Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Curso IEE2113 Teoría Electromagnética
1^{er} semestre, 2024

Ayudantía 1: Maxwell y Relatividad

Profesor: Javier Silva
Ayudante : Rafael Ormazábal- riormazabal@uc.cl

Maxwell

Problema 1: Ley de Inducción de Faraday

Una barra conductora de masa m se desliza entre dos rieles conductores, sin fricción, que forman un ángulo θ con la horizontal, están separados una distancia l y unidos por una resistencia R. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ es aplicado verticalmente. La barra se suelta del reposo y se desliza hacia abajo.

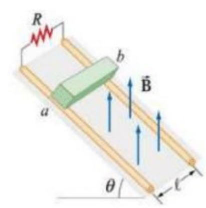


Figura 1: Diagrama del ejercicio

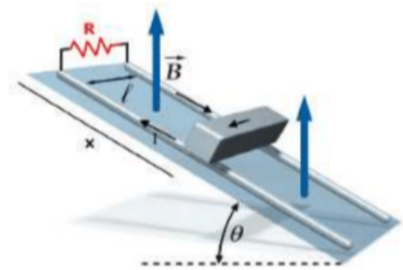
a) Determina la corriente inducida en la barra. ¿En qué dirección fluye, de a hacia b o de b hacia a?

b) Calcule la velocidad terminal de la barra.

c) Una vez alcanzada la velocidad terminal, ¿Cuál es la corriente inducida?

Solución [Ejercicio 4.5 Compilado de EyM Sebastían Urrutia]:

a) Antes que todo, coloquemos el eje de formal usual, y no sobre el plano inclinado. Supongamos que, en un instante dado, la barra se encuentra a una distancia x del extremo, como se ve en la figura:



El circuito formado por los rieles y la barra que desliza encierra una superficie plana cuya normal es:

$$\hat{n} = sin\theta\hat{i} + cos\theta\hat{j}$$

y el flujo a través de esta espira es:

$$\Phi_B = \int\int \vec{V} \cdot \hat{n} dS = Bxlcos\theta$$

Con esto, la fem inducida en los extremos de la barra es:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Blcos\theta\frac{dx}{dt}$$

Así, la corriente inducida será:

$$I = \frac{|\epsilon|}{R} = \frac{Bl}{R}cos\theta\frac{dx}{dt}$$

La dirección se ve de la siguiente forma: el flujo está aumentando, por lo que se requiere inducir una corriente tal que su campo magnético apunte hacia abajo y se contraponga al cambio en el flujo. de esta forma, por la regla de la mano derecha, la corriente debe circular en dirección $b \to a$.

b) La fuerza magnética que ejerce el campo sobre la barra es:

$$\vec{F_m} = I\vec{L} \times \vec{B} = Il\hat{k} \times B\hat{j} = -BIl\hat{i}$$

La fuerza de gravedad viene dada por:

$$\vec{F_g} = -mg\hat{j}$$

Haciendo suma de fuerzas en el eje x (proyectando paralelamente sobre la superficie):

$$mx'' = mgsin\theta - BIlcos\theta = mgsin\theta - \frac{B^2l^2}{R}cos^2\theta x'$$

Debido a que nos piden por la velocidad terminal, podemos considerar $x'' = 0$:

$$mgsin\theta = \frac{B^2l^2}{R}cos^2\theta x'$$

Despejando la velocidad:

$$x' = v = \frac{mgRsin\theta}{B^2l^2cos^2\theta}$$

c) La corriente terminal corresponde a la corriente una vez que el sistema llega a la velocidad terminal. Reemplazando la expresión anterior de velocidad en el resultado del inciso a):

$$I_t = \frac{Bl}{R}cos\theta v = \frac{mgtan\theta}{Bl}$$

Problema 2: Vector Potencial

Considere la definición integral del vector potencial:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\forall'$$

a) Reescriba $\vec{A}$ para corrientes lineales y superficiales.

b) Un cascaron esférico esférico de radio R, cargado con una densidad superficial σ, está girando con una velocidad angular ω. Encuentre el vector potencial que produce en un punto r en el eje z.

Solución [Ejemplo 5.11 Griffiths]:

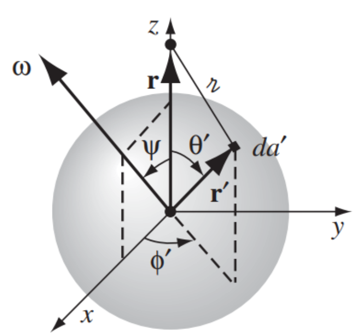
a) Al pasar a corrientes linales y superficiales, el cambio que se tiene que realizar es sobre el producto $\vec{J}(\vec{r}')d\forall'$, manteniendo las unidades del producto. Con esto en mente, para corrientes lineales se tiene:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{l}'$$

Mientras que para corrientes superficiales ($\vec{K}(\vec{r}')$):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dA'$$

b) El enunciado no especifica la dirección de giro, pero debido a la simetría esférica del problema, podemos colocar $\vec{\omega}$ en el plano xz, como se muestra en la siguiente figura:



$\vec{K}$ está dado por el producto $\sigma\vec{v}(\vec{r'})$, donde σ es la densidad de carga superficial y $\vec{v}(\vec{r'})$ es la velocidad de un punto en la posición $\vec{r'}$. Más aún, la velocidad de un punto ubicado en $\vec{r'}$ está dado por el producto cruz $\vec{\omega} \times \vec{r'}$. Siguiendo la notación de la figura anterior obtenemos:

$$\vec{v}(\vec{r'}) = \vec{\omega} \times \vec{r'} =$$

$$R\omega[-(cos\psi sin\theta' sin\phi')\hat{x} + (cos\psi sin\theta' cos\phi' - sin\psi cos\theta')\hat{y} + (sin\psi sin\theta' sin\phi')\hat{z}]$$

Recordemos que al resolver la integral integramos ϕ' de 0 a 2π, lo que eliminaría todos los términos que dependen de $sin\phi'$ o $\cos\phi'$ (estamos integrando una sinusoide sobre su periodo):

$$\int_0^{2\pi} sin\phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} cos\phi' d\phi' = 0$$

Con esto la integral queda:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 R^3 \sigma\omega sin\psi}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{cos\theta' sin\theta'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\theta'\right)\hat{y}$$

Usando el teorema del coseno $|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrcos\theta'}$. Resolviendo la integral obtenemos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 R\sigma\omega sin\psi}{6r^2}[(R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r)]\hat{y}$$

Relatividad

Problema 3: Relatividad especial

Dos naves espaciales, cada una de $100m$ de largo (medidas en reposo), viajan de frente la una hacia la otra con una velocidad de $0.85c$ relativa a la tierra.

a) ¿Cuánto mide cada nave medida desde la tierra?

b) ¿Cuál es la velocidad de cada nave cuando es medida de un observador en la otra?

c) ¿Qué tan larga es una de las naves cuando es medida desde la otra?

d) Si en $t = 0$ en la tierra los frentes de las naves se alinean porque están comenzando a pasarse una a la otra, ¿en qué tiempo en la tierra se alinean los propulsores?

Solución:

a) La contracción espacial según el modelo de relatividad espacial está dada por:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Reemplazando con los parámetros del problema:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{0.85c}{c})^2}} = 1.898$$

Por lo que la nave medida desde la tierra tiene un largo de:

$$L = \frac{100m}{1.898} = 52.7m$$

b) La transformación de velocidad según la mecánica relativista está dada por:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

Reemplazando para los parámetros del problema, respetando la dirección de las velocidades:

$$u'_x = \frac{-0.85c - 0.85c}{1 - \frac{-0.85c \cdot 0.85c}{c^2}} = \frac{-1.7c}{1 + 0.7225} = -0.987c$$

c) Este problema es sumamente similar al inciso a), pero esta vez tenemos que considerar la velocidad de la nave según un observador en la otra. Primera calculamos γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{0.987c}{c})^2}} = 6.222$$

Finalmente, el largo de la nave medido por un observador en la otra nave es:

$$L = \frac{100m}{6.222} = 16.07m$$

d) En primer lugar, notamos que una vez que consideramos la contracción espacial de las naves (pasan de $100m$ a $52.7m$ según el marco de referencia de la tierra), este problema se reduce a uno de mecánica clásica. Cada nave tiene que avanzar su largo para que se alineen los propulsores:

$$t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{52.7m}{0.85c} = 0.21\mu s$$

Problema 4: Relatividad en EM

a) Considere el siguiente sistema de placas infinitas separadas por una distancia d, con densidad de carga σ_0. Ahora, este sistema (S) comienza a desplazarse a lo largo del eje x con velocidad v_0, con respecto al sistema (S_0). ¿Qué ocurre con las componentes del campo eléctrico entre las placas?.

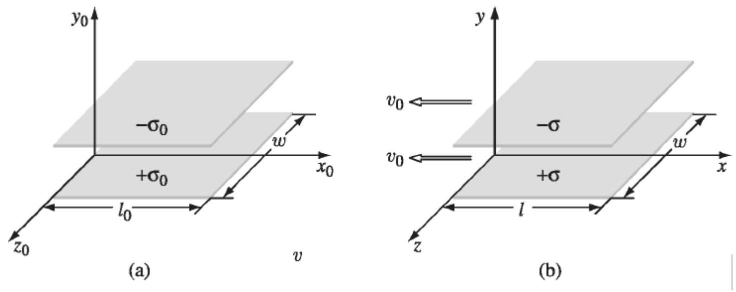


Figura 2: Placas paralelas

HINT1: Considere que ocurre con la densidad de carga debido a dicho desplazamiento. **HINT2:** Analice el comportamiento del campo en su componente, perpendicular a las placas y paralelo a ellas.

b) Una carga puntual q se encuentra en reposo en el sistema de origen S_0. ¿Cuál es el campo eléctrico de dicha carga con respecto a un punto P cualquiera en el sistema S, que se mueve a lo largo del eje +x con velocidad v_0 con respecto a S_0?

Solución:

a) Al ser placas paralelas e infinitas, en el sistema estacionario se tiene un campo eléctrico $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{y}$. Luego, sabemos que la carga en las placas no varía, y el ancho (w) no ha cambiado, pero el largo (l) se ve afectado por las contracciones de Lorentz por un factor:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Así, como la carga no varía pero sí su largo tenemos:

$$\sigma_0 l w = \sigma_0' l' w$$

De esta última expresión, se desprende que $\sigma_0' = \gamma_0 \sigma_0$. Así mismo, el campo eléctrico en su componente perpendicular:

$$\boxed{E^{\perp} = \gamma_0 E_0 \perp}$$

Por otro lado, la distancia d no sufre contracciones de Lorentz, por lo que sus componentes paralelas al movimiento no se ven afectadas, es decir,

$$\boxed{E^{||} = E_0^{||}}$$

b) En el sistema S_0, el campo eléctrico es:

$$E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$
$$E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$
$$E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

Como se vió en el item anterior, solo se ven afectadas las componentes del campo eléctrico que se encuentran en paralelo con el movimiento de las cargas. Por lo tanto, desde el sistema S se tiene que el campo es:

$$E_x = E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$
$$E_y = \gamma_0 E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma_0 qy_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$
$$E_z = \gamma_0 E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma_0 qz_0}{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{3/2}}$$

Cabe destacar, que el campo sigue siendo expresado en término de las coordenadas del sistema S_0, que sufren las transformaciones de Lorentz:

$$x_0 = \gamma_0(x+v_0t) = \gamma_0 R_x$$
$$y_0 = y = R_y$$
$$z_0 = z = R_z$$

Donde $\vec{R}$, es el vector desde la carga q hasta el punto P. Luego, usando coordenadas esféricas (ϕ azimutal y θ polar) se tiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma_0 q}{(\gamma_0^2 R^2\cos^2\phi\sin^2\theta + R^2\sin^2\phi\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta)^{3/2}}\vec{R}$$
$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma_0 q(1-v_0^2/c^2)}{[(1-v_0^2/c^2(\sin^2\phi\sin^2\theta+\cos^2\theta)]^{3/2}}\frac{\hat{R}}{R^2}}$$