



Control 3

14 de marzo de 2024

Nombre:

Pregunta 1: Expansión Multipolar

Considere una esfera de radio R , centrada en el origen, y que posee una densidad de carga volumétrica:

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin\theta$$

donde r , θ , y ϕ son las coordenadas esféricas.

Sea P un punto que se mueve a lo largo del eje z . Encuentre:

- a) La expresión para el vector $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$
- b) La expresión para el diferencial de volumen dv' .
- c) Los primeros 4 momentos polares (monopolo, dipolo, cuadripolo, octopolo).
- d) Concluya respecto a la distribución de cargas, de acuerdo al resultado obtenido en (c).
- e) El potencial aproximado en el eje z , lejos de la esfera. Basta con el primer término no nulo.
- f) El campo eléctrico aproximado en el eje z , lejos de la esfera.

Los Polinomios de Legendre para $n = 0...3$ están dados por:

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1 \\P_1(x) &= x \\P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).\end{aligned}$$

Respuesta:

a) [0.5 pts]

Definimos los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' :

$$\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r + 0\mathbf{a}_\theta + 0\mathbf{a}_\phi \qquad \mathbf{r}' = r'\mathbf{a}_r + \theta'\mathbf{a}_\theta + \phi'\mathbf{a}_\phi$$

O en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r} = 0\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \qquad \mathbf{r}' = r'\sin\theta'\cos\phi'\mathbf{a}_x + r'\sin\theta'\sin\phi'\mathbf{a}_y + r'\cos\theta'\mathbf{a}_z$$

De este modo, la resta de ambos vectores puede ser escrita, en esféricas o cartesianas, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= (r - r')\mathbf{a}_r - \theta'\mathbf{a}_\theta - \phi'\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= r'\sin\theta'\cos\phi'\mathbf{a}_x + r'\sin\theta'\sin\phi'\mathbf{a}_y + (z - r'\cos\theta')\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

En cuanto al módulo de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, este será:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = z^2 + (r')^2 - 2zr'\cos\theta'$$

Criterio de corrección:

- (+0.25 pt) puntos si tiene ambos vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' definidos correctamente.
- (+0.25 pt) si tiene expresado correctamente el módulo $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.
- No hay puntajes intermedios.

Observación al corrector: Por error de enunciado se solicitó el “vector” $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Considere puntaje completo para quienes llegaron a la expresión de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

b) [0.5 pts]

El diferencial de radio está dado por dr' , el diferencial de arco polar está dado por $r'd\theta'$, y el diferencial de arco azimutal está dado por $r'\sin\theta'd\phi'$. Luego, el diferencial de volumen será:

$$dv' = (r')^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$$

Criterio de corrección:

- (+0.5 pt) puntos si define correctamente la expresión del diferencial.
- No hay puntajes intermedios.

c) [2 pts]

El momento n-polar estará dado por:

$$\int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} (r')^n P_n(\cos\theta) \rho(r', \theta', \phi') (r')^2 \sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

Monopolo ($n = 0$):

$$\begin{aligned} & \int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(r')^2} (R - 2r') \sin\theta' (r')^2 \sin\theta' d\phi' d\theta' dr' \\ & \frac{2\pi R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r'=0}^R (R - 2r') dr' \cdot \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^2\theta' d\theta' \\ & \frac{2\pi R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[Rr' - (r')^2 \right]_0^R \cdot \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin^2\theta' d\theta' = 0 \end{aligned}$$

Dipolo ($n = 1$):

$$\int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} r' \cos\theta' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(r')^2} (R - 2r') \sin\theta' (r')^2 \sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\frac{2\pi R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r'=0}^R r' (R - 2r') dr' \cdot \int_{\theta'=0}^{\pi} \cancel{\cos\theta' \sin^2\theta' d\theta'} = 0$$

Cuadripolo ($n = 2$):

$$\int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} (r')^2 \frac{1}{2} (3\cos^2\theta' - 1) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(r')^2} (R - 2r') \sin\theta' (r')^2 \sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\frac{\pi R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r'=0}^R (r')^2 (R - 2r') dr' \cdot \int_{\theta'=0}^{\pi} (3\cos^2\theta' - 1) \sin^2\theta' d\theta'$$

$$\frac{\pi R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{R^4}{6} \right] \cdot \left[\frac{\pi}{8} \right] = \frac{\pi R^5}{192\epsilon_0}$$

Octopolo ($n = 3$):

$$\int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} (r')^3 \frac{1}{2} (5\cos^3\theta' - \cos\theta') \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(r')^2} (R - 2r') \sin\theta' (r')^2 \sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\frac{\pi R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r'=0}^R (r')^3 (R - 2r') dr' \cdot \int_{\theta'=0}^{\pi} \cancel{(5\cos^3\theta' - \cos\theta') \sin^2\theta' d\theta'} = 0$$

Criterio de corrección:

- (+0.5 pt) por cada momento correcto.
- No hay puntajes intermedios.

d) [1 pts]

A partir del resultado anterior se concluye, que al menos para una aproximación hasta $n = 3$, la distribución se comporta como un cuadripolo puro.

Criterio de corrección:

- (1 pt) Si concluye que la distribución solo corresponde a un cuadripolo.
- (0.5pt) Para cualquier otra conclusión por error de arrastre, pero **debe incluir un valor no nulo para el cuadripolo**.
- (0 pt) En cualquier otro caso.

e) [1 pts]

Por expansión multipolar, la expresión para el voltaje será:

$$V(r', \theta', \phi') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^{(n+1)}} \int_{r'=0}^R \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} (r')^n P_n(\cos\theta) \rho(r', \theta', \phi') (r')^2 \sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

De c) tenemos que el primer término no nulo es el cuadripolo ($n = 2$). Luego:

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{R^5}{768\epsilon_0^2 r^3}$$

Dado que se nos pide la expresión en z , debemos volver a cartesianas:

$$V(0, 0, z) = \frac{R^5}{768\epsilon_0^2 z^3}$$

Criterio de corrección:

- (+0.5 pt) Si llega a la expresión en esféricas.
- (+0.5 pt) Si llega a la expresión en cartesianas.
- Si por error de arrastre llega a otra expresión, otorgue la mitad del puntaje en cada caso. Esto solo en caso que el desarrollo sea coherente.

f) [1 pts]

La relación potencial-campo está dada por:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Dado que solo tenemos componente en z:

$$\mathbf{E} = \frac{R^5}{256\varepsilon_0^2 r^4}$$

Criterio de corrección:

- (1 pt) Si llega a la expresión correcta.
- (0.75 pt) Si llega a la expresión correcta en polares.
- (0.25 pt) Si logra un desarrollo coherente pero errado por error de arrastre (valor de V, derivar mal, error de signo, etc.).