Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Interrogación 02

04 de junio de 2024

Instrucciones

- Tiempo Límite de la Evaluación: **2 horas**.
- Puntaje Máximo: 18 puntos.
- Se permite el uso de calculadora. Se prohíbe el uso de otros dispositivos electrónicos, tales como celulares, tablets, computadores, etc.
- Responda cada pregunta en una hoja separada. **No combine respuestas de distintas preguntas en una misma hoja**.
- Para cada pregunta escriba su nombre y el número de pregunta en la hoja correspondiente. **Aquellas hojas que carezcan de esta información no serán corregidas.**
- Responda con **letra legible**. Desarrollos tachados o garabateados no serán considerados en la corrección. En caso de que se solicite una expresión o respuesta numérica, déjela claramente señalada, encerrándola en un recuadro.
- Solo habrán 3 instancias de dudas: al inicio de la evaluación, a los 45 minutos y a los 90 minutos. Las dudas a tratar serán exclusivamente de enunciado.
- Este curso se adscribe y compromete al Código de Honor UC:

  Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en las relaciones con los demás integrantes de la comunidad y en la realización de todo trabajo, particularmente en aquellas actividades vinculadas a la docencia, al aprendizaje y la creación, difusión y transferencia del conocimiento. Además, me comprometo a velar por la dignidad e integridad de las personas, evitando incurrir en y, rechazando, toda conducta abusiva de carácter físico, verbal, psicológico y de violencia sexual. Del mismo modo, asumo el compromiso de cuidar los bienes de la Universidad

- En caso de detectar copia u otro tipo de acto deshonesto en esta evaluación, se le solicitará firmar esta hoja a modo de respaldo. La falta implicará la reprobación inmediata del curso con nota 1.1 y el caso será notificado a la Dirección de Pregrado.

Pregunta 1 [6 puntos]

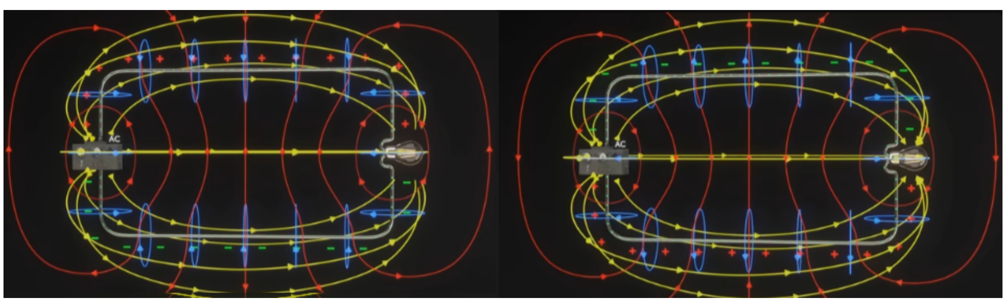
Responda cada uno de los siguientes items:

a) [**1 punto**] Explique cómo funciona la fibra óptica. Para ello emplee al menos 3 de los conceptos vistos en clase.

Respuesta: La fibra óptica funciona en base al principio de **reflexión interna total**, esto consiste en que la fibra se compone de un material dieléctrico cuyo **coeficiente de refracción** o **impedancia** es tal que garantice que el **ángulo incidente** sea mayor al **ángulo crítico**, de modo que la onda esté constantemente rebotando dentro de la fibra y propagándose a través de ella. Evidentemente, el material no es perfecto y pueden haber pérdidas asociadas a un **coeficiente de transmisión**, que puede ser bajo pero no cero (en un caso realista).

b) [**1 punto**] Considere un circuito AC compuesto de una batería, un cable y una ampolleta. Dibuje el campo eléctrico, el campo magnético y el vector de Poynting para los 3 elementos que componen el circuito. Su dibujo debe considerar tanto el semiciclo positivo como el semiciclo negativo de la señal AC.

Respuesta: En esencia, es el mismo diagrama del video visto en clases. A continuación se muestra el campo eléctrico (rojo), magnético (azul) y vector de Poynting (amarillo).



c) [**1 punto**] Se desea estimar el largo de una línea de transmisión para que una carga Z_L tenga cierta impedancia de entrada Z_{in}. Al obtener el valor de la distancia, se percata de que esta tiene un valor negativo de -2 metros. ¿Qué solución propone?

Respuesta: En este caso, basta con sumar $\lambda/2$ hasta que la longitud se vuelva positiva.

d) [**1 punto**] ¿Por qué la relación entre el coeficiente de reflexión y de transmisión en incidencia normal está dado por $1 + \Gamma = T$ en lugar de $\Gamma + T = 1$?

Respuesta: Esto se debe a que desde en el Medio 1 habitan 2 ondas que están constantemente incidiendo y reflejandose, sin extinguirse en algun momento. Mientras que en el medio 2 constantemente se está transmitiendo una parte. Al hacer el balance:

$$E_0 + \Gamma E_0 = T E_0$$

$$1 + \Gamma = T$$

se llega a la primera expresión.

e) [**1 punto**] Suponga que desea simular una onda en dos medios distintos mediante el método de las diferencias finitas. ¿A qué problema podría verse enfrentado en términos del número de Courant-Friedrichs-Lewy?

Respuesta: El número de CFL nos da una razón entre la velocidad real y continua del caso real, versus la versión discretizada para diferencias finitas:

$$C = \frac{u}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

La condición que se debe cumplir para una buena simulación es que C sea menor y muy cercano a 1. No obstante, si se simulan 2 medios simultáneamente, cada medio presentará una velocidad u distinta. Al ajustar el número C a la velocidad discreta de uno de los medios, el otro se alejará de la condición de $C \approx 1$ y por lo tanto la simulación podría presentar problemas de ruido o convergencia.

f) [**1 punto**] Explique qué son las pérdidas por inserción y las pérdidas por retorno. Señale qué características debe satisfacer una buena línea de transmisión.

Las perdidas por retorno se entienden como las perdidas que experimenta la señal reflejada. Estas pérdidas se pueden cuantificar como $RL = -20 \log_{10} |\Gamma|$. Por otro lado, las perdidas por inserción representan las perdidas en la señal transmitida, y se cuantifican como $IL = -20 \log_{10} |T|$.

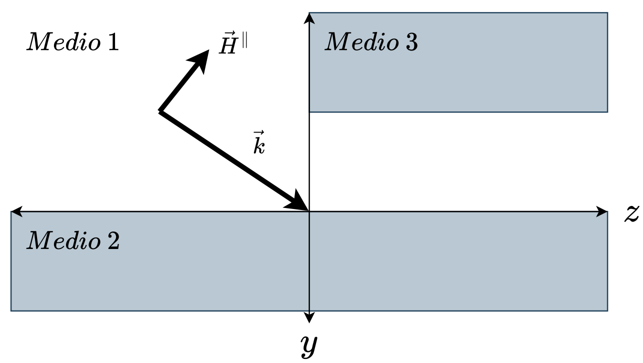
Una buena linea de transmisión debería garantizar gran transmisión y escasa reflexión. De modo que RL debiese ser muy grande y IL muy pequeño.

Pregunta 2 [6 puntos]

Una onda magnética descrita por:

$$\vec{\mathbf{H}} = (-j5\vec{\mathbf{a}}_x - 3\vec{\mathbf{a}}_y + 4\vec{\mathbf{a}}_z)\cos\left(\omega t - 2.7x - \sqrt{\pi}y - 3.8z\right)$$

se propaga libremente por un medio dieléctrico ideal. La onda ingresa a un sistema compuesto por varios medios, de manera tal que la componente paralela puede verse representada por el esquema de la Figura.



Sean los medios en cuestión:

- Medio 1: dieléctrico ideal ($\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0,\ \mu_1 = \mu_0,\ \sigma_1 = 0$)
- Medio 2: dieléctrico ideal ($\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0,\ \mu_2 = \mu_0,\ \sigma_2 = 0$)
- Medio 3: dieléctrico con pérdidas ($\varepsilon_3 = 18.4\varepsilon_0,\ \mu_3 = \mu_0,\ \sigma_3 = 3\ [S/m]$)

(a) **[1 punto]** Determine θ_i, θ_r y θ_t para la transición entre el Medio 1 y el Medio 2. Sea cuidadoso con sus resultados y estudie bien la situación. Exprese en grados.

Todo debe analizarse desde el plano paralelo. A partir de las componentes del vector de propagación, se tiene:

$$\tan\theta_i = \frac{3.8}{\sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{\theta_i = 65^\circ}$$

Por ley de Snell:

$$\boxed{\theta_r = 65^\circ}$$

Notemos que para $\theta = 60^\circ$

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_t$$

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$
$$\theta_t = 90°$$

De modo que $\theta_c = 60°$ corresponde al ángulo crítico. Por lo tanto, para valores de θ_i mayores a ese valor, se tiene reflexión interna total. De este modo:

$$\boxed{\theta_t > 90°}$$

(b) **[0.5 puntos]** Determine los coeficientes $\Gamma^{\parallel}$, $T^{\parallel}$, $\Gamma^{\perp}$ y $T^{\perp}$ para la transición entre el Medio 1 y el Medio 2.

Dado que se tiene reflexión interna total, se desprende inmediatamente que:

$$\boxed{T^{\parallel} = T^{\perp} = 0}$$

Dado que se supera el ángulo crítico, un $\theta_t > 90°$ no tiene sentido, por esto siempre se satura en 90°. Asimismo, dado que los coeficientes de transmisión valen 0, es de esperar que los coeficientes de reflexión tomen valor 1 o -1.

Luego, los coeficientes de reflexión estarán dados por:

$$\boxed{\Gamma^{\parallel} = -1}$$
$$\boxed{\Gamma^{\perp} = 1}$$

(c) **[1 punto]** Determine θ_i, θ_r y θ_t para la transición entre el Medio 1 y el Medio 3.

Por simple geometría:

$$\boxed{\theta_i = 65°}$$

Por ley de Snell:

$$\boxed{\theta_r = 65°}$$

A partir de aquí, se aceptan 2 enfoques para desarrollar este ejercicio. Si bien el enfoque 1 es el correcto, ambos se aceptarán como tal:

Enfoque 1 (camino correcto): Asumir que no es posible aproximar n_3 como $\sqrt{\varepsilon_r}$

En este caso se usan los valores de β para aplicar la ley de Snell (obtenidos en (e)):

$$\beta_1 \approx 5$$

$$\beta_3 = 38.35$$

Aplicando Snell:

$$\theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{5\sin(65°)}{38.35}\right)$$

$$\boxed{\theta_t = 6.78°}$$

Enfoque 2 (camino errado pero consistente): Asumir que es posible aproximar n_3 como $\sqrt{\varepsilon_r}$

$$n_1 \sin\theta_i = n_3 \sin\theta_t$$

$$\theta_t = \frac{n_1}{n_3}\sin\theta_i = \frac{2}{\sqrt{18.4}}\sin(65°) =$$

$$\boxed{\theta_t = 25°}$$

Notemos que en este caso $\theta_i + \theta_t = 90°$, de modo que el ángulo de incidencia corresponde al ángulo de Brewster.

(d) **[0.5 puntos]** Determine los coeficientes $\Gamma^{\parallel}$, $T^{\parallel}$, $\Gamma^{\perp}$ y $T^{\perp}$ para la transición entre el Medio 1 y el Medio 3.

Analicemos la solución con cada uno de los 2 enfoques:

Enfoque 1: $\theta_t = 6.78°$

En este caso, se tienen coeficientes para todos los casos:

$$\Gamma^{\parallel} = \frac{\eta_3\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_3\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} = \frac{(17.72\angle 43.8)\cos(6.78°) - 188.5\cos(65°)}{(17.72\angle 43.8)\cos(6.78°) + 188.5\cos(65°)}$$

$$\boxed{\Gamma^{\parallel} = 0.73\angle 162.1}$$

$$T^{\parallel} = \frac{2\eta_3\cos\theta_i}{\eta_3\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} = \frac{2(17.72\angle 43.8)\cos(6.78°)}{(17.72\angle 43.8)\cos(6.78°) + 188.5\cos(65°)}$$

$$\boxed{T^{\parallel} = 0.37\angle 36.29}$$

$$\Gamma^{\perp} = \frac{\eta_3\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_3\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{(17.72\angle 43.8)\cos(65°) - 188.5\cos(6.78°)}{(17.72\angle 43.8)\cos(65°) + 188.5\cos(6.78°)}$$

$$\boxed{\Gamma^{\perp} = 0.94\angle 176.82}$$

$$T^{\perp} = \frac{2\eta_3 \cos\theta_i}{\eta_3 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} = \frac{2(17.72\angle 43.8)\cos(65°)}{(17.72\angle 43.8)\cos(65°) + 188.5\cos(6.78°)}$$

$$\boxed{T^{\perp} = 0.07\angle 42.25}$$

Enfoque 2: $\theta_t = 25°$ Dado que el ángulo de incidencia corresponde al ángulo de Brewster.

$$\boxed{\Gamma^{\parallel} = 0}$$

Se sigue ocupando consistentemente el coeficiente n:

$$T^{\parallel} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_3 \cos\theta_i} = \frac{4\cos(65°)}{2\cos(25°) + \sqrt{18.4}\cos(65°)}$$

$$\boxed{T^{\parallel} = 0.466}$$

$$\Gamma^{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_3 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_3 \cos\theta_t} = \frac{2\cos(65°) - \sqrt{18.4}\cos(25°)}{2\cos(65°) + \sqrt{18.4}\cos(25°)}$$

$$\boxed{\Gamma^{\perp} = -0.642}$$

$$T^{\perp} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_3 \cos\theta_t} = \frac{4\cos(65°)}{2\cos(65°) + \sqrt{18.4}\cos(25°)}$$

$$\boxed{T^{\perp} = 0.357}$$

(e) **[1 punto]** Determine los valores de u, ω, β, α, $|\eta|$ y $\angle\eta$ para cada uno de los 3 medios.

- Medio 1:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{4}} = 150[km/s]$$

$$\omega_1 = u_1|k_1| = 150 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{2.7^2 + \pi + 3.8^2} = 750 \cdot 10^6[rad/s]$$

$$\beta_1 = \sqrt{2.7^2 + \pi + 3.8^2} \approx 5$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$|\eta_1| = \frac{377}{\sqrt{4}} = 188.5[\Omega]$$

$$\angle\eta_1 = 0°$$

- Medio 2:

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{3}} = 173.2[km/s]$$

$$\omega_2 = \omega_1 = 750 \cdot 10^6[rad/s][rad/s]$$

$$\beta_2 = \frac{\omega_2}{u_2} = 4.33$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$|\eta_2| = \frac{377}{\sqrt{3}} = 217.7[\Omega]$$

$$\angle\eta_2 = 0°$$

- Medio 3:

$$\omega_3 = \omega_1 = 750 \cdot 10^6[rad/s]$$

$$\beta_3 = \omega_3\sqrt{\frac{\mu_3\varepsilon_3}{2}}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma_3^2}{\omega_3^2\varepsilon_3^2}} + 1\right]^{1/2} \approx 38.35$$

$$u_3 = \frac{\omega_3}{\beta_3} \approx 19.55[km/s]$$

$$\alpha_3 = \omega_3\sqrt{\frac{\mu_3\varepsilon_3}{2}}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma_3^2}{\omega_3^2\varepsilon_3^2}} - 1\right]^{1/2} \approx 36.8$$

$$|\eta_3| = \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}}\left[1 + \left(\frac{\sigma_3}{\omega_3\varepsilon_3}\right)^2\right]^{-1/4} \approx 17.72\Omega]$$

$$\angle\eta_3 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma_3}{\omega_3\varepsilon_3}\right) \approx 43.8°$$

(f) **[1 punto]** Explique el comportamiento de las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas en cada uno de los casos. Señale en particular aspectos como: tipo de polarización, cambios de magnitud, desfases, ángulos notables, entre otros. Puede apoyarse en dibujos.

Inicialmente la onda tiene polarización circular LHCP. La onda incide con ángulo mayor al crítico sobre el Medio 2, de manera que se produce reflexión interna total. La onda mantiene su magnitud inicial, pero una de sus componentes se invierte, de modo que ahora es de tipo RHCP.
Enfoque 1: Al encontrarse con el Medio 3, la onda presenta transmisión y reflexión, y adicionalmente adquiere desfase. De esta manera, la onda finalmente termina en una polarización elíptica.

Enfoque 2: Al encontrarse con el Medio 3, la onda incide con ángulo de Brewster, de modo que no se refleja componente paralela. La onda que ingresa al medio tiene polarización elíptica, pues varían las amplitudes de sus componentes y además adquiere desfases.

(g) **[1 punto]** Determine la potencia promedio transmitida al Medio 3.

Dado que tenemos un medio dieléctrico con pérdidas, debemos tener en consideración el decaimiento α_3 y el desfase θ_η:

$$\bar{P}(z) = \frac{|\eta||H_3|^2}{2} e^{-2\alpha k} \cos \theta_\eta$$

Además como la onda se propaga en el sentido de los ejes negativos, se debe tener el cuidado en la exponencial.

$$\bar{P}(z) = \frac{|\eta||H_3|^2}{2} e^{2\alpha k} \cos \theta_\eta$$

De la ecuación de la onda se tiene que tanto la componente paralela como la perpendicular en el medio 1 tienen magnitud igual a 5. Como hay reflexión interna total, esta situación no cambia en la onda que rebota. Luego:

$$H_3 = \sqrt{(5|T^{\parallel}|)^2 + (5|T^{\perp}|)^2}$$

Nuevamente este valor dependerá del enfoque. Con $H_3 = 1.88$ para el Enfoque 1 y $H_3 = 2.93$ para el Enfoque 2.

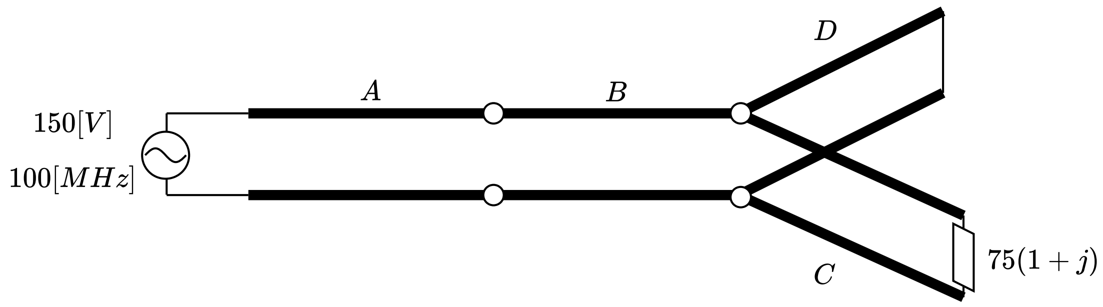
Dado que no se ha brindado un valores de referencia para posicionar el medio 2, basta con dejar la expresión en función de la dirección de propagación k:

$$\bar{P}(k) = 22.6e^{76.6k}$$

$$\bar{P}(k) = 54.89e^{76.6k}$$

Pregunta 3 [6 puntos]

Considere el sistema de 4 líneas de transmisión presentado en la figura, el cual opera a una frecuencia de 100 [MHz] y con un voltaje de alimentación de 150 [V]. La línea C tiene un largo de 7.25[m], y la línea B un largo de 9[m].



Las especificaciones técnicas de cada línea se detallan en la siguiente tabla.

Línea	Largo Eléctrico (l_e)	ε_r	$Z_0[\Omega]$	$Z_{ca}[\Omega]$	$Z_{cc}[\Omega]$
A	?	16	50	$j50$	?
B	?	4	$\frac{\sqrt{\pi}}{29}$	?	$-j69$
C	?	9	130	$j260$	$-j65$
D	0.14	?	50	?	?

Por error de enunciado, se entregó el valor de impedancia de la línea C, el cual debía ser calculado en el inciso (b). De esta manera, se traspasará el puntaje de este cálculo al inciso (a).

(a) [**2 puntos**] Determine la impedancia de entrada de la línea D, vista desde el extremo terminal de la línea B (Z_{in}^{BD}).

Solución:

De la línea D se sabe que la impedancia de entrada es de $Z_0^D = 50$ [Ω], y que su largo eléctrico es de $l_e^D = 1.2$. Dado que el extremo terminal de D está en cortocircuito, la impedancia de la carga es $Z_L^D = 0$. Luego:

$$Z_{in}^{BD} = \left[\frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}\right] Z_0 = \left[\frac{Z_L + jZ_0 \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{Z_0 + jZ_L \tan\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}\right] Z_0$$

$$Z_{in}^{BD} = \left[\frac{Z_L + jZ_0 \tan(2\pi l_e)}{Z_0 + jZ_L \tan(2\pi l_e)}\right] Z_0 = \left[\frac{0 + j50 \tan(2\pi \cdot 0.14)}{50 + 0}\right] 50$$

$$Z_{in}^{BD} = j50\tan(2\pi\cdot 0.14)$$
$$\boxed{Z_{in}^{BD} = j60.43[\Omega]}$$

(b) [**1 punto**] Determine la impedancia de entrada de la línea C, vista desde el extremo terminal de la línea B (Z_{in}^{BC}).

Para el caso de la línea C, se tiene que por pruebas de cortocircuito y circuito abierto, las impedancias son: $Z_{cc}^{C} = j260[\Omega]$ y $Z_{ca}^{C} = -j65[\Omega]$. De este modo, la impedancia de entrada de la línea C estará dada por:

$$Z_0^C = \sqrt{Z_{cc}^C Z_{ca}^C} = \sqrt{(-j65)(j260)}$$
$$Z_0^C = 130[\Omega]$$

Por otro lado, se tiene que la longitud de onda en la línea C es de:

$$\lambda_C = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r^C}} = \frac{\frac{c}{f}}{\sqrt{\varepsilon_r^C}} = \frac{300\cdot 10^6}{100\cdot 10^6\cdot\sqrt{9}} = 1[m]$$

Dado que la línea de transmisión es de 7.25 $[m]$, su longitud equivale a $L^C = 14\cdot\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}$. De manera que corresponde a un transformador $\frac{\lambda}{4}$. Luego:

$$Z_{in}^{BC} = \frac{\left(Z_0^C\right)^2}{Z_L^C} = \frac{130^2}{75(1+j)} = \frac{130^2}{150}(1-j) = 112.66(1-j)[\Omega]$$
$$\boxed{Z_{in}^{BC} = 112.66(1-j)[\Omega]}$$

Se tendrán en consideración desarrollos alternativos en función del largo que faltaba incialmente.

(c) [**1 punto**] Determine la impedancia equivalente vista en el extremo terminal de la línea B (Z_L^B).

En este caso, la impedancia equivalente corresponde al paralelo entre Z_{in}^{BC} y Z_{in}^{BD}.

$$Z_L^B = \frac{Z_{in}^{BC}Z_{in}^{BD}}{Z_{in}^{BC}+Z_{in}^{BD}} = \frac{j60.43\cdot 112.66(1-j)}{j60.43+112.66(1-j)} = \frac{7412.34(1+j)}{112.66-j52.23}$$
$$\boxed{Z_L^B = 26.68+j72.80[\Omega]}$$

Se tendrán en consideración desarrollos alternativos en función del largo que faltaba incialmente.

(d) **[1 punto]** Determine la impedancia equivalente vista en el extremo terminal de la línea A (Z_L^A). En caso de no haber podido calcular alguno de los valores anteriores, déjelo expresado en términos de Z_{in}^{BD} y Z_{in}^{CD} para obtener puntaje parcial.

Se tiene que la longitud de onda en la línea B es de:

$$\lambda_B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r^B}} = \frac{\frac{c}{f}}{\sqrt{\varepsilon_r^B}} = \frac{300 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4}} = 1.5[m]$$

Dado que la línea B tiene una longitud de $L^B = 9$, se tiene que el largo es equivalente a $L^B = 12\frac{\lambda}{2}$. Por lo tanto, se trata de una línea $\frac{\lambda}{2}$. Luego:

$$\boxed{Z_L^A = 26.68 + j72.80[\Omega]}$$

Se tendrán en consideración desarrollos alternativos en función del largo que faltaba incialmente.

(e) **[1 punto]** Determine la potencia promedio entregada a la carga total. En caso de no haber podido determinar los valores anteriores, exprese su resultado en términos de Z_L^A para obtener puntaje parcial.

A partir de la impedancia determinada en (d), es posible determinar el coeficiente de reflexión como:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{26.68 + j72.80 - 50}{26.68 + j72.80 + 50} = \frac{-23.32 + j72.80}{76.68 + j72.8}$$
$$\Gamma = 0.31 + j0.65$$

De modo que el módulo del coeficiente está dado por:

$$|\Gamma| = 0.72$$

Finalmente, la potencia promedio estará dada por:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}(1 - |\Gamma|^2) = \frac{1}{2}\frac{150^2}{50}(1 - 0.72^2)$$

$$\boxed{\bar{P} = 108.36[W]}$$

Se tendrán en consideración desarrollos alternativos en función del largo que faltaba incialmente.

Ondas

$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$	$\nabla^2\vec{\mathbf{B}} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = 0$	$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$	$\frac{\omega^2}{\lvert\vec{\mathbf{k}}\rvert^2} = u^2$

$\beta = \frac{\omega}{u} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}{\lambda_0}$	$u = \frac{E_0}{B_0}$	$\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \vec{\boldsymbol{\kappa}} + j\vec{\mathbf{k}}$	$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\varepsilon'} = \alpha + j\beta$

$\varepsilon' = j\omega\varepsilon + \sigma$	$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1\right]^{1/2}$	$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right]^{1/2}$

$\eta = \frac{\mu E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}}$	$\lvert\eta\rvert = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-1/4}$	$\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$

Ondas en medios (0 = vacío, d = dieléctrico, c = conductor ideal)

$\alpha_0 = 0 \qquad \beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ $\lvert\eta_0\rvert = 377\Omega \qquad \theta_{\eta_0} = 0$	$\alpha_d = 0 \qquad \beta_d = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ $\lvert\eta_d\rvert = \sqrt{\mu/\varepsilon} \qquad \theta_{\eta_d} = 0$	$\mu_{r,d} \approx 1 \qquad n_d = \sqrt{\varepsilon_r}$

$\alpha_c \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2} \qquad \beta_c \approx \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$ $\lvert\eta_c\rvert \approx \sqrt{\omega\mu/\sigma} \qquad \theta_{\eta_c} \approx \pi/4$	$\delta = \frac{1}{\alpha}$	$R_\square = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\sigma}}$	$u_g = \frac{u}{1-\beta\frac{du}{d\omega}}$

Energía y Potencia (c = en conductores)

$\vec{\boldsymbol{\mathcal{P}}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{E^2}{\eta}\vec{\mathbf{a}}_k = \eta H^2\vec{\mathbf{a}}_k$	$\langle E\rangle = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \qquad \langle H\rangle = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$	$\langle w_E\rangle = \frac{\varepsilon E_0^2}{4} \qquad \langle w_H\rangle = \frac{\mu H_0^2}{4}$

$\langle\vec{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\rangle = \frac{E_0^2}{2\eta}\vec{\mathbf{a}}_k = \frac{\eta H_0^2}{2}\vec{\mathbf{a}}_k = \langle w_E + w_H\rangle\ u\ \vec{\mathbf{a}}_k$	$\vec{\boldsymbol{\mathcal{P}}}' = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^* = \frac{E_0^2}{\lvert\eta\rvert}e^{-2\kappa\cdot r}e^{j\theta_\eta}\vec{\mathbf{a}}_k$

$\bar{P} = \frac{E_0^2}{2\lvert\eta\rvert}e^{-2\kappa\cdot r}\cos(\theta_\eta)$	$\bar{Q} = \frac{E_0^2}{2\lvert\eta\rvert}e^{-2\kappa\cdot r}\sin(\theta_\eta)$	$\langle w_E\rangle_c = \langle w_E\rangle e^{-2\kappa r}$ $\langle w_H\rangle_c = \langle w_H\rangle e^{-2\kappa r}$

Ondas en Interfases

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t$$
$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

$$n = \frac{\eta_0}{\eta}$$

$$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon_1/\varepsilon_2}}$$
$$\tan\theta_b = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$$

$$\Gamma^{\parallel} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} = \frac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}$$

$$T^{\parallel} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}$$

$$\Gamma^{\perp} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

$$T^{\perp} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

Líneas de Transmisión

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}$$
$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}$$

$$Z_0 = \frac{(R+j\omega L)}{\gamma} = \frac{\gamma}{G+j\omega C}$$
$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$$

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$V(z) = V_0^+ \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right)$$
$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} \left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

$$RL = -20\log_{10}|\Gamma| [dB]$$
$$IL = -20\log_{10}|T| [dB]$$

$$Z_{in} = \frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta l)} Z_0$$

$$ROE = SWR = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

$$|\Gamma| = \frac{ROE-1}{ROE+1}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\left(1-|\Gamma|^2\right)$$

$$\Gamma(l) = \frac{V_0^- e^{-j\beta l}}{V_0^+ e^{j\beta l}} = \Gamma(0) e^{-j2\beta l}$$

$$Z_{in}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$
$$Z_{in}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = Z_L$$

Constantes útiles

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ [\mathrm{C^2/Nm^2}]$$
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{N/A^2}]$$
$$c = 3 \cdot 10^8\ [\mathrm{m/s}]$$