

# Clase 06

## Magnetostática en el Vacío

---

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 297 – 325

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 349 – 367

Javier Silva Orellana

[jisilva8@uc.cl](mailto:jisilva8@uc.cl)

# Contexto

---

- La clase pasada logramos introducir el concepto de magnetismo como un fenómeno relativista del movimiento de cargas.
- Análogo al caso eléctrico, estudiaremos el caso de campos magnéticos estáticos en el vacío.

## Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-01:** Plantear y resolver ecuaciones para la determinación de Fuerzas, Campos, Flujos, Potenciales, Torques y Energías electromagnéticas en problemas de mediana complejidad.
- **OA-02:** Comprender y aplicar el concepto de expansión multipolar para la estimación precisa de campos electromagnéticos.
- **OA-05:** Determinar e interpretar la relación entre electricidad y magnetismo, empleando los elementos de la Mecánica Relativista.

# Contenidos

---

- Electrodinámica Relativista
- Ley de Biot-Savart
- Ley de Ampère
- Flujo Magnético
- Potencial Magnético
- Energía Magnética
- Ley de Lorentz
- Torque Magnético
- Dipolo Magnético

# Electrodinámica Relativista

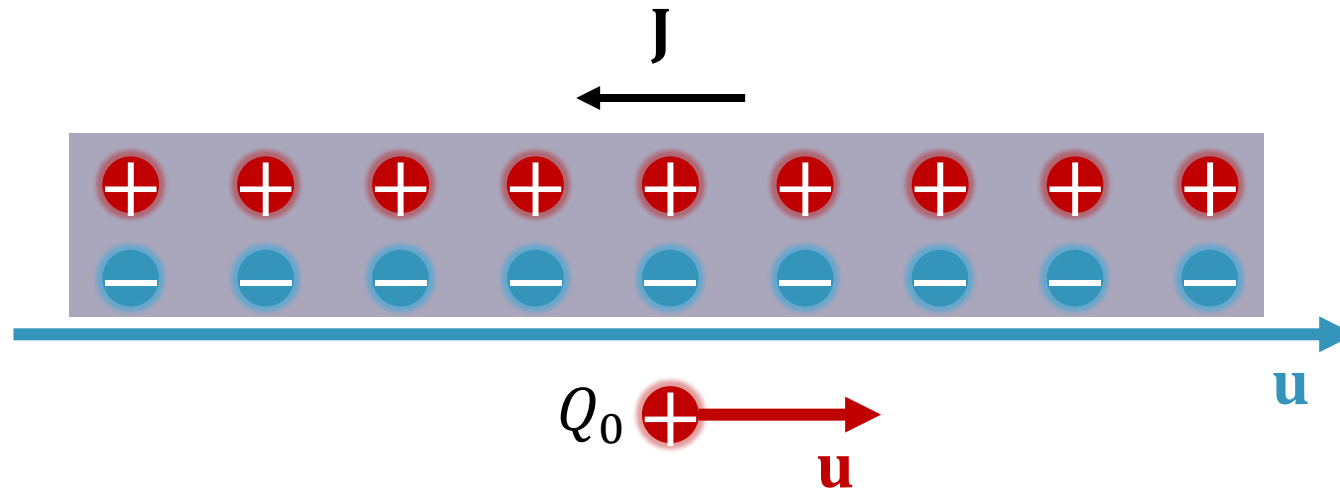
- Anteriormente vimos que el magnetismo no es más que un efecto relativista de la electrodinámica.

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_V \frac{\rho Q_0 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} dv + Q_0 \mathbf{u} \times \left[ \mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \right]$$

*Ley de Coulomb* *Ley de Biot-Savart*

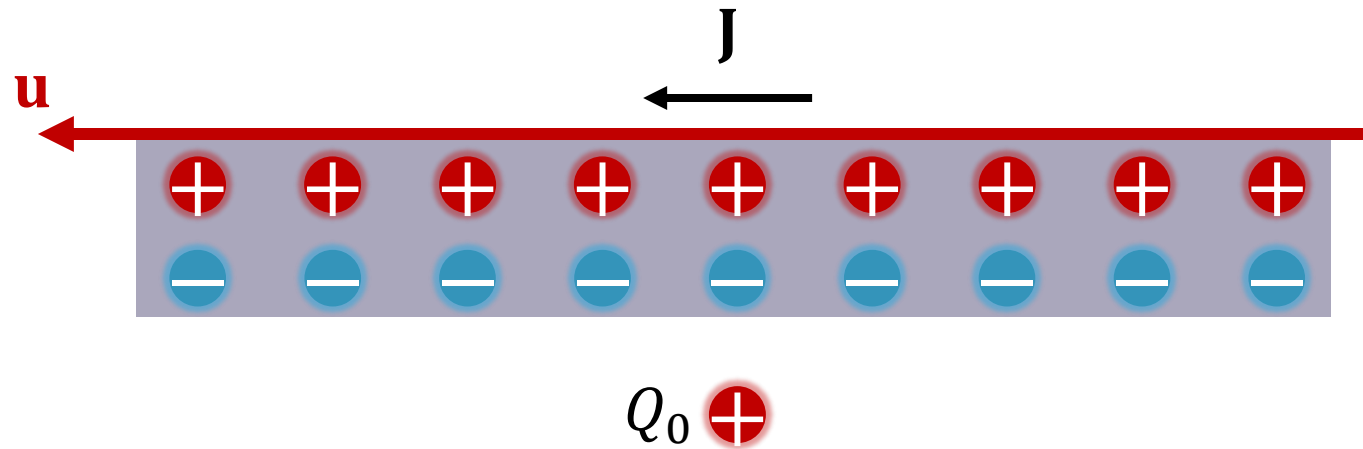
# Electrodinámica Relativista

Consideremos un cable con un Flujo de electrones  $-\mathbf{J} = \sigma \mathbf{u}$  y una carga de prueba  $Q_0$  que se mueve con igual rapidez y sentido. Consideremos el cable como sistema inercial de referencia.



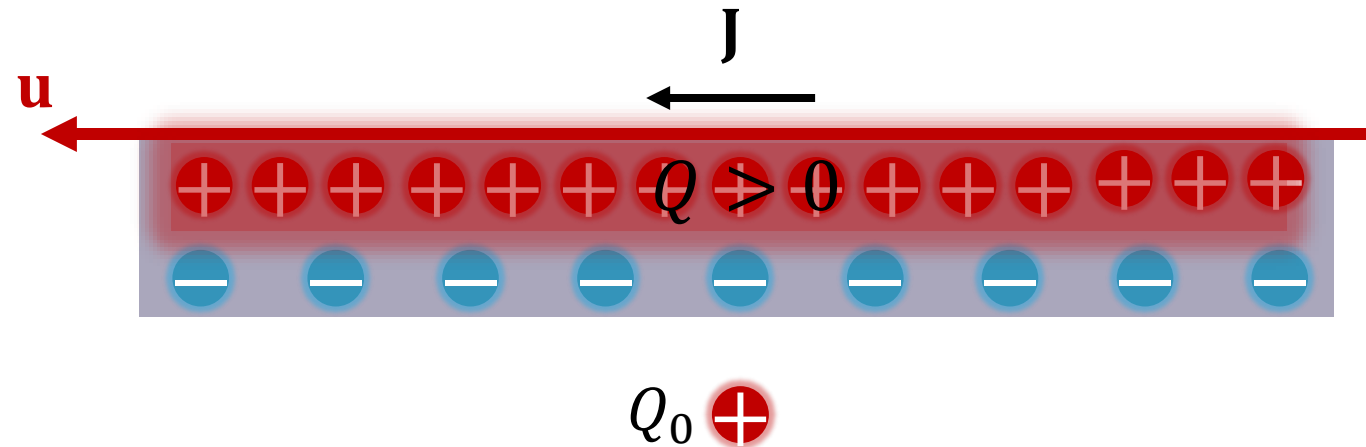
# Electrodinámica Relativista

Ahora cambiemos de sistema inercial y posicionémonos sobre los electrones.



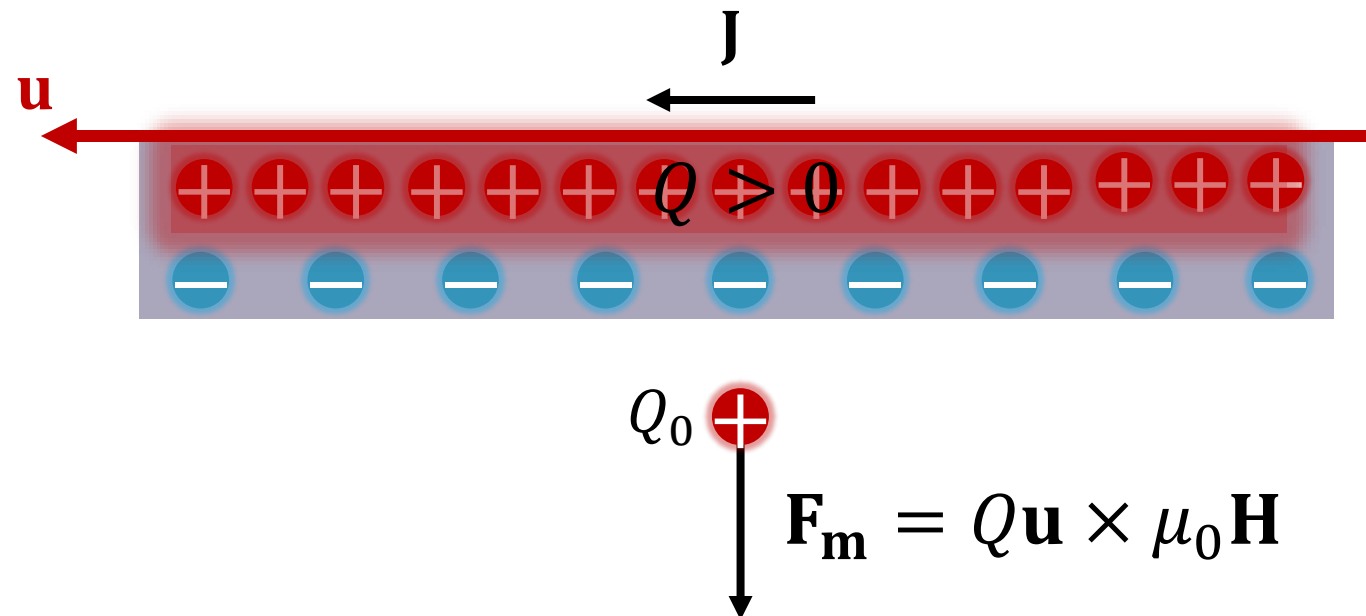
# Electrodinámica Relativista

Por contracción de longitudes, la carga  $Q_0$  percibirá los protones en movimiento como si estuviesen más cerca, generando una densidad de carga positiva.



# Electrodinámica Relativista

En consecuencia, la carga de prueba experimentará una fuerza en sentido radial al cable, que la alejará de este. A esta fuerza la llamamos “Fuerza Magnética”.





# Ley de Biot-Savart

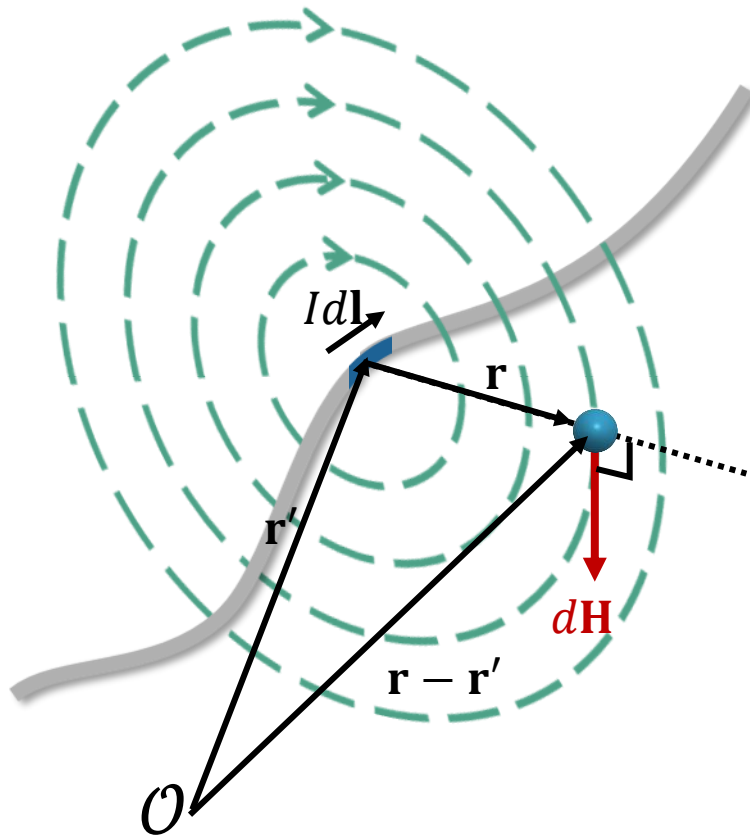
- Nuevamente:

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_V \frac{\rho Q_0 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} dv + Q_0 \mathbf{u} \times \left[ \mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \right]$$

*Ley de Coulomb* *Ley de Biot-Savart*

# Ley de Biot-Savart

- Esta ley describe el campo magnético a nivel macroscópico.



$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

# Ley de Biot-Savart

- Al igual que con otras ecuaciones, podemos escribirla para el caso lineal, superficial y volumétrico.

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

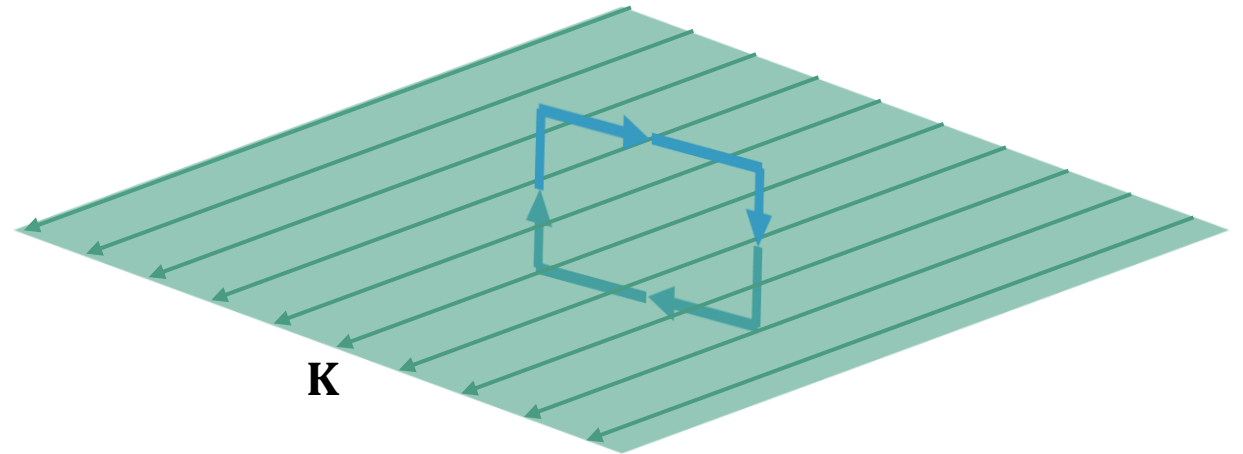
$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{J} dS' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{H} = \int_V \frac{\mathbf{J} dv' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

# Ley de Ampère

- Es un análogo a la ley de Gauss. Nos establece una relación entre la intensidad de campo y la cantidad fuentes encerradas.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{enc}$$



- En lugar de superficies gaussianas, aquí usamos *caminos amperianos*.

# Ley de Ampère

- Aplicando el Teorema de Stokes:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

- La corriente encerrada será:

$$I_{enc} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

- Luego

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

*Ley de Ampère diferencial*

Notemos que  $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$   
 $\mathbf{H}$  no es conservativo

# Ley de Ampère

- Con esto ya tenemos nuestra tercera ecuación de Maxwell en sus formas integral y diferencial:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

*Forma integral*

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

*Forma diferencial*

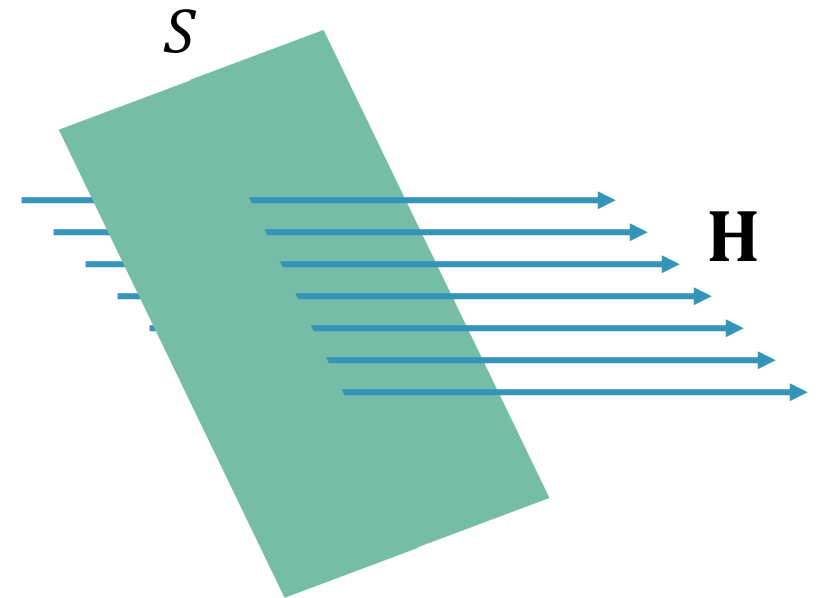
**OJITO**: Esta ecuación de Maxwell también está incompleta. Más adelante veremos por qué.



# Densidad de Flujo Magnético (**B**)

- Similar a la densidad de flujo eléctrico **D**, se define como la cantidad de campo magnético que circula perpendicularmente a través de una superficie.
- De igual forma, su comportamiento depende del medio:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$



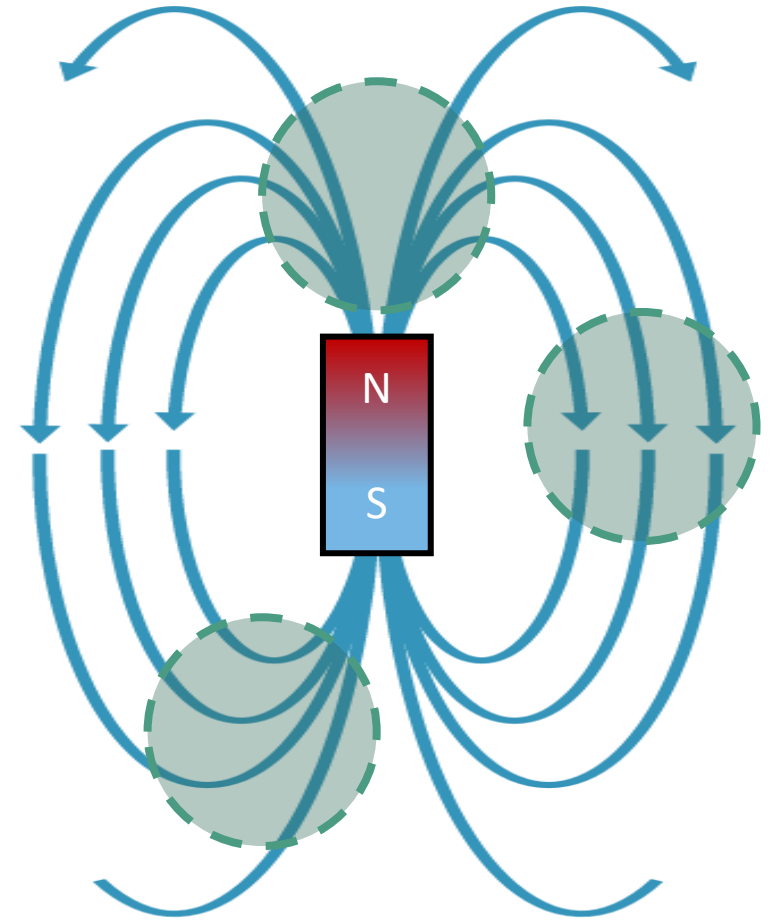
# Flujo Magnético ( $\Psi$ )

- Asimismo, el flujo magnético estará dado por:

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

- Pero en un campo magnético las líneas de flujo siempre son cerradas. Luego, para una superficie cerrada:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$





# Flujo Magnético ( $\Psi$ )

- Aplicando divergencia:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \cdot \mathbf{B} dS = 0$$

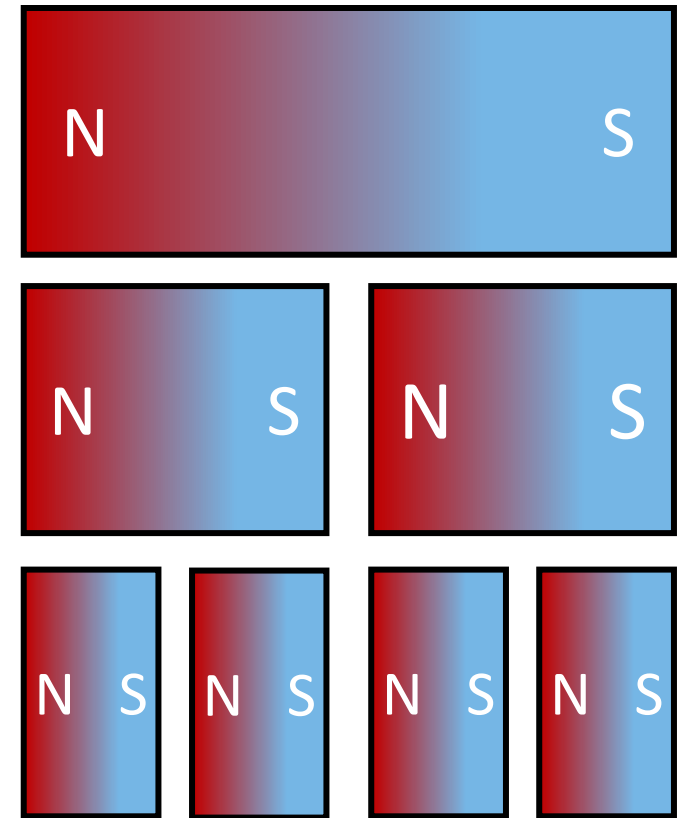
- Con esto tenemos la cuarta Ecuación de Maxwell, que niega la existencia de monopolos magnéticos:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

*Forma integral*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

*Forma diferencial*



# Potencial Vectorial Magnético

---

- De la cuarta ley de Maxwell obtuvimos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Por propiedades del operador nabla sabemos que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

- Así, podemos establecer un potencial vectorial  $\mathbf{A}$ , tal que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

# Potencial Vectorial Magnético

- De Biot-Savart:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \int_L \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l}' \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{a}_R}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = - \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l}' \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

Mismo truco que usamos en  
Polarización y Dieléctricos  
(Cap. 04, slide 17)

$$\mathbf{B} = - \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times d\mathbf{l}' - \nabla \times \left( \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] = - \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ 0 - \nabla \times \left( \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]$$

$$\mathbf{B} = \int_L \nabla \times \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

# Potencial Vectorial Magnético

- Así:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

*Potencial Vectorial Magnético*

- Notemos que reemplazando en la ecuación de flujo:

$$\psi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

# Densidad de Energía ( $w_M$ )

---

- En la clase de electrostática vimos que la energía puede escribirse como:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (V)(\rho_{\tau} d\tau)$$

- En este sentido, las cargas se interpretan como el elemento generador del campo. Mientras que el potencial escalar es la energía normalizada por unidad de carga.

# Densidad de Energía ( $w_M$ )

---

- Para el caso magnético, podemos hacer la misma analogía a nivel vectorial:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{J} dv)$$

- Donde las densidades de corriente (cargas en movimiento) generan el campo, y el potencial vectorial es la energía normalizada por unidad de corriente.

# Densidad de Energía ( $w_M$ )

- De la tercera ecuación de Maxwell tenemos que:  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dv$$

- Usando la identidad:  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2} \int_v \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv$$

# Densidad de Energía ( $w_M$ )

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2} \int_v \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \cdot dv + \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} d\mathbf{S}$$

- $\mathbf{A}$  varia a razón  $1/r$ ,  $\mathbf{H}$  varía a razón  $1/r^2$ , y  $d\mathbf{S}$  varía a razón  $r^2$ . Luego, si la superficie crece infinitamente, el segundo término de  $W_M$  desaparece:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_v \frac{B^2}{\mu_0} dv \Rightarrow \boxed{w_E = \frac{B^2}{2\epsilon_0}}$$

*Densidad de Energía*



# Ley de Lorentz

- De nuestra clase anterior

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_V \frac{\rho Q_0 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} dv + Q_0 \mathbf{u} \times \left[ \mu_0 \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \right]$$

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_e + Q_0 \mathbf{u} \times \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{F}_m = Q_0 \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

*Ley de Lorentz*

# Ley de Lorentz

- Consideremos que en lugar de una carga  $Q_0$  tenemos un cable por el que circula una densidad de cargas  $dQ$

$$d\mathbf{F}_m = dQ\mathbf{u} \times \mathbf{B} = dQ \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B}$$

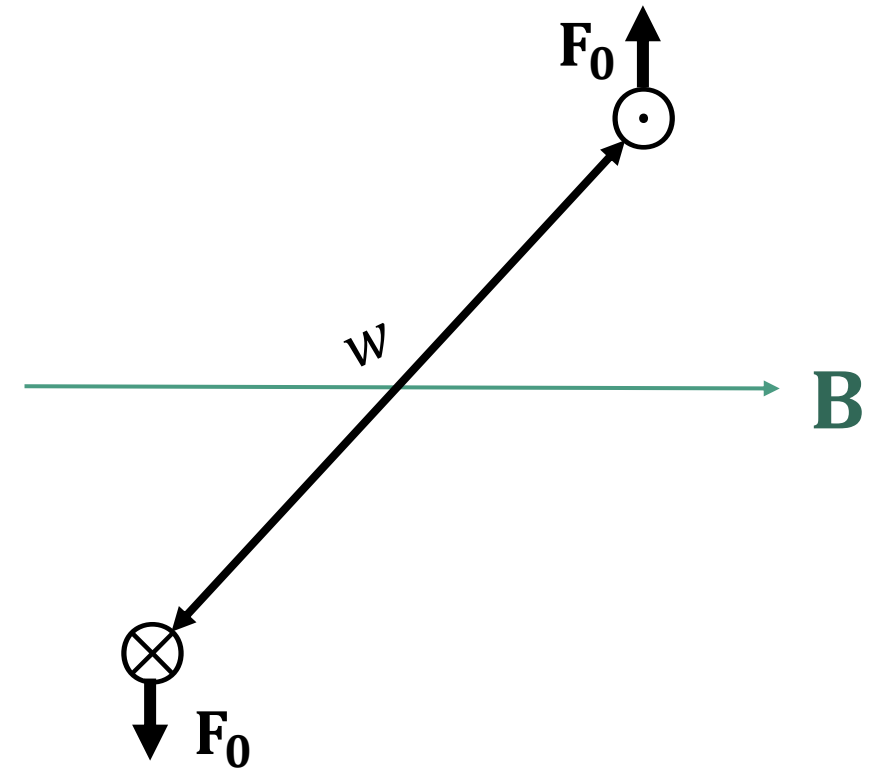
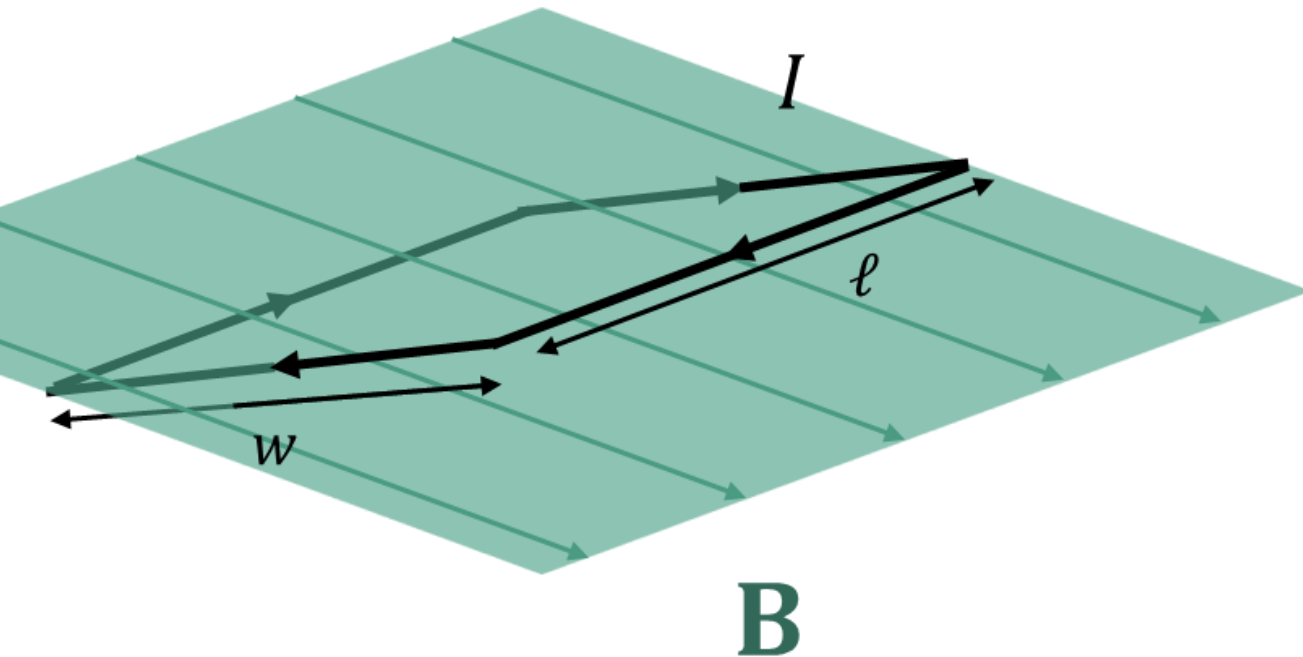
$$d\mathbf{F}_m = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F}_m = \oint_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

¡Podemos interpretar  $\mathbf{B}$  como la fuerza por unidad de elemento de corriente!

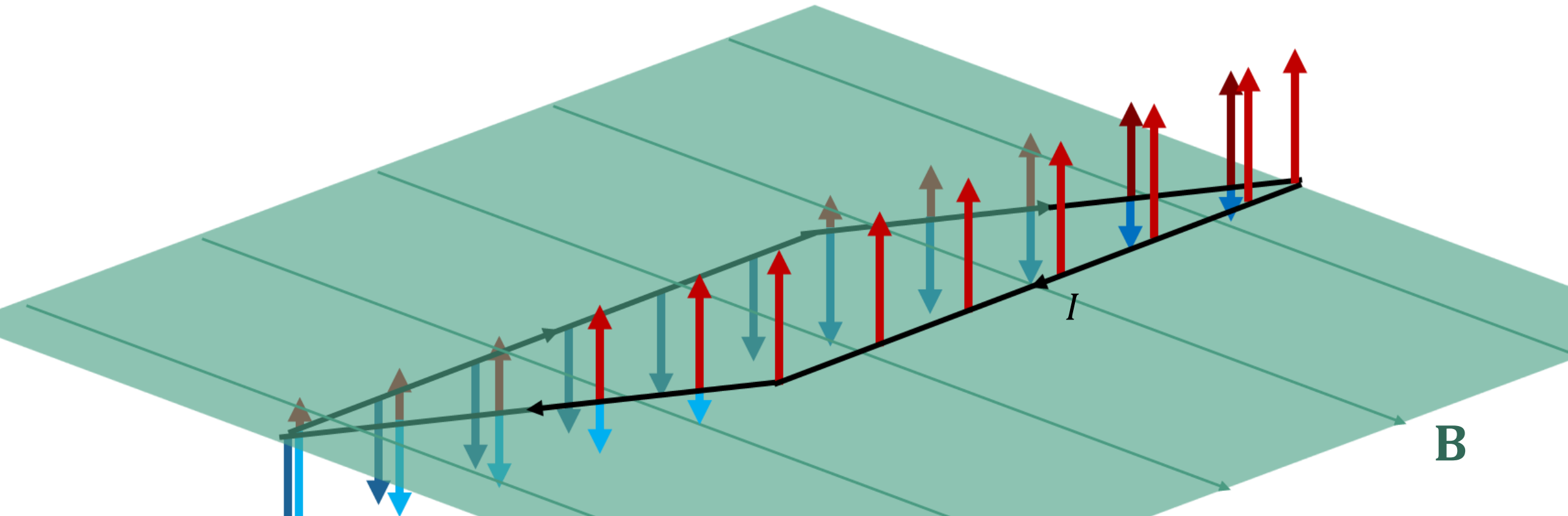
# Torque Magnético

- Consideremos una espira por la cual circula una corriente  $I$ , posicionada dentro de un campo uniforme  $\mathbf{B}$ .



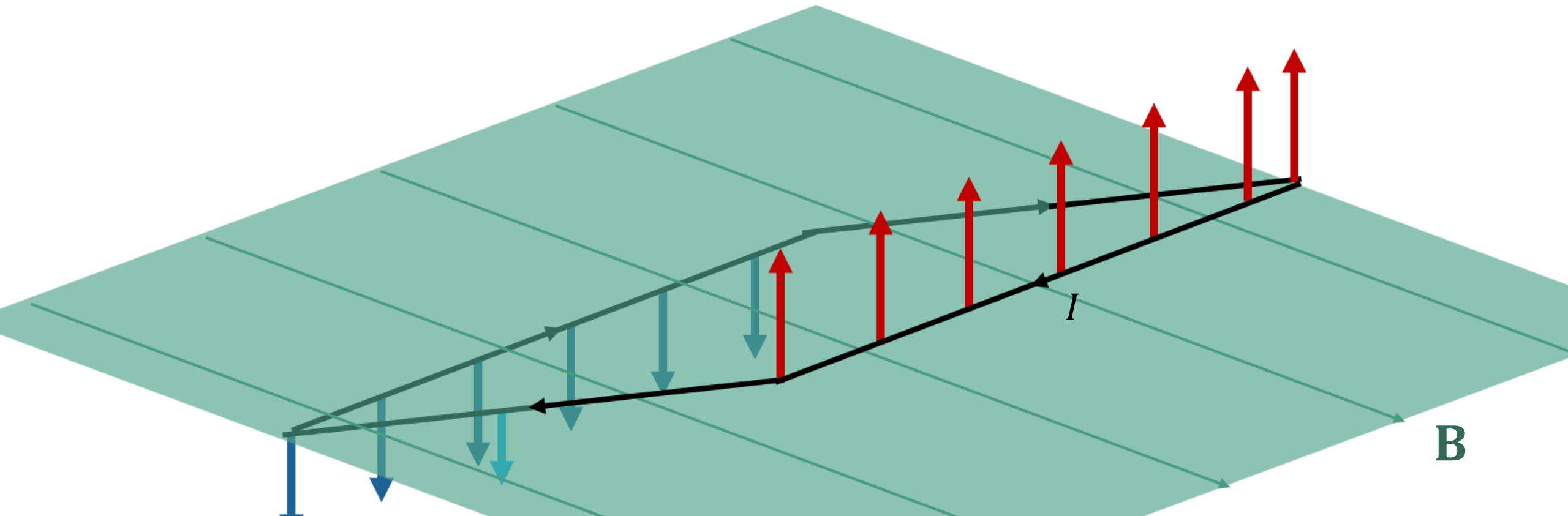
# Torque Magnético

- Notemos que cuando  $I$  es paralelo a  $\mathbf{B}$ , la suma de las fuerzas magnéticas a lo largo de dicha trayectoria se anulan.



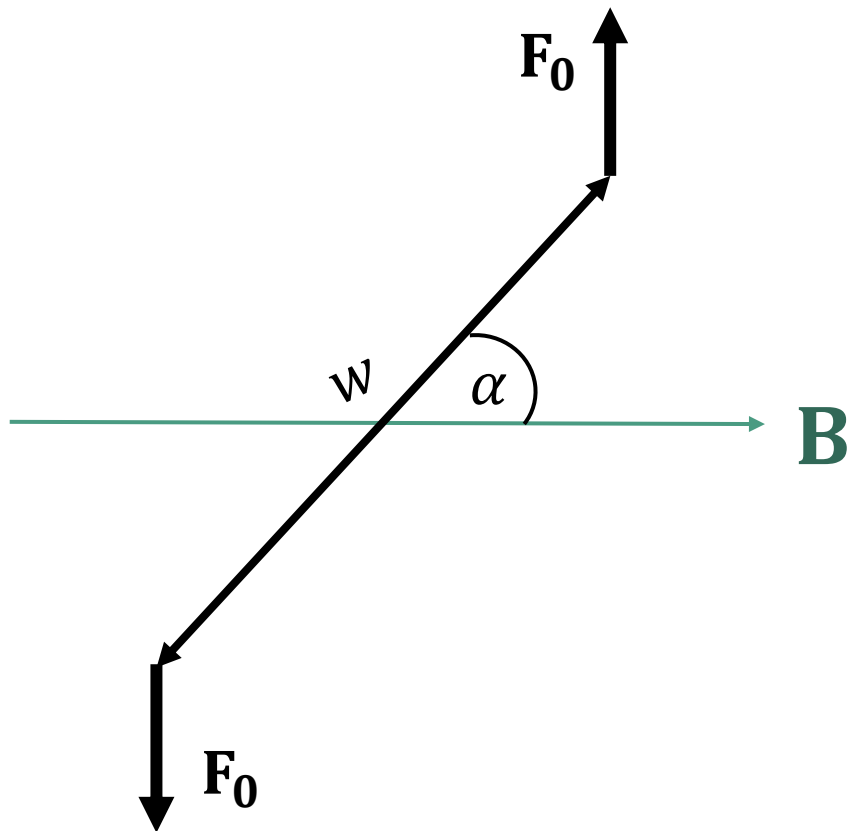
# Torque Magnético

- Notemos que cuando  $I$  es paralelo a  $\mathbf{B}$ , la suma de las fuerzas magnéticas a lo largo de dicha trayectoria se anulan.



# Torque Magnético

- Las dos fuerzas actuando sobre la espira forman un par de torsión.



$$\mathbf{T} = 2 \mathbf{r} \times \mathbf{F}_0 = 2 \mathbf{r} \times \left( I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right)$$

$$\mathbf{T} = 2 \frac{w}{2} (\cos\alpha \mathbf{a}_x + \sin\alpha \mathbf{a}_y) \times \left( I \int_L dz \mathbf{a}_z \times B \mathbf{a}_x \right)$$

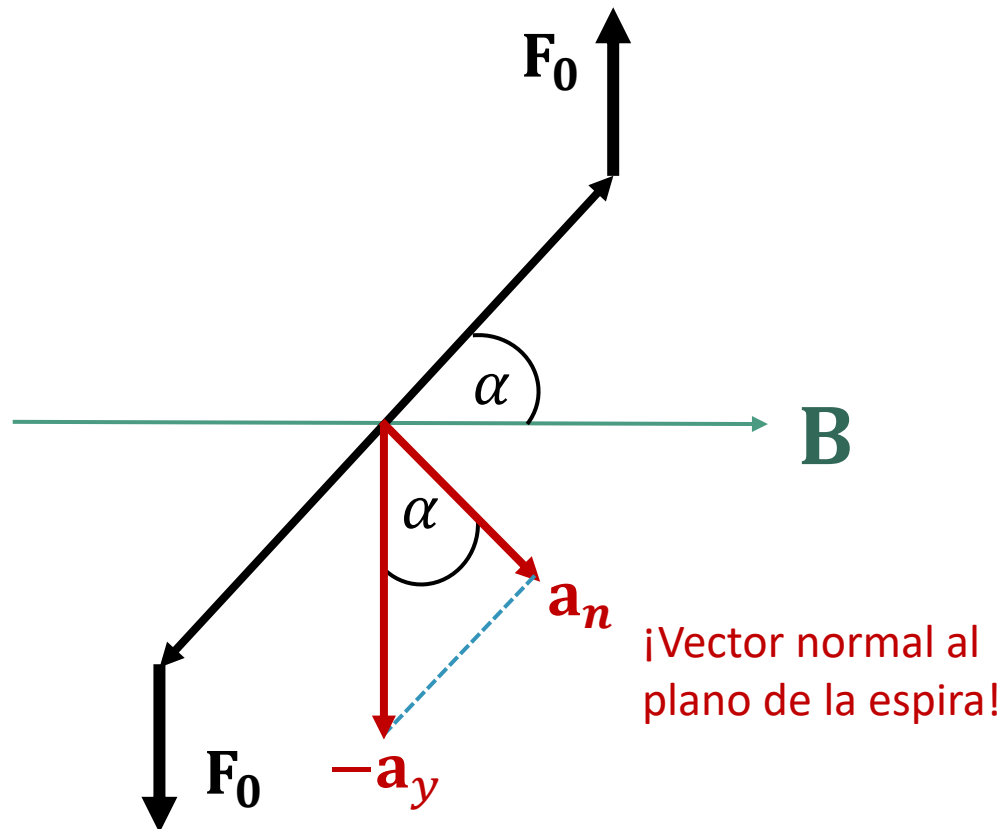
$$\mathbf{T} = w (\cos\alpha \mathbf{a}_x + \sin\alpha \mathbf{a}_y) \times IB\ell \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{T} = (wIB\ell \cos\alpha) \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = -(wIB\ell \cos\alpha) \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = (I\ell w) \cos\alpha (-\mathbf{a}_y) \times B \mathbf{a}_x$$

# Torque Magnético

- ¿Cómo interpretamos  $\cos\alpha(-\mathbf{a}_y)$ ?



$$\mathbf{T} = (I\ell w) \cos\alpha (-\mathbf{a}_y) \times B\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = IS\mathbf{a}_n \times B\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

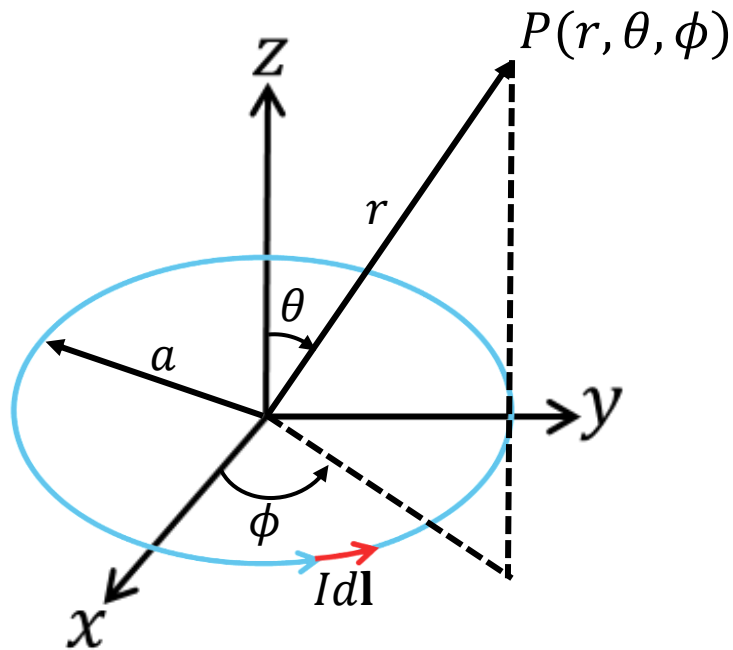
*Torque magnético*

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n$$

*Momento dipolar magnético*

# Dipolo Magnético

- Consideremos un pequeño loop circular de corriente de radio  $a \ll r$  y determinemos su potencial vectorial  $\mathbf{A}$  en coordenadas esféricas.



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

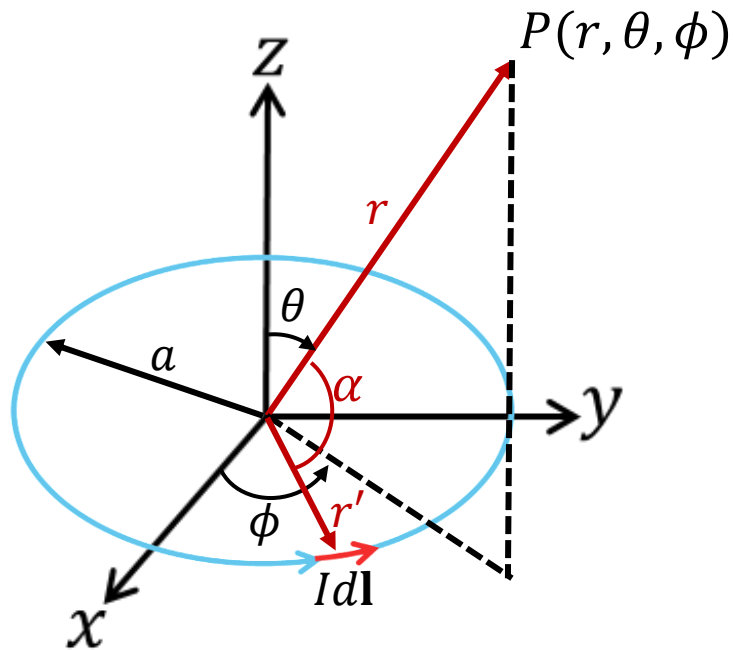
Usando expansión multipolar:  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\alpha)$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos\alpha) d\mathbf{l}'$$



# Dipolo Magnético

Trunquemos hasta el dipolo (n=1):



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \alpha d\mathbf{l}' \right]$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \alpha d\mathbf{l}'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint a \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) (a d\phi \mathbf{a}_\phi)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \oint d\phi \mathbf{a}_\phi = \frac{\mu_0 I a^2 \pi \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{a}_\phi$$

# Dipolo Magnético

Notemos que agrupando términos:

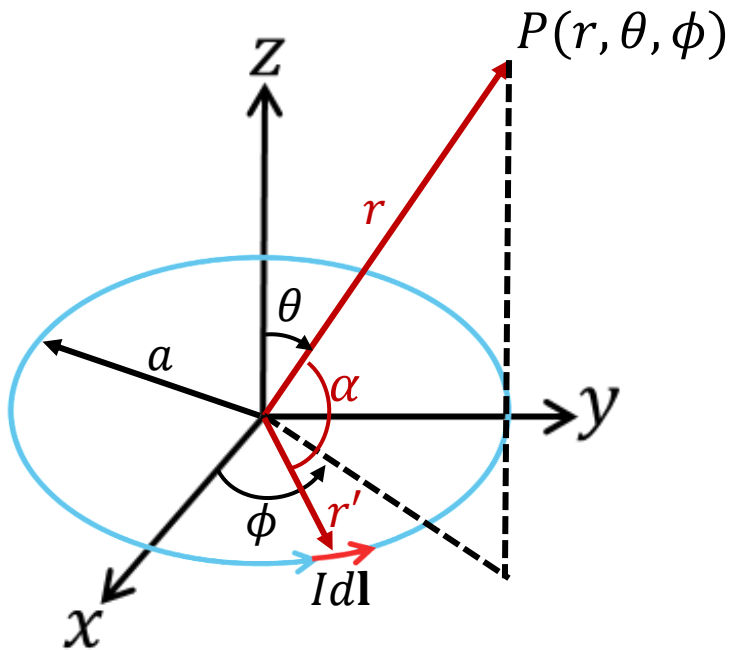
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2 \pi \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (I\pi a^2) (\sin \theta \mathbf{a}_\phi)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (IS) (\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (IS \mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{a}_r$$



# Dipolo Magnético

Análogo al caso de  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , podemos estimar el campo magnético usando  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \right] \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \sin \theta \right) \right] \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \right) \right] \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{2\mu_0 m \sin \theta \cos \theta}{4\pi r^2} \right] \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \left[ -\frac{\mu_0 m \pi \sin \theta}{4\pi r^2} \right] \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta]$$

# Dipolo Magnético

---

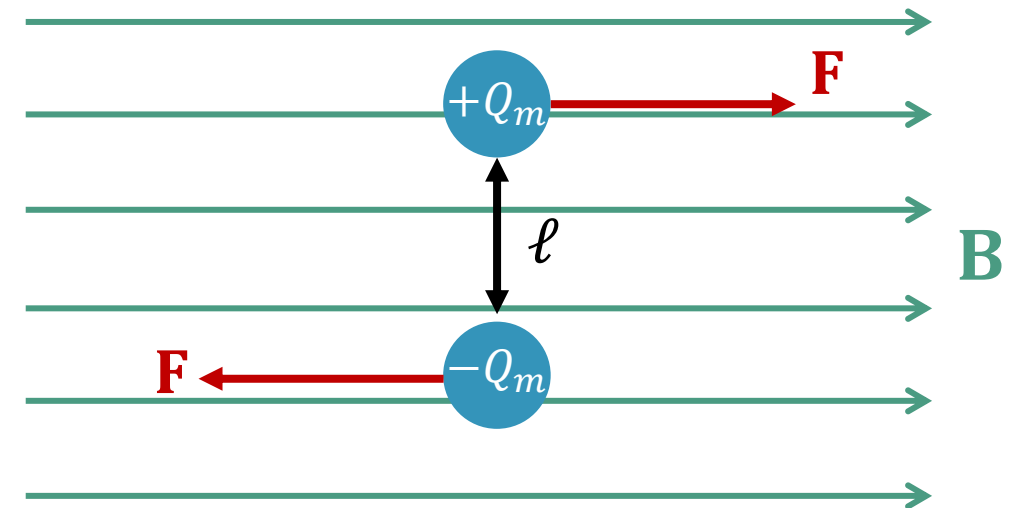
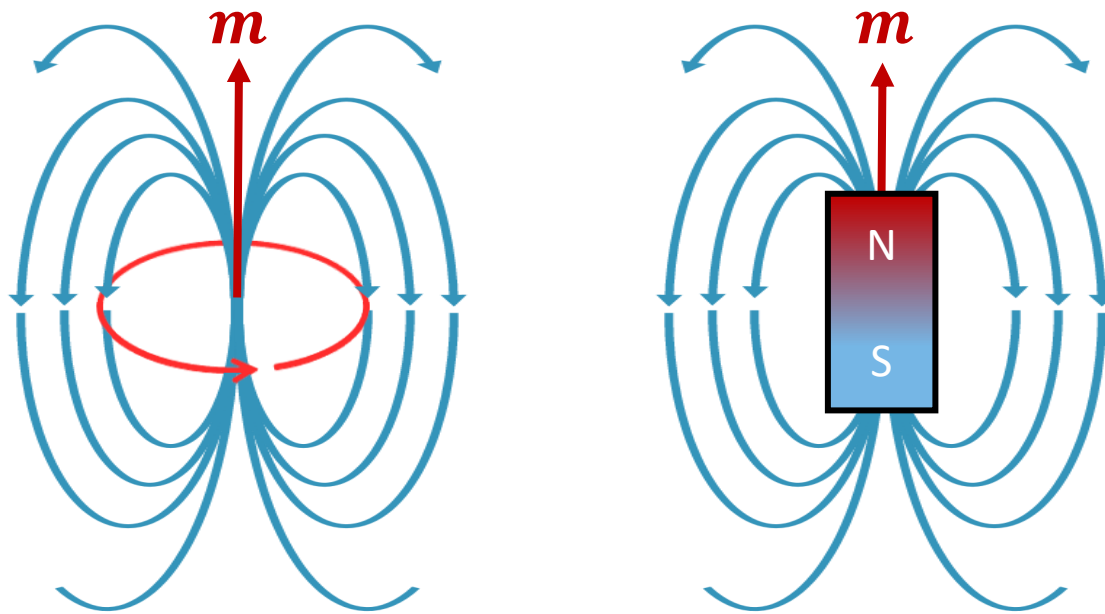
Notemos la similitud entre los campos de ambos dipolos:

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta]$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta]$$

# Dipolo Magnético

En base a esta similitud, podemos concebir un dipolo magnético, ya sea por imanes permanentes o por un loop de corriente, como:



$$p = Q_m \ell = IS = m$$

# Resumen

---

- Hicimos un repaso general por los conceptos de fuerza, campo, flujo, potencial, energía y torque magnetostáticos.
- Establecimos las distintas relaciones entre cada una de estas variables. En especial, entre potencial vectorial y campo:  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .
- Extendimos la expansión multipolar al caso magnético y verificamos sus similitudes con el caso eléctrico.
- Obtuvimos la cuarta y parte de la tercera ecuación de Maxwell.

# Cerremos la clase de hoy

---

- Ya analizamos por completo el comportamiento de Campos Magnetostáticos en el vacío.
- Nos resta analizar el comportamiento en medios materiales.
- Próxima Clase (Jueves 21/marzo):  
*Magnetostática en Materiales.*
- Bibliografía:  
*Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 368 – 375*  
*Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 381 – 420*

# Cerremos la clase de hoy

---

- Necesito que repasen:

*Ley de Ampère*

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

*Teorema de Stokes*

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} \, dv' = - \oint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$$

*Potencial Vectorial*

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$