Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Compilado de Ejercicios

1. Ondas Electromagnéticas

Problema 1

En espacio libre, $\vec{E}(z,t) = 10^3 \sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{y}}\ V/m$. Obtenga $\vec{H}(z,t)$.

Solución:

Primero, hay que notar que en espacio libre $\sigma = 0$ y $\alpha = 0$. Para encontrar $\vec{H}(z,t)$ podemos utilizar la 4ª ecuación de Maxwell para deducir $\vec{B}$ y así luego $\vec{H}$. Desarrollando a partir de la 4ª ecuación:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \vec{E} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}, 0, 0\right) = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Notemos que nos queda entonces lo siguiente:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(10^3 \sin(\omega t - \beta z)\right)\,\hat{\mathbf{x}} = -10^3 \beta \cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

Integrando ahora respecto al tiempo:

$$\vec{B} = -10^3 \beta \int \cos(\omega t - \beta z) dt = -\frac{10^3 \beta}{\omega} \sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

Como $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{H}$ nos queda así:

$$\vec{H}(z,t) = -\frac{10^3 \beta}{\omega \mu} \sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

De todas formas, como nos encontramos en espacio libre o vacío, tendremos que $\dfrac{E_0}{H_0} = \eta_0$ y por lo tanto $H_0 = \dfrac{E_0}{120\pi}$, pudiendo expresar $\vec{H}$ como:

$$\vec{H}(z,t) = -\frac{10^3}{120\pi} \sin(\omega t - \beta z)\,\hat{\mathbf{x}}$$

Problema 2

Una onda electromagnética de frecuencia 100 MHz se propaga en un medio sin pérdidas donde $\epsilon_r = 6$ y $\mu_r = 1$. La componente magnética de la onda se puede representar como:

$$\mathbf{H} = 0{,}01(\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\beta x}$$

- Encuentre el campo eléctrico instantáneo y evalúelo para $x = 10^{-2}m$ y $t = 20ns$.
- Calcule la potencia promedio que atraviesa un círculo paralelo al plano yz de área $20cm^2$ ubicado en $x = 1m$

Solución:

El campo eléctrico instantáneo se puede obtener a partir del campo magnético instantáneo, el cual está dado por $Re\{\mathbf{H}e^{jwt}\}$, quedando para nuestro problema que:

$$\vec{H} = Re\left\{0{,}01(\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\beta x}e^{jwt}\right\} = Re\left\{0{,}01(\hat{y} - j\hat{z})e^{j(wt-\beta x)}\right\}$$

Recordemos que $e^{j\theta} = cos(\theta) + j\ sin(\theta)$, así la exponencial nos queda en la expresión de la siguiente forma:

$$\vec{H} = Re\left\{0{,}01(\hat{y} - j\hat{z})(cos(wt-\beta x) + jsin(wt-\beta x))\right\} = 0{,}01cos(wt-\beta x)\,\hat{\mathbf{y}} + 0{,}01sin(wt-\beta x)\,\hat{\mathbf{z}}$$

Ya obtenido el campo magnético instantáneo $\vec{H}$, el campo eléctrico instantáneo $\vec{E}$ se puede obtener del magnético mediante las relaciones $H_o = \frac{E_o}{\eta}$ para magnitud y $\hat{k} \times \hat{H} = -\hat{E}$ para dirección, así:

$$E_o = H_o\eta = 0{,}01\eta \ \ ; \ \ \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{6 \times 8{,}854 \times 10^{-12}}} = 153{,}8\Omega$$

$$\hat{E} = -(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{H}) = -\left[(\hat{\mathbf{x}}) \times (H_y\,\hat{\mathbf{y}} + H_z\,\hat{\mathbf{z}})\right] = -(H_y\,\hat{\mathbf{z}} - H_z\,\hat{\mathbf{y}}) = H_z\,\hat{\mathbf{y}} - H_y\,\hat{\mathbf{z}} \tag{1}$$

$$\vec{E} = -(\eta \cdot 0{,}01)cos(wt-\beta x)\,\hat{\mathbf{z}} + (\eta \cdot 0{,}01)sin(wt-\beta x)\,\hat{\mathbf{y}}$$

Ahora buscamos los valores para w y β y reemplazamos para tener la expresión final de campo eléctrico instantáneo.

$$w = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^8 \approx 6{,}283 \cdot 10^8$$

$$\beta = w\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi \cdot 10^8\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} \approx 5{,}13m^{-1}$$

Finalmente el campo eléctrico instantáneo queda dado por lo siguiente:

$$\vec{E} = -1{,}538\cos\left(6{,}283\cdot 10^{8}t - 5{,}13x\right)\hat{\mathbf{z}} + 1{,}538\sin\left(6{,}283\cdot 10^{8}t - 5{,}13x\right)\hat{\mathbf{y}} \quad V/m$$

Evaluando en $x = 10^{-2}m$ y $t = 20ns$ se tendrá que:

$$\vec{E} = -1{,}528\,\hat{\mathbf{z}} - 0{,}08\,\hat{\mathbf{y}}$$

Ahora, para calcular la potencia promedio lo que hacemos primero es calcular el vector de Poynting para la onda, el cual estará dado por:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} 0 & E_y & E_z \\ 0 & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(E_yH_z - E_zH_y\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\vec{S} = \left(1{,}53\cdot 0{,}01\cdot\sin^2\left(6{,}283\cdot 10^{8}t - 5{,}13x\right) + 1{,}53\cdot 0{,}01\cdot\cos^2\left(6{,}283\cdot 10^{8}t - 5{,}13x\right)\right)\hat{\mathbf{x}} = 0{,}0153\,\hat{\mathbf{x}}$$

Finalmente la potencia promedio:

$$P_{ave} = \vec{S}\cdot A = 0{,}0153\cdot 20\cdot 10^{-4} = 30{,}6\,\mu W$$

Problema 3

Una onda plana se propaga a través de un dieléctrico sin pérdidas ($\sigma = 0$) en presencia de un campo eléctrico dado por:

$$E_x = E_o\cos\left(wt - \beta z\right)$$

Con una frecuencia de 5 GHz y una longitud de onda dentro del material de 3 cm. Determine la constante de propagación, la velocidad de fase, la permitividad relativa del medio y la impedancia de la onda.

Solución:

La constante de propagación se calcula como $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 209{,}4m^{-1}$

La velocidad de fase se calcula como $v_p = \dfrac{w}{k} = \dfrac{2\pi f}{k} = \lambda f = 1{,}5\times 10^{8}\ m/s$

La permitividad relativa la obtendremos despejando la relación de velocidad para medios sin pérdidas:

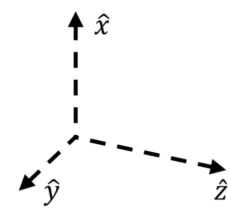
$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} \ \rightarrow\ \epsilon_r = \left(\frac{1}{v_p\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\right)^2 = 3{,}99 \approx 4$$

Finalmente la impedancia de onda se calcula como a continuación, mediante su fórmula:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = 188{,}36\ \Omega$$

Problema 4

Una onda plana y uniforme viaja por el vacío en la dirección del vector unitario



$$\hat{\mathbf{k}} = k_x\,\hat{\mathbf{x}} + k_y\,\hat{\mathbf{y}} + k_z\,\hat{\mathbf{z}}\ \ (|k_x\,\hat{\mathbf{x}}| = 1).$$

El campo eléctrico de la onda es $\vec{E}(z,t) = E_o \cos\left(w(t - z/c) + \pi/3\right)\hat{\mathbf{x}}$ donde w es la frecuencia en [rad/s] de la onda y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Considerando la convención internacional para la dirección de ejes cartesianos de la figura ($\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$), determine:

- El valor de k_x
- El campo magnético $\vec{B}(z,t)$ en función de w, k_x, k_y, y k_z y de las constantes físicas conocidas como c, μ_0, ϵ_0, etc.

Solución:

El vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$ yace en el plano $\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$ (es normal a $\vec{E}$ y $\hat{\mathbf{x}}$), por lo que $k_x = 0$.

Otra forma más clara de verlo puede ser entendiendo que, si el campo $\vec{E}$ tiene componente $\hat{\mathbf{x}}$ y $\vec{B}$ tiene componente $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ debe ser perpendicular a ambos, sólo podría tener componente en z, por ende $k_x = 0$.

Sabemos que las magnitudes del campo eléctrico y magnético en vacío es $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ y que su dirección $\hat{\mathbf{n}}$ vendrá dada por

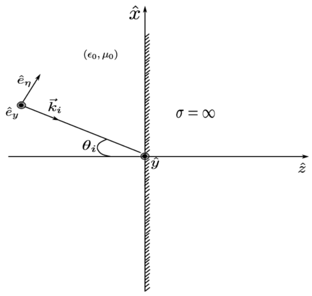
$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [0\ 1\ 0]$$

Por lo que finalmente:

$$\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c}\,\hat{\mathbf{y}}\ \cos\left(w(t - z/c) + \pi/3\right)$$

Problema 5

Considere una onda plana **LHCP** con amplitud real $E_0 > 0$ y frecuencia de trabajo 600 MHz que incide de forma oblicua, con un ángulo $\theta_i = 30°$, sobre un plano conductor situado en $z = 0$.



1. Si la densidad de potencia de la onda es $S_0 = \frac{1}{15\pi}$ (W/m^2) , encuentre el campo eléctrico en su forma compleja. Utilice como base para expresar el campo los vectores unitarios perpendiculares a la dirección de propagación $\hat{e}_\eta$ (en el plano de incidencia) y $\hat{e}_y$ (perpendicular al plano de incidencia)

2. Descomponga el campo eléctrico en una parte con polarización paralela y otra con polarización perpendicular. Asimismo, calcule el campo magnético asociado a cada polarización.

3. Por último, calcule los campos eléctrico y magnético total de la onda reflejada. ¿Cuál es la polarización de esta onda? Justifique.

Solución:

1. El campo eléctrico tiene la siguiente forma general

$$\vec{E} = E_0 \vec{A} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

Comenzamos determinando el vector de propagación $\vec{k}$

$$\vec{k}_i = k_0 \ (-sin \ \theta_i \ \hat{e}_x + cos \ \theta_i \ \hat{e}_z) = k_0 \ (-\frac{1}{2} \ \hat{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \ \hat{e}_z)$$

Por otro lado

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$$

Donde $\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\epsilon_0 \ \mu_0}}$

Para la polarización circular se tiene

$$\vec{A} = \hat{e}_\eta \pm j\hat{e}_y$$

El signo $\pm$ depende del sentido de giro y se determina

2. Líneas de Transmisión

Problema 1

Una línea coaxial de 75Ω transporta una corriente $i(t,z) = 1{,}8\cos(3{,}77\cdot 10^9 t - 18{,}13z)mA$. A partir de esto, determine:

a) La frecuencia de la señal transmitida

b) La velocidad de fase

c) La longitud de onda

d) La permitividad relativa de la línea

e) La corriente en su forma fasorial

f) El voltaje en la línea en función del tiempo y posición

Solución:

a) $f = \omega/2\pi = 3{,}77 \times 10^9/2\pi = 600\text{MHz}$

b) $v_p = \omega/\beta = 2{,}08 \times 10^9$ m/s

c) $\lambda = 2\pi/\beta = 0{,}346$ m

d) $\varepsilon_r = (c/v_p)^2 = 2{,}08$

e) $I(z) = 1{,}8e^{-j\beta z}(\text{ mA})$

f) $v(t,z) = 0{,}135\cos(\omega t - \beta z)V$

Problema 2

Una línea sin pérdidas de $140\,\Omega$ termina en una impedancia de carga $\mathrm{Z_L} = (280 + j182)\,\Omega$. Si $\lambda = 72$ cm, encuentre:

a) Coeficiente de reflexión Γ

b) Razón de onda estacionaria de voltaje (ROE o S)

c) Máximos de voltaje

d) Mínimos de voltaje

Solución:

a)

$$\Gamma = \frac{\mathrm{Z_L} - \mathrm{Z_0}}{\mathrm{Z_L} + \mathrm{Z_0}} = \frac{280 + j182 - 140}{280 + j182 + 140} = \frac{140 + j182}{420 + j182} = 0{,}5\angle 29^\circ$$

b)

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0{,}5}{1 - 0{,}5} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$$

c)

$$\begin{aligned} l_{max} &= \frac{\theta_r \lambda}{4\pi} + \frac{n\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ... \\ &= \frac{(29\pi/180) \times 0{,}72}{4\pi} + \frac{n \times 0{,}72}{2} \\ &= (2{,}9 + 36n)\ (\mathrm{cm}), \qquad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} l_{min} &= l_{max} + \frac{\lambda}{4} \\ &= \left[(2{,}9 + 36n) + \frac{72}{4} \right] \ \mathrm{cm} \\ &= (20{,}9 + 36n)\ (\mathrm{cm}), \qquad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Problema 3

Una linea de transmisión con impedancia $Z_0 = 60\Omega$ es terminada por una carga con un coeficiente de reflexión igual a $\Gamma = 0{,}4\angle 60^\circ$.

a) ¿Cuál es la impedancia de la carga?

b) ¿Cuál es el coeficiente de reflexión a una distancia de $0{,}3\lambda$ de la carga?

c) ¿Cuál es la impedancia de entrada en este punto?

Solución:

Primero, convertimos el coeficiente de reflexión en su versión compleja:

$$\Gamma = 0{,}4\angle 60^\circ = 0{,}2 + j0{,}346$$

a) $\mathrm{Z}_L = \mathrm{Z}_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} = 60 \frac{1{,}2+j0{,}346}{0{,}8-j0{,}346} = \frac{24{,}94\angle 16{,}1^\circ}{0{,}8718\angle -234^\circ} = 66{,}3 + j54{,}7\Omega$

b) $\Gamma_{\mathrm{in}} = \Gamma_L e^{-2j\beta l} = 0{,}4\angle 60 - 216^\circ = 0{,}4\angle - 156^\circ = 0{,}4\angle 204^\circ$

c) $\mathrm{Z}_{in} = \mathrm{Z}_0 \frac{\mathrm{Z}_L + j\mathrm{Z}_0 \tan 0{,}3\lambda}{\mathrm{Z}_0 + j\mathrm{Z}_L \tan 0{,}3\lambda} = 26{,}6 - j10{,}3\Omega$

Problema 4

Una línea de transmisión sin pérdidas de 50 Ω tiene un material aislante con $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2{,}25$. Si termina en un circuito abierto, ¿cuán larga debería ser la línea pata que su impedancia de entrada sea equivalente a un capacitor de 10 pF a 50 MHz?

Solución:

Para un capacitor de 10 pF a 50 MHz:

$$\mathrm{Z_c} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{2\pi \times (50 \times 10^6) \times (10 \times 10^{-12})} = -j\frac{1000}{\pi}\,\Omega$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}{\lambda_0} = \frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}{c} = \frac{2\pi \times (5 \times 10^7)\sqrt{2{,}25}}{3 \times 10^8} = 1{,}57\;(\mathrm{rad/})$$

Para líneas de transmisión sin pérdidas terminadas con circuito abierto:

$$\mathrm{Z_{in}} = j\mathrm{Z_0}\cot\beta l = -j50\cot 1{,}57l$$

Por lo tanto:

$$-j\frac{1000}{\pi} = -j50\cot 1{,}57l$$

Entonces:

$$l = 9{,}92\;(\mathrm{cm})$$

Problema 5

Un capacitor de 10 nF está conectado a una línea con una impedancia característica de 75 Ω y una constante dieléctrica de 2,25. La frecuencia es de 1 GHz. Obtenga la impedancia de entrada $\mathrm{Z_{in}}$ cuando la línea es cortada a 10 cm desde la carga. Repita el procedimiento anterior si el corte ocurre a los 5 cm.

Solución:

Dados los parámetros del capacitor y la frecuencia de operación, es posible calcular su impedancia:

$$\mathrm{Z}_L = j\frac{-1}{2\pi f C} = -j\frac{1}{2\pi(1 \cdot 10^9)(10 \cdot 10^{-9})} = -j0{,}0189\Omega$$

Y de la afirmación:

$$\mathrm{Z_0} = 75\Omega$$

Puesto que la onda está viajando dentro de la línea, su velocidad de propagación será diferente, de acuerdo a la constante del dieléctrico. De esta propiedad, la velocidad de la onda es:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2{,}25}} = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad \text{, o bien,} \quad \frac{2}{3}c$$

De las ecuaciones, el valor de la impedancia de entrada depende del número de longitudes de onda entre el generador y la carga. Sabiendo la velocidad de propagación y la frecuencia, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{2 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^9} = 0{,}2 \text{ m}$$

Así, la separación entre el generador y la carga es:

$$10 \text{ cm} \rightarrow \frac{l}{\lambda} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5 \text{ (media onda)} \rightarrow \text{ carga vista sin cambios} \rightarrow Z_{\text{in}} = Z_L = -j0{,}0159\Omega \tag{2}$$

Y para el segundo caso:

$$10 \text{ cm} \rightarrow \frac{l}{\lambda} = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25 \text{ (1/4 de onda)} \rightarrow \text{ inversor de impedancia } \rightarrow$$
$$Z_{\text{in}} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = \frac{75^2}{-j0{,}0159} = \frac{5625\angle 0}{0{,}0159\angle 270} = 353773\angle 90\Omega$$

Lo cual corresponde a una impedancia de mayor valor.