

Clase 04

Electrostática en Materiales

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 177 – 198

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Ya estudiamos el caso electrostático del vacío. Toca ampliarlo a cualquier medio material.
- Nos centraremos en dieléctricos y en definir un material simple a base de propiedades eléctricas.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-06:** Plantear y resolver ecuaciones del electromagnetismo para resolver problemas en medios materiales (polarización y magnetización).
- **OA-10:** Distinguir el significado de la formulación diferencial e integral de las ecuaciones de Maxwell, tanto para campos estáticos como variantes en el tiempo.

Contenidos

- Corrientes
- Conductores
- Dieléctricos y Polarización
- Susceptibilidad y Permitividad eléctrica
- Materiales eléctricos
- Ecuación de continuidad

Corriente y Densidad de Corriente

- La corriente se define como la **carga neta** que fluye a través de un área por unidad de tiempo.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- La densidad de corriente se definirá como el flujo corriente que pasa perpendicularmente a través de una unidad de superficie.

$$\mathbf{J} = \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

Corriente y Densidad de Corriente

- La primera expresión es un escalar, la segunda es un vector. ¿Cómo se vinculan entonces?
- Dado que se atraviesa perpendicularmente un área superficial:

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

- Integrando:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Corrientes de convección y conducción

La densidad de corriente puede producirse de 3 formas:

- **Corriente de convección:** dada por flujos de cargas en medios aislantes, de densidad ρ_v y velocidad \mathbf{u} .

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$$

- **Corrientes de conducción:** dada por la influencia de un campo eléctrico \mathbf{E} en un conductor de conductividad σ .

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E}$$

- **Corrientes de desplazamiento:** Causadas por

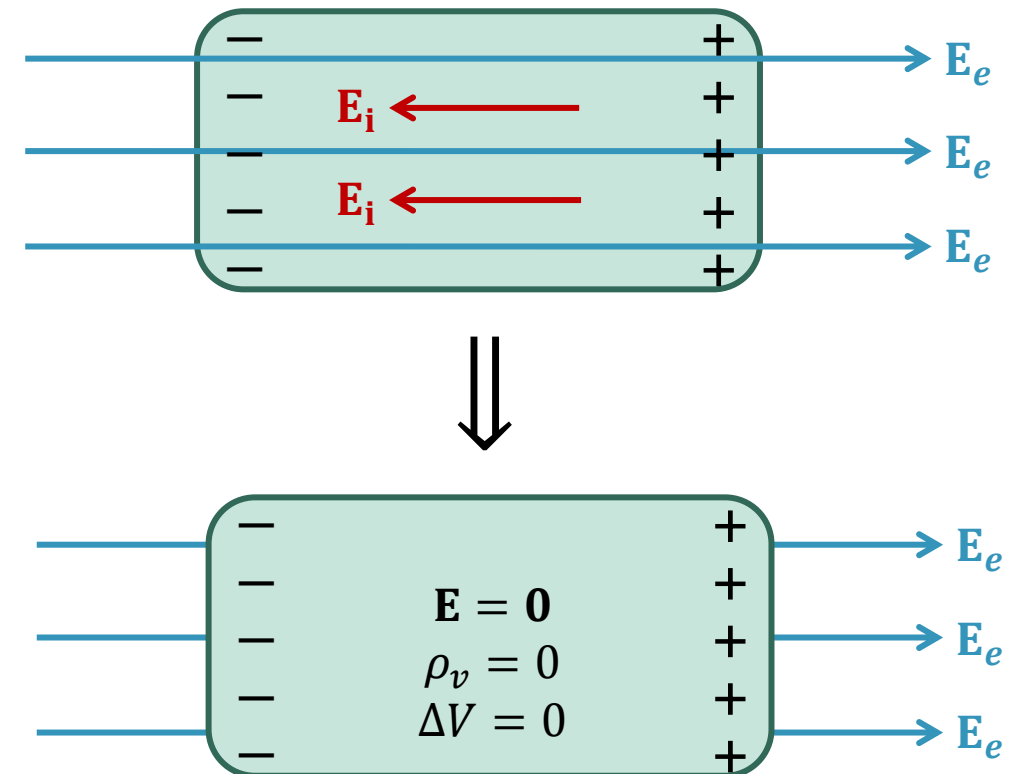
$$\mathbf{J} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Conductores

- Son materiales con abundancia de cargas libres.
- 2 casos de estudio:
 - Conductores aislados
 - Conductores a un potencial fijo

Conductores aislados

- La presencia de un campo eléctrico externo \mathbf{E}_e desplaza las cargas positivas.
- Se induce un campo eléctrico interno \mathbf{E}_i que desplaza las cargas negativas en sentido contrario.
- Si el conductor es perfecto ($\sigma = \infty$), el campo al interior es nulo.

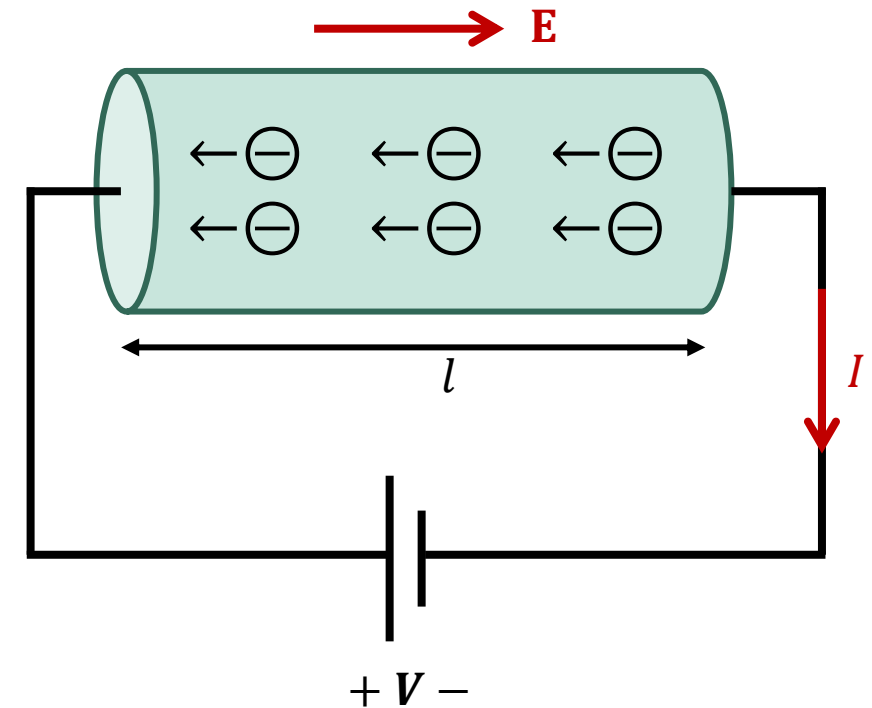


Conductores a potencial fijo

- En este caso las cargas tienen un camino por el cual circular libremente, lo cual genera una corriente I .
- Sabemos que la magnitud del campo estará dada por:

$$V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V}{l}$$

- Esto nos lleva a un viejo conocido.

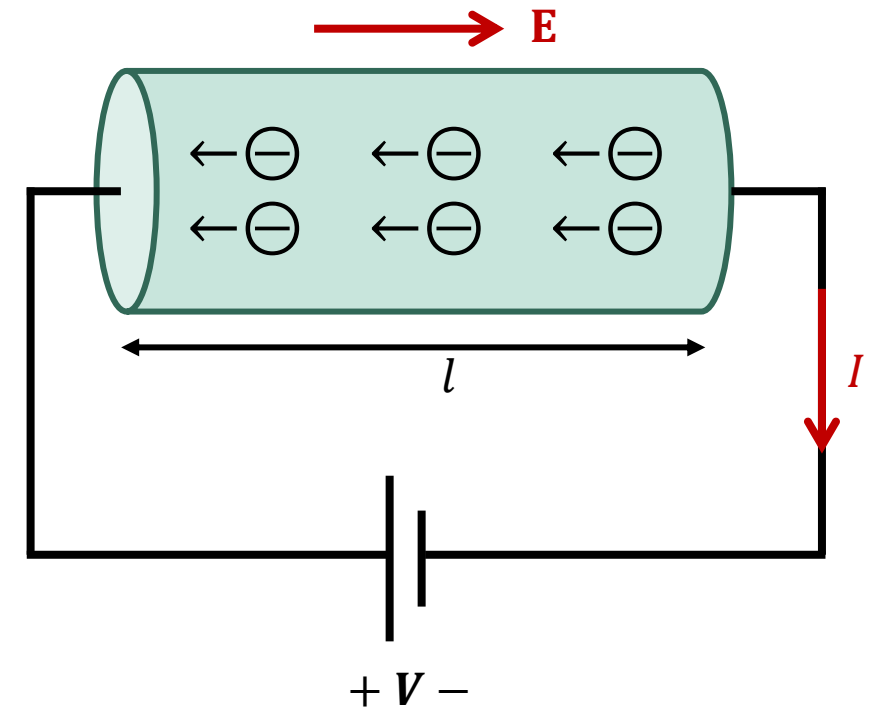


Conductores a potencial fijo

- El conductor tiene área transversal uniforme: $J = I/S$
- La corriente generada es una corriente de conducción: $J = \sigma E$
- Igualando J :

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{l}$$

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{V}{I}$$



Conductores a potencial fijo

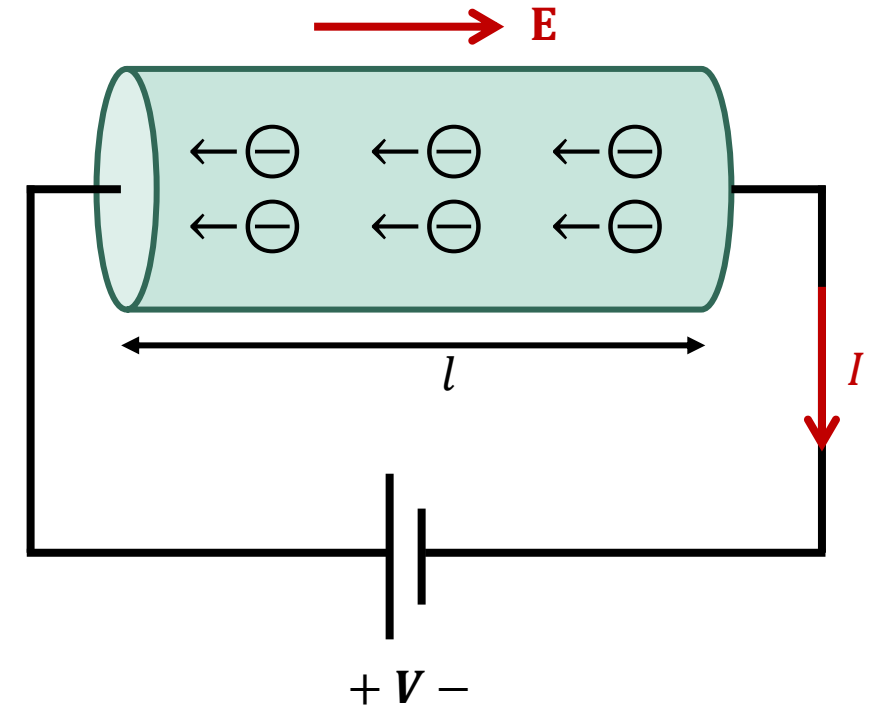
- De este modo:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Ley de Ohm microscópica

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

Ley de Ohm macroscópica



Conductores a potencial fijo

- Y para la potencia:

$$dP = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \rho_v dv \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

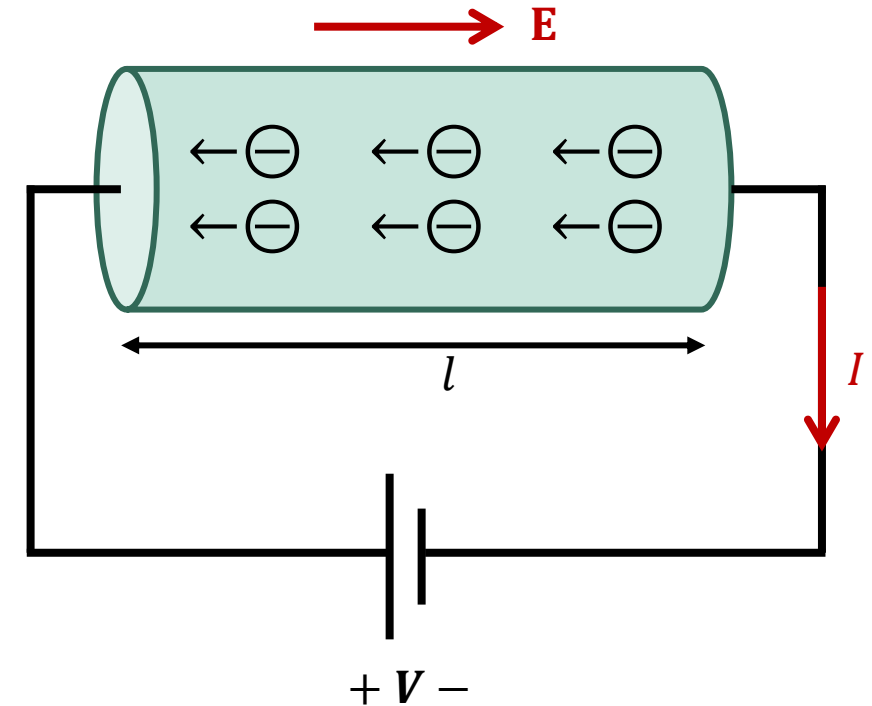
- Integramos:

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

Ley de Joule

- Si el conductor es uniforme ($dv = dl dS$):

$$P = \int_V E dl \int_S J dS = VI$$

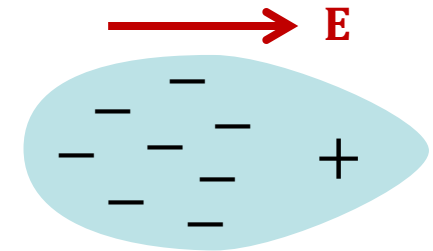
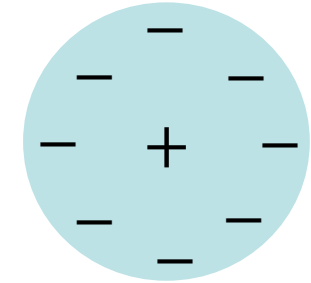


Dieléctricos y Polarización

- Ya vimos lo que pasa al aplicar el campo a un conductor.
- ¿Y si ahora es un dieléctrico (aislante)?

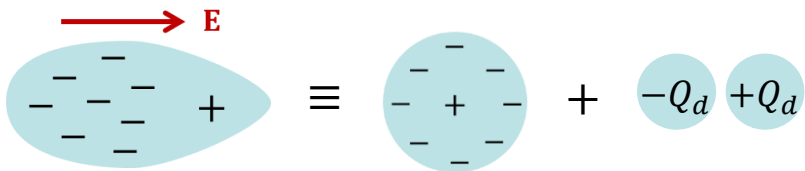
Dieléctricos y Polarización

- Consideremos un átomo eléctricamente neutro.
- Al aplicar un campo, las cargas positivas y negativas se ven desplazadas en sentidos opuestos.
- Por expansión multipolar, el sistema puede reescribirse como:



$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow{\text{E}} + \equiv \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{cc} -Q_d & +Q_d \end{array} + \begin{array}{cc} -Q_q & +Q_q \\ +Q_q & -Q_q \end{array} + \dots$$

Dielectricos y Polarización

- Simplificando: 

- Podemos definir la polarización como el momento dipolar por unidad de volumen del dieléctrico.

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \mathbf{d}}{\Delta v} = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{p}}{\Delta v}$$

Dieléctricos y Polarización

- De la clase anterior, sabemos que el potencial dipolar es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r \frac{\Delta Q}{\Delta v}(\mathbf{r}') dv'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_r dv'}{r^2}$$

- O bien:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_r dv'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) dv'$$

Dieléctricos y Polarización

- Usando la identidad $\nabla \cdot f\mathbf{A} = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$:

$$\mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{P}$$

- Luego:

$$V = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) dv' = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{P} \right] dv'$$

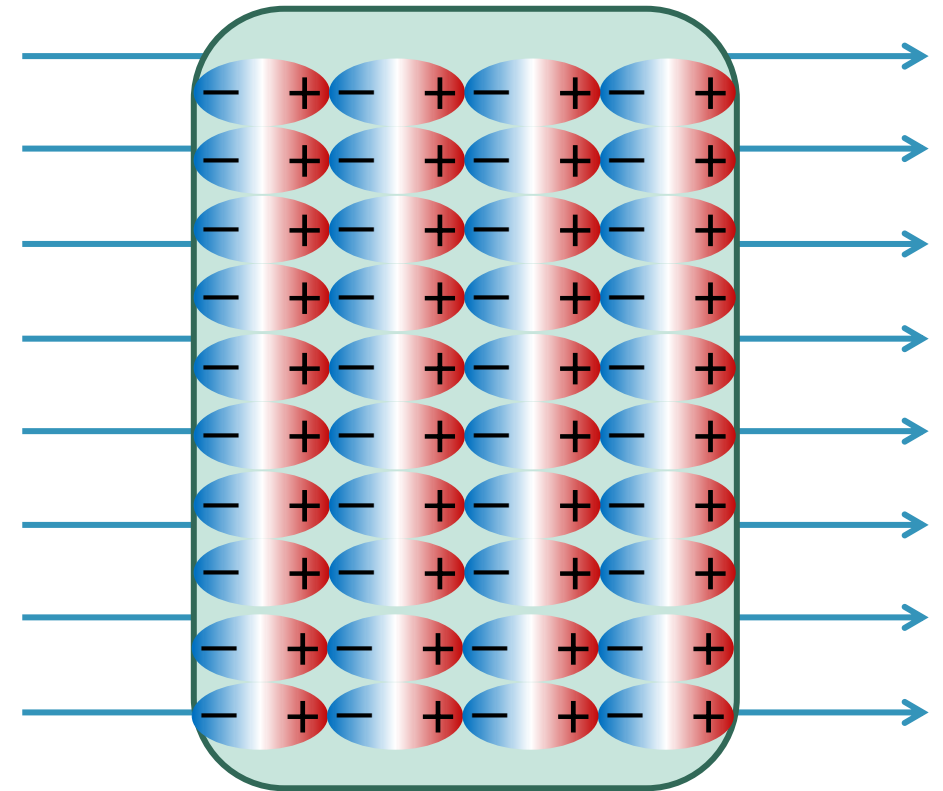
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n dS' + \int_{V'} -\nabla' \cdot \mathbf{P} dv' \right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\oint_{S'} \rho_{ps} dS' + \int_{V'} \rho_{pv} dv' \right]$$

Dielectric and Polarization

Product of the polarization are 2 densities of bound charges:

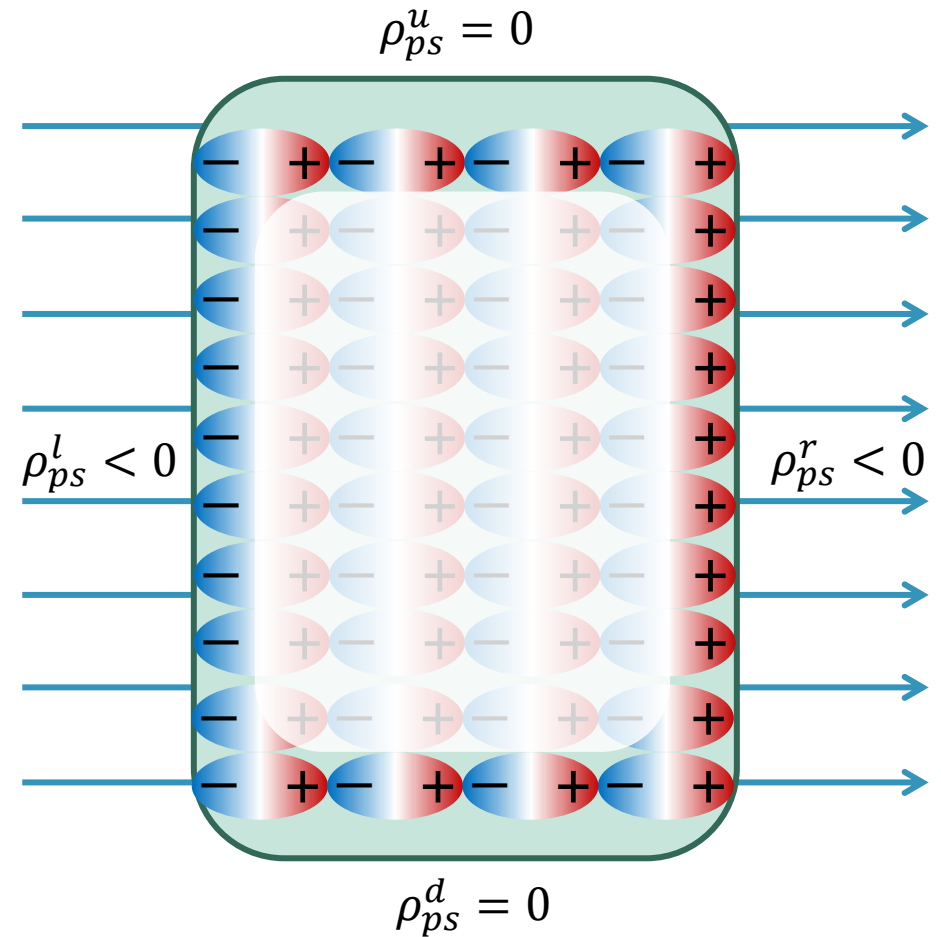
- ρ_{ps} : confined to the surface.
- ρ_{pv} : confined to the volume.



Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

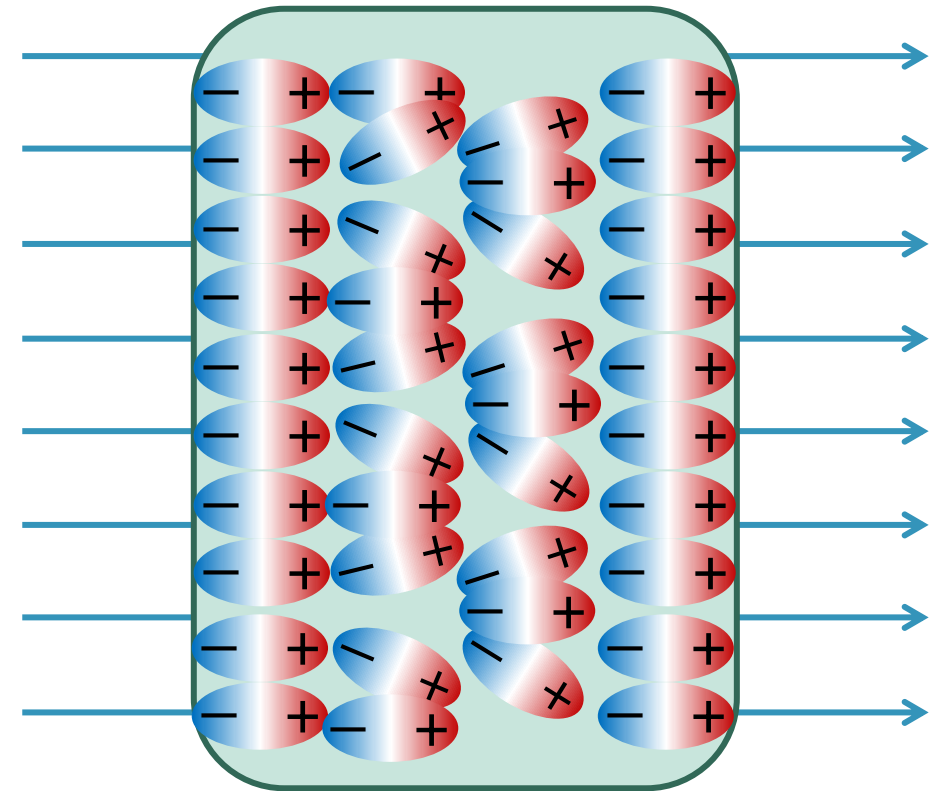
- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.



Dielectricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

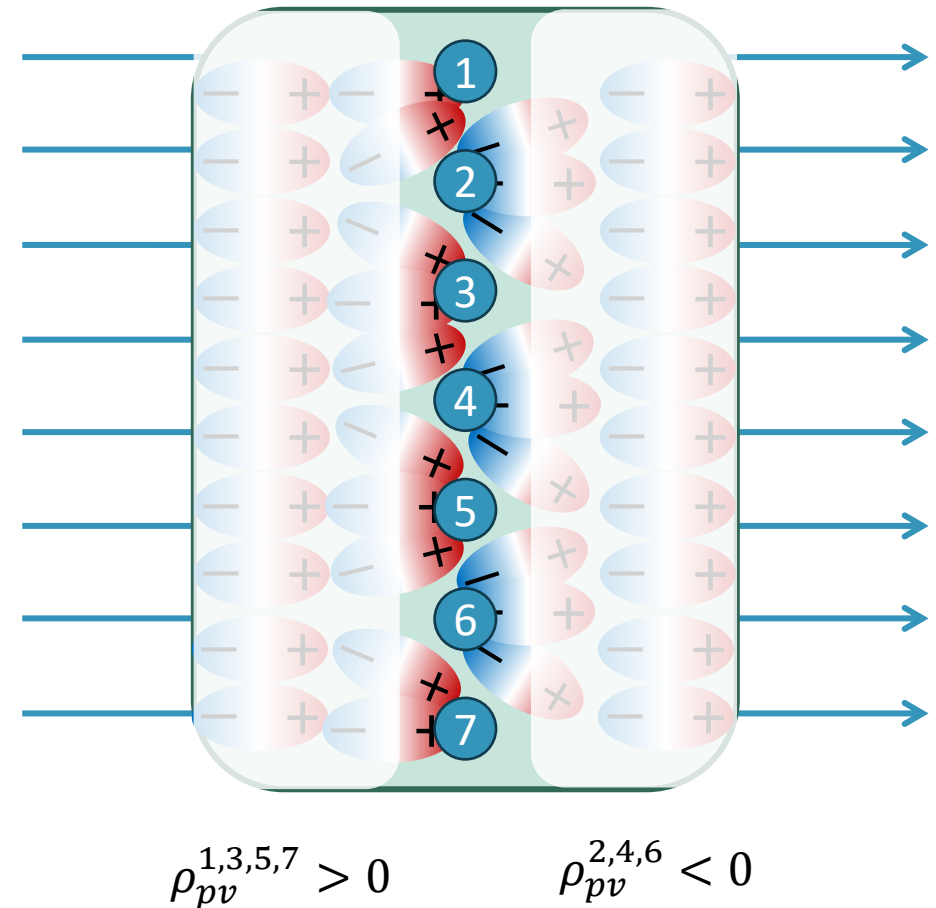
- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.



Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.



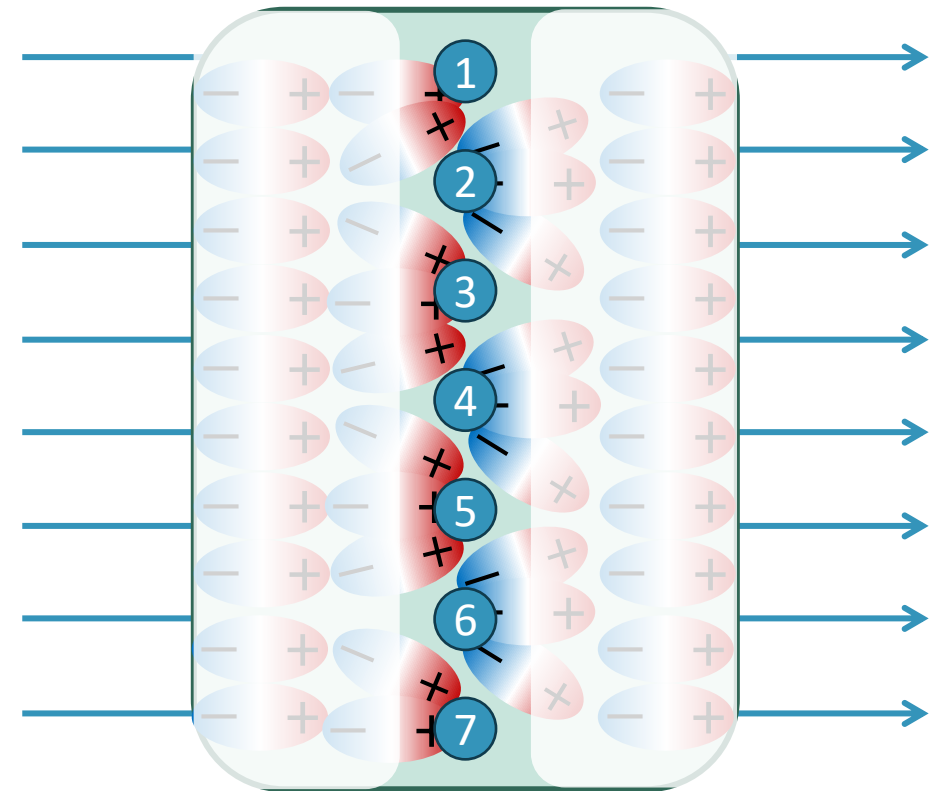
Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.

Si el dieléctrico era inicialmente neutro, y no agregamos cargas libres:

$$\oint_S \rho_{ps} dS + \int_V \rho_{pv} dv = 0$$



$$\rho_{pv}^{1,3,5,7} > 0$$

$$\rho_{pv}^{2,4,6} < 0$$

Dieléctricos y Polarización

- Si incorporamos cargas libres al dieléctrico y consideramos solo las cargas volumétricas, por Ley de Gauss:

$$\rho_{tot} = \rho_v + \rho_{pv} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\rho_v = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} - \rho_{pv} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} - \rho_{pv} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Campo en un Dieléctrico

Susceptibilidad y permitividad eléctrica

- En algunos dieléctricos, la polarización es proporcional al campo aplicado a razón χ_e (susceptibilidad eléctrica):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

- Luego, podemos definir la permitividad eléctrica como:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ε_0 : permitividad del vacío
 ε_r : permitividad relativa

- Así

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Campo en un Dieléctrico

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
Capacidad de permitir el flujo de corriente (conductores vs dieléctricos).
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
Presencia de una densidad de cargas (monopolos, dipolos naturales).
- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad
D varía linealmente con E, permitividad constante (lineales vs no lineales).
- Isotropía
- Homogeneidad

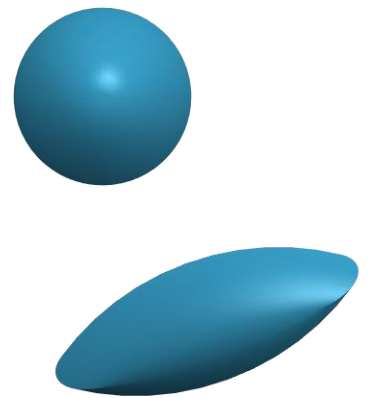
Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía

No hay regiones espaciales predilectas para la permitividad.
Simetría rotacional. (Isotrópicos vs anisotrópicos).

- Homogeneidad



Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad

La permitividad es constante en toda la extensión del material.

Simetría traslacional. (Homogéneos vs no-homogéneos).

Tipos de Materiales Eléctricos

Definiremos un dieléctrico simple como aquel material que es:

- No conductor
- Libre de fuentes
- Lineal
- Isotrópico
- Homogéneo

Ecuación de continuidad

- Consideremos un volumen con un flujo de corriente hacia el exterior.
- Las cargas no aparecen y desaparecen mágicamente, si fluye una corriente hacia el exterior, se deben estar perdiendo cargas en el interior del volumen.

$$I_{out} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_{in}}{dt}$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dv = -\int_V \frac{d\rho_v}{dt} dv$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}}$$

Ecuación de continuidad

Ecuación de continuidad

- En resumen: Al salir corriente se pierde carga.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

Ecuación de continuidad

- Si el flujo de cargas es estable:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\sum I = 0$$

Ley de Kirchoff

Resumen

- Repasamos los conceptos de corriente y resistencia, así como los efectos de conducción y polarización en materiales eléctricos.
- Al definir $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ podemos aplicar las ecuaciones de Maxwell antes vistas a medios materiales.
- Aprendimos las distintas características de un material eléctrico, y con ellas definimos un material “simple”.
- Formulamos la ecuación de continuidad y a partir de ella obtuvimos la ley de corrientes de Kirchhoff.

Cerremos la clase de hoy

- Terminamos de hacer un análisis “clásico” de la Teoría Electroestática.
- Veamos qué comienza a suceder cuando las cosas se mueven increíblemente rápido.
- Próxima Clase (Viernes 15/marzo):
Relatividad Especial
- Bibliografía:
Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition: pp. 502 – 552

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Momentum $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$

Producto Cruz $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$