdidas y atenuaciones en una WG real.
- Analizamos el efecto de una WG en la velocidad de propagación.

Cerrando la clase de hoy

- Finalizamos el capítulo de Guías de Ondas.
- Nos queda un último tópico para cerrar el curso.

Próxima Clase:

Antenas.

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 691 – 701.