Clase 24
Modos TEM, TE y TM

Sadiku, M. (2018).*Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 633 – 653

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Abriremos un nuevo capítulo: Guías de Ondas.

Contenidos

- Guías de Ondas
- Modo TEM, TE y TM
- Soluciones generales para modos TEM, TE y TM
- Caso TEM
- Caso TE
- Caso TM

Recordando: Incidencia Normal

Caso Vacío-Conductor Perfecto

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z < 0) = -j\frac{4|E_0|^2}{\eta_0}\sin(j\beta_0 z)\cos(j\beta_0 z)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z > 0) = 0$$

- De modo que **no se entrega potencia real al conductor**.
- Hay una reflexión total de la onda, que genera una **onda estacionaria**.

Guias de Ondas

- Cuando las ondas inciden en interfases donde el segundo medio es de alta conductividad, las ondas EM **se reflejan casi en su totalidad.**

- Idea: ¿Y si en vez de cables usamos ductos huecos o cavidades?

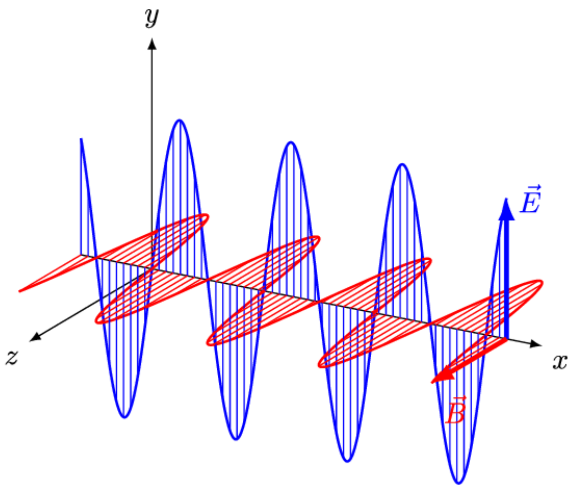
Guias de Ondas

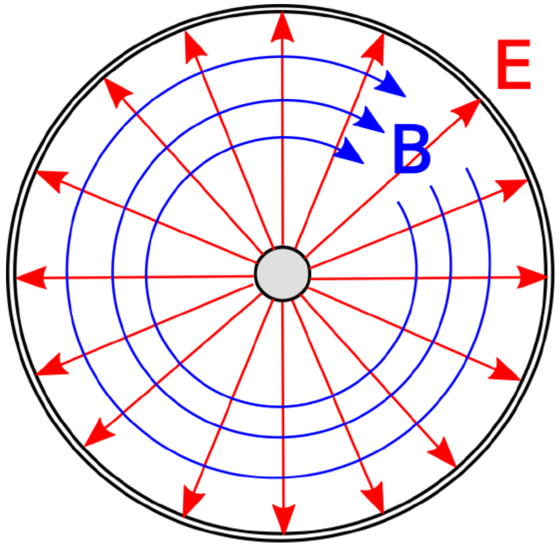
- En comparación a las líneas de transmisión, las guías de ondas se caracterizan por tener pérdidas mucho menores a altas frecuencias.
  - Cable coaxial: 0,074 dB/m
  - Guía de onda: 0,034 dB/m

- A diferencia de las líneas de transmisión, las guías de ondas son incapaces de operar a bajas frecuencias o niveles DC. Están hechas para funcionar por sobre cierta **frecuencia de corte.**
- En este sentido, corresponden a **filtros pasa-altos**.

Modo TEM

- Anteriormente vimos que en el caso del espacio libre y en cables, las ondas EM eran perpendiculares a la dirección de movimiento.

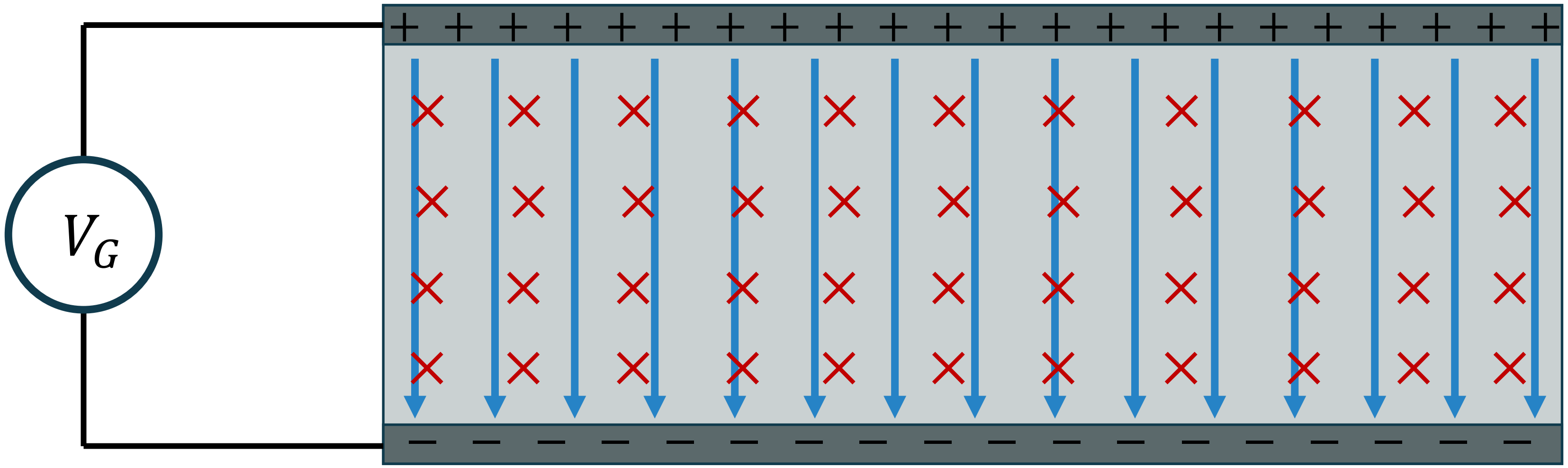




- Esto se conoce como **modo TEM** (Transverse Electro-Magnetic).

Modo TEM

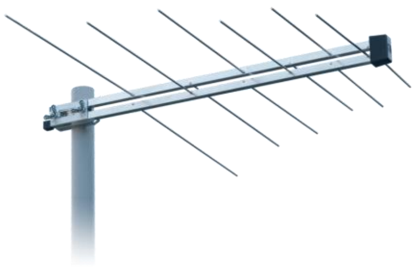
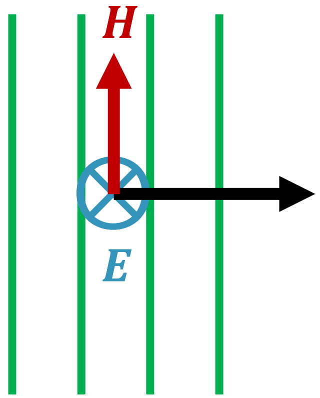
- Supongamos ahora que tenemos una guía de ondas tal que:



- En este caso, tanto el campo eléctrico como el magnético serán perpendiculares a la dirección de propagación.

Modo TE

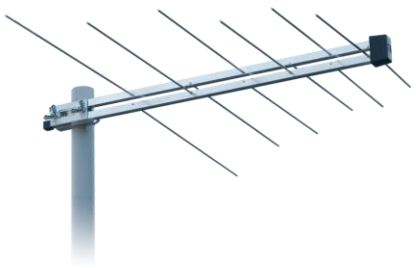
- Supongamos que ahora la fuente viene de una antena:

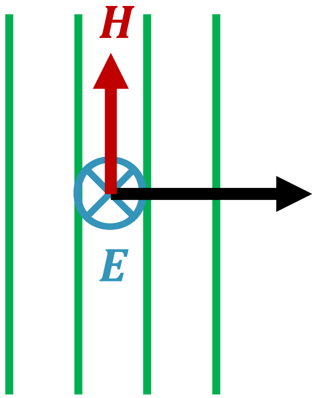



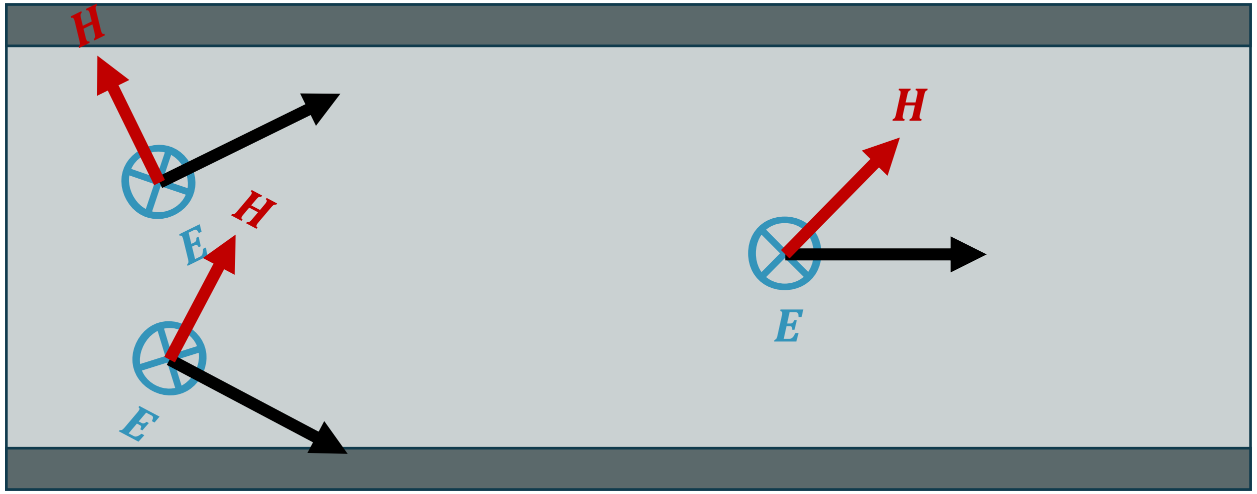
- En este caso, las ondas que llegan a la guía tendrán rebotes en las paredes.

Modo TE

- Supongamos que ahora la fuente viene de una antena:



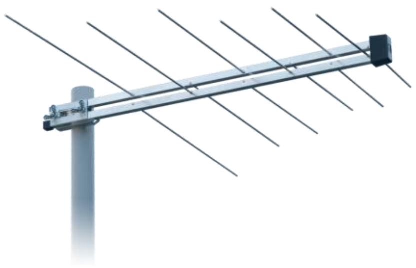


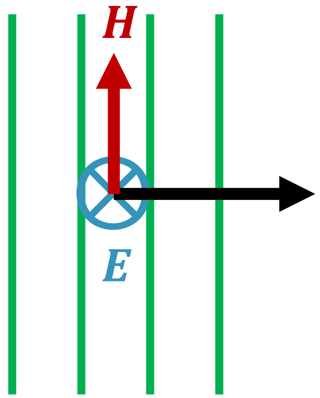


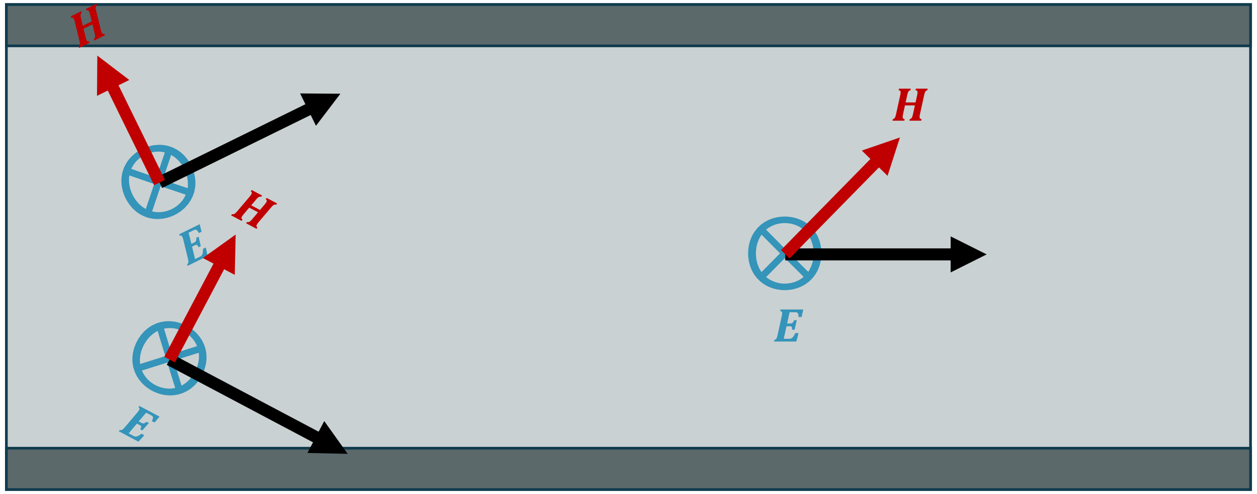
- La onda Eléctrica no se verá afectada por la incidencia normal.
- Pero la incidencia oblicua de la onda Magnética **añadirá una componente longitudinal**.

Modo TE

- Supongamos que ahora la fuente viene de una antena:



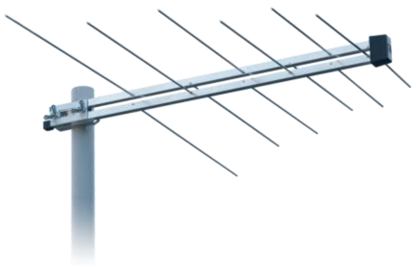


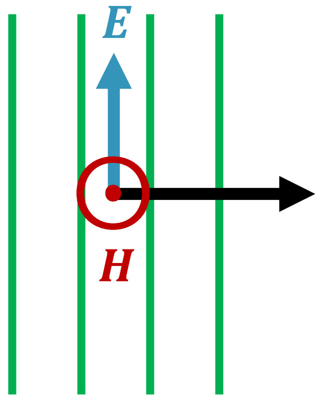


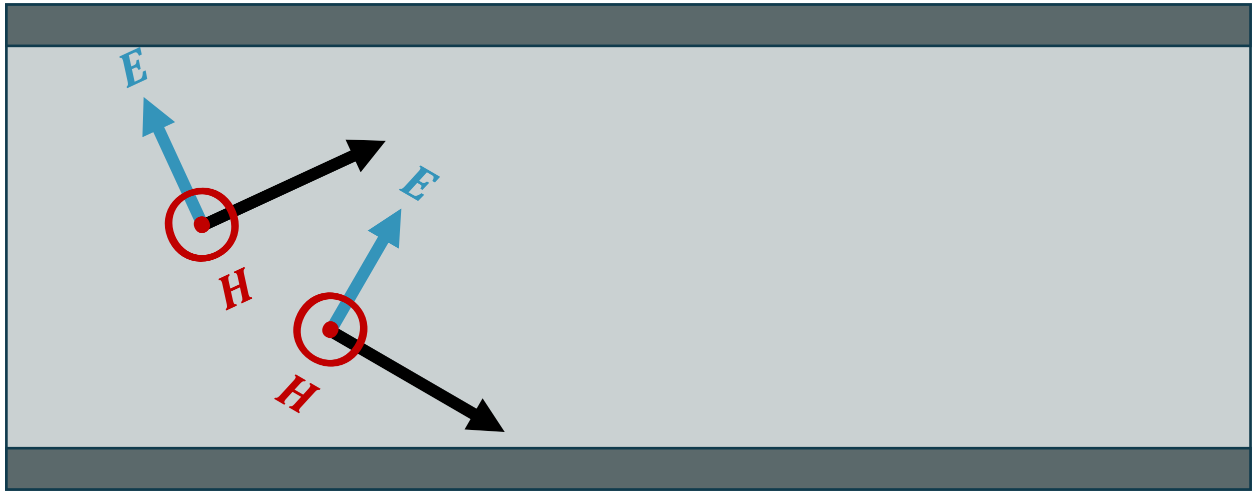
- Esto se conoce como **modo Transversal Eléctrico (TE)**.

Modo TM

- Análogamente:

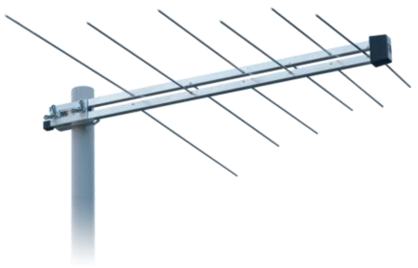


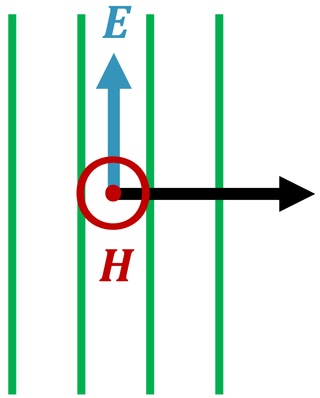


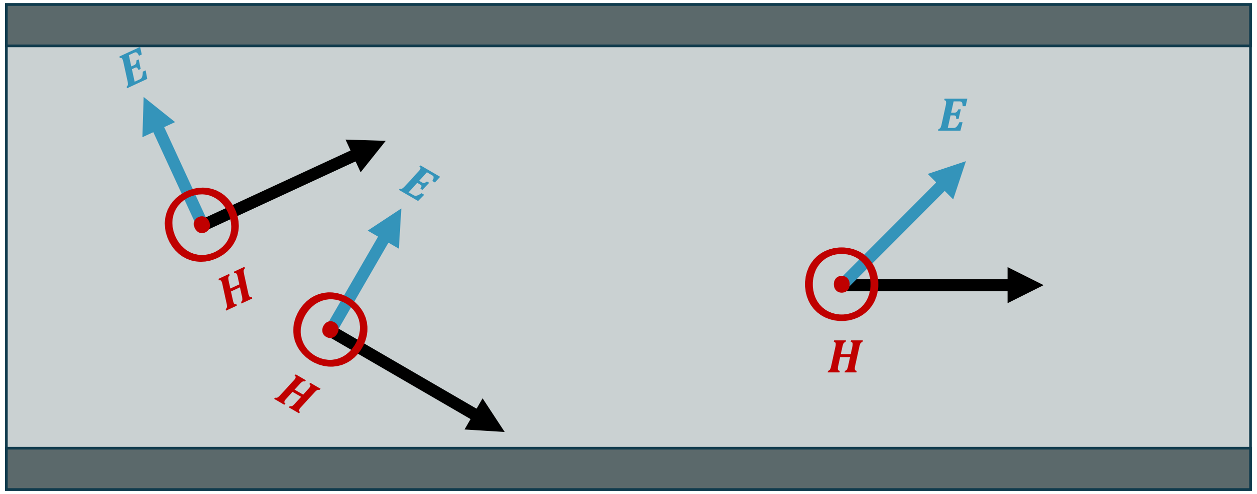


Modo TM

- Análogamente:



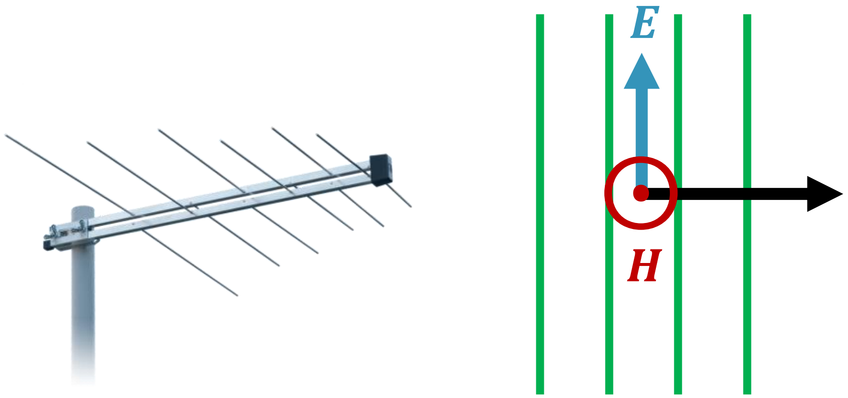


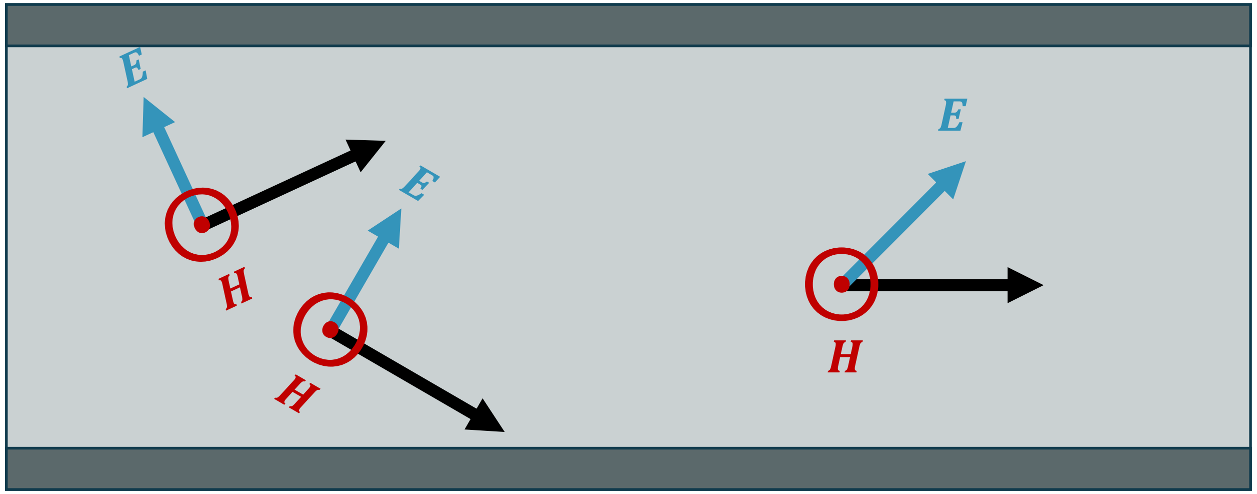


- La onda Magnética no se verá afectada por la incidencia normal.
- Pero la incidencia oblicua de la onda Eléctrica **añadirá una componente longitudinal**.

Modo TM

- Análogamente:





- Esto se conoce como **modo Transversal Magnético (TM)**.

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

- Anteriormente, descomponíamos los campos en una componente paralela y en otra transversal.

- Bajo este nuevo escenario, podemos establecer otro tipo de descomposición. Esta vez en componente transversal y longitudinal.

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [\mathbf{E_s}(x, y) + E_{sz}(x, y)\,\mathbf{a}_z]\, e^{-j\beta z}$$
$$\mathbf{H}(x, y, z) = [\mathbf{H_s}(x, y) + H_{sz}(x, y)\,\mathbf{a}_z] e^{-j\beta z}$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

- Recordando nuestras queridas ecuaciones de Maxwell en régimen sinusoidal:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = j\omega\mu\varepsilon\mathbf{E} + \mu\sigma\mathbf{E}$$

- Si asumimos ausencia de fuentes y reescribimos en términos de $\mathbf{H}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

- Reescribiendo en forma expandida:

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right] = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

- Notemos que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial\left(E_{sx}e^{-j\beta z}\right)}{\partial z} = -j\beta E_{sx}e^{-j\beta z} = -j\beta E_x$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial\left(E_{sy}e^{-j\beta z}\right)}{\partial z} = -j\beta E_{sy}e^{-j\beta z} = -j\beta E_y$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

- Luego:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \qquad -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathrm{j}\omega\mu H_z$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

- Luego:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \qquad -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathrm{j}\omega\mu H_z$$

- Análogamente para la segunda expresión:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \qquad -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_z$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

- Resolvamos para un caso, el resto será análogo.
- Tomamos las ecuaciones:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \qquad -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathrm{j}\omega\mu H_z$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \qquad -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_z$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \qquad -j\omega\mu H_y = \frac{\omega\mu}{\beta}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{j\omega^2\mu\varepsilon}{\beta}E_x$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\omega\mu}{\beta}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{j\omega^2\mu\varepsilon}{\beta}E_x$$

$$\boxed{E_x = \frac{-j}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)}$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

$$\boxed{E_x = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2}\left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)}$$

- Vamos a redefinir la expresión en rojo como:

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

- k_c se conoce como el **número de onda de corte**.

$$\boxed{E_x = \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)}$$

Solución General para Ondas TEM/TE/TM

- Aplicando la misma metodología para el resto de las ecuaciones:

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \qquad E_y = \frac{j}{k_c^2}\left(-\beta\frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad H_y = \frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

Caso TEM

- Las ondas TEM se caracterizan por no tener componente longitudinal:

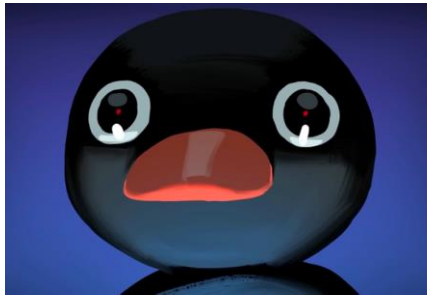
$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \qquad E_y = \frac{j}{k_c^2}\left(-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad H_y = \frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

Caso TEM

- ¡No puede ser que todo sea 0!
- ¿Cómo lo evitamos?

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}(\beta 0 + \omega\mu 0) \qquad E_y = \frac{j}{k_c^2}(-\beta 0 + \omega\mu 0)$$

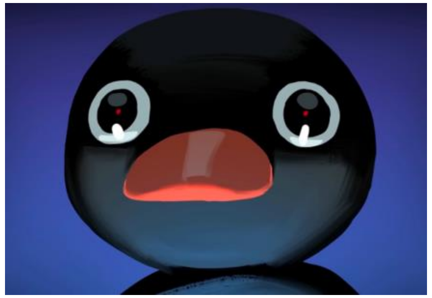


$$H_x = \frac{j}{k_c^2}(\omega\varepsilon 0 - \beta 0) \qquad H_y = \frac{-j}{k_c^2}(\omega\varepsilon 0 + \beta 0)$$

Caso TEM

- ¡No puede ser que todo sea 0!
- ¿Cómo lo evitamos? **¡Forzando $k_c^2 = 0$!**

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}(\beta 0 + \omega\mu 0) \qquad E_y = \frac{j}{k_c^2}(-\beta 0 + \omega\mu 0)$$



$$H_x = \frac{j}{k_c^2}(\omega\varepsilon 0 - \beta 0) \qquad H_y = \frac{-j}{k_c^2}(\omega\varepsilon 0 + \beta 0)$$

Caso TEM

- **¡Forzando $\boldsymbol{k_c^2 = 0}$!**
- Regresemos al sistema de ecuaciones con esta condición.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \qquad -j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mathrm{j}\omega\mu H_z$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \qquad -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \mathrm{j}\omega\varepsilon E_z$$

Caso TEM

- **¡Forzando $\boldsymbol{k_c^2 = 0}$!**
- Regresemos al sistema de ecuaciones con esta condición.

$$0 + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x$$

$$-j\beta E_x - 0 = -j\omega\mu H_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$0 + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x$$

$$-j\beta H_x - 0 = j\omega\varepsilon E_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$$

Caso TEM

- **¡Forzando $\boldsymbol{k_c^2 = 0}$!**
- Regresemos al sistema de ecuaciones con esta condición.

$$j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \qquad -j\beta E_x = -j\omega\mu H_y$$

$$\beta H_y = \omega\varepsilon E_x \qquad \beta E_x = \omega\mu H_y$$

$$\beta\omega\mu H_y = \omega^2\mu\varepsilon E_x \qquad \beta^2 E_x = \beta\omega\mu H_y$$

$$\boxed{\beta^2 E_x = \omega^2\mu\varepsilon E_x}$$

Caso TEM

- **¡Forzando $\boldsymbol{k_c^2 = 0}$!**
- Regresemos al sistema de ecuaciones con esta condición.

$$\boxed{\beta^2 E_x = \omega^2 \mu \varepsilon E_x}$$

- Esto solo es válido si $\boldsymbol{k_c^2 = 0}$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2 = 0$$

$$\boxed{\omega^2 \mu \varepsilon = \beta^2}$$

- ¡Es la relación de dispersión!

Caso TEM

- Veamos que ocurre con la impedancia

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\frac{-j}{k_c^2}\left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)}{\frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)} = \frac{\frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)}{\frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)}$$

$$Z_{TEM} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}}{\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial y}}{\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial y}}{\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial y}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{Z_{TEM} = \eta}$$

Caso TE

- En este caso solo el campo Magnético tiene componente longitudinal:

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}\left(0 + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \qquad E_y = \frac{j}{k_c^2}\left(0 + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2}\left(0 - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad H_y = \frac{-j}{k_c^2}\left(0 + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

Caso TE

- En este caso solo el campo Magnético tiene componente longitudinal:

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad H_x = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

- Veamos que ocurre con la impedancia:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\mu}{\beta} = \frac{k}{\beta}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k\eta}{\beta}$$

$$\boxed{Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{k\eta}{\beta}}$$

Caso TM

- En este caso solo el campo Eléctrico tiene componente longitudinal :

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} + 0\right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2}\left(-\beta\frac{\partial E_z}{\partial y} + 0\right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - 0\right)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + 0\right)$$

Caso TM

- En este caso solo el campo Magnético tiene componente longitudinal:

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

- Veamos que ocurre con la impedancia:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta}{\frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\varepsilon} = \frac{\beta}{k}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\beta\eta}{k}$$

$$\boxed{Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta\eta}{k}}$$

Resumen

- Introdujimos el principio de operación de las guías de ondas.
- Diferenciamos los modos TEM, TE y TM.
- Determinamos las soluciones generales para la ecuación de onda.
- Analizamos las soluciones para los casos TEM, TE y TM.
- Determinamos las impedancias para los casos TEM, TE y TM.

Cerrando la clase de hoy

- Ya determinamos las soluciones. Nos resta imponer las condiciones de una guía de onda para tener las ecuaciones de operación.
- Nos enfocaremos en un tipo particular de guía de onda.

Próxima Clase:

Guías de Ondas Rectangulares.

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 638 – 655.