Clase 05
Relatividad Especial

Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition: pp. 502 – 552

Javier Silva Orellana

jjsilva8@uc.cl

Contexto

- Ya estudiamos el fenómeno electrostático. Pero para entender a las cargas, debemos pensar como cargas y movernos como cargas.
- Esto ocurre a una velocidad muy alta. La física convencional no nos será de ayuda. Necesitamos la física relativista.

- Objetivos de Aprendizaje involucrados:
  - **OA-03:** Comprender los conceptos base de la Teoría de la Relatividad Especial: simultaneidad de sucesos, dilatación temporal y contracción de longitudes.
  - **OA-04:** Plantear y resolver problemas de mediana complejidad entre sistemas inerciales, empleando Transformaciones de Lorentz para la determinación de posición, tiempo, velocidad, energía, momento y fuerza.
  - **OA-05:** Determinar e interpretar la relación entre electricidad y magnetismo, empleando los elementos de la Mecánica Relativista.

Contenidos

- Sistemas Inerciales
- Simultaneidad de sucesos
- Dilatación temporal
- Contracción espacial
- Transformaciones de Lorentz
- Mecánica relativista
- Electrodinámica Relativista

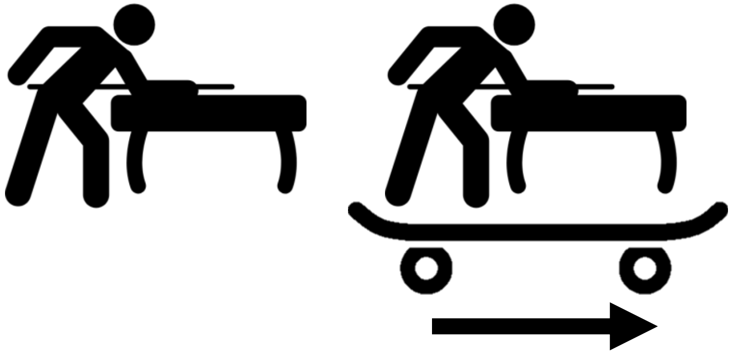
Sistemas de Referencia Inerciales

- Corresponden a un sistema de referencia a velocidad constante.
- Los fenómenos físicos son indistinguibles con respecto a cualquiera de estos sistemas de referencia.
- En un tren inercial podríamos jugar pool de la misma forma que en un bar.

Postulados de la Relatividad Especial

- <u>Postulado 1:</u>

  Todas las leyes de la física son válidas para todos los sistemas inerciales.



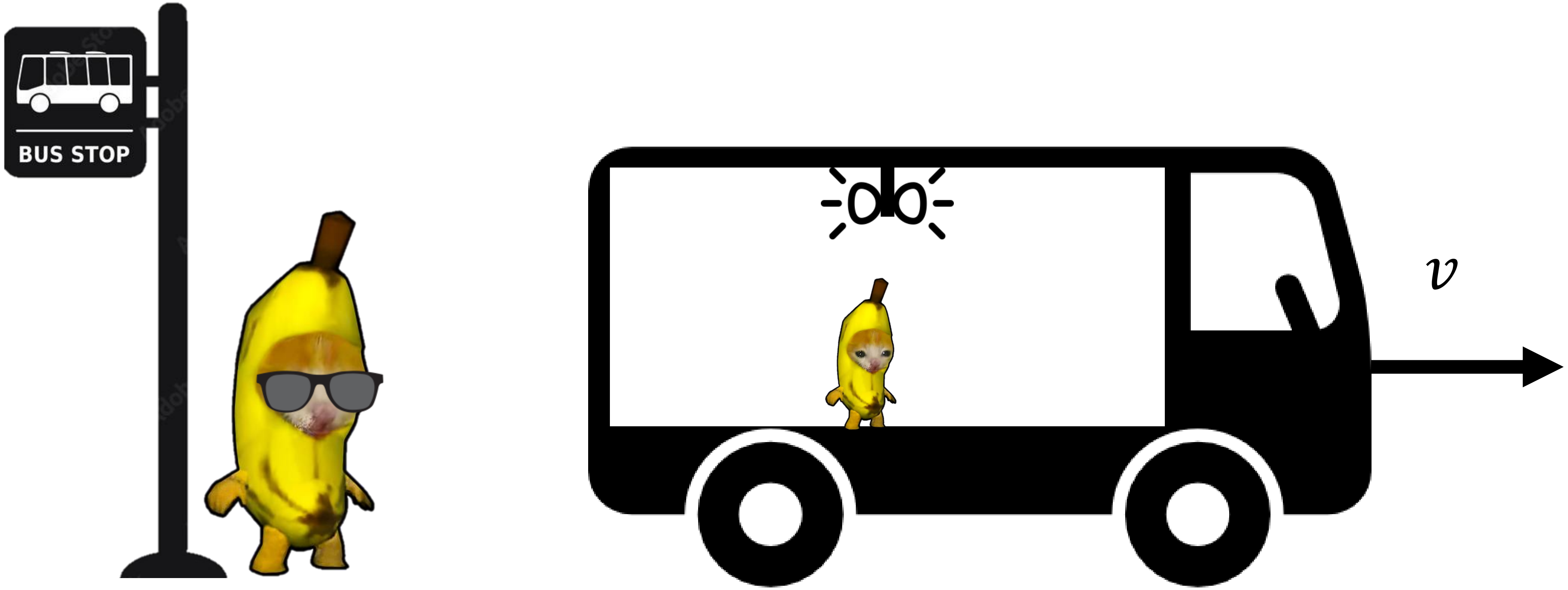
- <u>Postulado 2:</u>

  La velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los observadores, y tiene el mismo valor, independiente del estado de movimiento de la fuente.

$$c$$

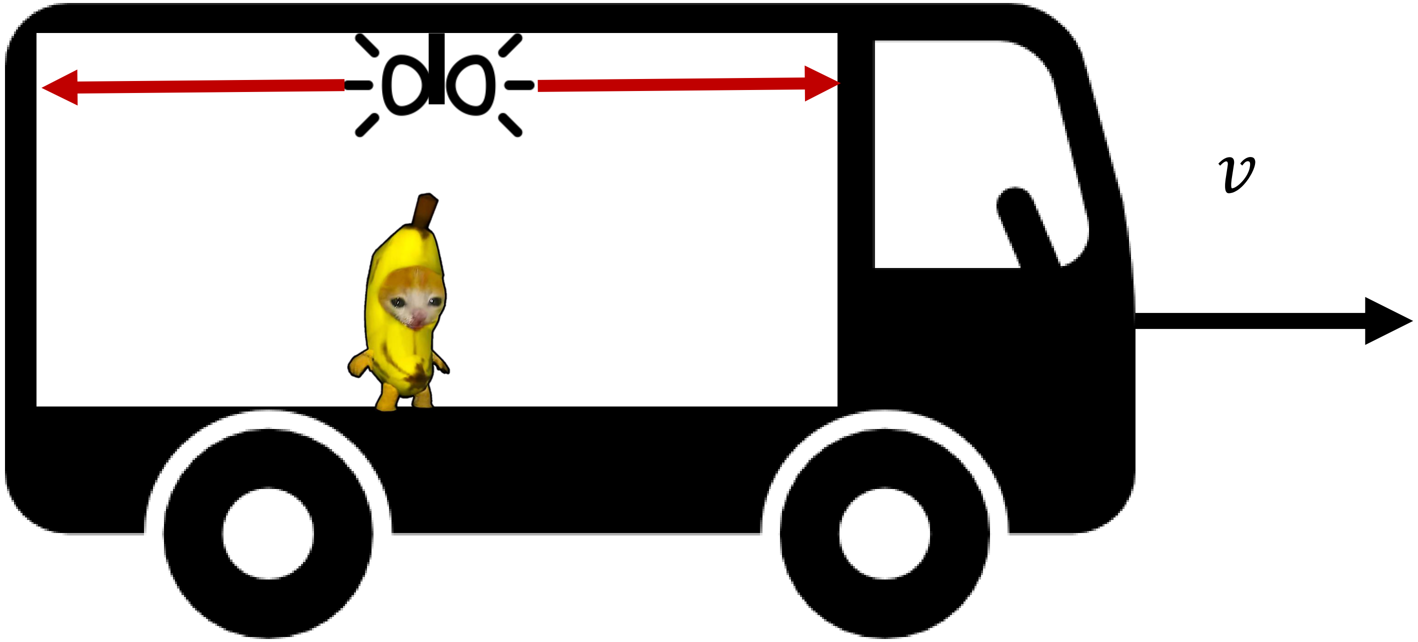
Simultaneidad de sucesos

- Experimento Mental #1



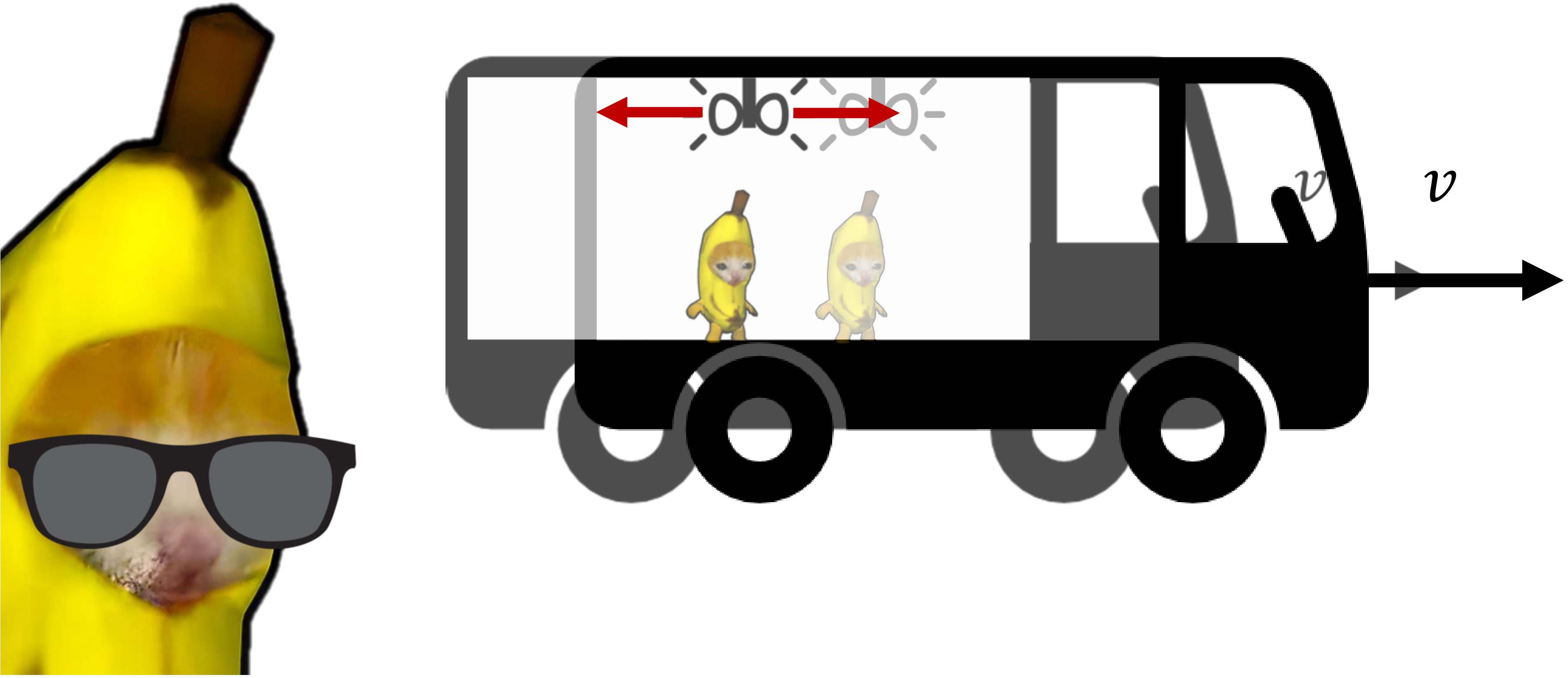
Simultaneidad de sucesos

- Sistema inercial del bus



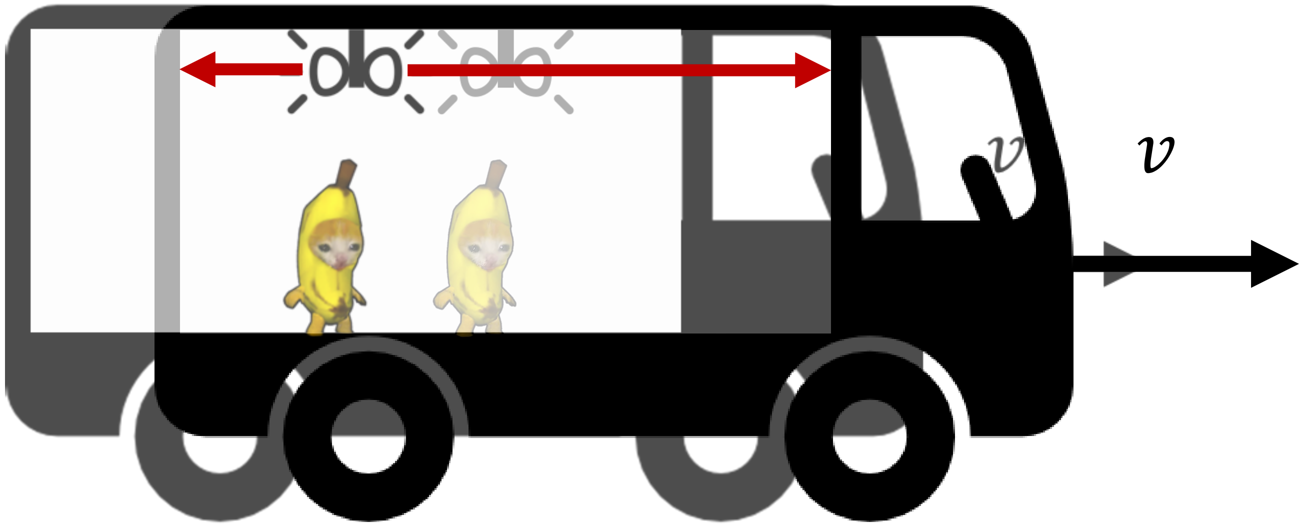
Simultaneidad de sucesos

- Sistema inercial del paradero



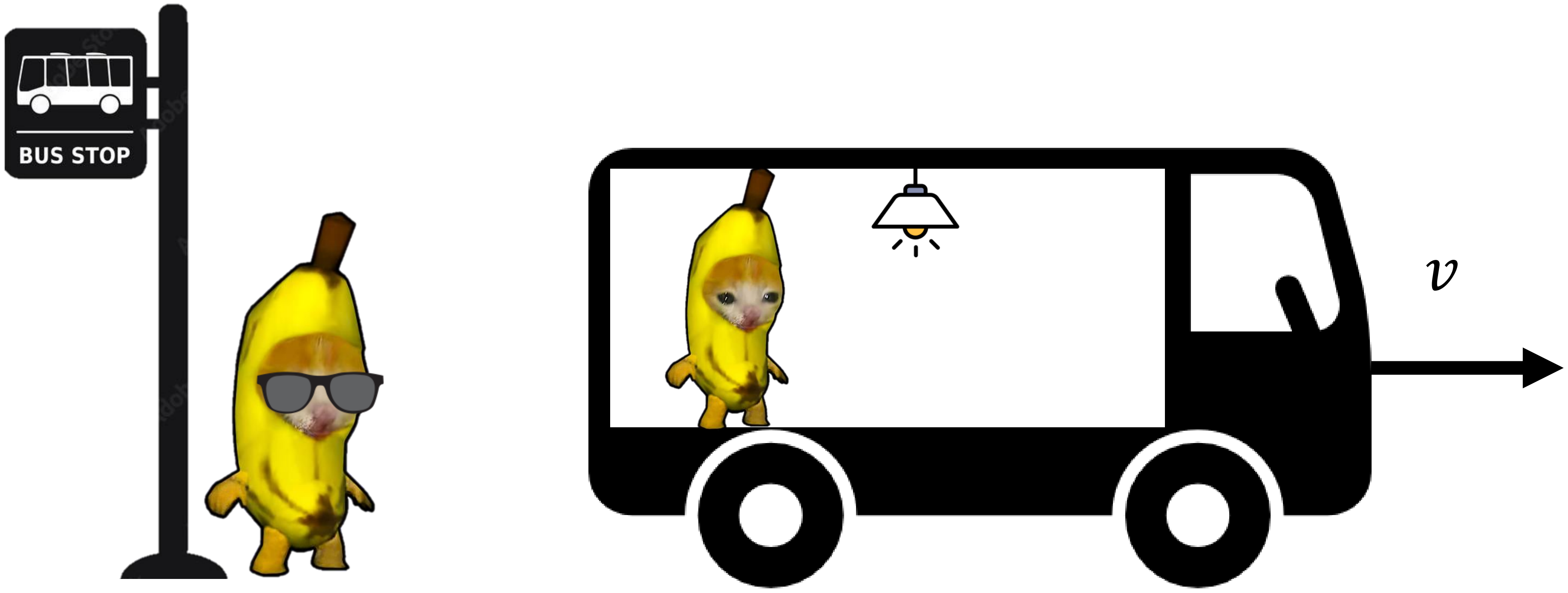
Simultaneidad de sucesos

- Sucesos simultáneos para un observador inercial, no necesariamente lo son para otro observador inercial.



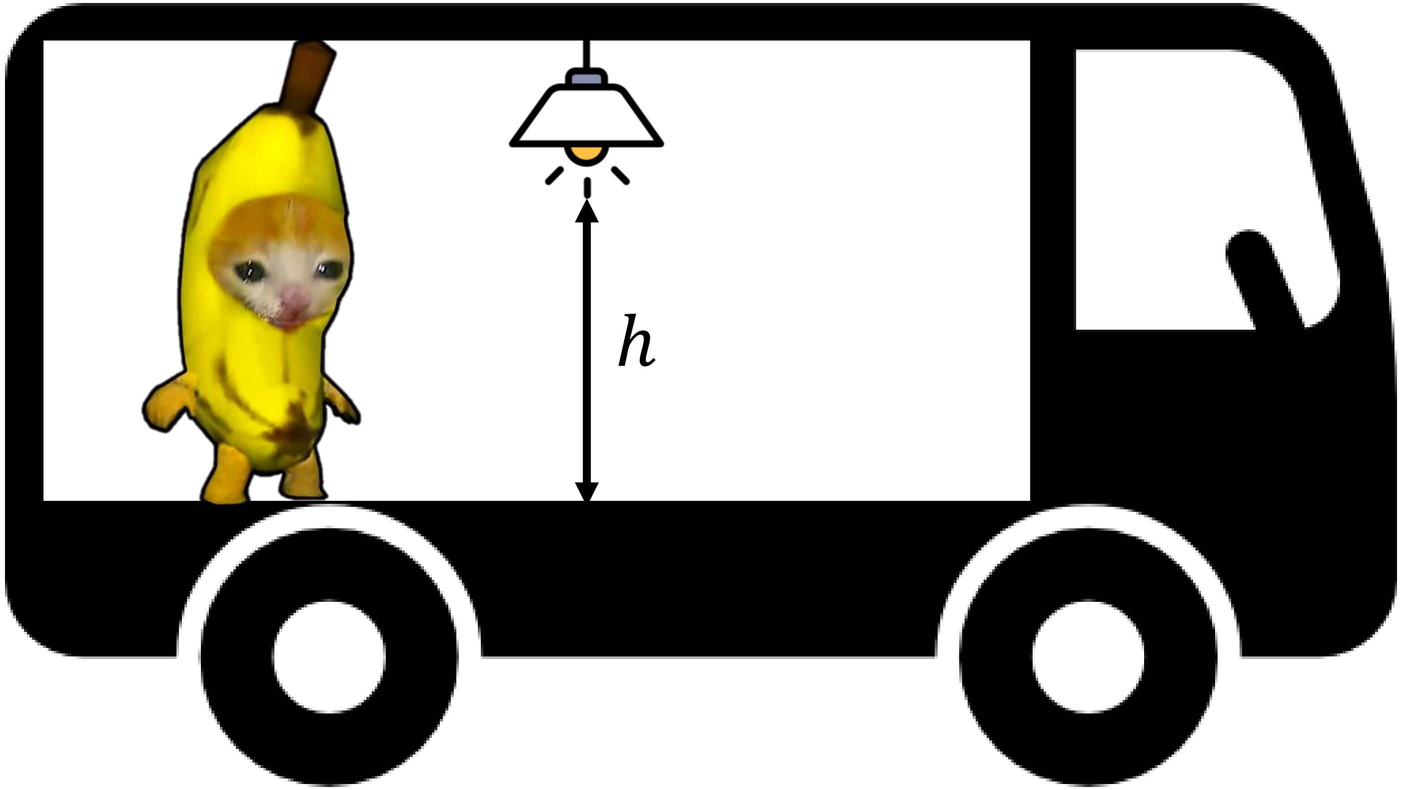
Dilatación temporal

- Experimento Mental #2



Dilatación temporal

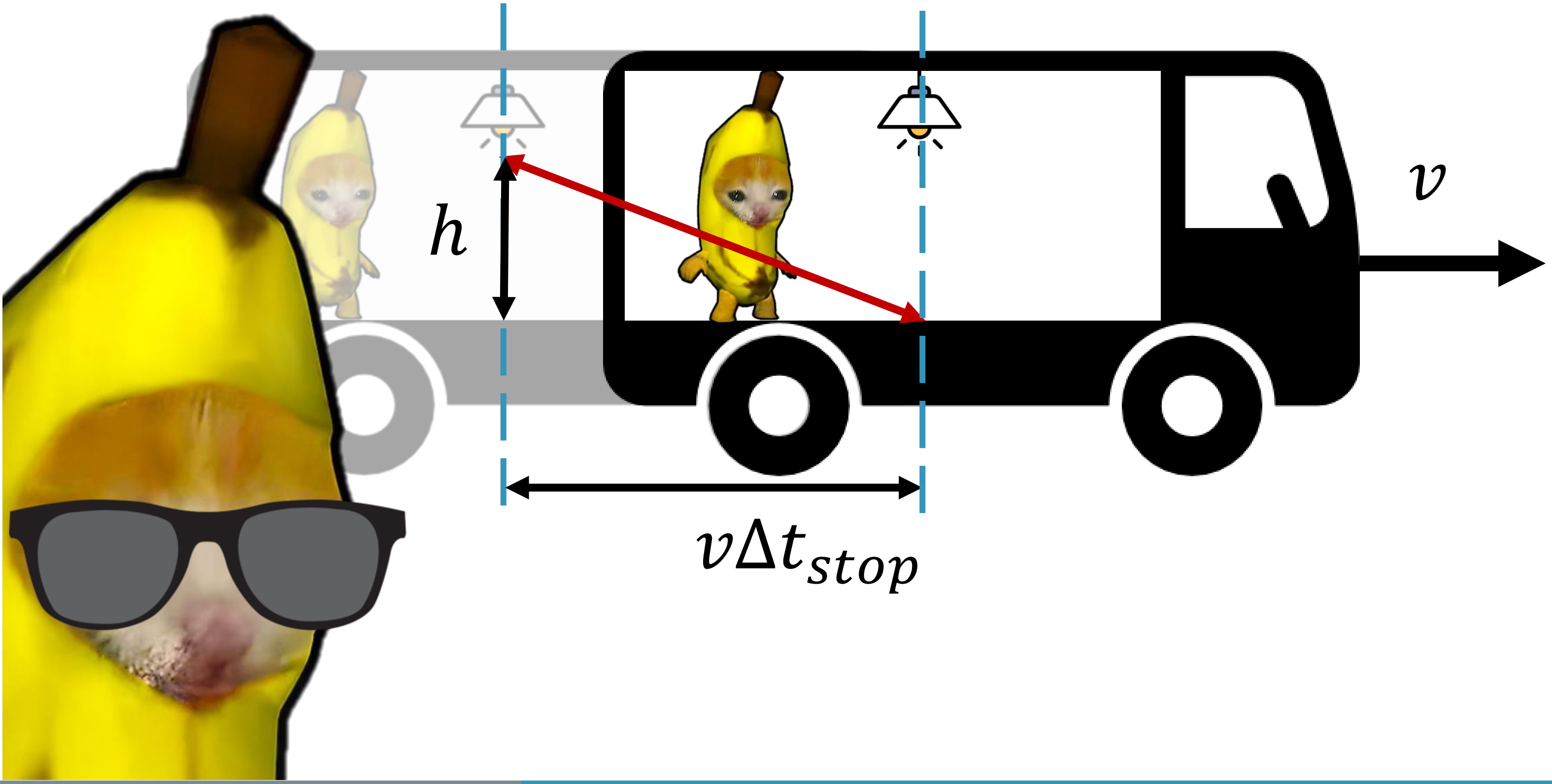
- Sistema inercial del bus



$$\Delta t_{bus} = \frac{h}{c}$$

Dilatación temporal

- Sistema inercial del paradero



$$\Delta t_{stop} = \frac{\sqrt{h^2 + v^2 \Delta t_{stop}^2}}{c}$$

$$\Delta t_{stop} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{h}{c}$$

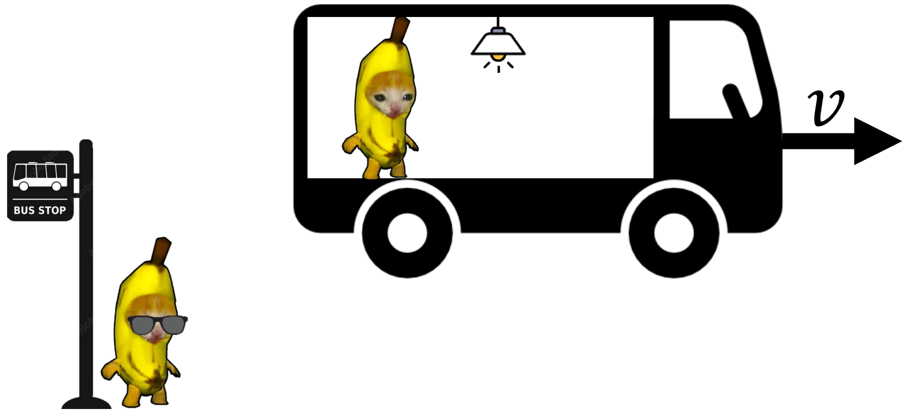
$$\Delta t_{stop} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Delta t_{bus}$$

Dilatación temporal

- Notemos que: $1 < \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma$

- Luego: $\Delta t_{bus} < \gamma \Delta t_{bus} = t_{stop}$

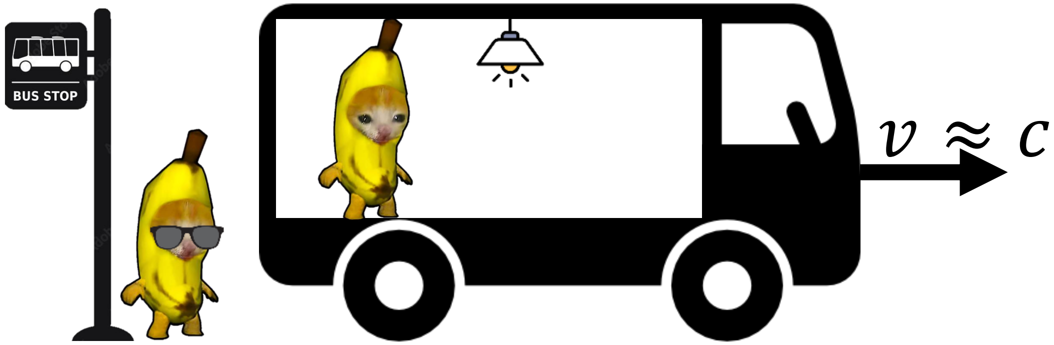
$$\boxed{\Delta t_{bus} < \Delta t_{stop}}$$



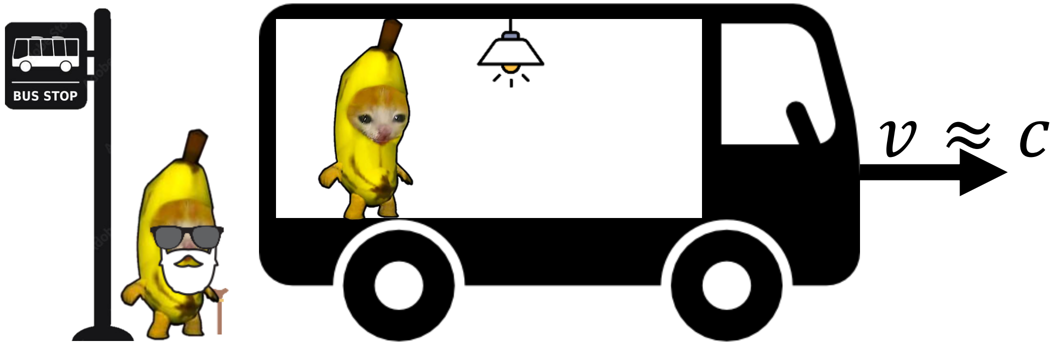
Dilatación temporal

- Para un observador en movimiento, transcurrió menos tiempo. Su reloj corre más "lento".

$$\boxed{\Delta t_{bus} < \Delta t_{stop}}$$

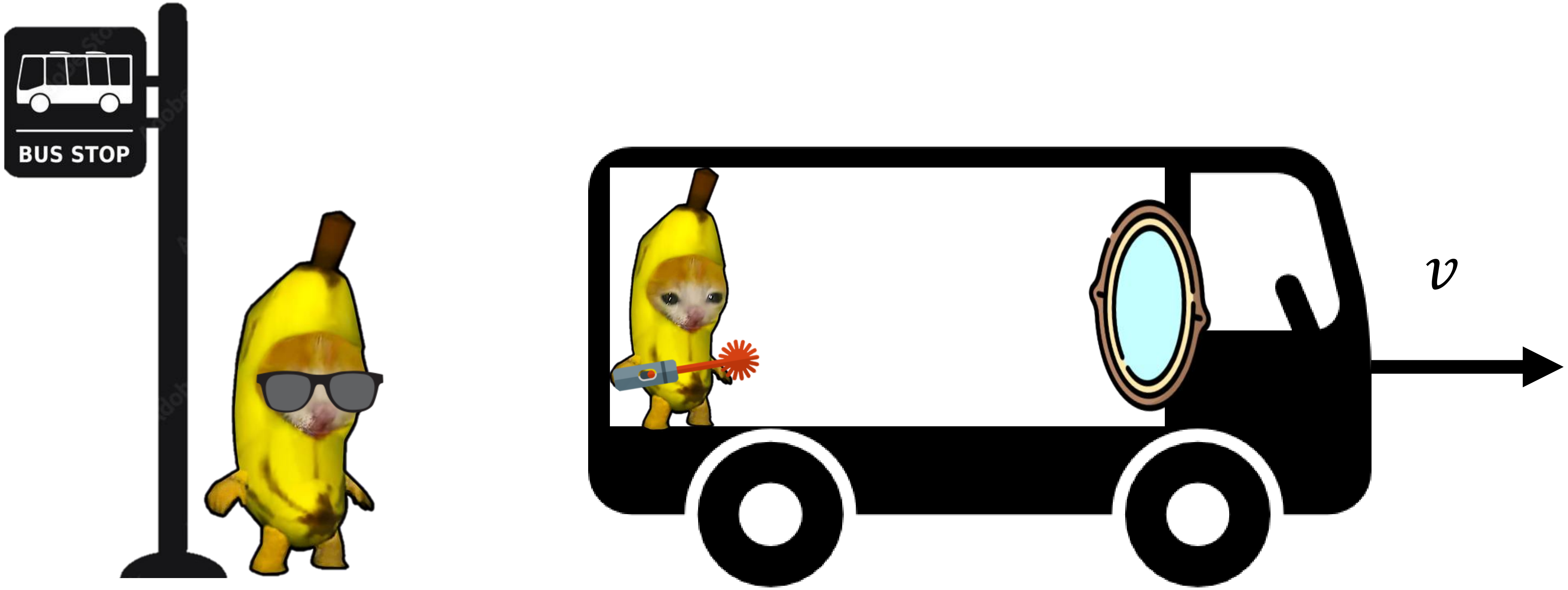


50 años...



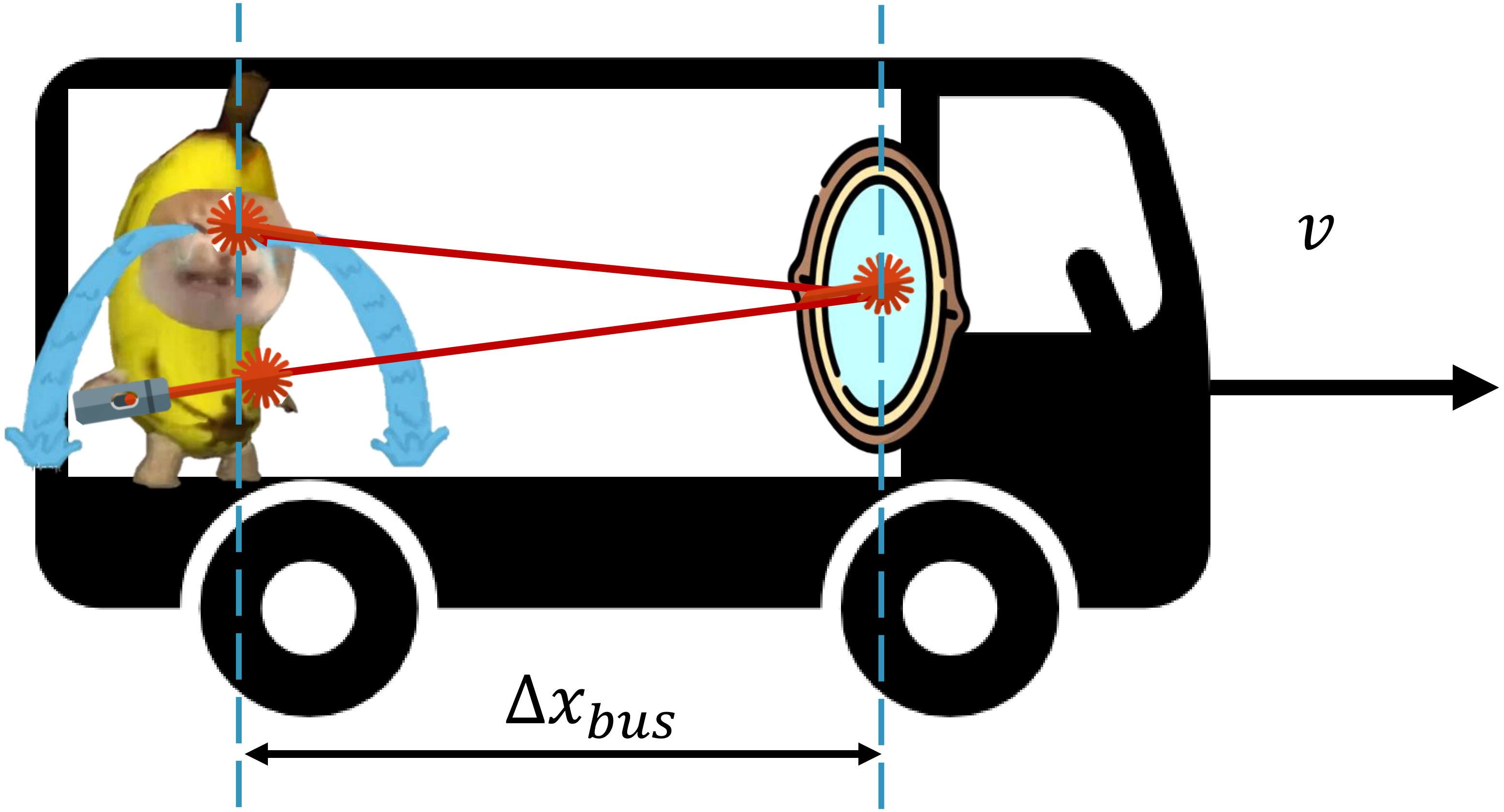
Contracción Espacial

- Experimento Mental #3



Contracción Espacial

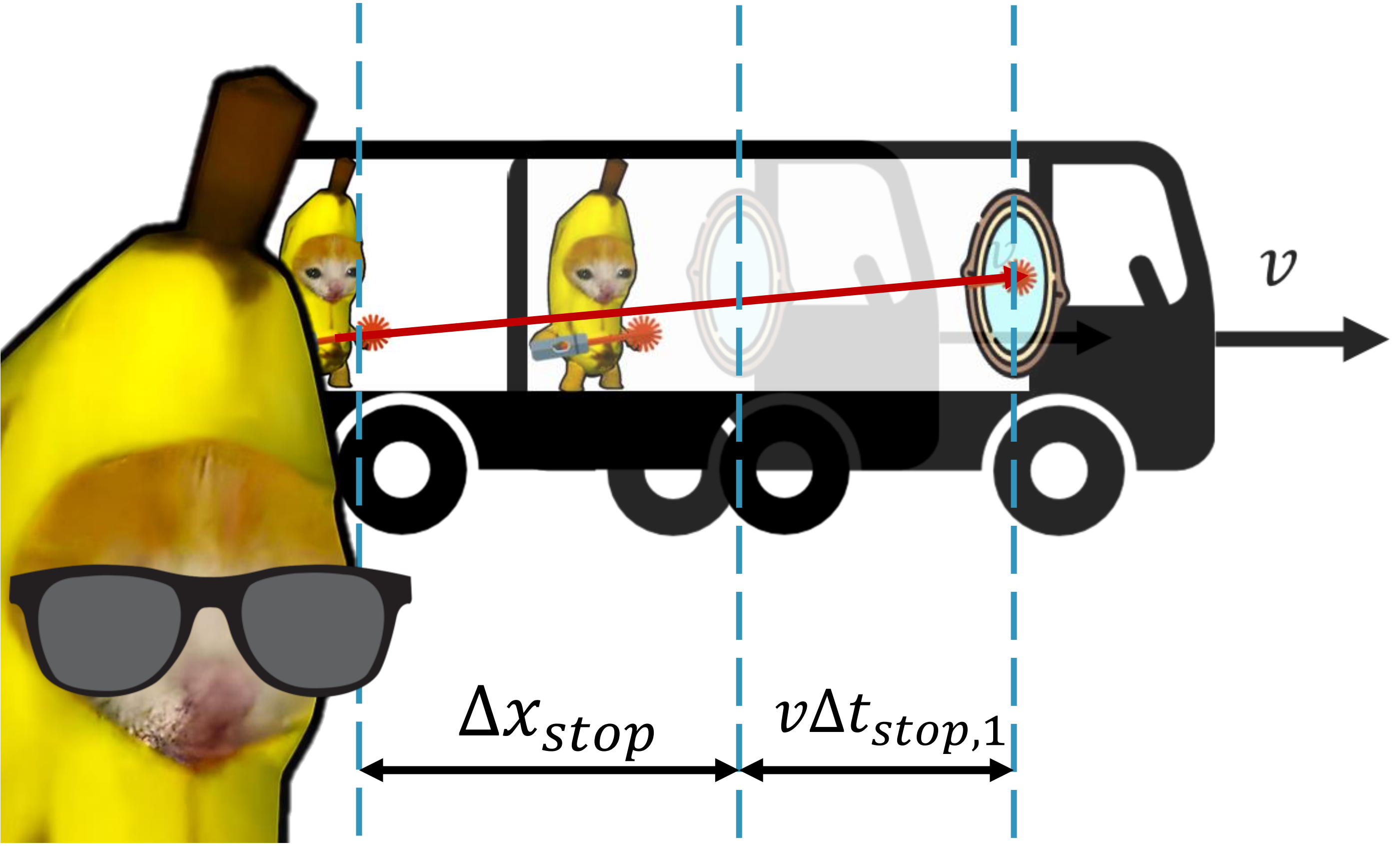
- Sistema inercial del bus



$$\Delta t_{bus} = 2\frac{\Delta x_{bus}}{c}$$

Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero

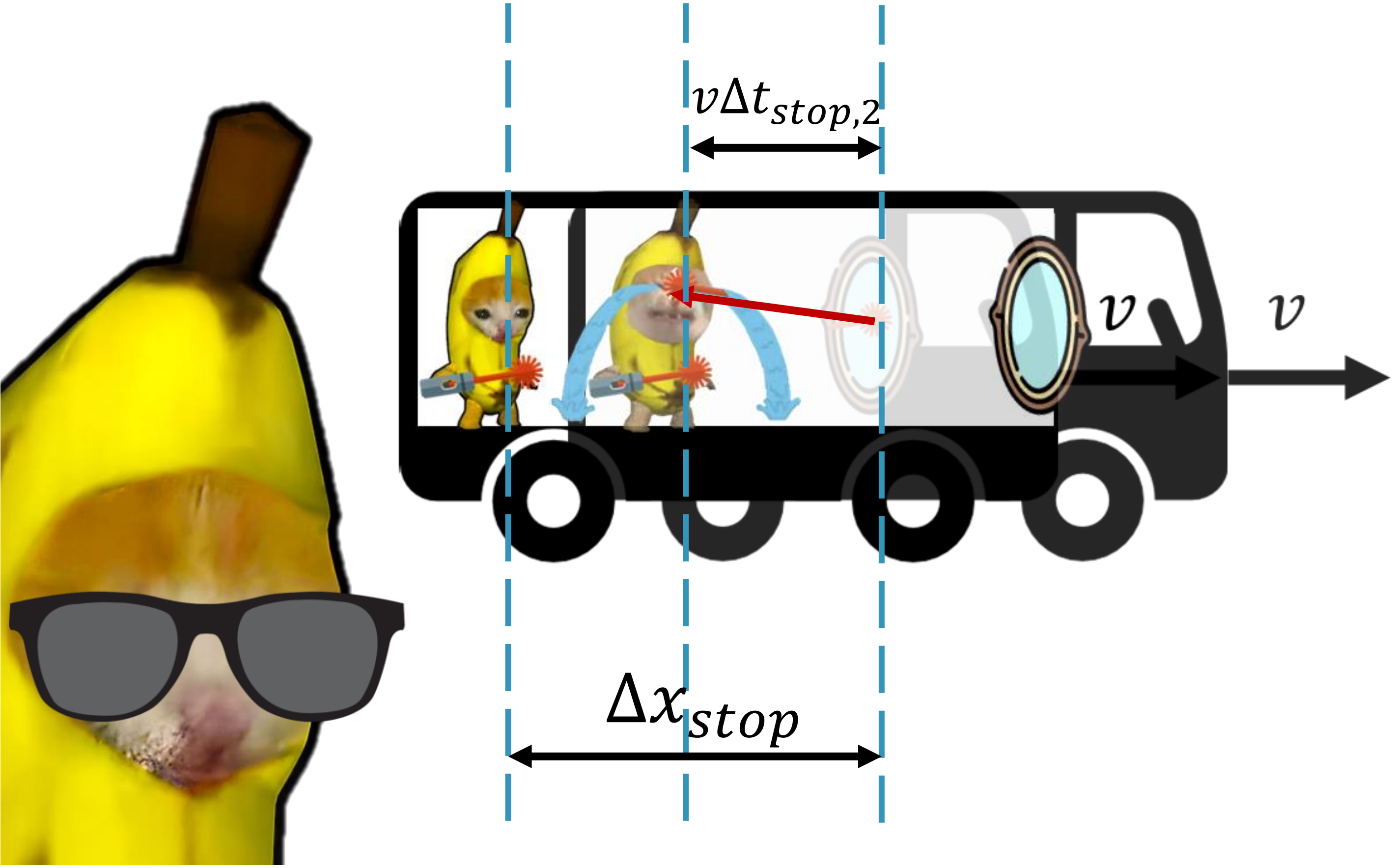


$$\Delta t_{stop,1} = \frac{\Delta x_{stop} + v\Delta t_{stop,1}}{c}$$

$$\Delta t_{stop,1} = \frac{\Delta x_{stop}}{c - v}$$

Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero



$$\Delta t_{stop,2} = \frac{\Delta x_{stop} - v\Delta t_{stop,2}}{c}$$

$$\Delta t_{stop,2} = \frac{\Delta x_{stop}}{c+v}$$

Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero

$$\Delta t_{stop,1} = \frac{\Delta x_{stop}}{c - v} \qquad \Delta t_{stop,2} = \frac{\Delta x_{stop}}{c + v}$$

$$\Delta t_{stop} = \Delta t_{stop,1} + \Delta t_{stop,2} = 2\frac{\Delta x_{stop}}{c}\frac{1}{1 - (v^2/c^2)}$$

Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero

$$\Delta t_{bus} = 2\frac{\Delta x_{bus}}{c}$$

$$\Delta t_{stop} = 2\frac{\Delta x_{stop}}{c}\frac{1}{1-(v^2/c^2)}$$

$$\Delta t_{stop} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\Delta t_{bus}$$

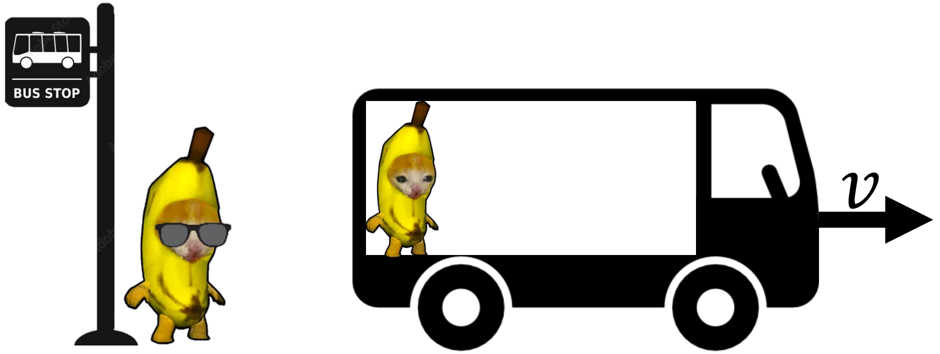
$$\boxed{\Delta x_{stop} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,\Delta x_{bus}}$$

Contracción espacial

- Notemos que: $1 > \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma}$

- Luego: $\Delta x_{bus} > \frac{1}{\gamma}\Delta x_{bus} = \Delta x_{stop}$

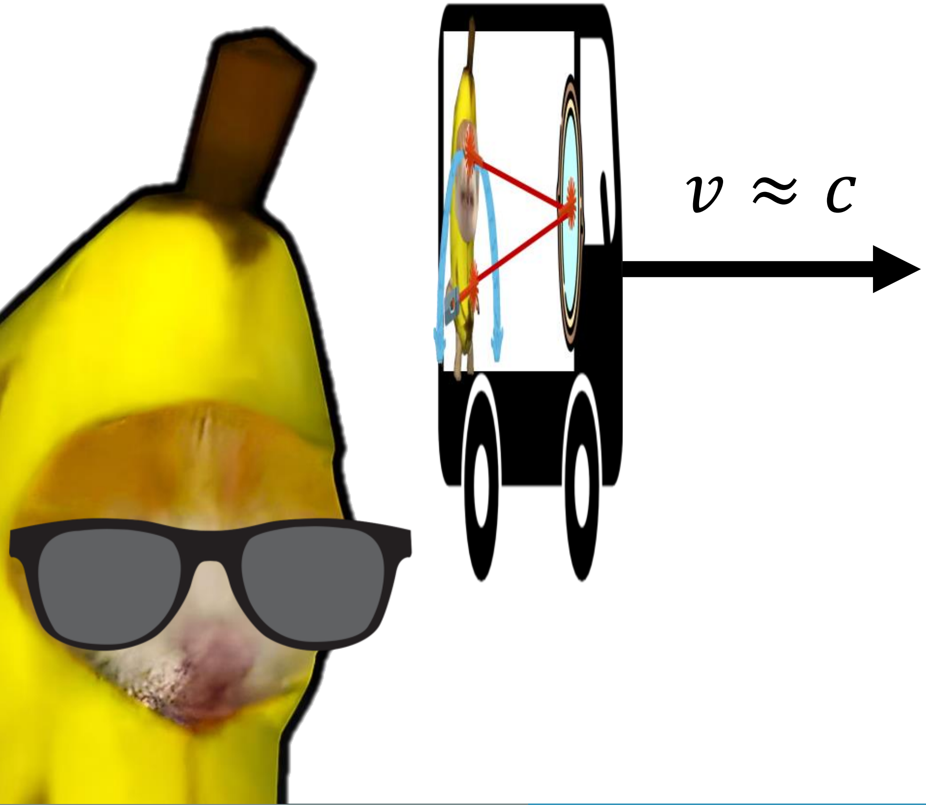
$$\boxed{\Delta x_{bus} > \Delta x_{stop}}$$



Contracción espacial

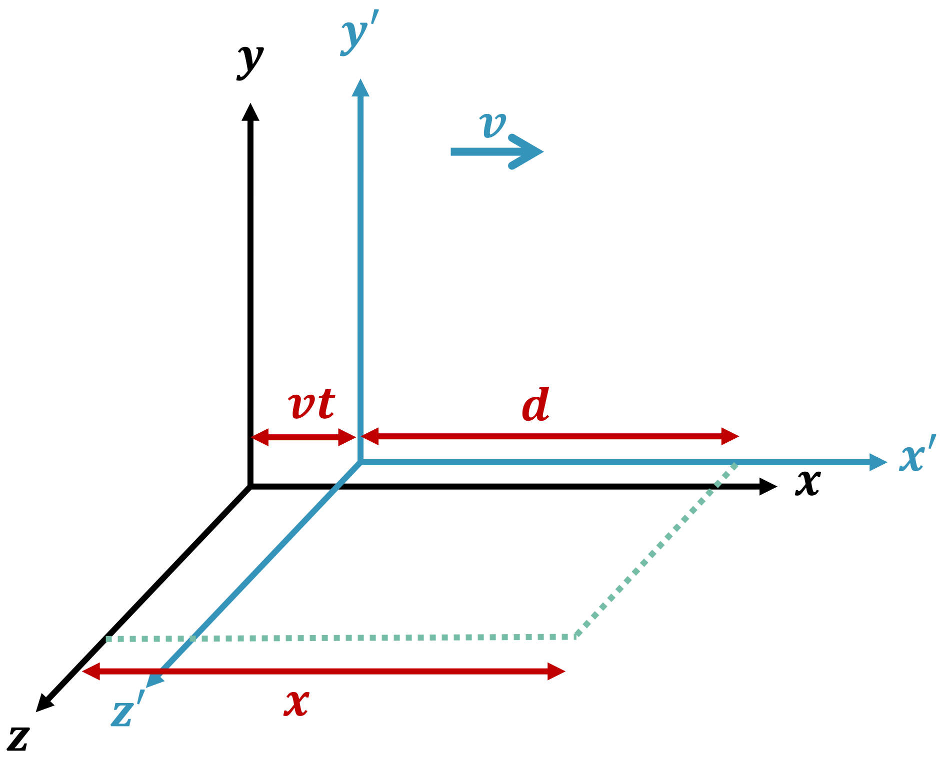
- Para un observador estático, las distancias parecieran acortarse.

$$\boxed{\Delta x_{bus} > \Delta x_{stop}}$$



Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Galilei



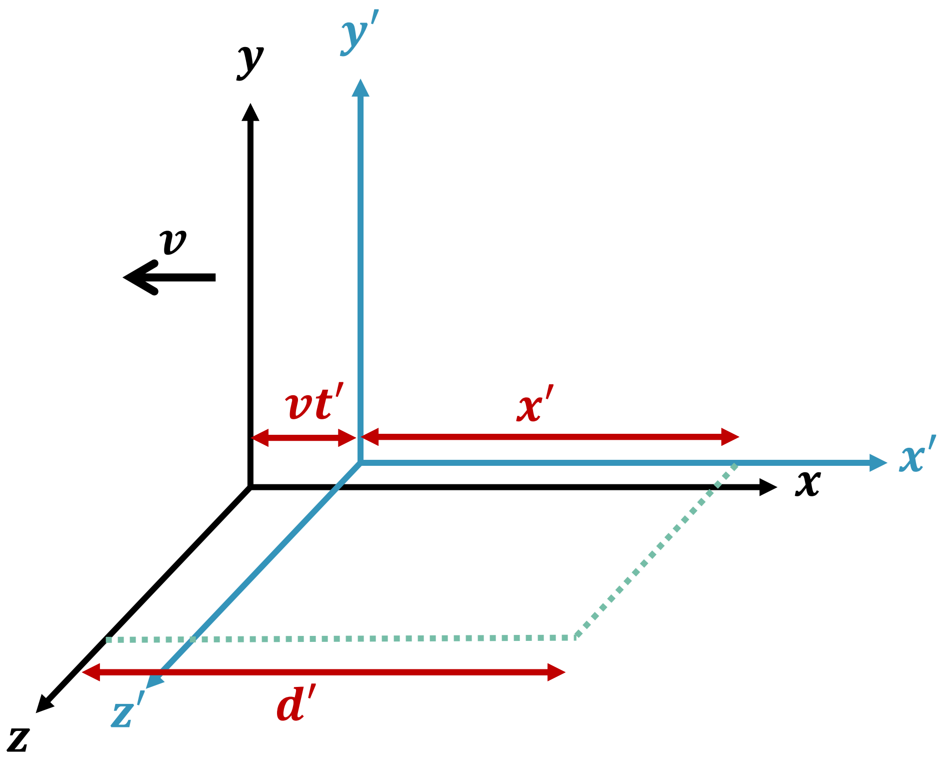
$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

A velocidades pequeñas esto funciona.

Sin embargo, fallan cuando nos acercamos a c.

Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Lorentz



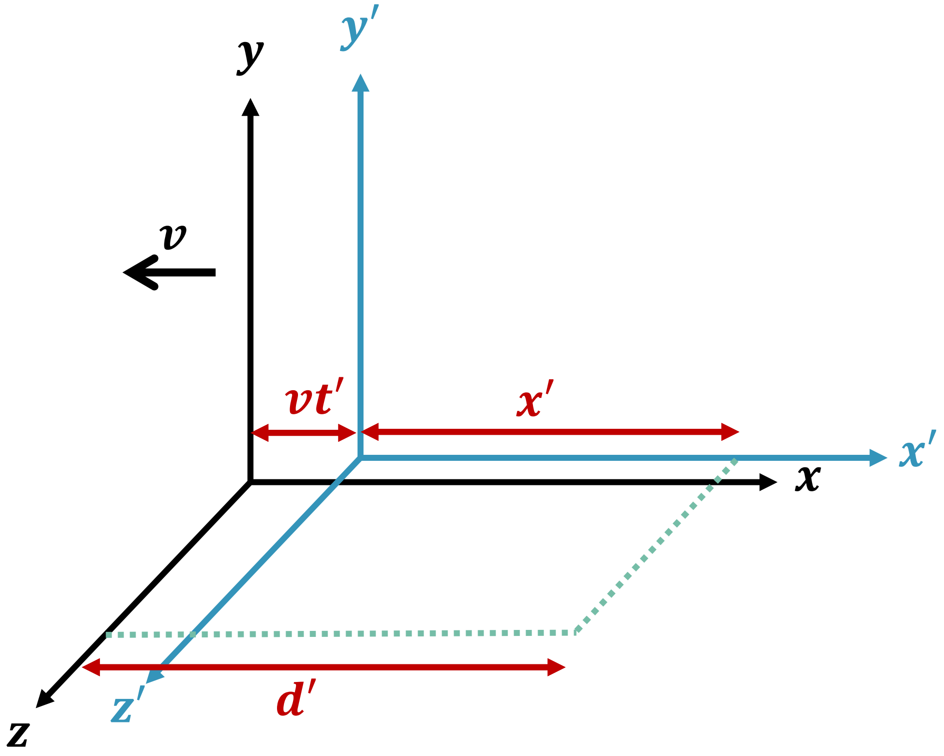
$$d' = x' + vt'$$

$$\frac{1}{\gamma}x = x' + vt'$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Lorentz



$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

$$x' = \frac{1}{\gamma}x - vt'$$

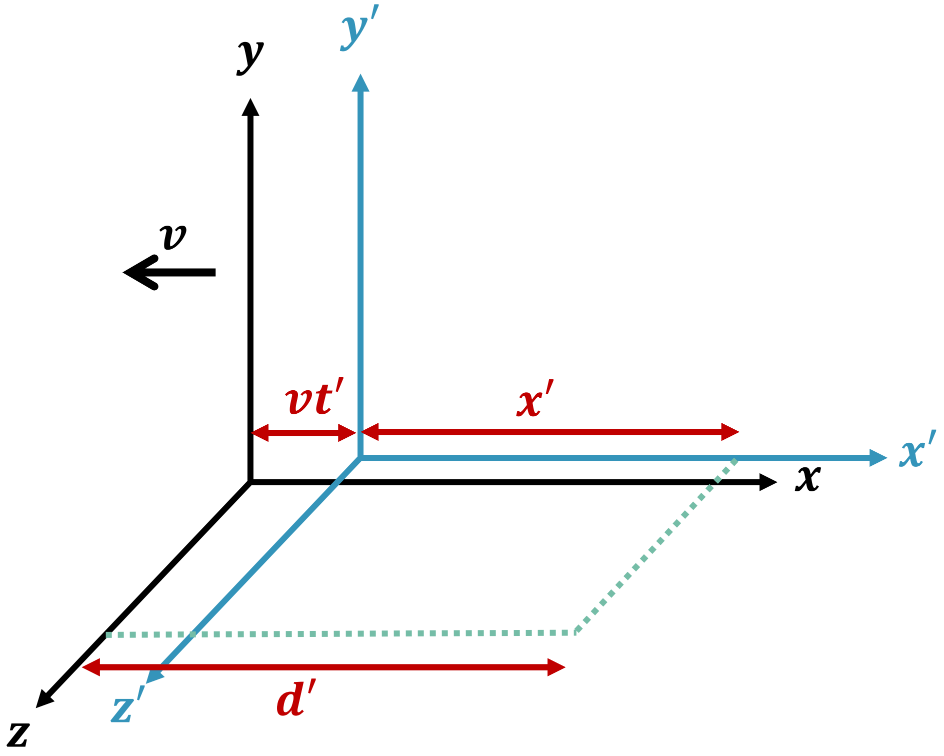
$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$\frac{1}{\gamma}x - vt' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{(1-\gamma^2)}{v\gamma}x\right) = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Lorentz



$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Mecánica Relativista

Con estas nuevas definiciones de distancia y tiempo, podemos replantear las ecuaciones de mecánica clásica.

Consideremos 3 elementos principales:

- Velocidad
- Momentum y Energía
- Fuerza

Mecánica Relativista: Velocidad

- De las transformaciones de Lorentz

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - \ vdt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned}\right\} \quad u'_x = \frac{(dx - vdt)}{\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)}\frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} dy' &= dy \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned}\right\} \quad u'_y = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)}\frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} dz' &= dy \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned}\right\} \quad u'_z = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)}\frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} \end{aligned}}$$

Mecánica Relativista: Velocidad

- Podemos cambiar libremente de sistemas, solo basta con intercambiar los pares $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{u}$, e invertir el sentido de v

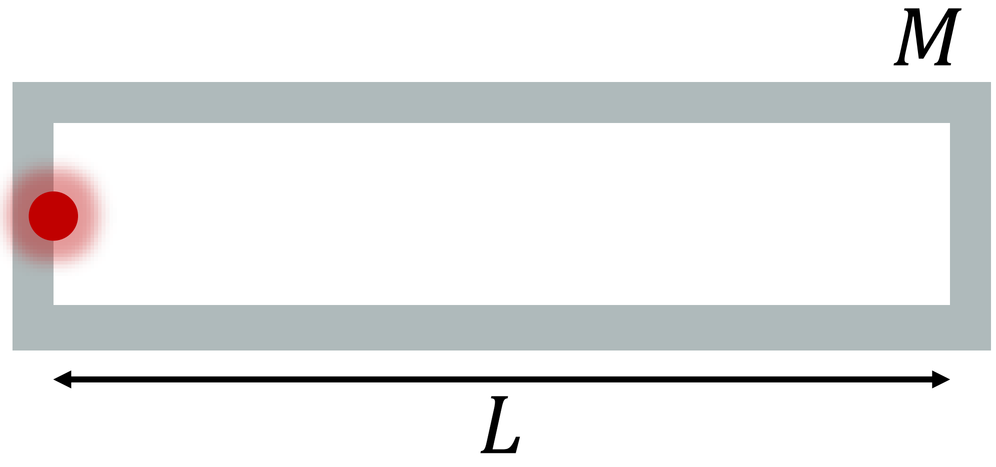
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \quad \Leftrightarrow \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}$$

Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Supongamos que disparamos una partícula a velocidad c dentro de una caja de largo L y masa M.



La partícula tendrá energía:

$$E = p_x c$$

Por conservación de momentum, la caja experimentará un pequeño culatazo a velocidad $v \ll c$.

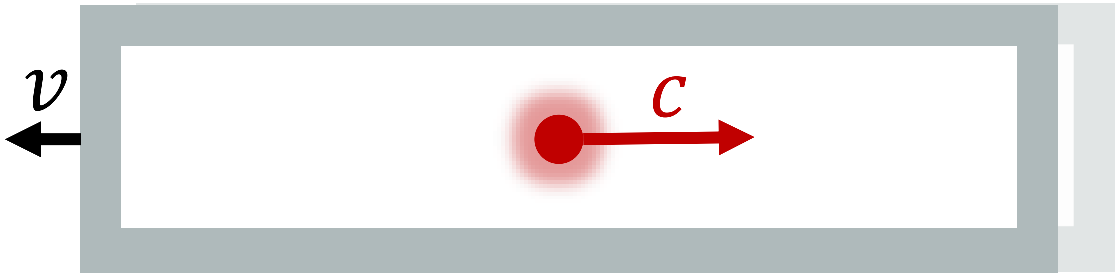
$$p_x = Mv$$

Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Supongamos que disparamos una partícula a velocidad c dentro de una caja de largo L y masa M.

La partícula tendrá energía:

$$E = p_x c$$



Por conservación de momentum, la caja experimentará un pequeño culatazo a velocidad $v \ll c$.

$$p_x = Mv$$

Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Al llegar el final de la caja, la partícula habrá tardado:

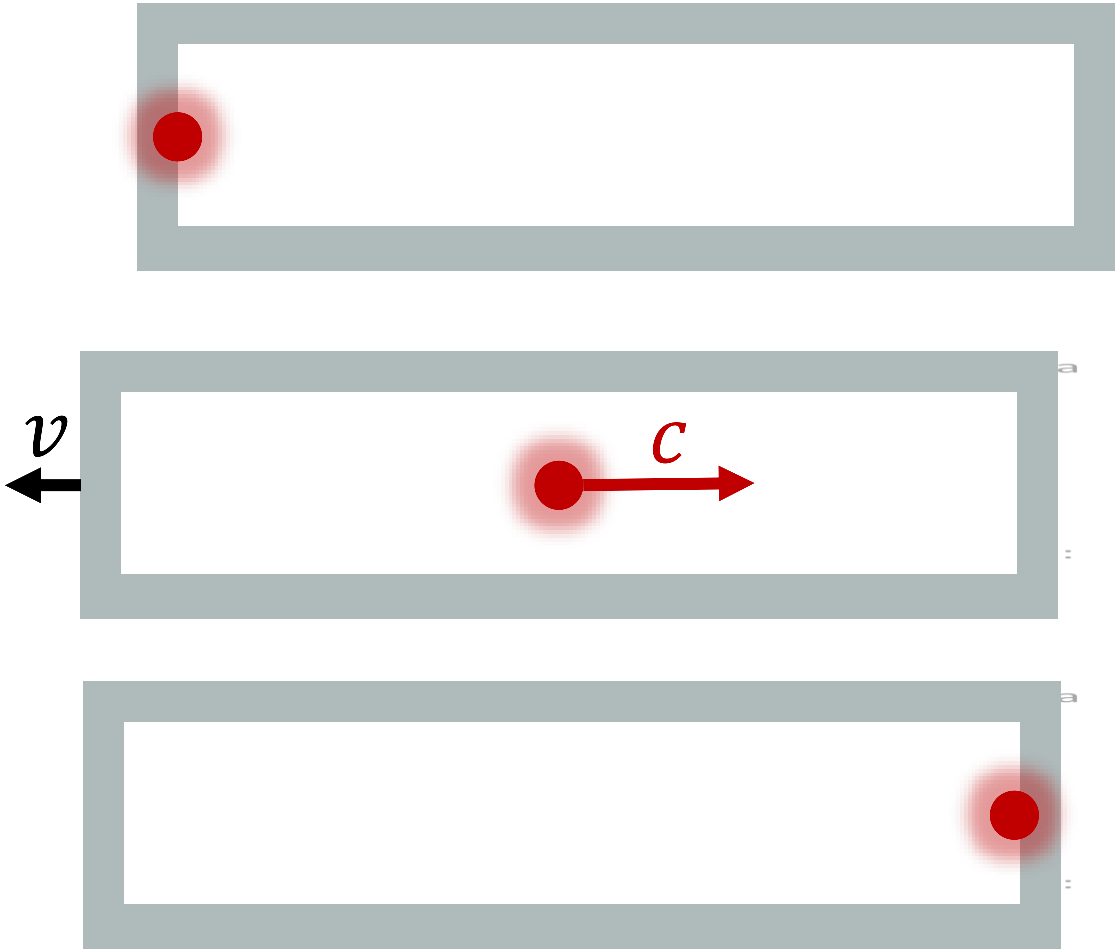
$$t = L/c$$

Asimismo, la caja se habrá movido:

$$d = vt = vL/c$$

Igualando momentum y reemplazando v:

$$\frac{E}{c} = Mv = Mdc/L$$



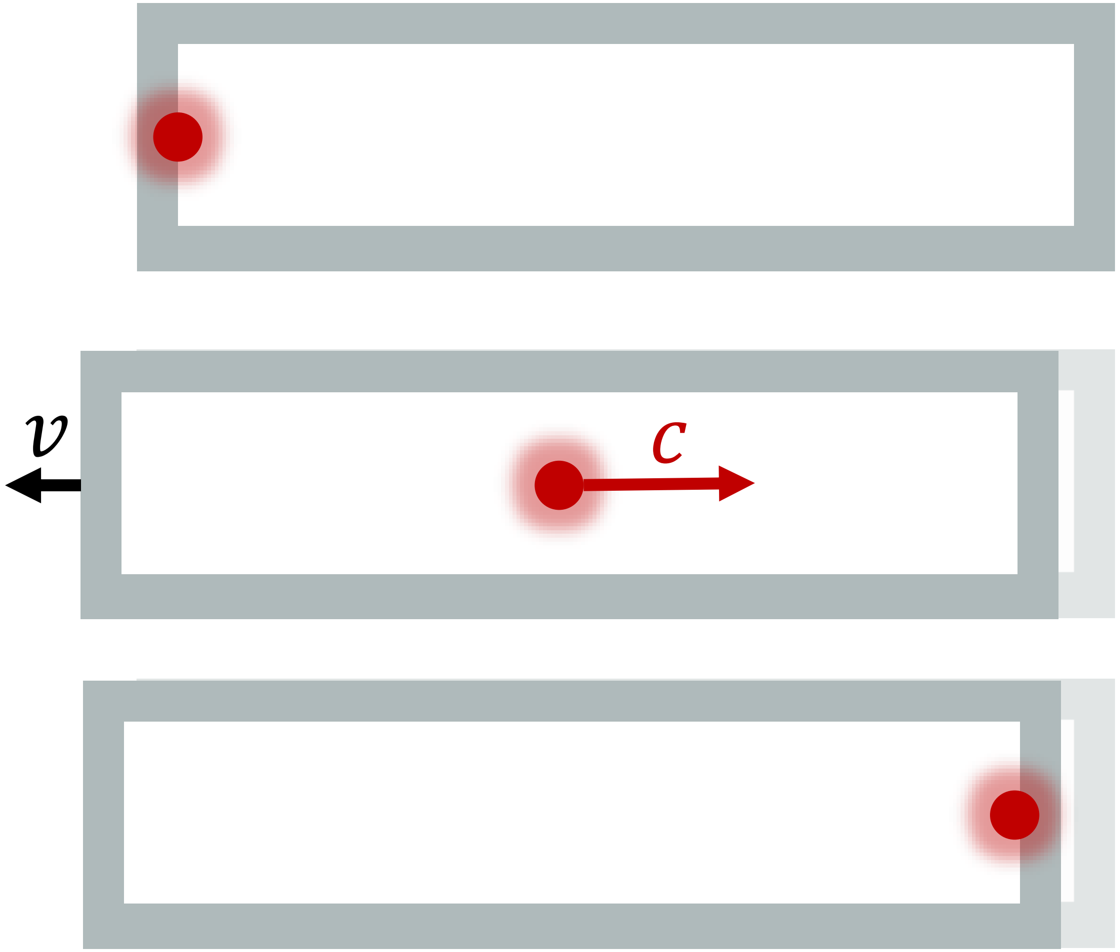
Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Despejando:

$$d = \frac{EL}{Mc^2}$$

No hay fuerzas externas actuando en el sistema. El centro de masa no cambió. La partícula debió transferir una pequeña cantidad de masa m.

$$Md = mL$$



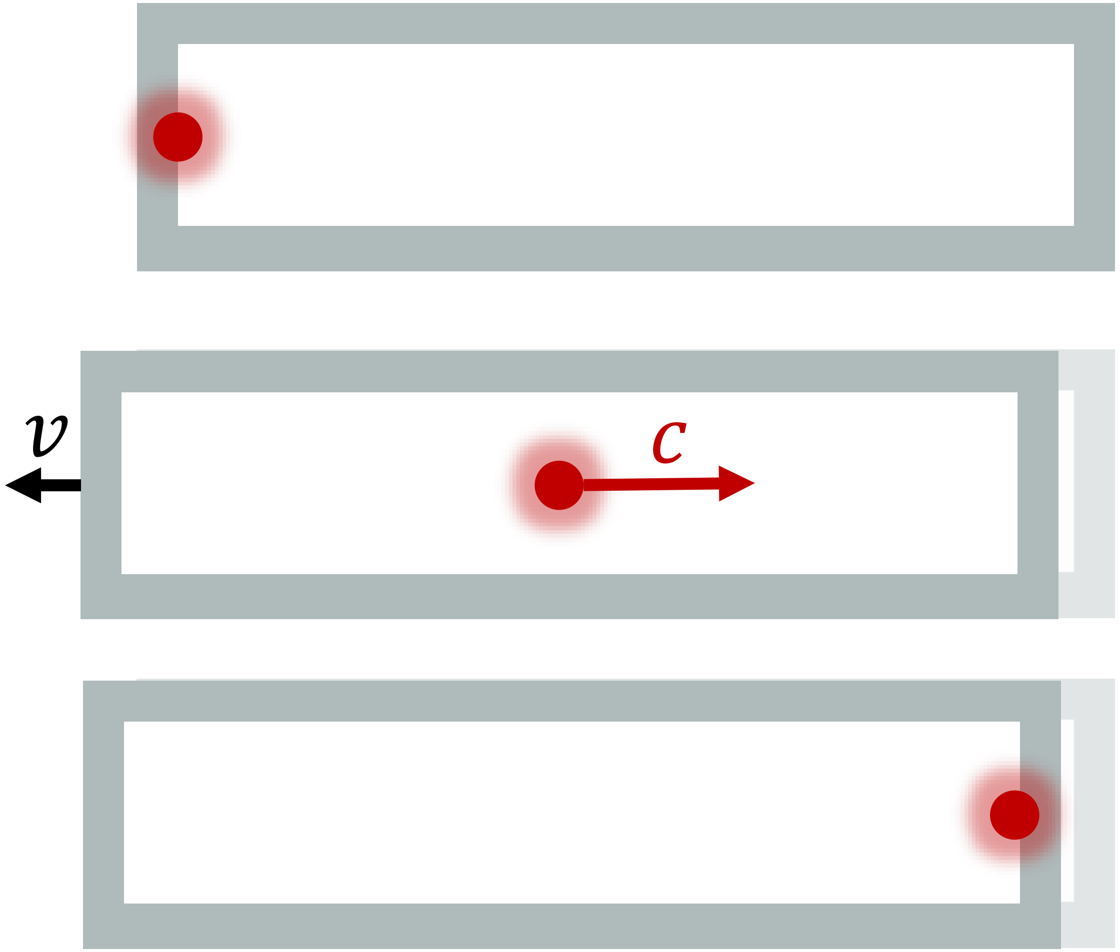
Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Tenemos:

$$\frac{mL}{M} = \frac{EL}{Mc^2}$$

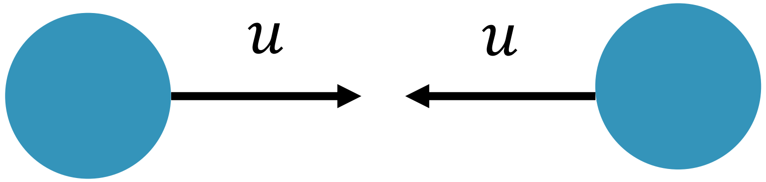
Luego:

$$\boxed{E = mc^2}$$



Mecánica Relativista: Momentum y Energía

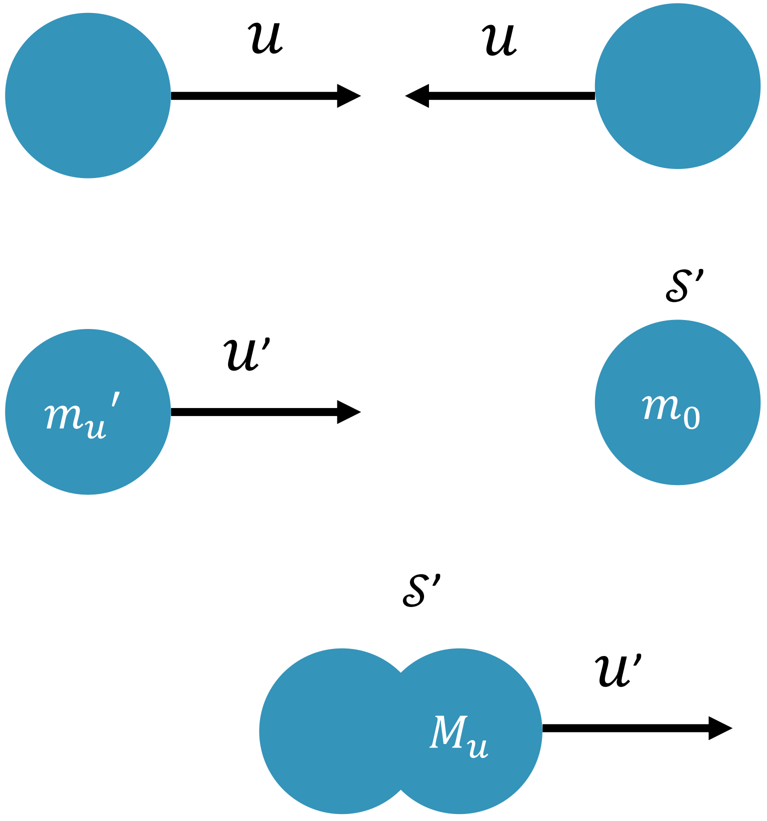
Consideremos el choque inelástico entre dos objetos que se acercan a velocidad u.



Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Por conservación de masa y momentum:

$$m_0 + m'_u = M_u \qquad\qquad m'_u u' = M_u u$$



Luego:

$$m_0 + m'_u = m'_u \frac{u'}{u}$$

$$m'_u = \frac{m_0}{(u'/u \;- 1)}$$

$$\boxed{m'_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}}$$

"Masa" relativista

Mecánica Relativista: Momentum y Energía

A partir de m'_u:

$$p' = m'_u u' \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p' = \frac{m_0 u'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}}$$

$$E' = m'_u c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}}$$

Si todo está escrito en función de u', debería ser posible encontrar una transformación de Lorenz para momentum y energía entre sistemas.

Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Reemplazemos u_x' usando Transformaciones de Lorentz:

$$p_x' = \frac{m_0 u_x'}{\sqrt{1-\left(\frac{u_x'}{c^2}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u_x - v}{1 - v u_x / c^2}\right)^2 / c^2}} \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}\right) = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}\right)^2}} \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}\right)$$

$$p_x' = \frac{m_0 c (u_x - v)}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 - (u_x - v)^2}} = \frac{m_0 (u_x - v)}{\sqrt{1 - 2 v u_x / c^2 + (v u_x / c^2)^2 - u_x^2 / c^2 + 2 u_x v / c^2 - v^2 / c^2}}$$

$$p_x' = \frac{m_0 u_x - m_0 v}{\sqrt{1 - (u_x^2 + v^2)/c^2 + (v u_x / c^2)^2}} = \frac{m_0 u_x - m_0 v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u_x^2/c^2)}} = \frac{m_u u_x - m_u v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

$$\boxed{p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right)}$$

Para las otras componentes se tiene que $p_y' = p_y$ y $p_z' = p_z$. Les recomiendo comprobarlo.

Mecánica Relativista: Fuerza

Sabemos que la fuerza es la derivada del momentum. Luego:

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp'_x}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dp'_x/dt}{dt'/dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right)\right)}{\frac{d}{dt}\left(\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right)} = \frac{F_x - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{F_x - \frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

La energía es simplemente trabajo:

$$\Delta E = \int \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$$

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2}(F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{F_x(1 - \frac{u_x v}{c^2}) - \frac{v}{c^2}(F_y u_y + F_z u_z)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

$$F'_x = F_x - \frac{\frac{v}{c^2}(F_y u_y + F_z u_z)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

Mecánica Relativista: Fuerza

Para el caso de las otras componentes:

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp'_y}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dp'_y/dt}{dt'/dt} = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

$$F'_y = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp'_z}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dp'_z/dt}{dt'/dt} = \frac{F_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

Así:

$$\mathbf{F}' = \gamma\left\langle F_x - \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{v}{c^2}\right)\left(F_y u_y + F_z u_z\right), \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}\frac{F_y}{\gamma}, \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}\frac{F_z}{\gamma}\right\rangle$$

Mecánica Relativista

Vectorialmente, la fuerza será:

$$\mathbf{F}' = \gamma\left\langle F_x - \left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{v}{c^2}\right)(F_y u_y + F_z u_z), \left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}\frac{F_y}{\gamma}, \left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1}\frac{F_z}{\gamma}\right\rangle$$

Pero:

$$\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} = \left(1-\left(\frac{u'_x v + v^2}{c^2 + v u'_x}\right)\right)^{-1} = \gamma^2(1 + v u'_x/c^2)$$

$$\mathbf{F}' = \gamma\left\langle F_x - \gamma^2\left(1+\frac{v u'_x}{c^2}\right)\left(\frac{v}{c^2}\right)(F_y u_y + F_z u_z), \gamma\left(1+\frac{v u'_x}{c^2}\right)F_y, \gamma\left(1+\frac{v u'_x}{c^2}\right)F_z\right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma\langle F_x, F_y, F_z\rangle + \left\langle -\gamma\left(\frac{v}{c^2}\right)(F_y u'_y + F_z u'_z), \gamma\left(\frac{v}{c^2}\right)u'_x F_y, \gamma\left(\frac{v}{c^2}\right)u'_x F_z\right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma\langle F_x, F_y, F_z\rangle + \left\langle -\gamma\left(\frac{v}{c^2}\right)(F_y u'_y + F_z u'_z), \gamma\left(\frac{v u'_x}{c^2}\right)F_y, \gamma\left(\frac{v u'_x}{c^2}\right)F_z\right\rangle$$

Mecánica Relativista

Realizando un poco de álgebra:

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F} + \gamma\left\langle -\left(\frac{v}{c^2}\right)\left(F_x u'_x - F_x u'_x + F_y u'_y + F_z u'_z\right), \left(\frac{v}{c^2}\right)u'_x F_y, \left(\frac{v}{c^2}\right)u'_x F_z\right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F} + \gamma\left\langle -\left(\frac{v}{c^2}\right)\left(F_x u'_x + F_y u'_y + F_z u'_z\right), 0, 0\right\rangle + \gamma\left\langle\left(\frac{v}{c^2}\right)(u'_x F_x), \left(\frac{v}{c^2}\right)u'_x F_y, \left(\frac{v}{c^2}\right)u'_x F_z\right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F} + \gamma\left\langle -\left(\frac{v}{c^2}\right)\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}', 0, 0\right\rangle + \gamma\left(\frac{u'_x v}{c^2}\right)\mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F} - \frac{\gamma}{c^2}\langle v, 0, 0\rangle(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}') + \frac{\gamma}{c^2}(\mathbf{u}'\cdot\langle v, 0,0\rangle)\mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F} - \frac{\gamma}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}') + \frac{\gamma}{c^2}(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})\mathbf{F}$$

Mecánica Relativista

Reescribimos la expresión en función de $\mathbf{u}$

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F} + \frac{\gamma}{c^2}\left[-\mathbf{v}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}') + \frac{1}{c^2}(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})\mathbf{F}\right] = \gamma\mathbf{F} + \frac{\gamma}{c^2}[\mathbf{v}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{F}]$$

Inspeccionando la expresión obtenida, es posible identificar un triple producto vectorial:

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F} + \frac{\gamma}{c^2}\,\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{F})$$

Si $v \ll c, \gamma \approx 1$. Luego

$$\boxed{\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \frac{1}{c^2}\mathbf{u}\times[\mathbf{v}\times\mathbf{F}]}$$

Electrodinámica Relativista

Logramos definir la Fuerza en un marco relativista:

$$\boxed{\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F} + \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times [\mathbf{v}_x \times \mathbf{F}]}$$

Qué pasaría si la fuerza $\mathbf{F}$ fuese nuestra querida Fuerza Eléctrica:

$$\mathbf{F} = \frac{QQ_0\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3}$$

Electrodinámica Relativista

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F} + \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times [\mathbf{v}_x \times \mathbf{F}]$$

$$\mathbf{F}_{tot} = \frac{QQ_0\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3} + \frac{1}{c^2}\mathbf{u} \times \left[\mathbf{v}_x \times \frac{QQ_0\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3}\right]$$

$$\mathbf{F}_{tot} = \frac{QQ_0\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}'|^3} + Q_0\mathbf{u} \times \left[\frac{Q\mathbf{v}_x \times \mathbf{r}}{4\pi c^2\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3}\right]$$

$$d\mathbf{F}_{tot} = \frac{\rho dv Q_0\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3} + Q_0\mathbf{u} \times \left[\mu_0\frac{\mathbf{J}dv \times \mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{F}_{tot} = \int_V \frac{\rho Q_0\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3}dv + Q_0\mathbf{u} \times \left[\mu_0\int_V \frac{\mathbf{J}dv \times \mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}\right]}$$

Electrodinámica Relativista

$$\mathbf{F}_{tot} = \underbrace{\int_V \frac{\rho Q_0 \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}|^3} dv}_{\textit{Ley de Coulomb}} + \underbrace{Q_0 \mathbf{u} \times \underbrace{\left[\mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3}\right]}_{\textit{Ley de Biot-Savart}}}_{\textit{Ley de Lorentz}}$$

¡Electricidad y Magnetismo son dos caras de un mismo fenómeno!

$$\mathbf{F}_{tot} = Q_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mu_0 \mathbf{H})$$

Resumen

- Comprendimos los principios fundamentales de relatividad especial.
- Logramos formular distintas variables de la mecánica tradicional en un contexto relativista.
- Conseguimos expresar la fuerza para el caso relativista, y aplicarla al caso de cargas eléctricas en movimiento.
- Obtuvimos nuestras primeras ecuaciones del magnetismo, solo en base a relatividad y ley de Coulomb.
- **¡ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO SON EL MISMO FENÓMENO!**

Cerremos la clase de hoy

- Finalmente, logramos introducir de manera bastante coherente el fenómeno del magnetismo.
- Ahora toca analizarlo. Partiremos desde el caso estático en el vacío.

- Próxima clase (Martes 19/mar):

  Magnetostática en el Vacío

- Bibliografía:

  Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 297 – 363

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

  - ❑ *Contracción Espacial*
  - ❑ *Teorema de Stokes*
  - ❑ *Teorema de la Divergencia*
  - ❑ *Regla del producto (producto punto con nabla)*
  - ❑ *Expansión multipolar*