PAUTA AYUDANTÍA 4

¿Qué onda microonda?

Onda compleja

$$\vec{\mathcal{E}}_{(\vec{r},t)} = \vec{A}_0 \, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi)}$$

$\vec{A}_0 = \langle A_{0x}, A_{0y}, A_{0z} \rangle$ vector !!!

Recordar

$\beta = \|\vec{k}\|$, $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

Vital para todo ejercicio

a) Busco ε_r → $\beta = \omega\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_r \varepsilon_0}$

↳ vale 1 en mat. no magnetico

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

c !

$$\varepsilon_r = \left(\frac{\beta}{\omega} c\right)^2$$

Ahora busco β y ω

$$\vec{E} = A \, e^{j\left(\frac{2\omega}{c}(y+2z) - \omega t\right)} \hat{x}$$

↳ Comparo con forma general

$$\frac{2\omega}{c}(y+2z) - \omega t = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$$

$$\frac{2\omega}{c} y + \frac{4\omega}{c} z = \langle K_x, K_y, K_z \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle$$

$$\frac{2\omega}{c} y + \frac{4\omega}{c} z = K_x X + K_y Y + K_z Z$$

$\Rightarrow$ $K_x = 0$ $\quad K_y = \frac{2\omega}{c}$ $\quad K_z = \frac{4\omega}{c}$

$$\rightarrow \vec{K} = \langle 0, 2\omega/c, 4\omega/c \rangle$$

Así $\beta = \|\vec{K}\| = \sqrt{\left(\frac{2\omega}{c}\right)^2 + (4\omega/c)^2} \Rightarrow \beta^2 = 20\frac{\omega^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_r = \left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2 = 20$$

b) La forma general de $\vec{E}$ y $\vec{H}$

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0}_{\langle E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}\rangle} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \, e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

y H_0 se encuentra

$$H_{0x} = \frac{E_{0x}}{\|\eta\|} \quad ; \quad H_{0y} = \frac{E_{0y}}{\|\eta\|} \quad \text{etc}$$

En $\|\eta\|$ dado que puede ser complejo

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

La direcc. está dada por

$$① \quad \hat{e}_K \times \hat{e}_E = \hat{e}_H$$

Vectores unitarios de K E y H.

Otra opc. es

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{K}\times\vec{E} \quad \text{o} \quad \vec{H} = \frac{\hat{e}_K \times \vec{E}}{\eta}$$

Usando ①

$$\hat{e}_K = \frac{\vec{K}}{\|\vec{K}\|} = \frac{\langle 0, \frac{2\omega}{c}, \frac{4\omega}{c}\rangle}{2\sqrt{5}\frac{\omega}{c}} \Rightarrow \hat{e}_K = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$\hat{e}_E = \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|} = \langle 1, 0, 0\rangle$$

$$\hat{e}_K \times \hat{e}_E = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \hat{e}_H = \left\langle 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Así $\vec{H} = \frac{E_{0x}}{\|\eta\|} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \hat{e}_H \Rightarrow \vec{H} = \frac{A}{\eta_0} e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \left\langle 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$

$$\vec{H} = \frac{A}{\eta_0} e^{j\left(\frac{2\omega}{c}(y + 2z) - \omega t\right)} \left\langle 0, 2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5} \right\rangle$$

2

El j lo paso a exponencial

Usar $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$\vec{E} = \underbrace{A(\hat{x} + e^{j\pi/2}\hat{y})}_{\vec{E}_0} e^{j(2\omega\frac{z}{c} - \omega t)}$$

Tomo $\mathrm{Re}\{\vec{E}\}$

$$\vec{E} = A\cos(2\omega\tfrac{z}{c} - \omega t)\,\hat{x} + A\cos(2\omega\tfrac{z}{c} - \omega t + \pi/2)\,\hat{y}$$

$$\vec{E} = A\cos(2\omega\tfrac{z}{c} - \omega t)\,\hat{x} + A\sin(2\omega\tfrac{z}{c} - \omega t)\,\hat{y}$$

Como el desfase es $\pi/2$ y las amplitudes son iguales

La polarizació es circular

$$\vec{E} = A e^{j(2\omega\frac{z}{c} - \omega t)}\,\hat{x} + A e^{j(2\omega\frac{z}{c} - \omega t + \pi/2)}\,\hat{y}$$

$\Gamma = 2\omega\frac{z}{c} - \omega t$

$$\Rightarrow \vec{E} = A(\hat{x} + j\hat{y})\,e^{j\Gamma} \quad \text{y} \quad \vec{K} = \langle 0, 0, 2\tfrac{\omega}{c} \rangle$$

Hago superposició $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $\vec{E}_1 = Ae^{j\Gamma}\,\hat{x}$ $\vec{E}_2 = Aj\,e^{j\Gamma}\,\hat{y}$

Para $\vec{H}_1$

$$\hat{e}_{H_1} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_1 = \frac{A}{\eta_0} e^{j\Gamma}\,\hat{y}$$

Para $\vec{H}_2$

$$\hat{e}_{H_2} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{Aj}{\eta_0} e^{j\Gamma}\,(-\hat{x})$$

Así

$$\vec{H} = -\frac{Aj}{\eta_0} e^{j\Gamma}\,\hat{x} + \frac{A}{\eta_0} e^{j\Gamma}\,\hat{y}$$

$$\vec{\mathcal{P}}_{AVG} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ Ae^{j\Gamma} & Aje^{j\Gamma} & 0 \\ \frac{Aj}{\eta_0}e^{-j\Gamma} & \frac{A}{\eta_0}e^{-j\Gamma} & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, 0, \frac{A^2}{\eta_0} + \frac{A^2}{\eta_0} \right\rangle$$

$$\vec{\mathcal{P}}_{Avg} = \frac{A^2}{\eta_0}\hat{z}$$

Nota que si usabamos la formula $\vec{\mathcal{P}}_{Avg} = \frac{E_0^2}{2|\eta|}\hat{z}$

con el campo instantaneo

$$\vec{E} = \underbrace{A}_{E_0}\cos\left(2\omega\frac{z}{c} - \omega t\right)\hat{x} + \underbrace{A}_{E_0}\sin\left(2\omega\frac{z}{c} - \omega t\right)\hat{y}$$

llegamos a lo mismo, pero mejor no aceleramos!

3

La Forma general onda monocromatica plana

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi)}$$

Como su direccϕ es paralela al vector $\langle 0, -1, -1\rangle \Rightarrow \hat{e}_K = \langle 0, -1, -1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\hookrightarrow \vec{K} = \|\vec{K}\| \hat{e}_K$

Si $\vec{E}$ vive en el plano xy Solo sabemos que NO hay componente $\hat{z}$, NADA más!

También sé que $\beta = \|\vec{K}\| = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow \|\vec{K}\| = \frac{100\pi}{c}$, Así

Vacío! $\mu = \mu_0$ $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\underbrace{(\omega t + \frac{100\pi}{c\sqrt{2}}(y+z) + \phi)}_{\Gamma}}$$

$$= e^{j\Gamma} \langle E_{0x}, E_{0y}, 0\rangle$$

$\phi = \pi/2$ Dado que $t=0$ está en el origen! $\cos(\phi) = 0$

Se sabe que $\vec{K} \perp \vec{E}_0 \Leftrightarrow \vec{K}\cdot\vec{E}_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{100\pi}{c}\langle 0, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}, -1/\sqrt{2}\rangle \cdot \langle E_{0x}, E_{0y}, 0\rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{100\pi}{c}\frac{E_{0y}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{0y} = 0}$$

Así

$$\vec{E} = \sqrt{2}\underset{\text{RMS}}{E_0} e^{j\Gamma} \hat{x}$$

Calculamos $\vec{H}$ con $\frac{\hat{e}_K \times \vec{E}}{\|\eta_0\|}$ Vacío!

$$\hat{e}_K \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}E_0 e^{j\Gamma} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, -E_0 e^{j\Gamma}, E_0 e^{j\Gamma}\rangle$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\eta_0}\langle 0, -E_0 e^{j\Gamma}, E_0 e^{j\Gamma}\rangle$$

☆ Notar que no hay Desfase de $\vec{H}$ en relación a $\vec{E}$

Tienen la misma ϕ

Cuando hay un polarizador solo hacemos el producto punto entre $\vec{E}$ y el vector del polarizador

$$\vec{E} \cdot \hat{n}_{pol}$$

Vector normalizado!

$$\vec{E} \cdot \langle 1, -1, -1 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} E_0}{\sqrt{3}} e^{i\eta} \hat{x}$$

La densidad de potencia es $\| \vec{E} \times \vec{H}^* \| \Rightarrow \|\vec{S}\| = \frac{\|\vec{E}\|^2}{\eta_0}$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{E}\|^2}{\|\eta\|}$$

$$= \frac{1}{2\eta_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} E_0 \right)^2 \quad //$$

4

a) $\gamma = \alpha + j\beta$

El material se caracteriza con la tangente de pérdidas

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{0,0001}{6\pi\cdot10^6\cdot81\cdot8,854\cdot10^{-12}} = 0,0737$$

$\tan\delta$ es <1 pero no $\ll 1$ $\Rightarrow$ Dieléctrico con pérdidas

$$\beta = \omega\left(\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\underbrace{\cancel{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}_{\substack{\text{Chiquito}\\(0,0737)^2}}\approx 0}+1\right)\right)^{1/2}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 0,0737$$

Como tiene pérdidas, no puedo aproximar igual con α, debo hacer el cálculo completo

$$\alpha = \omega\left(\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)\right)^{1/2} = 0,021$$

b) Forma general instantánea para $\vec{E}$ en $\hat{z}$

Dirección dada en (0,0,0)

$$\vec{E} = E_0\, e^{-\alpha|\vec{r}|}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi)\,\hat{z}$$

$$\vec{k} = \beta\,\hat{e}_k = 0,566\,(0,6\,\hat{x} + 0,8\,\hat{y}) \Rightarrow \vec{k} = 0,34\,\hat{x} + 0,45\,\hat{y}$$

Como el campo en el origen es $10\cos(\omega t) \Rightarrow \phi = 0$

$$\therefore\ \vec{E} = 10\, e^{-0,021\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos(6\pi\cdot10^6 t - 0,34x - 0,45y)\ \hat{z}$$

c) Si Considero que es Buen Dieléctrico

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{\underbrace{j\frac{\sigma}{\omega\mu}}_{\approx 0} + \frac{\varepsilon}{\mu}}}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 41{,}8\ \Omega$$

A una distancia de $\sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = 10$

$\vec{r} = \langle 6, 8, 0 \rangle$ en $t = 10^{-6}$

$$\left|\vec{H}_{(|r|=10,\ t=10^{-6})}\right| = \frac{10}{41{,}8} e^{-0{,}02)\cdot 10} \cos(6\pi - 0{,}34\cdot 6 - 0{,}45\cdot 8) \approx 0{,}189\ \frac{A}{m}$$