



## Control 4

21 de marzo de 2024

---

Nombre:

### Pregunta 1: Transformación de Lorentz

Sea:

$$E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$$

Demuestre que la Transformación de Lorentz para la Energía está dada por:

$$E' = \gamma(E - vp)$$

Fórmulas útiles:

$$u' = \frac{u-v}{1-uv/c^2} \quad m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad E = m_u c^2 \quad p = m_u u \quad \gamma = \left( \sqrt{1 - v^2/c^2} \right)^{-1}$$

### Solución:

[1 pt] Primero reemplazamos la velocidad del sistema en movimiento por el sistema estático:

$$E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{u-v}{1-uv/c^2}/c)^2}}$$

Criterio de asignación:

- 1pt por realizar este primer reemplazo.
- No hay puntajes intermedios.

[3 pt] Despejamos la ecuación hasta identificar el producto notable de suma por su diferencia:

$$E = \frac{m_0 c^2}{c^{-1} \sqrt{c^2 - (\frac{u-v}{1-uv/c^2})^2}} = \frac{m_0 c^2 (1 - \frac{uv}{c^2})}{c^{-1} \sqrt{c^2 (1 - \frac{uv}{c^2})^2 - (u-v)^2}}$$

$$E = \frac{m_0 c^2 (1 - \frac{uv}{c^2})}{c^{-1} \sqrt{(c^2 - 2uv + \frac{u^2 v^2}{c^2}) - (u^2 - 2uv + v^2)}} = \frac{m_0 c^2 (1 - \frac{uv}{c^2})}{c^{-1} \sqrt{c^2 + \frac{u^2 v^2}{c^2} - u^2 - v^2}}$$

$$E = \frac{m_0 c^2 (1 - \frac{uv}{c^2})}{\sqrt{1 - (\frac{u^2 + v^2}{c^2}) + (\frac{uv}{c^2})^2}} = \frac{m_0 c^2 (1 - \frac{uv}{c^2})}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})(1 - \frac{u^2}{c^2})}}$$

Criterio de asignación:

- Asignar puntaje en torno al nivel de desarrollo alcanzado.
- 1pt para desarrollo parcial escaso.
- 2pt para desarrollo parcial intermedio.
- 3pt para desarrollo completo, llegando a la misma expresión.
- No hay otros puntajes intermedios.

[2 pt] Sustituimos  $m_0$  por la masa relativa  $m_u$  e identificamos los términos  $\gamma$ ,  $E$  y  $p$ :

$$E' = \gamma m_u c^2 (1 - uv/c^2) = \gamma (m_u c^2 - m_u uv)$$

$$E' = \gamma (E - vp)$$

Criterio de asignación:

- 1pt por identificar el término de gamma.
- 1pt por identificar los términos de masa y energía.
- No hay otros puntajes intermedios.

Observación al corrector:

El formulario tenía un error en la expresión original de masa relativa. Lo cual podría generar que algunos estudiantes no logren llegar a la expresión de masa relativa  $m_u$ . Tener la siguiente consideración.

- Dado que el control era con cuaderno abierto, algunos estudiantes usaron la formula correcta. En dicho caso, llegarán a la expresión correcta y se les asignará todo el puntaje.
- Aquellos alumnos que utilizaron el formulario llegarán a una expresión similar a la final. Multiplicada por un elemento fraccionario:

$$E' = \gamma (E - vp) \frac{\sqrt{1 - \frac{uv}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Desarrollos conducentes a este resultado tendrán puntaje completo.