Clase 11
Propagación de Ondas EM

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 480 – 489

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- La clase anterior vimos que una posible solución a la ecuación de onda eran las Ondas Monocromáticas para $\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$.
- Nos falta caracterizar el cómo se propagan estas ondas y cómo se comportan en los distintos tipos de medios que hemos visto en el curso.

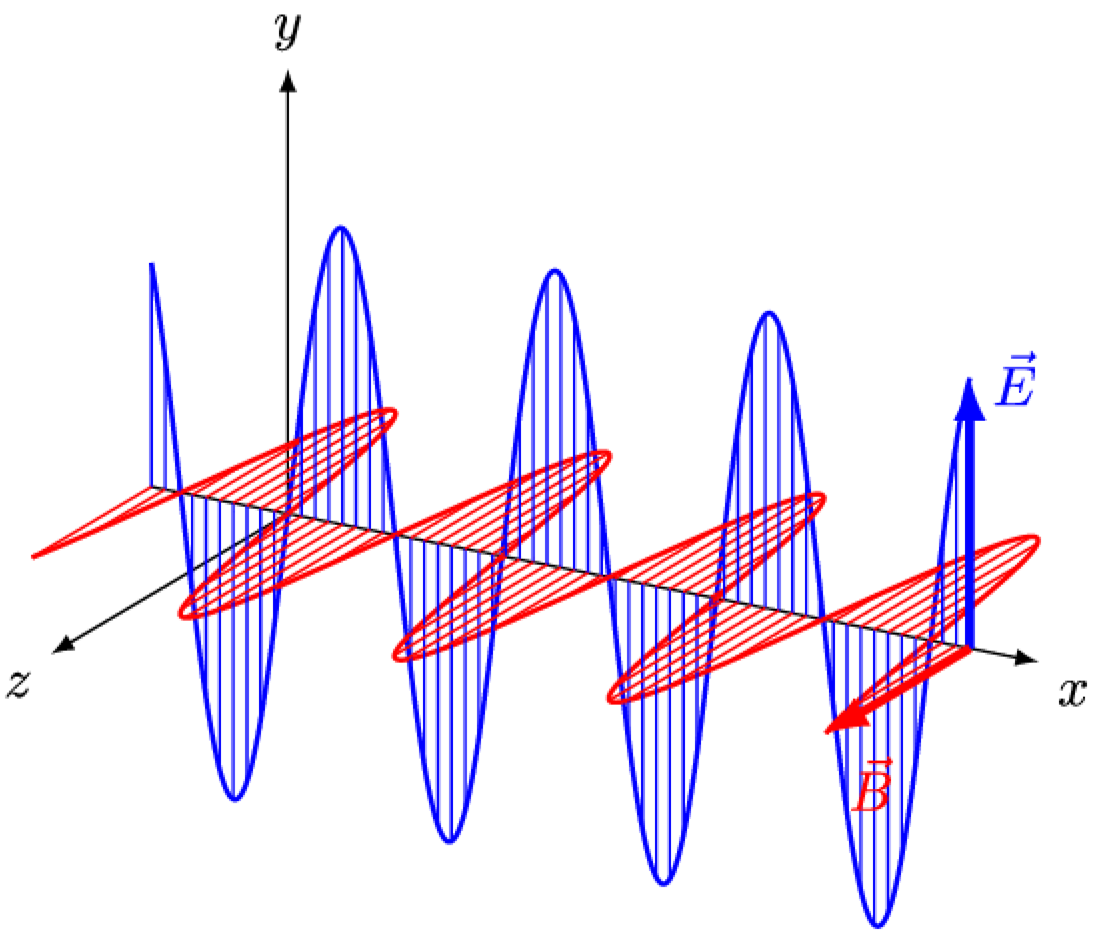
Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-11:** Determinar las expresiones correspondientes a ondas eléctricas, magnéticas y potencia asociada para condiciones de propagación libre en distintos tipos de medios.

Contenidos

- La Ecuación de Onda en materiales óhmicos
- Constante de propagación (γ)
- OPM en medios óhmicos
- Impedancia del medio (η)
- Propagación en Medios

De la clase anterior



La Ecuación de Onda en materiales óhmicos

- Extenderemos nuestro análisis al caso de materiales **óhmicos** simples. Es decir, materiales que cumplen con la Ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Luego:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La Ecuación de Onda en materiales óhmicos

- Reescribiendo todo en notación fasorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = j\omega\mu\varepsilon\mathbf{E} + \mu\sigma\mathbf{E} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Luego:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\,(j\omega\varepsilon + \sigma)\mathbf{E} \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\boxed{\varepsilon' = j\omega\varepsilon + \sigma}$$

Permitividad compleja

La Ecuación de Onda en materiales óhmicos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon'\mathbf{E} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Con este nuevo conjunto de ecuaciones de Maxwell, podemos reescribir las Ecuaciones de Onda:

$$\nabla^2\mathbf{E} - j\omega\mu\varepsilon'\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla^2\mathbf{H} - j\omega\mu\varepsilon'\mathbf{H} = 0$$

- Y definiremos la **constante de propagación**:

$$\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu\varepsilon'} = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}}$$

Constante de propagación (γ)

- Entendamos un poco qué es γ:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}$$

- Podemos notar que γ es un número complejo. Intentemos reescribirlo en su forma

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Constante de propagación (γ)

- Por un lado, si hacemos γ^2 y tomamos la parte real:

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta = j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)$$

$$\Re\{\gamma^2\} = \alpha^2 - \beta^2 = \Re\{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma\} = -\omega^2\mu\varepsilon$$

- Por otro lado, si tomamos la magnitud de γ al cuadrado:

$$|\gamma^2| = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2} = \sqrt{(-\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2}$$

$$|\gamma^2| = \sqrt{\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2} = \sqrt{\omega^2\mu^2(\omega^2\varepsilon^2 + \sigma^2)}$$

$$|\gamma^2| = \alpha^2 + \beta^2 = \omega\mu\sqrt{(\omega^2\varepsilon^2 + \sigma^2)}$$

Constante de propagación (γ)

- Luego:

$$\alpha = \sqrt{\frac{|\gamma^2| + \Re\{\gamma^2\}}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2}\sqrt{(\omega^2\varepsilon^2 + \sigma^2)} - \omega^2\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{|\gamma^2| - \Re\{\gamma^2\}}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2}\sqrt{(\omega^2\varepsilon^2 + \sigma^2)} + \omega^2\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

Constante de propagación (γ)

- Así:

$$\boxed{\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

OPM en medios óhmicos

- Podemos reescribir las ecuaciones de onda como:

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} - \gamma^2\mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{H} - \gamma^2\mathbf{H} = 0}$$

- Y sus soluciones serán de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{E_s}e^{j\omega t}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B_0}e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{B_s}e^{j\omega t}$$

OPM en medios óhmicos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{E_s}e^{j\omega t}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B_0}e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{B_s}e^{j\omega t}$$

- $\boldsymbol{\kappa}$ es el vector asociado a α. Este factor representará las pérdidas de amplitud a causa del medio.

- $\mathbf{k}$ es el vector asociado a β. Este factor representará el desplazamiento de fase.

Impedancia del medio (η)

- Se entiende como la resistencia que el medio ejerce ante la propagación de una onda EM.
- Se define como la razón entre los fasores $\mathbf{E_s}$ y $\mathbf{H_s}$

$$\eta = \frac{\mathbf{E_s}}{\mathbf{H_s}} = \frac{\mathrm{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta}}{\frac{B_0}{\mu} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta}} = \frac{\mu E_0}{B_0}$$

- La clase pasada vimos que $\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. El equivalente ahora sería $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon'}}$.

Impedancia del medio (η)

- Reemplazando:

$$\eta = \frac{\mathbf{E_s}}{\mathbf{H_s}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - \frac{j\sigma}{\omega}}}}$$

- ¡Notemos que al ser compleja tendrá **magnitud y fase**!

Impedancia del medio (η)

- Tras un poco de álgebra, podemos demostrar que:

$$\boxed{|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\boxed{\theta_\eta = \angle\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}$$

Propagación en Medios

- Ya vimos la teoría de propagación de ondas a modo general.

- Nos interesa estudiar dicha propagación en 4 medios distintos:

  a) Dieléctricos con pérdidas / Conductores con pérdidas
  b) Dieléctricos sin pérdidas
  c) Vacío
  d) Buenos Conductores

a) Dieléctricos/Conductores con pérdidas

- Literalmente es todo el análisis que acabamos de hacer.

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]^{\frac{1}{2}}$$

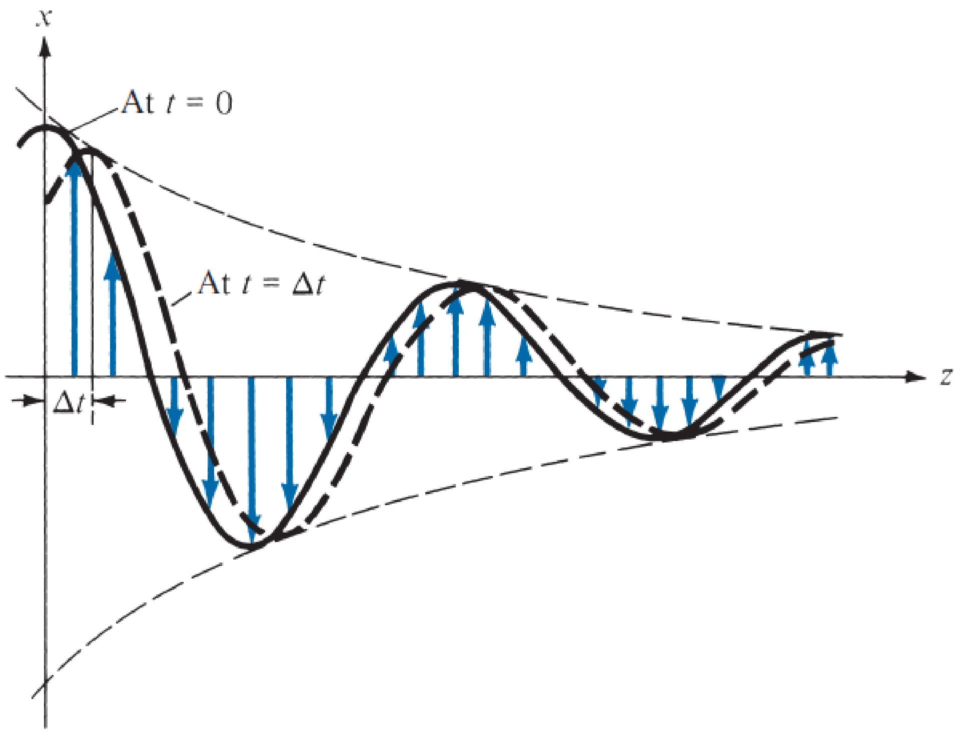
$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

a) Dieléctricos/Conductores con pérdidas

- La Solución a la ecuación de onda tendrá la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B_0} e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$

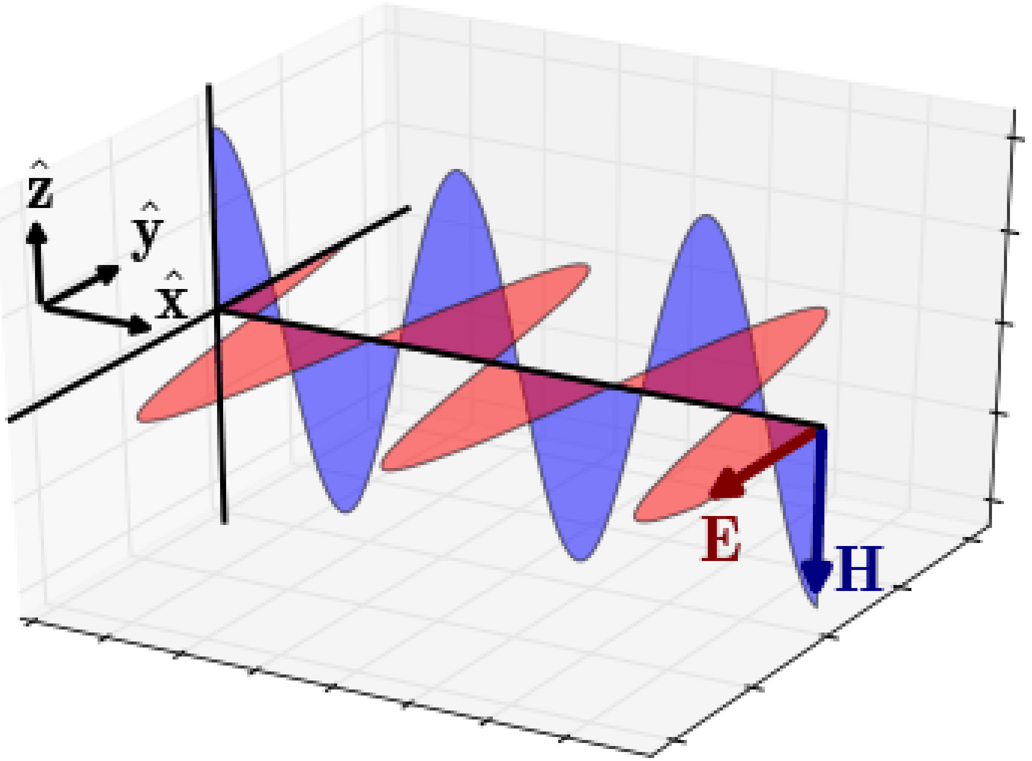


a) Dieléctricos/Conductores con pérdidas

- Dado que hay una impedancia en el medio, se introducirá un desfase entre ambas ondas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{E_0}}{|\eta|} e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0 - \theta_\eta)$$



Ojo: Aquí solo se está mostrando el desfase

b) Dieléctricos sin pérdidas

- En este caso, no hay corrientes, por tanto $\sigma = 0$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{0}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{0}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\frac{0}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{0}{\omega\varepsilon}\right)$$

b) Dieléctricos sin pérdidas

- En este caso, no hay corrientes, por tanto $\sigma = 0$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\theta_\eta = 0$$

- Este es el caso con el que trabajamos la clase pasada

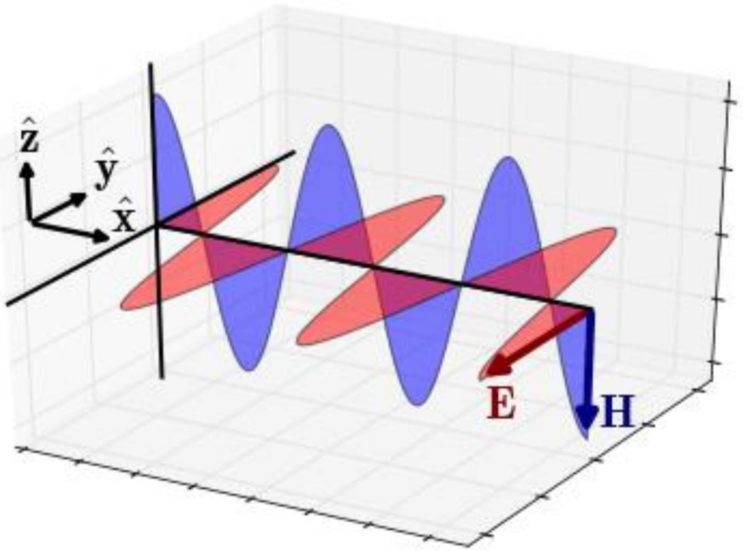
b) Dieléctricos sin pérdidas

- La Solución a la ecuación de onda tendrá la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$

- Y ambas ondas estarán en fase:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{E}_0\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$



Ojo: Aquí solo se está mostrando el desfase

b) Dieléctricos sin pérdidas

- Para el caso de dieléctricos, se define el **índice de refracción** como la medida de cuánto se reduce la velocidad de la luz dentro del medio.

$$\boxed{n = \frac{c}{u} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

- Si el material es transparente, $\mu_r \approx 1$

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

c) Vacío

- En este caso, $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$ y $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$|\eta_0| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = 377[\Omega]$$

$$\theta_\eta = 0$$

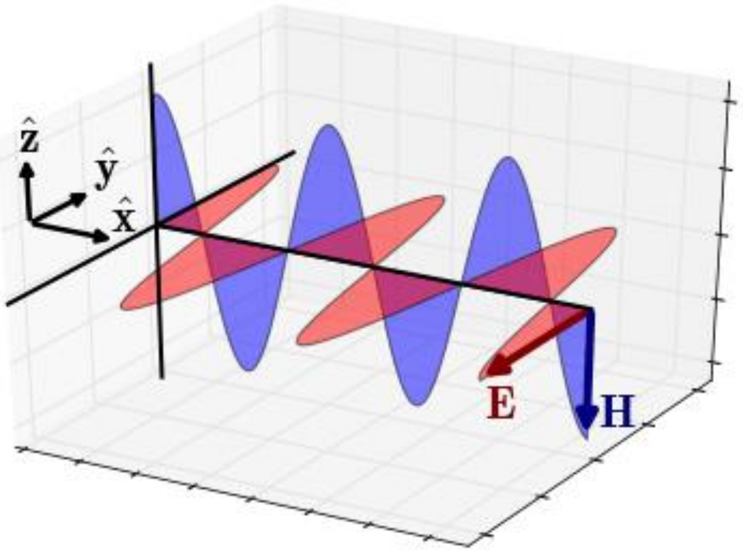
c) Vacío

- La Solución a la ecuación de onda tendrá la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$

- Y ambas ondas estarán en fase:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{E}_0\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{\eta_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$



Ojo: Aquí solo se está mostrando el desfase

d) Buenos Conductores

- En este caso $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\boldsymbol{\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\boldsymbol{\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}}+1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\boldsymbol{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\boldsymbol{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}\right)$$

d) Buenos Conductores

- En este caso $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\boxed{\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} \qquad \boxed{\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}}$$

$$\boxed{|\eta| \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}} \qquad \boxed{\theta_\eta \approx \frac{\pi}{4} = 45°}$$

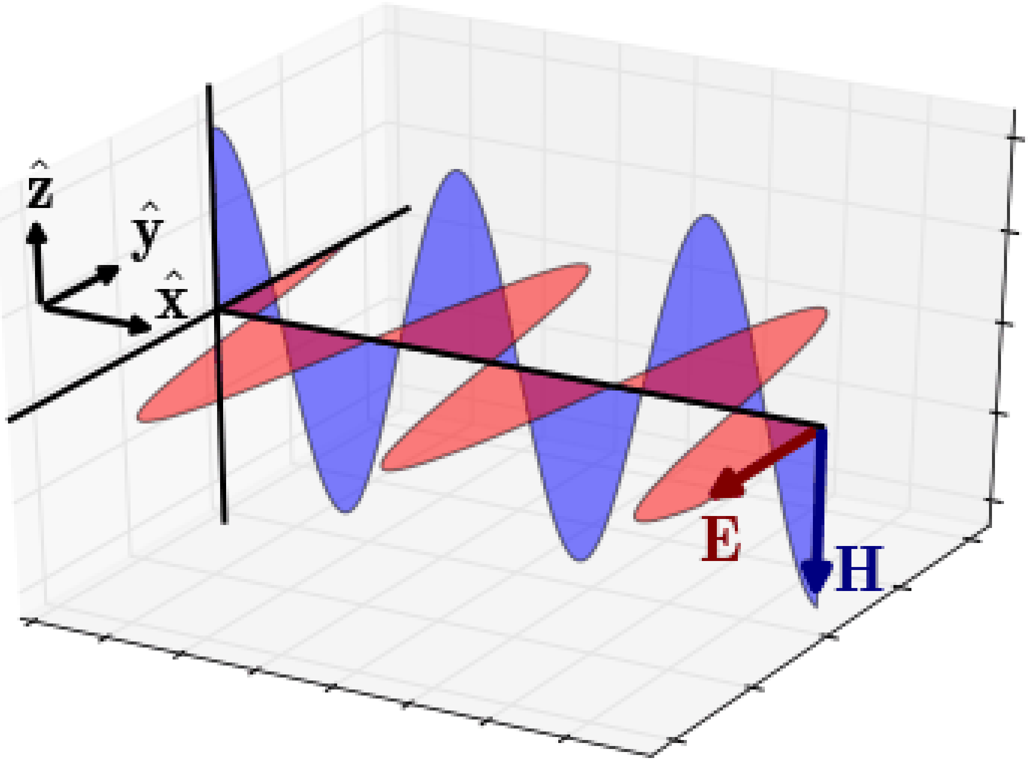
- Analizaremos este caso con mayor detalle en otra clase.

d) Buenos Conductores

- Dado que hay una impedancia compleja en el medio, se introducirá un desfase entre ambas ondas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{E_0}}{|\eta|} e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}} \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0 - \theta_\eta)$$



Ojo: Aquí solo se está mostrando el desfase

Resumen

- Analizamos el caso general de ondas en medios con pérdidas.
- Definimos el concepto de constante de popagación y analizamos sus componentes real e imaginaria.
- Introdujimos el concepto de impedancia del medio.
- Definimos el comportamiento de Ondas EM Planas en distintos tipos de medio.
- Más adelante, retomaremos el caso de ondas en medios conductores.

Cerrando la clase de hoy

- Hasta ahora en nuestros ejemplos hemos simplificado el caso de las ondas a una única componente. Extenderemos ese análisis a otros casos.
- Actualmente las ondas EM se emplean para transmitir información, entonces, ¿tienen energía?

Próxima Clase (12/Abril):

Polarización y Energía de Ondas EM

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 498 – 505