Clase 16
Diferencias Finitas

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 766 – 778

Javier Silva Orellana

jjsilva8@uc.cl

Contexto

- Hasta ahora hemos limitado nuestros problemas a casos relativamente ideales, donde las soluciones son analíticas.
- En la práctica, las geometrías y las características de los problemas escapan a estas idealidades, y debemos emplear otros tipos de métodos para resolverlos.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-13:** Utilizar el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo para determinar campos eléctricos y magnéticos en propagación libre, o en dos o más medios en incidencia normal (caso unidimensional).

Contenidos

- Métodos Numéricos
- Método de las Diferencias Finitas
- Solución a Poisson/Laplace
- Método DFTD para Ondas
- Resolución de Diferencias Finitas
- Limitaciones
- Discretización y Estimación de Memoria

Métodos Numéricos

Existen diferentes formas de resolver problemas en ingeniería.

- Métodos Analíticos
- Métodos Gráficos
- Métodos Experimentales
- Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Existen diferentes formas de resolver problemas en ingeniería.

- <u>Métodos Analíticos</u>

  Soluciones exactas con expresiones numéricas algebraicas.

  Podemos explorar parámetros con libertad.

  Requieren demasiados supuestos e idealidades.
- Métodos Gráficos
- Métodos Experimentales
- Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Existen diferentes formas de resolver problemas en ingeniería.

- Métodos Analíticos
- Métodos Gráficos

  Soluciones pictóricas que requieren una gráfica del problema de antemano.

  Pueden carecer de rigurosidad o ser aproximaciones grotescas.
- Métodos Experimentales
- Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Existen diferentes formas de resolver problemas en ingeniería.

- Métodos Analíticos
- Métodos Gráficos
- Métodos Experimentales

  Mediciones empíricas in situ, mediante instrumental de laboratorio.
  La precisión y exactitud depende del instrumento utilizado.
  Limitadas dependiendo del material instrumental o el problema.
- Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Existen diferentes formas de resolver problemas en ingeniería.

- Métodos Analíticos
- Métodos Gráficos
- Métodos Experimentales
- Métodos Numéricos

Soluciones aproximadas, requieren intensivo uso de computador.

Pueden aproximarse bastante bien a las soluciones analíticas.

Mejores soluciones requieren, tiempo, memoria, o complejidad.

Método de las Diferencias Finitas

Método de las Diferencias Finitas

- Es un método de **fuerza bruta**, que requiere iterar varias veces.
- A pesar de esto, es bastante efectivo, y es uno de los métodos numéricos más usados para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

- Sigue una **receta 3-3**: 3 ingredientes, 3 pasos.

Método de las Diferencias Finitas

- 3 ingredientes:
  - Una ecuación diferencial parcial (Poisson, Laplace, Onda).
  - Una región donde resolver la ecuación.
  - Condiciones de borde y/o condiciones iniciales.

- 3 pasos:
  - Dividir la región en un conjunto de puntos discretos.
  - Aproximar la EDP por una ecuación lineal (ecuación de diferencias).
  - Resolver el conjunto de ecuaciones.

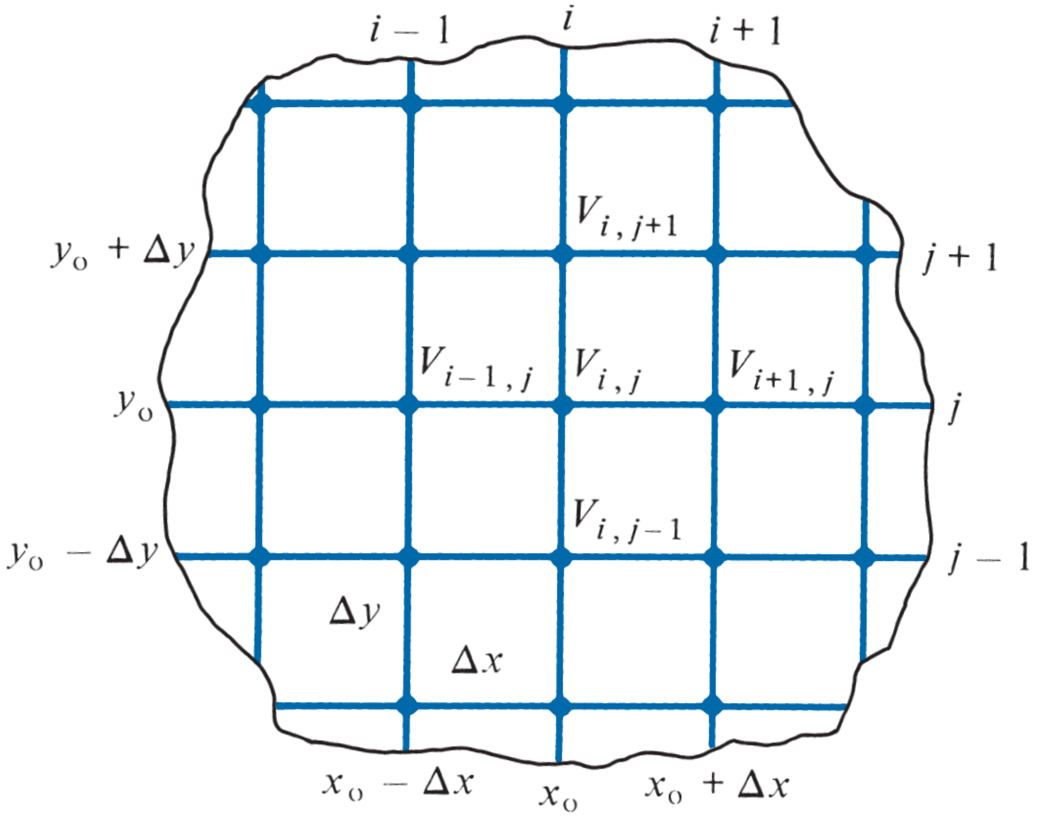
Método de las Diferencias Finitas

- Supongamos que queremos resolver la ecuación de Poisson en una región arbitraria.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

- Me interesa determinar el voltaje.

- Tomo la región y la convierto en una grilla 2D con nodos espaciados a distancias Δx y Δy.



Método de las Diferencias Finitas

- Desempolvemos series de Taylor:

$$V(x_0 + \Delta x, y_0) \approx V(x_0, y_0) + \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \cdots$$

$$V(x_0 - \Delta x, y_0) \approx V(x_0, y_0) - \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 - \cdots$$

Método de las Diferencias Finitas

- Tomemos los términos de primer orden:

$$V(x_0 + \Delta x, y_0) \approx V(x_0, y_0) + \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \cdots$$

$$V(x_0 - \Delta x, y_0) \approx V(x_0, y_0) - \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 - \cdots$$

Método de las Diferencias Finitas

- Tomemos los términos de primer orden:

$$V(x_0 + \Delta x, y_0) \approx V(x_0, y_0) + \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x$$

$$V(x_0 - \Delta x, y_0) \approx V(x_0, y_0) - \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x$$

Método de las Diferencias Finitas

- Reordenemos:

$$\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x}$$

Método de las Diferencias Finitas

- Sumándolos podemos obtener una tercera expresión:

$$\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x}$$

Método de las Diferencias Finitas

- Estas se conocen como las **diferencias finitas de primer orden**:

$$\frac{\partial V^{fwd}(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V^{bwd}(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V^{ctr}(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x}$$

Método de las Diferencias Finitas

- Dado que la EDP es de segundo orden, tenemos que ir más arriba:

$$\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0, y_0)}{\Delta x} - \frac{V(x_0, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2}}$$

Método de las Diferencias Finitas

$$\boxed{\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2}}$$

- Análogamente:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial y^2} \approx \frac{V(x_0, y_0 + \Delta y) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0, y_0 - \Delta y)}{\Delta y^2}}$$

Método de las Diferencias Finitas

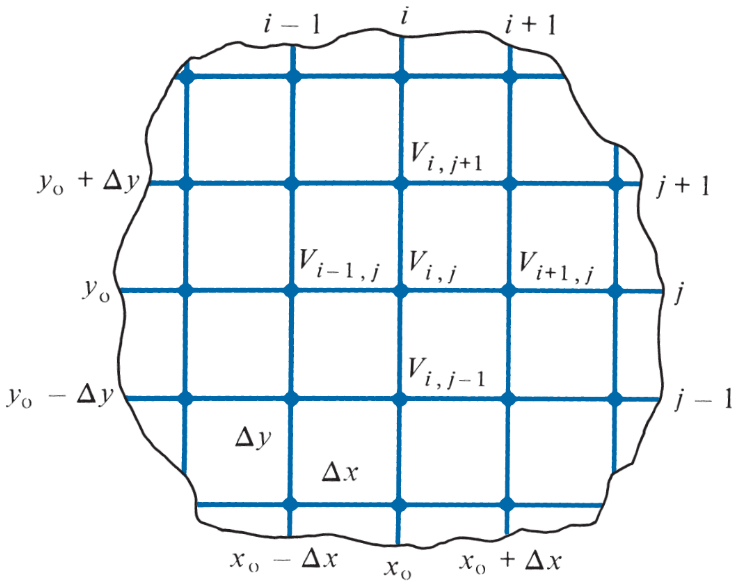
- En términos de nuestra grilla:

$$\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial x^2} \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2}}$$

$$\frac{\partial^2 V(x_0, y_0)}{\partial y^2} \approx \frac{V(x_0, y_0 + \Delta y) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0, y_0 - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2}}$$



Solución a Poisson/Laplace

- Reemplacemos en Poisson: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} \approx -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1} \approx -\frac{h^2 \rho_v}{\varepsilon}$$

$$\boxed{V_{i,j} \approx \frac{1}{4}\left[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{h^2 \rho_v}{\varepsilon}\right]}$$

Solución a Poisson/Laplace

- Para el caso Laplace: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

$$\boxed{V_{i,j} \approx \frac{1}{4}\left[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\right]}$$

- Esto equivale a tomar el promedio entre los 4 vecinos.

Diferencias Finitas en T Discreto

- ¿Cómo podríamos resolver la ecuación de onda? (unidimensional)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Diferencias Finitas en Tiempo Discreto

- Discretizamos el tiempo:

$$\frac{E_{x+1,t} - 2E_{x,t} + E_{x-1,t}}{\Delta x^2} - \mu\varepsilon \frac{E_{x,t+1} - 2E_{x,t} + E_{x,t-1}}{\Delta t^2} \approx 0$$

$$\frac{u^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\left[E_{x+1,t} - 2E_{x,t} + E_{x-1,t}\right] - \left[E_{x,t+1} - 2E_{x,t} + E_{x,t-1}\right] \approx 0$$

$$\alpha\left[E_{x+1,t} - 2E_{x,t} + E_{x-1,t}\right] - \left[E_{x,t+1} - 2E_{x,t} + E_{x,t-1}\right] \approx 0$$

$$\alpha\left[E_{x+1,t} + E_{x-1,t}\right] - 2(\alpha - 1)E_{x,t} - E_{x,t+1} - E_{x,t-1} \approx 0$$

Diferencias Finitas en Tiempo Discreto

- Despejamos:

$$E_{x,t+1} \approx \alpha\left[\, E_{x+1,t} + E_{x-1,t}\right] - 2(\alpha - 1)E_{x,t} - E_{x,t-1}$$

$$\boxed{E_{x,t+1} \approx \frac{u^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\left[\, E_{x+1,t} + E_{x-1,t}\right] + 2\left(1 - \frac{u^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right) E_{x,t} - E_{x,t-1}}$$

Volvamos a la receta

- 3 ingredientes:
  - Una ecuación diferencial parcial (Poisson, Laplace, Onda).
  - Una región donde resolver la ecuación.
  - Condiciones de borde y/o condiciones iniciales.

- 3 pasos:
  - Dividir la región en un conjunto de puntos discretos.
  - Aproximar la EDP por una ecuación lineal (ecuación de diferencias).
  - Resolver el conjunto de ecuaciones.

Volvamos a la receta

- 3 ingredientes:

  - Una ecuación diferencial parcial (Poisson, Laplace, Onda).

  - Una región donde resolver la ecuación.

  - Condiciones de borde y/o condiciones iniciales.

- 3 pasos:

  - Dividir la región en un conjunto de puntos discretos.

  - Aproximar la EDP por una ecuación lineal (ecuación de diferencias).

  - Resolver el conjunto de ecuaciones.

Condiciones de Borde

En general, suelen emplearse 3 tipos de condiciones de borde:

- Condición de Dirichlet
- Condición de von Neumann
- Condición de Cauchy

Condiciones de Borde

En general, suelen emplearse 3 tipos de condiciones de borde:

- Condición de Dirichlet

  Equivalen a forzar un valor en la solución de la frontera.

  Son del estilo: $V = Cte$
- Condición de von Neumann
- Condición de Cauchy

Condiciones de Borde

En general, suelen emplearse 3 tipos de condiciones de borde:

- Condición de Dirichlet
- Condición de von Neumann

  Imponen una condición en la derivada de la frontera.

  Se pueden interpretar como una condición de flujo: $\nabla V = Cte$
- Condición de Cauchy

Condiciones de Borde

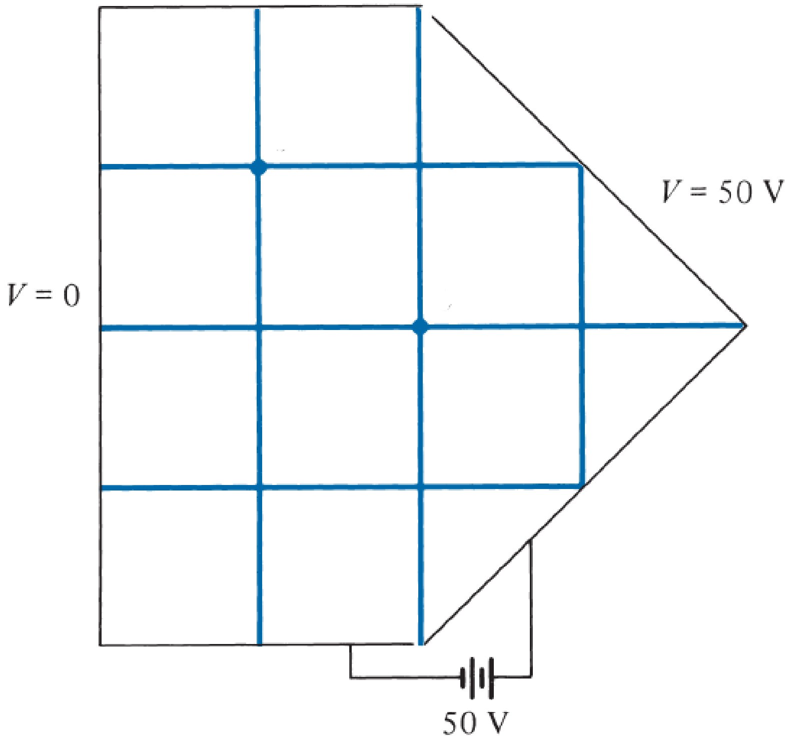
En general, suelen emplearse 3 tipos de condiciones de borde:

- Condición de Dirichlet
- Condición de von Neumann
- Condición de Cauchy

  Son una combinación de las 2 anteriores: $\nabla V + kV = Cte$

Condiciones de Borde

En general, emplearemos **condiciones de Dirichlet.**



Volvamos a la receta

- 3 ingredientes:
  - Una ecuación diferencial parcial (Poisson, Laplace, Onda).
  - Una región donde resolver la ecuación.
  - Condiciones de borde y/o condiciones iniciales.

- 3 pasos:
  - Dividir la región en un conjunto de puntos discretos.
  - Aproximar la EDP por una ecuación lineal (ecuación de diferencias).
  - Resolver el conjunto de ecuaciones.

Resolución de Diferencias Finitas

En la práctica, hay 2 métodos para resolver el problema:

- Iterativamente
- Matricialmente

Resolución de Diferencias Finitas

En la práctica, hay 2 métodos para resolver el problema:

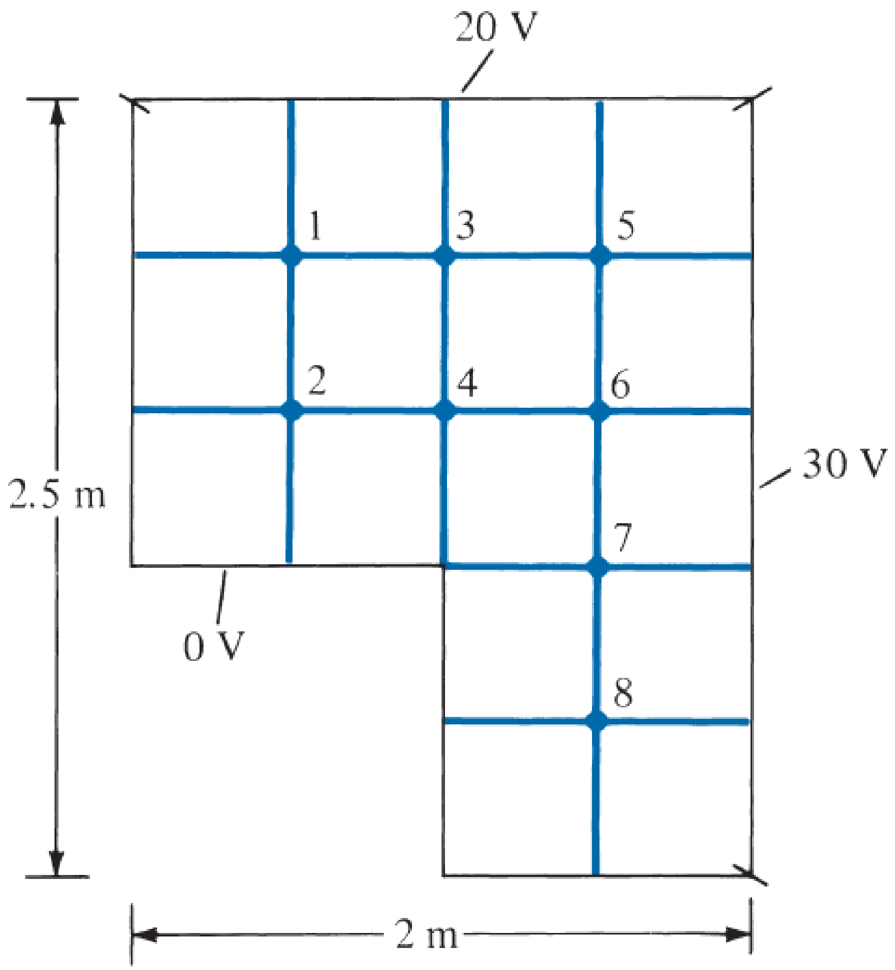
- Iterativamente
  - Se va aplicando el operador nodo a nodo hasta completar la región, lo que equivale a una iteración.
  - Con los nuevos valores actualizados, se repite el proceso hasta converger o hasta N iteraciones.
- Matricialmente

Resolución de Diferencias Finitas

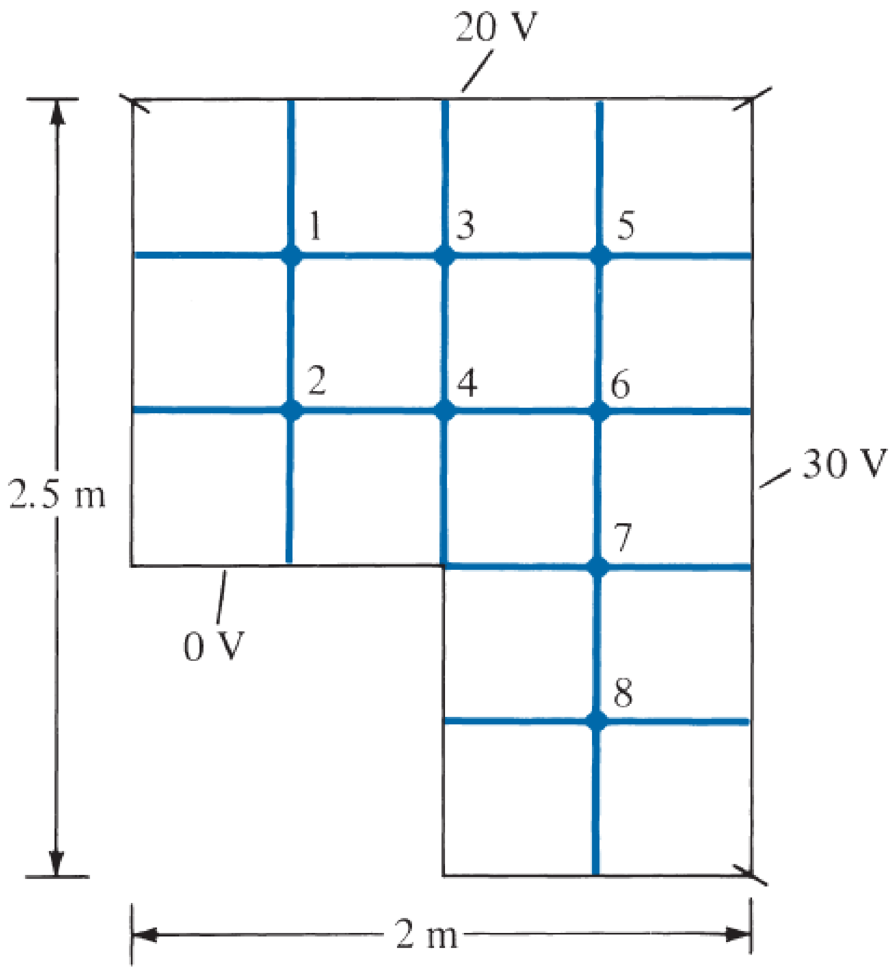
En la práctica, hay 2 métodos para resolver el problema:

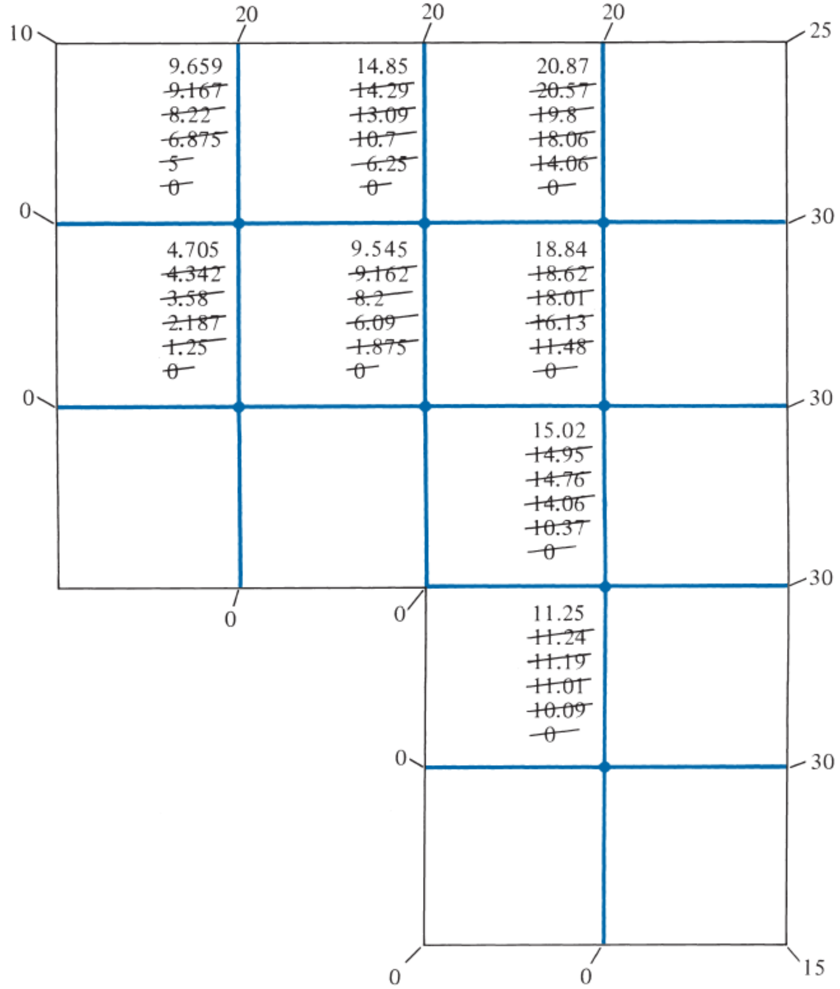
- Iterativamente
- <u>Matricialmente</u>
  - Se formula una Matriz que relaciona los nodos (A), sus valores (x), y las condiciones de borde (b), de la forma $Ax = b$.
  - Se invierte A y se resuelve $x = A^{-1}b$.

Ejemplo 1: Laplace (Iterativo)

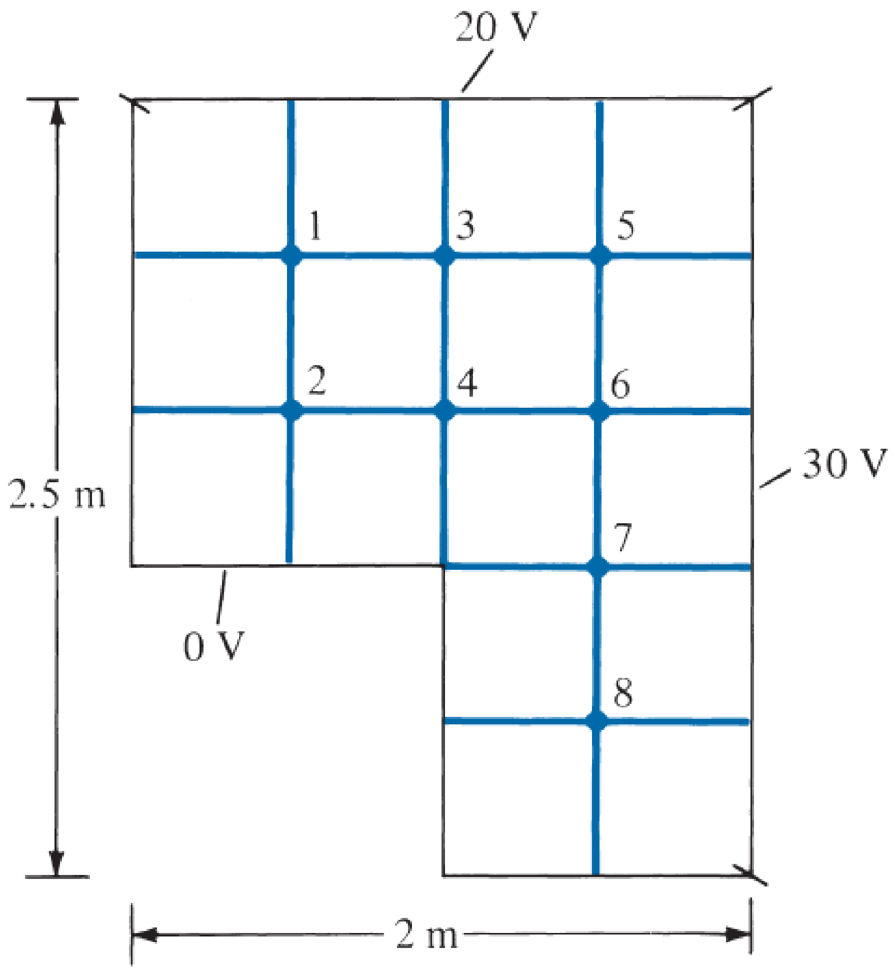


Ejemplo 1: Laplace (Iterativo)





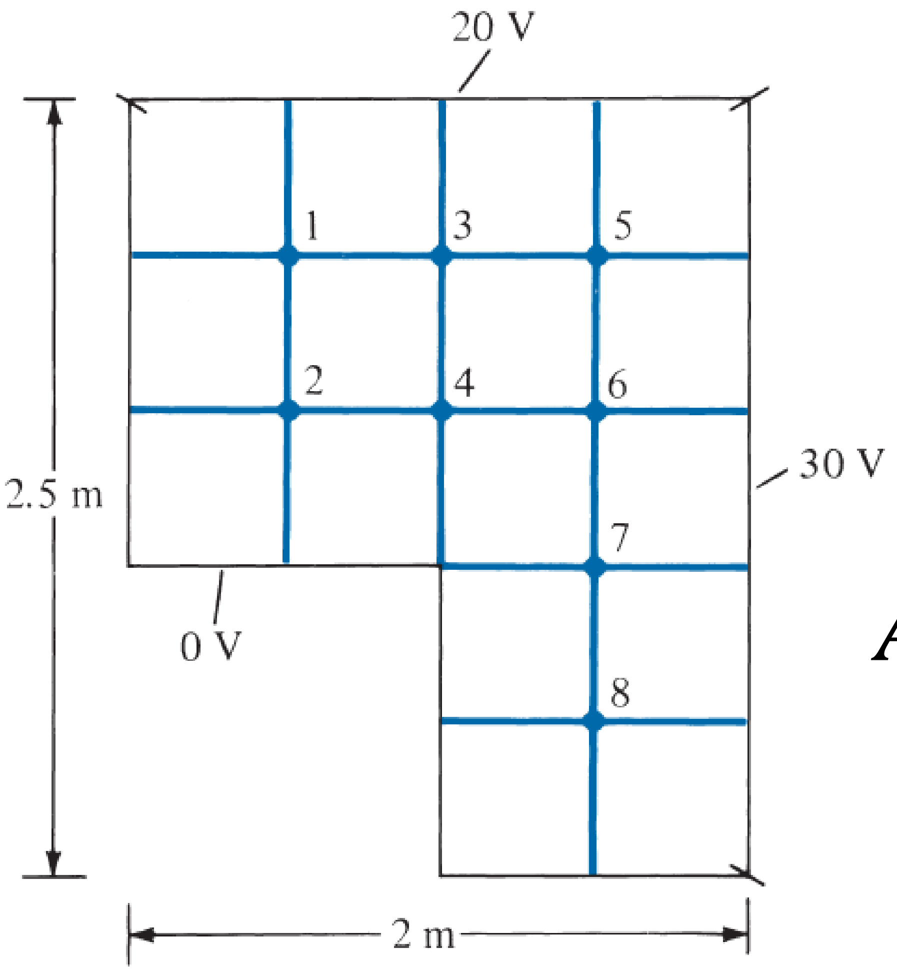
Ejemplo 1: Laplace (Matricial)



Reglas para generar la matriz A:

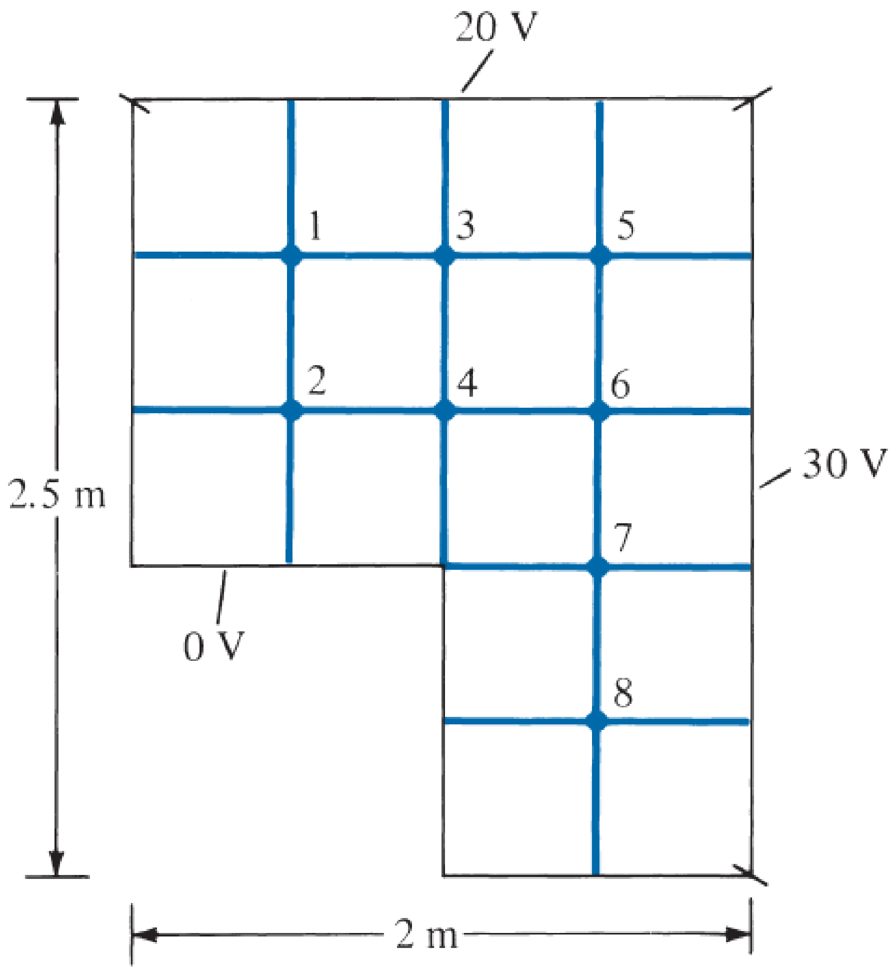
- La diagonal representa los nodos.
- Cada fila representa un nodo y sus conexiones con los otros nodos.
- Los elementos de la diagonal llevan el ponderador del nodo.
- Si un nodo es vecino de otro, se pone un 1, en caso contrario, 0.

Ejemplo 1: Laplace (Matricial)



$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \rotatebox{90}{$nodo\ 1$} & \rotatebox{90}{$nodo\ 2$} & \rotatebox{90}{$nodo\ 3$} & \rotatebox{90}{$nodo\ 4$} & \rotatebox{90}{$nodo\ 5$} & \rotatebox{90}{$nodo\ 6$} & \rotatebox{90}{$nodo\ 7$} & \rotatebox{90}{$nodo\ 8$} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} nodo\ 1 \\ nodo\ 2 \\ nodo\ 3 \\ nodo\ 4 \\ nodo\ 5 \\ nodo\ 6 \\ nodo\ 7 \\ nodo\ 8 \end{array}
$$

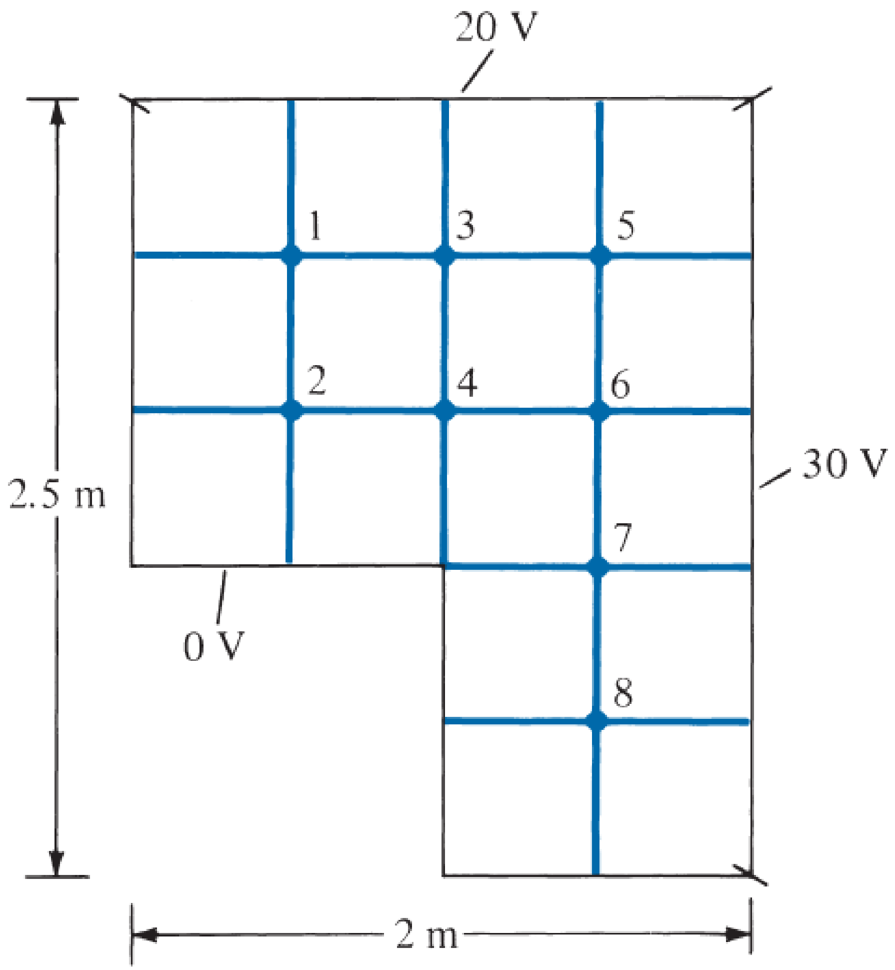
Ejemplo 1: Laplace (Matricial)



Reglas para generar la matriz b:

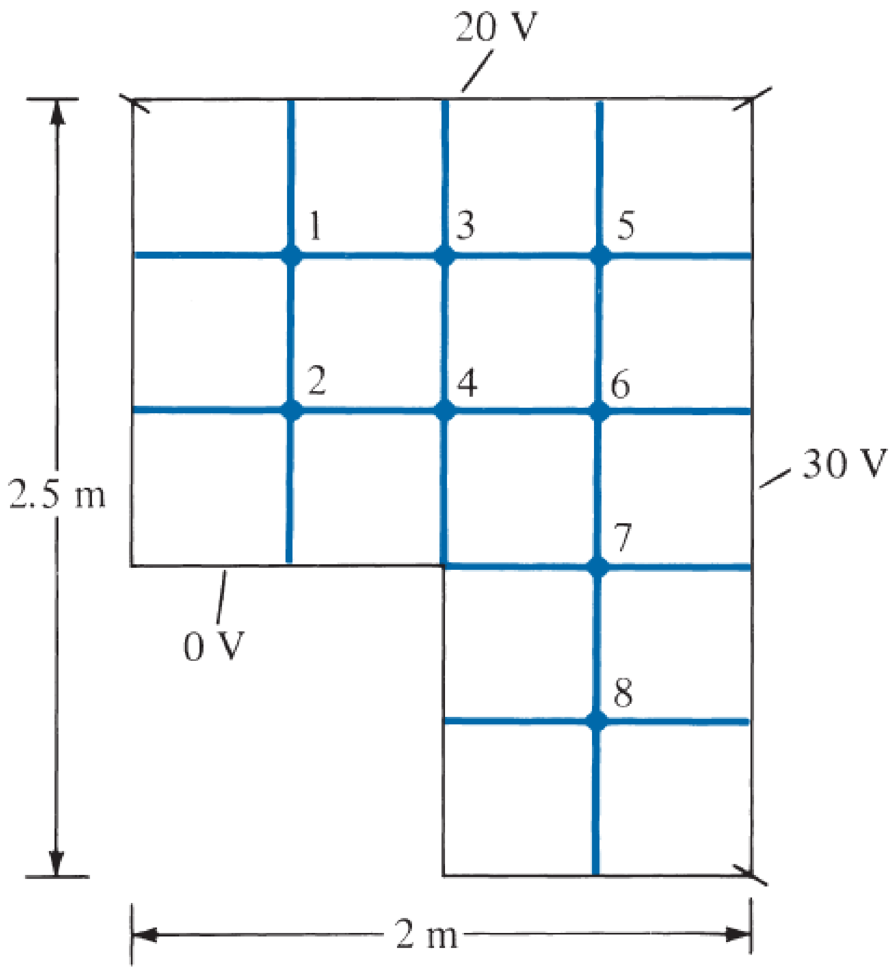
- Se suman todos los potenciales de frontera que conectan con el nodo de cada fila.
- El valor se expresa con signo invertido.

Ejemplo 1: Laplace (Matricial)



$$b = \begin{bmatrix} -20-0 \\ -0\ -0 \\ -20 \\ -0 \\ -20-30 \\ -30 \\ -30-0 \\ -30-0-0 \end{bmatrix} \begin{matrix} nodo\ 1 \\ nodo\ 2 \\ nodo\ 3 \\ nodo\ 4 \\ nodo\ 5 \\ nodo\ 6 \\ nodo\ 7 \\ nodo\ 8 \end{matrix}$$

Ejemplo 1: Laplace (Matricial)



$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -50 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 10.04 \\ 4.958 \\ 15.22 \\ 9.788 \\ 21.05 \\ 18.97 \\ 15.06 \\ 11.26 \end{bmatrix}$$

Limitaciones

- Evidentemente, el factor más crucial en el método de Diferencias Finitas es la selección de la grilla en el proceso de discretización.
- Por un lado, el tamaño de la grilla es relevante para el nivel de exactitud que se desee.
- Por otro lado, la geometría del problema también condicionará el qué hacer con la grilla (e.g. interpolar, parametrizar, etc).
- Esto no solo impacta en la complejidad y el tiempo del código, sino que también en memoria.

Ejemplo 2

- Supongamos que queremos simular ondas electromagnéticas en un espacio de tamaño $100 \times 100 \times 10\,[\mathrm{m}^3]$. La onda se propaga a $1490\,\left[\frac{m}{s}\right]$. Nos interesa estudiar frecuencias entre $10\,[kHz]$ y $20[kHz]$. Asumamos que para una simulación adecuada necesitamos unos 20 puntos por longitud de onda para la onda más pequeña. ¿Cuánta memoria necesitaríamos?

Ejemplo 2

- La longitud de onda más pequeña será la de la onda de 20 $[\mathrm{kHz}]$.
- Entonces: $\lambda = \frac{1.490}{20.000} = 0.0745\ [m]$.
- Si son 20 puntos por longitud de onda: $\Delta x = \frac{0.0745}{20} = 3.725 \times 10^{-3}[m]$.
- Un elemento de volumen $\Delta x^3 = 51.686 \times 10^{-9}[m^3]$.
- El volumen total del espacio es de $10^5[m^3]$.
- El número de puntos necesitado será $N = \frac{10^5}{51.686\times10^{-9}} = 1.93 \times 10^{12}$.

Ejemplo 2

- La longitud de onda más pequeña será la de

- Entonces: $\lambda = \frac{1.490}{20.000} = 0.0745\ [m]$.
- Si son 20 puntos por longitud de onda: $\Delta x =$ … $^{3}]$
- Un elemento de volumen $\Delta x^3 = 51.686 \times 1$
- El volumen total del espacio es de $10^5 [m^3]$.
- El número de puntos necesitado será $N = \frac{\ }{51.686 \times 10^{-9}}$
- Si cada punto es un dato de 8 bits, $M = 8 \times 1.93 \times 10^{12} = \mathbf{15.47}\ \boldsymbol{Tb}$

Resumen

- Formulamos el método de Diferencias Finitas como una alternativa para resolver problemas de mayor complejidad.
- Establecimos los pasos para aplicar este método en Poisson, Laplace y Ondas.
- Analizamos las limitaciones del método.
- Evidenciamos la importancia de estimar la memoria requerida antes de empezar a simular.

Cerrando la clase de hoy

- Ya conocido el método, nos resta ponernos manos a la obra.

Próxima Clase:

Taller 1: Diferencias Finitas