Clase 27
Introducción a Antenas

Sadiku, M. (2018).*Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 691 – 701

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Nuevo capítulo: ¡Antenas!

- Objetivos de Aprendizaje:

  OA-19: Calcular los campos y el patrón de radiación para configuraciones de antenas básicas: dipolo hertziano, dipolo de media longitud de onda, y monopolo de cuarto de longitud de onda.

Contenidos

- Potenciales Retardados
- Antenas
- Dipolo Hertziano
- Dipolo $\lambda/2$
- Monopolo $\lambda/4$

Clase 09: Potenciales variantes en el tiempo

- Reemplazando, obtenemos:

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}}$$

- De hecho, estas corresponden a ecuaciones de [redacted].
- Y sus soluciones corresponden a los [redacted].
- Retomaremos esta conversación mucho más adelante.

Clase 09: Potenciales variantes en el tiempo

- Reemplazando, obtenemos:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}}$$

- De hecho, estas corresponden a ecuaciones de **Onda**.
- Y sus soluciones corresponden a los **Potenciales Retardados**.

Potenciales Retardados

- Sin entrar en mayores detalles, las soluciones a las ecuaciones de onda anteriores están dadas por los potenciales retardados:

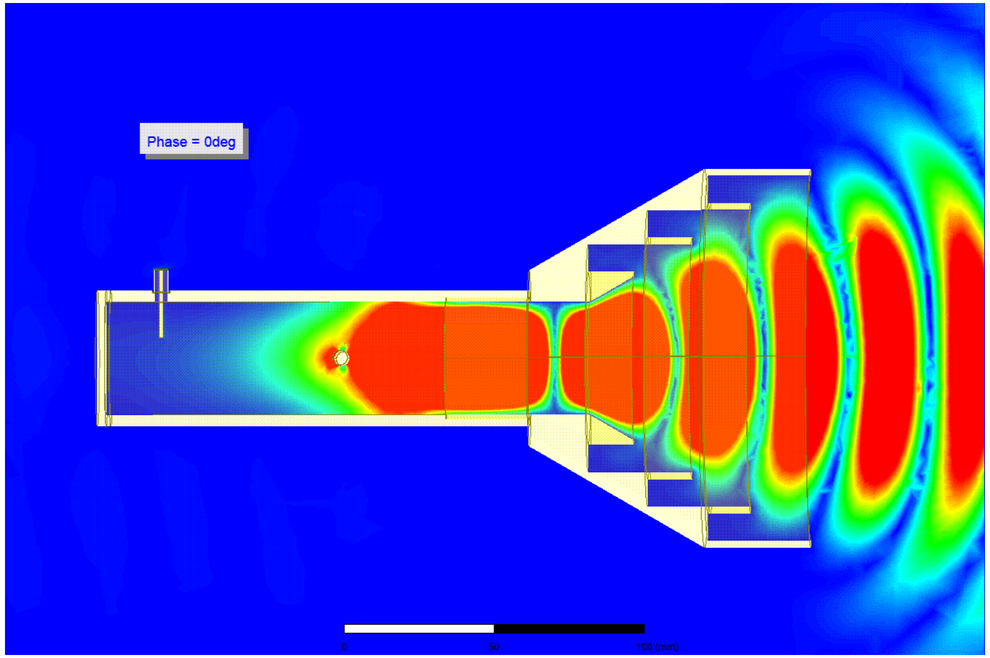
$$V(\mathbf{r},t)=\int_{v\prime}\frac{[\rho(\mathbf{r}',t')]\,dv'}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\int_{v\prime}\frac{\mu[\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')]dv'}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

donde t' corresponde al tiempo retardado:

$$t'=t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{u}=t-\sqrt{\mu\varepsilon}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

Antenas

- Son elementos conductores o dieléctricos, capaces de irradiar ondas desde un medio restringido (LT o WG) hacia un medio libre.
- La gracia de las antenas es que lo hacen muy eficientemente.



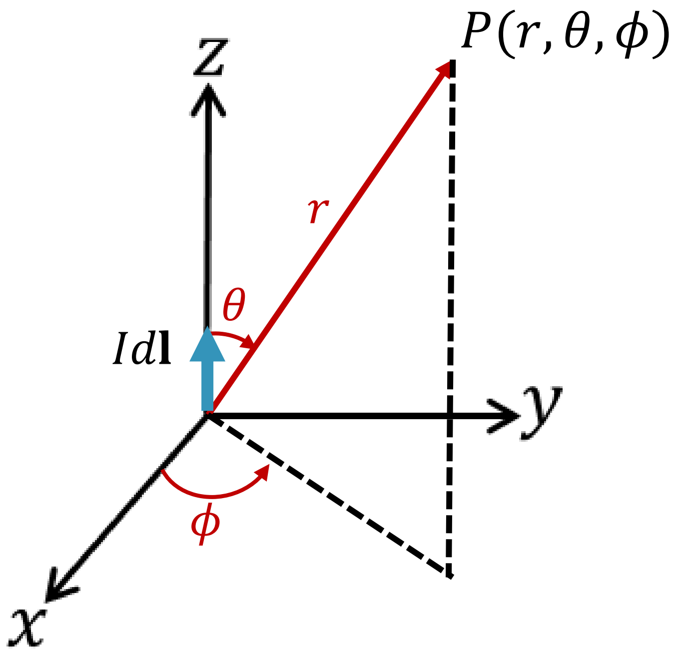
Antenas

- Nos limitaremos al estudio de los modelos más sencillos.

- Metodología:
  1. Fijar un sistema de coordenadas y determinar $\mathbf{A}$.
  2. Determinar el campo magnético usando $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$.
  3. Determinar el campo eléctrico usando $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ o $\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \mathbf{k}$.
  4. Encontrar el campo lejano para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$.
  5. Encontrar la potencia promedio irradiada usando $P_{\mathrm{rad}} = \int \overline{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S}$.

Antena Dipolo Hertziano

- En la práctica, no existe.
- Pero puede ser empleado como elemento base para otras antenas.



Dipolo Hertziano: Corriente

- Consideremos un elemento diferencial de corriente.

$$[\mathbf{J}] = [I]d\boldsymbol{l}$$

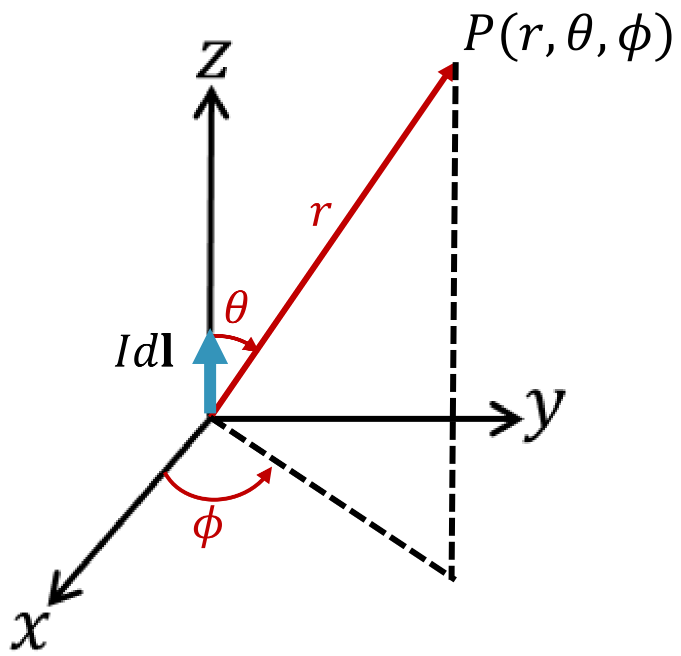
- Consideremos que la corriente es de tipo alterna, es decir:

$$I = I_0 \cos(\omega t)$$

- Luego, la corriente retardada:

$$[I] = I_0 \cos(\omega t') = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{u}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) = I_0 \cos(\omega t \ - \beta r)$$

Dipolo Hertziano: Potencial vectorial



- El potencial magnético en cilíndricas será:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \int_{v'} \frac{\mu[\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')]dv'}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mu[I]dl}{4\pi r}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu I_{S0} dl}{4\pi r} e^{-j\beta r}\mathbf{a}_z$$

- Luego, en esféricas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \langle A_z \cos\theta\,, -A_z \sin(\theta), 0\rangle$$

Dipolo Hertziano: Campo

- Determinamos $\mathbf{H}$ aplicando rotor:

$$\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\phi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ \dfrac{\mu I_0 dl}{4\pi r} e^{-j\beta r}\cos\theta & -\dfrac{\mu I_0 dl}{4\pi r} e^{-j\beta r}\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \left\langle 0\,,0\,,\frac{I_0 dl}{4\pi}\sin\theta\left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right]e^{-j\beta r}\right\rangle$$

Dipolo Hertziano: Campo

- Determinamos $\mathbf{E}$ aplicando rotor:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega\varepsilon \mathbf{E}$$

- Luego:

$$\mathbf{E} = \left\langle \eta \frac{I_0 dl}{2\pi} \cos\theta \left[\frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3}\right] e^{-j\beta r}, \qquad \eta \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3}\right] e^{-j\beta r}, \qquad 0 \right\rangle$$

Dipolo Hertziano: Campo

- Así, las soluciones generales están dadas por:

$$H_r = 0$$

$$H_\theta = 0$$

$$H_\phi = \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r}$$

$$E_r = \eta \frac{I_0 dl}{2\pi} \cos\theta \left[\frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r}$$

$$E_\theta = \eta \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r}$$

$$E_\phi = 0$$

- ¿Qué tipo de ondas son?

Dipolo Hertziano: Campo Lejano

- Si ahora aplicamos campo lejano, podemos asumir $r \gg l$ y eliminar las componentes de segundo orden:

$$H_r = 0$$
$$H_\theta = 0$$
$$H_\phi = j\frac{\beta I_0 dl}{4\pi r}\sin\theta\, e^{-j\beta r}$$

$$E_r = 0$$
$$E_\theta = j\eta\frac{\beta I_0 dl}{4\pi r}\sin\theta\, e^{-j\beta r} = \eta H_\phi$$
$$E_\phi = 0$$

- ¿Qué tipo de ondas son?

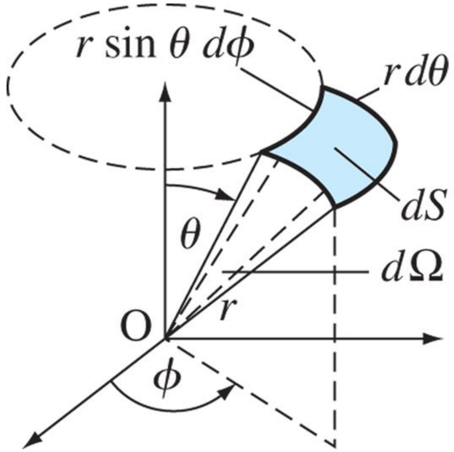
Dipolo Hertziano: Potencia Irradiada

- Limitando el análisis al campo lejano, la potencia promedio será:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2}\Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E_\theta H_\phi^* \mathbf{a}_r\right) = \frac{1}{2}\eta\left|H_\phi\right|^2 \mathbf{a}_r$$

- Considerando un diferencial de superficie en esféricas:

$$P_{\mathrm{rad}} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{I_0^2\eta\beta^2 dl^2}{32\pi^2 r^2}\sin^2\theta\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$



Dipolo Hertziano: Potencia Irradiada

- Luego:

$$P_{\text{rad}} = \frac{I_0^2 \eta \beta^2 dl^2}{32\pi^2} 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta d\theta d\phi$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{I_0^2 \eta \beta^2 dl^2}{16\pi} \frac{4}{3} = \frac{I_0^2 \eta 4\pi^2 dl^2}{4\pi\lambda^2} \frac{1}{3}$$

- Asumiendo que el medio es el vacío $(\eta = 120\pi)$:

$$\boxed{P_{\text{rad}} = 40\pi^2 \left[\frac{dl}{\lambda}\right]^2 I_0^2}$$

Dipolo Hertziano: Resistencia de Radiación

- A partir de la potencia de radiación podemos describir una resistencia ficticia a la cual se le está entregando dicha potencia:

$$P_{\mathrm{rad}} = 40\pi^2 \left[\frac{dl}{\lambda}\right]^2 I_0^2 = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad}$$

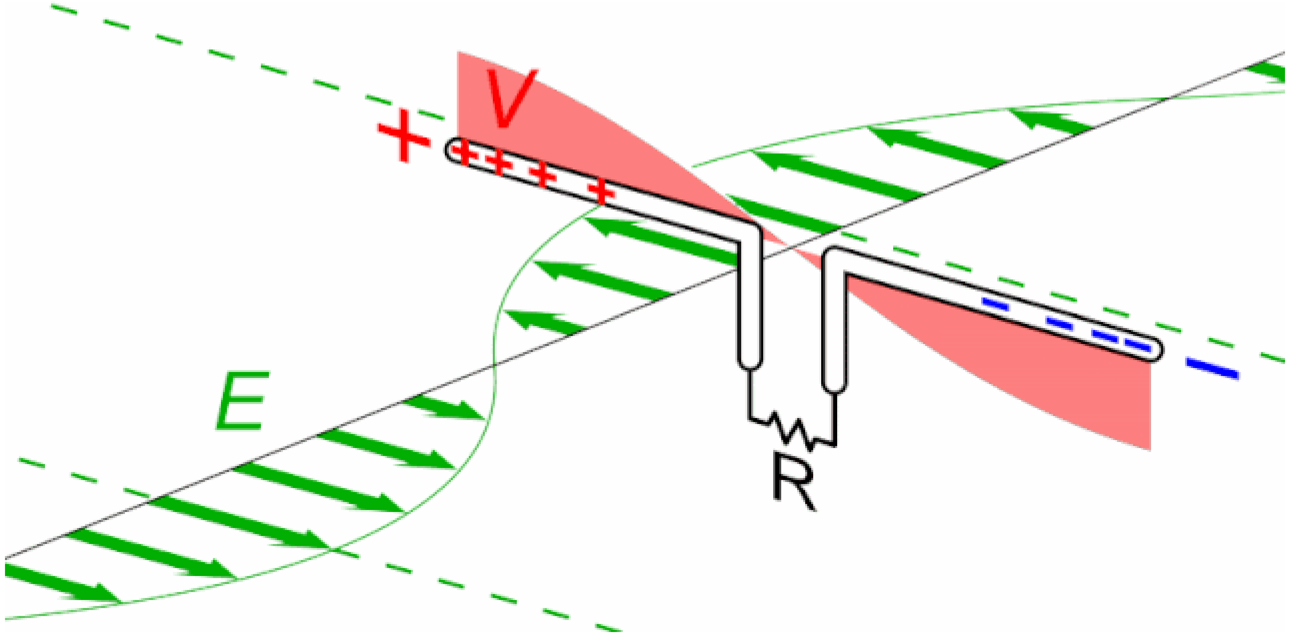
- Luego:

$$\boxed{R_{\mathrm{rad}} = 80\pi^2 \left[\frac{dl}{\lambda}\right]^2}$$

- La potencia entregada depende del R_{rad} y, en consecuencia, de la razón $\frac{dl}{\lambda}$.

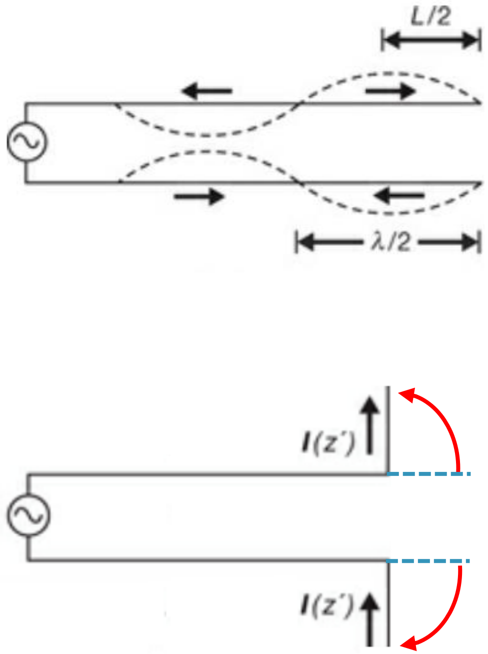
Antena Dipolo $\lambda/2$

- Su campo puede obtenerse a partir de concatenar muchos dipolos hertzianos.

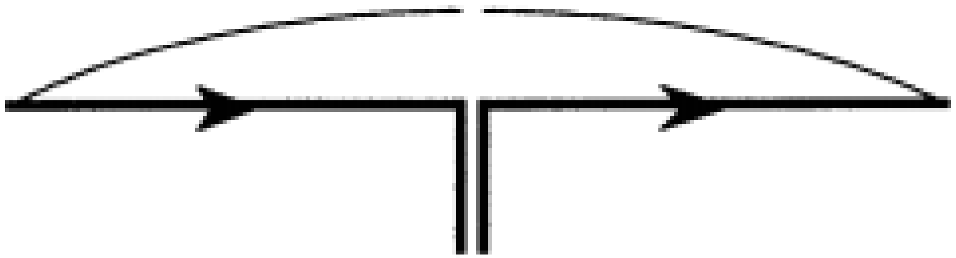


Antena Dipolo $\lambda/2$

- Es equivalente a tomar una línea de transmisión y torcer el extremo final de $\lambda/4$. De modo que la corriente tendrá una distribución:

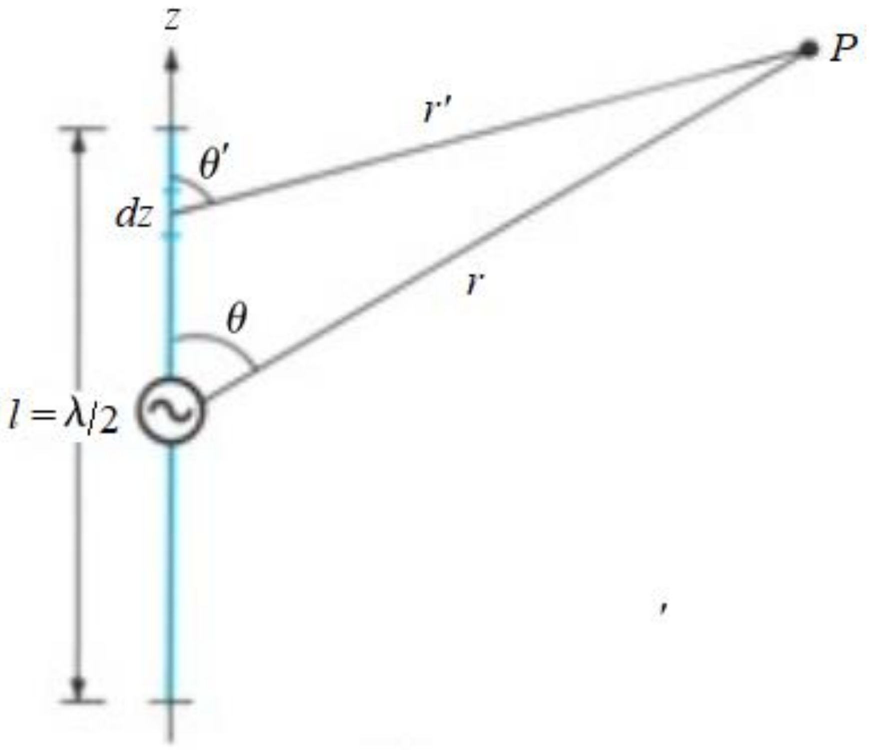


$$I = I_0 \cos \beta z$$



Antena Dipolo $\lambda/2$: Potencial vectorial

- Luego, para un diferencial dz, podemos escribir el potencial $\mathbf{A}$ como:



$$A_z = \frac{\mu I_0 dl}{4\pi r} e^{-j\beta r}$$

$$dA_z = \frac{\mu I_0 \cos \beta z \, dz}{4\pi r'} e^{-j\beta r'}$$

Antena Dipolo $\lambda/2$: Potencial vectorial

- Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores:

$$dA_z = \frac{\mu I_0 \cos\beta z \, dz}{4\pi r} e^{-j\beta(r - z\cos\theta)}$$

- Integramos:

$$A_z = \frac{\mu I_0}{4\pi r} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{-j\beta(r - z\cos\theta)} \cos\beta z \, dz = \frac{\mu I_0}{4\pi r} e^{-j\beta r} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{j\beta\cos\theta z} \cos\beta z \, dz$$

$$A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left. \frac{e^{j\beta z\cos\theta}(j\beta\cos\theta\cos\beta z + \beta\sin\beta z)}{-\beta^2\cos^2\theta + \beta^2} \right|_{z=-\lambda/4}^{z=\lambda/4}$$

Antena Dipolo $\lambda/2$: Potencial vectorial

$$A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{e^{j\beta z \cos\theta}(j\beta\cos\theta\cos\beta z + \beta\sin\beta z)}{-\beta^2\cos^2\theta + \beta^2}\Bigg|_{z=-\lambda/4}^{z=\lambda/4}$$

$$A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r\beta\sin^2\theta}\left[e^{j\frac{\pi}{2}\cos\theta}\left(j\cos\theta\cos j\frac{\pi}{2} + \sin j\frac{\pi}{2}\right) - e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\theta}\left(j\cos\theta\cos j\frac{\pi}{2} - \sin j\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r\beta\sin^2\theta}\left[e^{j\frac{\pi}{2}\cos\theta} + e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\theta}\right] = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r\beta\sin^2\theta} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r\beta\sin^2\theta}}$$

Antena Dipolo $\lambda/2$: Potencial vectorial

$$A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{e^{j\beta z \cos\theta}(j\beta\cos\theta\cos\beta z + \beta\sin\beta z)}{-\beta^2\cos^2\theta + \beta^2}\Bigg|_{z=-\lambda/4}^{z=\lambda/4}$$

$$A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r\beta\sin^2\theta}\left[e^{j\frac{\pi}{2}\cos\theta}\left(j\cos\theta\cos j\frac{\pi}{2} + \sin j\frac{\pi}{2}\right) - e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\theta}\left(j\cos\theta\cos j\frac{\pi}{2} - \sin j\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r\beta\sin^2\theta}\left[e^{j\frac{\pi}{2}\cos\theta} + e^{-j\frac{\pi}{2}\cos\theta}\right] = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r\beta\sin^2\theta} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{A_z = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r\beta\sin^2\theta}}$$

Dipolo $\lambda/2$: Campo lejano

- A partir de $\mathbf{A}$, determinamos $\mathbf{H}$ y $\mathbf{E}$. Con ello se obtiene que:

$$H_r = 0$$
$$H_\theta = 0$$
$$H_\phi = j\frac{I_0 e^{-j\beta r}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta}$$

$$E_r = 0$$
$$E_\theta = j\frac{\eta I_0 e^{-j\beta r}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} = \eta H_\phi$$
$$E_\phi = 0$$

Dipolo $\lambda/2$: Potencia irradiada y R_{rad}

- Siguiendo un procedimiento similar al dipolo hertziano, se tiene:

$$\boxed{P_{\text{rad}} \approx 36.56\, I_0^2 \ [\text{W}]}$$

$$\boxed{R_{\text{rad}} = \frac{2P_{\text{rad}}}{I_0^2} = 73.1\ [\Omega]}$$

- Notemos que tanto la resistencia como la potencia son mayores al caso del dipolo hertziano.
- Adicionalmente, la impedancia de la antena no es solo resistiva. También tiene una componente reactiva (y bastante engorrosa de calcular).

$$\boxed{X_{\text{rad}} = 42.25\ [\Omega]}$$

Dipolo $\lambda/2$: Impedancia

- De este modo, la impedancia de la antena (sin pérdidas) está dada por:

$$\boxed{Z_{\text{in}} = 73.1 + j42.25\ [\Omega]}$$

- La reactancia X_{in}, decae bruscamente para largos marginalmente menores a $\lambda/2$ (R_{in} se mantiene prácticamente igual).
- Para $l = 0.485\lambda$, el dipolo es resonante con $X_{\text{in}} = 0$ y $Z_{\text{in}} = 73.1\ \Omega$ (puramente real).
- Esta es la razón por la cual los coaxiales de antena generalmente tienen una impedancia característica de $75[\Omega]$.

Antena Monopolo $\lambda/4$

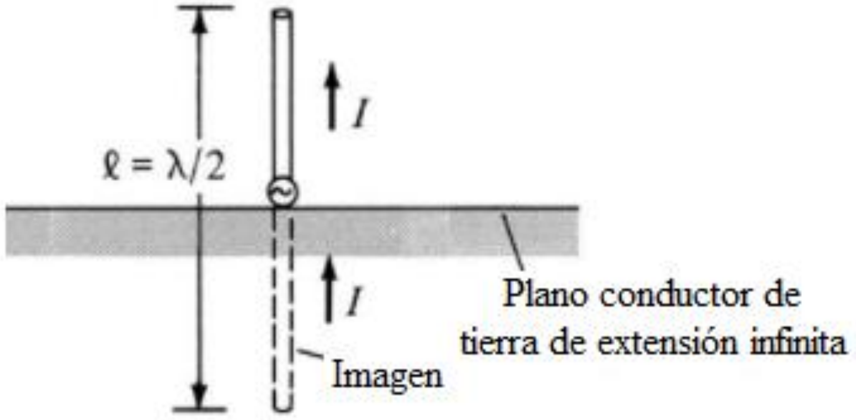
- En esencia, es un dipolo $\lambda/2$ con una de sus mitades aterrizadas a tierra.
- Muy ocupada en radiodifusión AM.

Altura referencial:

$\mathbf{37} \times$

Monopolo $\lambda/4$: Parámetros

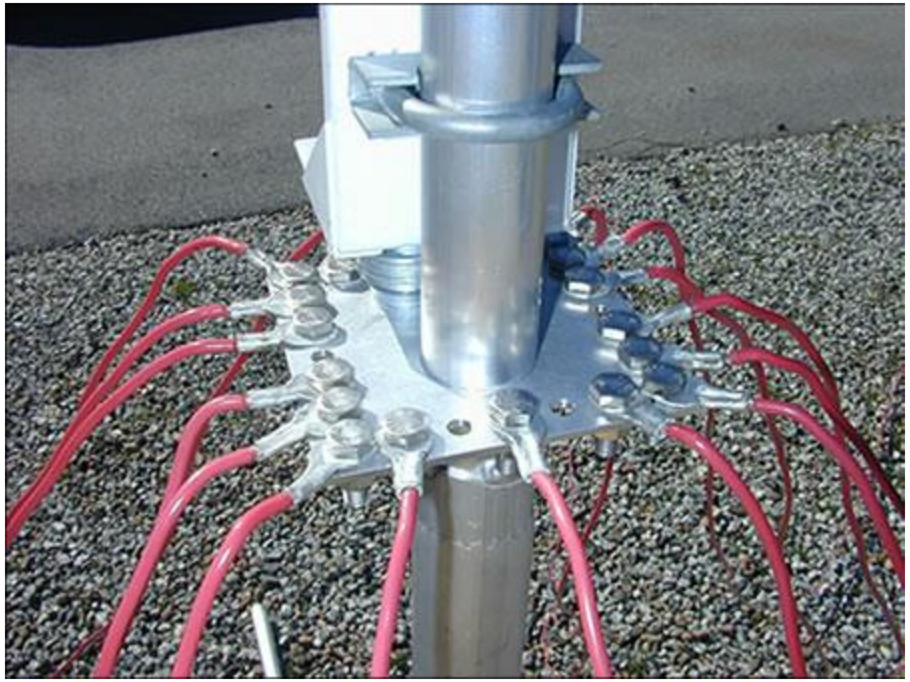
- Los cálculos se pueden realizar de manera análoga al dipolo. Empleando el método de las imágenes.



- Sus características de Potencia e impedancia son:

$$\boxed{P_{\text{rad}} \approx 18.28\, I_0^2 \text{ [W]}} \qquad \boxed{Z_{\text{in}} = 36.5 + j21.25\ \Omega.}$$

Dipolo $\lambda/2$: Radiales



Resumen

- Definimos los potenciales de retardo.
- Explicamos a modo general la operación de una antena.
- Caracterizamos los 3 tipos de antena más populares. En términos de campos, potencia y resistencia.

Cerrando la clase de hoy

Próxima Clase:

Características de Antenas.

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 707 – 714.