Clase 02
Electrostática en el Vacío

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 111 – 158

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- En esencia esta clase será un repaso del curso de Electricidad y Magnetismo.
- Nos enfocaremos en la componente eléctrica en su estado más básico: campos eléctricos en el vacío.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-01**: Plantear y resolver ecuaciones para la determinación de Fuerzas, Campos, Flujos, Potenciales, Torques y Energías electromagnéticas en problemas de mediana complejidad.
- **OA-10:** Distinguir el significado de la formulación diferencial e integral de las ecua-ciones de Maxwell, tanto para campos estáticos como variantes en el tiempo.

Contexto

- Vamos a necesitar:

Teorema de la Divergencia:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{D}\,dV$$

Teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla\times\mathbf{E})\,d\boldsymbol{S}$$

Regla del Producto:

$$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = (\nabla\cdot\mathbf{A})f + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{A})f = \nabla\cdot(f\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$$

Contenidos

- Ley de Coulomb
- Campo Eléctrico
- Flujo Eléctrico
- Ley de Gauss
- Potencial Eléctrico
- Densidad de Energía

Ley de Coulomb

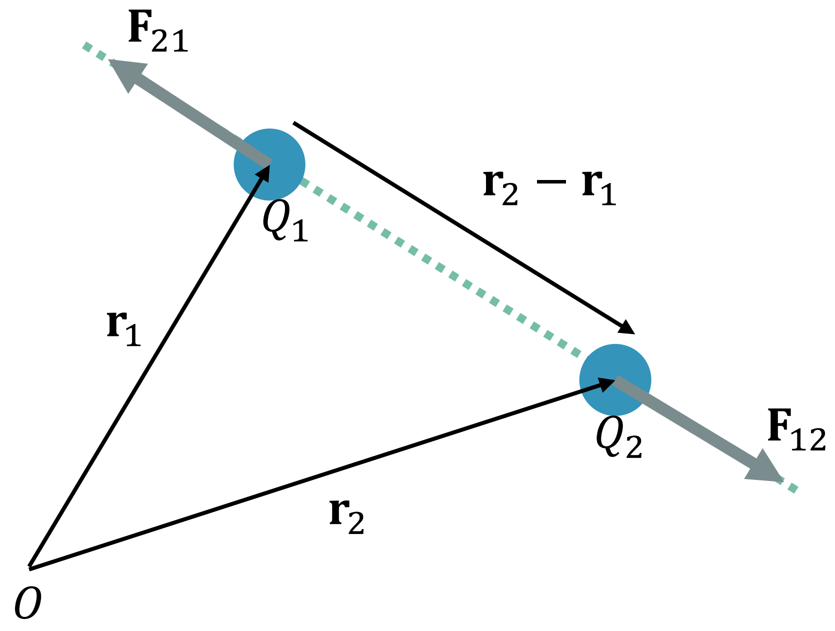
- Describe la Fuerza entre dos objetos cargados.
- En esta clase, nos limitaremos a estudiar el caso en el vacío, donde:

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \ \text{[F/m]}}$$

Permitividad eléctrica del vacío

Ley de Coulomb – 2 Cargas puntuales

- Corresponde al caso más simple de esta ley.

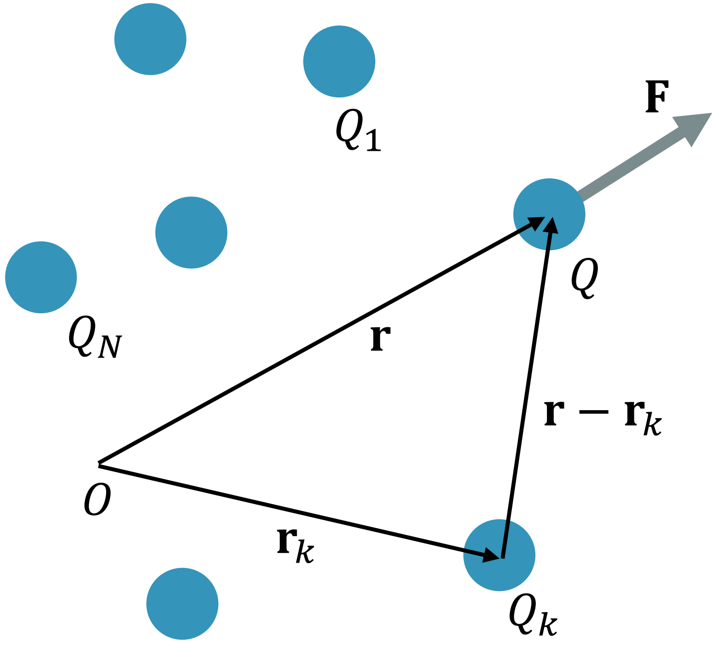


$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = kQ_1Q_2\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}}$$

$$k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} \approx 9 \times 10^9 \text{ [m/F]}$$

Ley de Coulomb – N Cargas puntuales

- Aplicando principio de superposición:

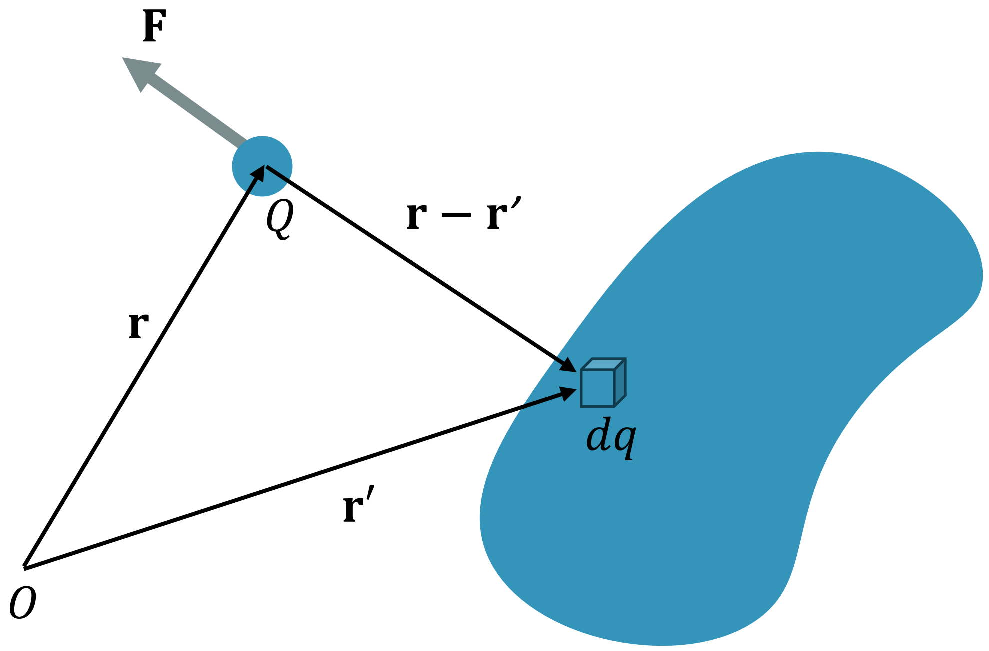


$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ \ldots + \mathbf{F}_\mathrm{N}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = kQ \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|^3}}$$

Ley de Coulomb – Distribución Continua

- En este caso operamos sobre un diferencial de carga dq.



$$\boxed{\mathbf{F} = kQ\int_{\Omega} dq(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}$$

Caso lineal : $dq(\mathbf{r}') = \lambda(\mathbf{r}')dl$

Caso superficial : $dq(\mathbf{r}') = \sigma(\mathbf{r}')dS$

Caso volumétrico: $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')dV$

Campo Eléctrico ($\mathbf{E}$)

- En realidad, nos referimos a la **intensidad del campo eléctrico**.
- Corresponde a la fuerza que experimenta una *carga de prueba* al ser posicionada dentro de un campo eléctrico.

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}}$$

Campo Eléctrico ($\mathbf{E}$)

- Extendiendo a los casos antes vistos:

Sistema de cargas puntuales

$$\boxed{\mathbf{E} = k \sum_{k=1}^{N} \frac{Q_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}}$$

Distribución continua de cargas

$$\boxed{\mathbf{E} = k \int_{\Omega} dq(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}$$

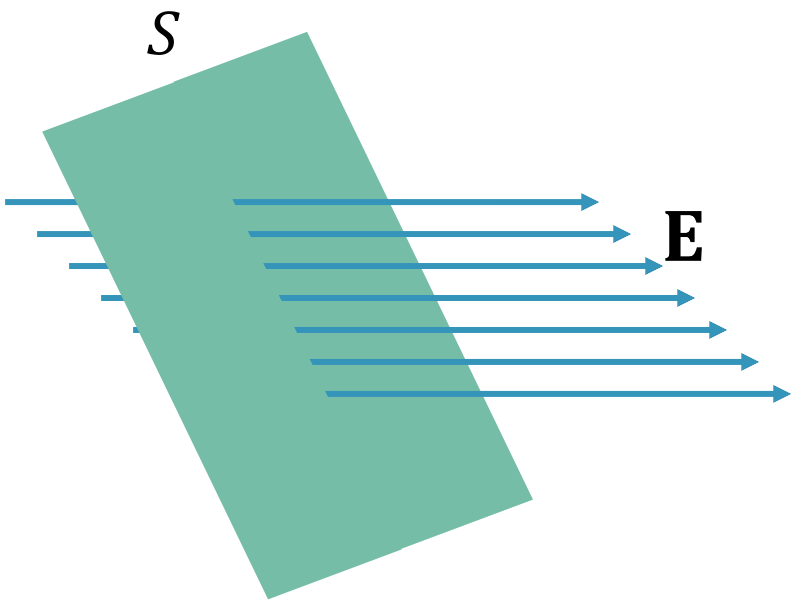
Flujo Eléctrico (Ψ)

- Se entiende como la cantidad de campo eléctrico que circula perpendicularmente a través de una superficie.

- El problema: El campo eléctrico se comporta distinto dependiendo del medio.

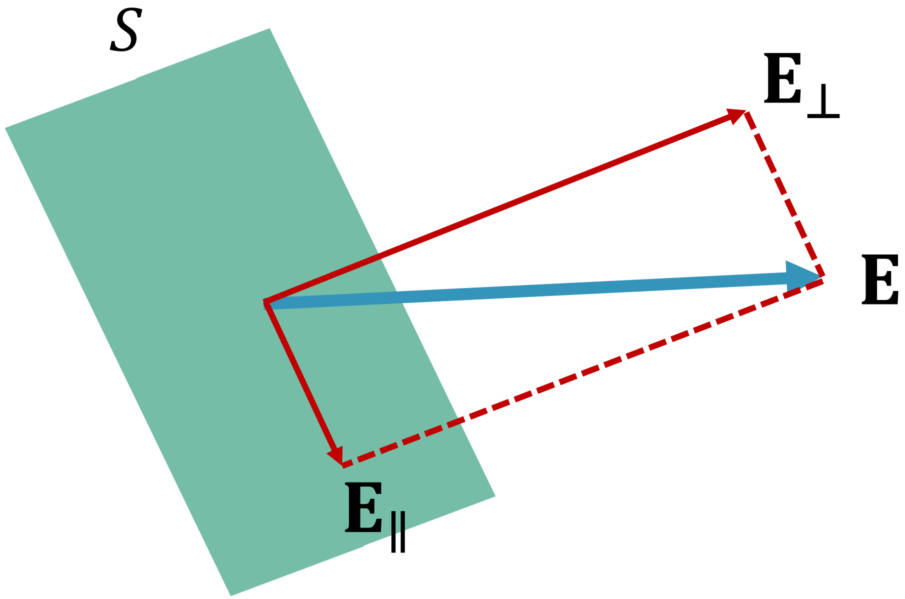
- Solución:

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}}$$



Flujo Eléctrico (Ψ)

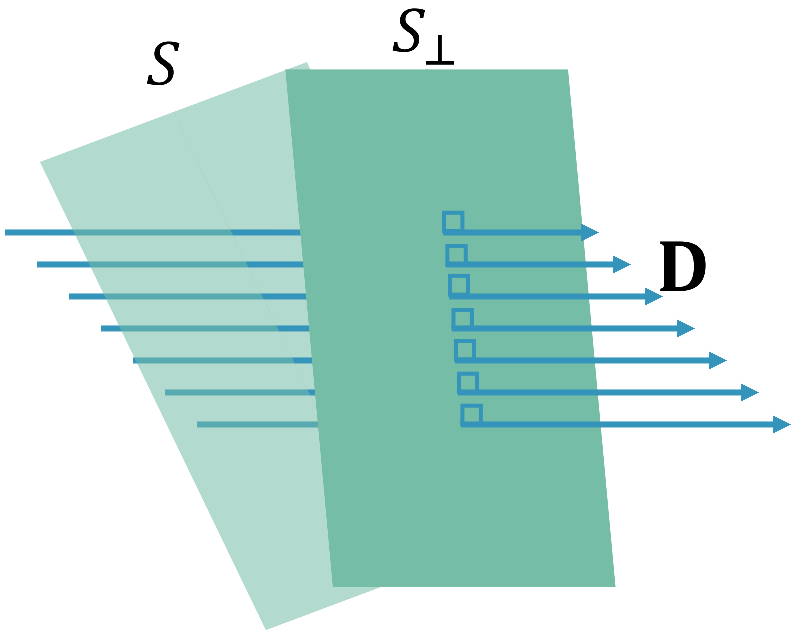
- ¿Por qué debe ser perpendicular?
  - Porque solo la componente perpendicular es la que realmente atraviesa la superficie.
  - La componente paralela, por ende, no puede ser considerada como un flujo.



Flujo Eléctrico (Ψ)

- En cuanto al área, ya mencionamos que debe ser su componente perpendicular.

$$\boxed{\Psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}$$



Ley de Gauss

- Establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie *cerrada* es igual a la carga total encerrada por dicha superficie.

$$\boxed{\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV}$$

Ley de Gauss

- Usando el teorema de la divergencia: $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho}$$

Ley de Gauss

- Con esto tenemos nuestra primera Ecuación de Maxwell.

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV}$$

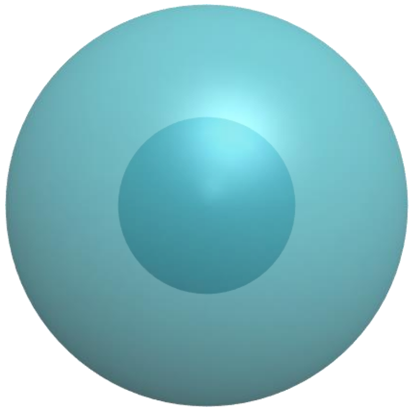
Forma Integral

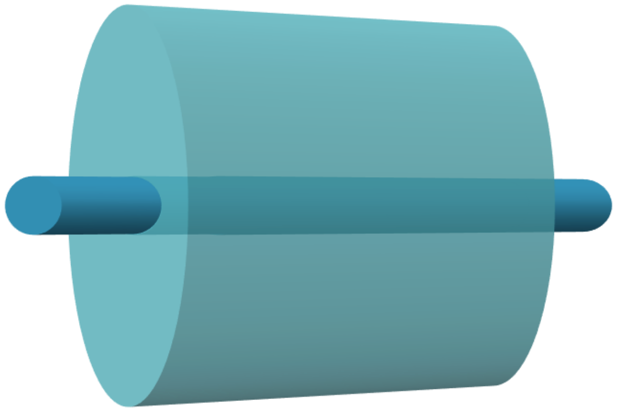
$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho}$$

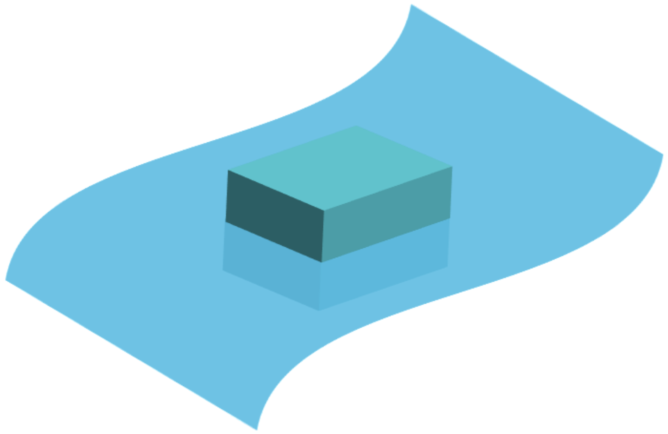
Forma Diferencial

Superficies Gaussianas

- La ley de Gauss es siempre cierta, pero no siempre útil.
- La idea es definir *superficies simétricas* donde $\mathbf{D}$ y $d\mathbf{S}$ apunten en la misma dirección.







Potencial Eléctrico (V)

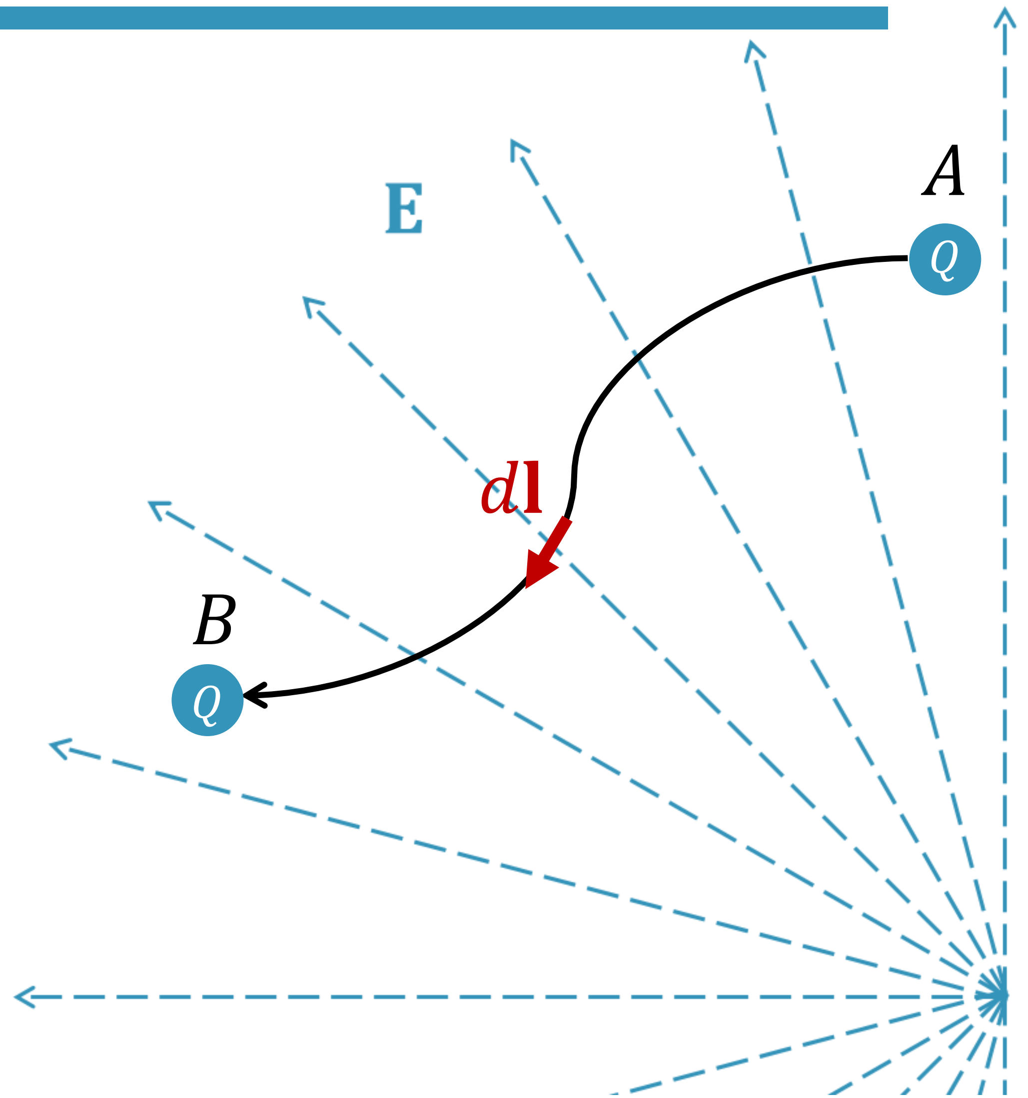
- Consideremos el trabajo de mover una carga de A a B a través de un campo $\mathbf{E}$:

$$\boxed{W = -Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

- Normalizando por unidad de carga:

$$\boxed{V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

Diferencia de potencial



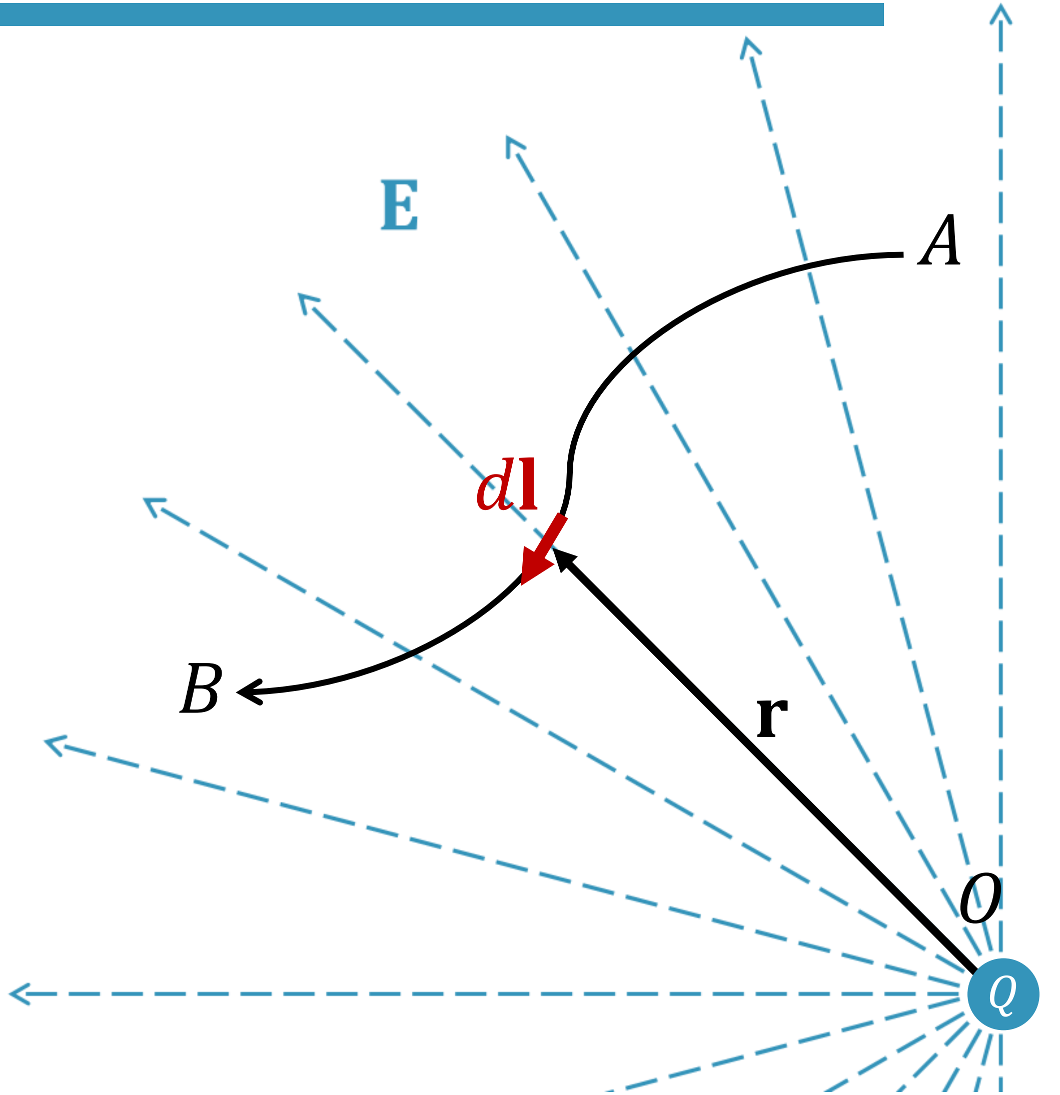
Potencial Eléctrico (V)

- $\mathbf{E}$ es generado por una carga puntual

$$V_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\mathbf{r}_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

- Luego:

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] = V_B - V_A$$



Potencial Eléctrico (V)

- De modo general:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

Caso puntual

- Y para el resto de los casos:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|}}$$

Distribución discreta

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho_\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'}$$

Distribución continua

E-01 E-02

Potencial Eléctrico (V)

- V_{AB} es independiente de la trayectoria. Entonces: $V_{AB} = -V_{BA}$

$$\boxed{V_{AB} + V_{BA} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0}$$

Potencial Eléctrico (V)

- Usando el teorema de Stokes: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E}) d\boldsymbol{S}$

$$\boxed{\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E} = 0}$$

Potencial Eléctrico (V)

- Con esto tenemos nuestra segunda Ecuación de Maxwell.

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0}$$

Forma Integral

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}$$

Forma Diferencial

Potencial Eléctrico (V)

- **<u>OJITO</u>**: Esta ecuación está incompleta. Más adelante veremos por qué.

Forma Integral

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0}$$

Forma Diferencial

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}$$

Potencial Eléctrico (V)

- Por un lado, definimos el potencial eléctrico como:

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

- Por otro lado, el diferencial total de V viene dado por:

$$dV = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Potencial Eléctrico (V)

- Comparando ambas expresiones:

$$dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \qquad dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

- Se desprende la relación:

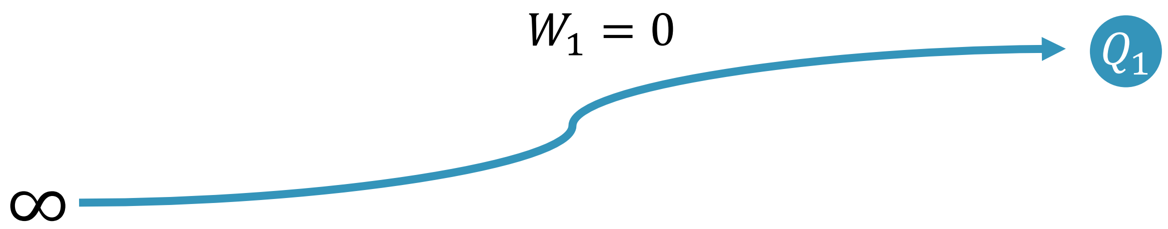
$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V}$$

E-03

Densidad de Energía (w_E)

- <u>Pregunta de interés</u>: ¿Cuánta energía hay en un conjunto de cargas?

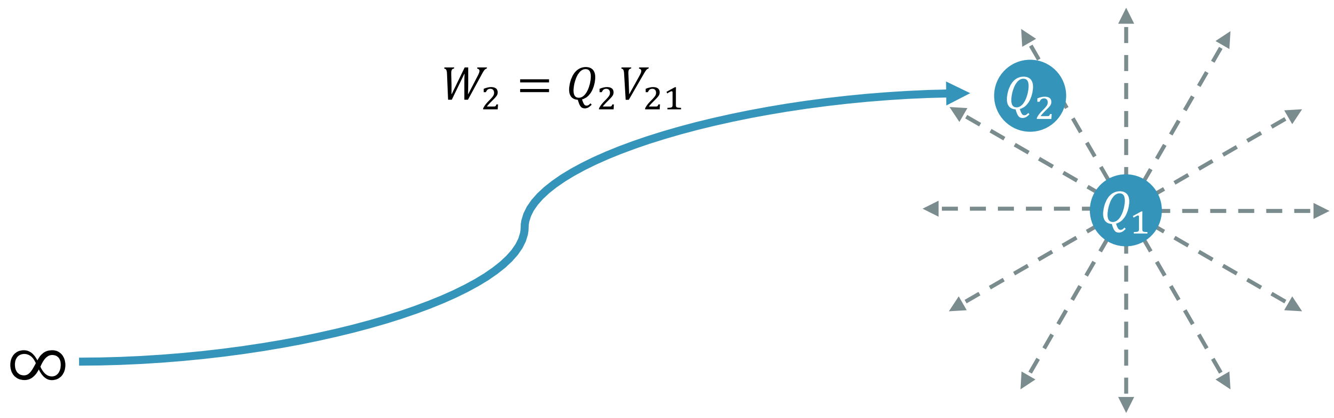
- Traigamos cargas desde el infinito hasta un lugar determinado.



Densidad de Energía (w_E)

- <u>Pregunta de interés</u>: ¿Cuánta energía hay en un conjunto de cargas?

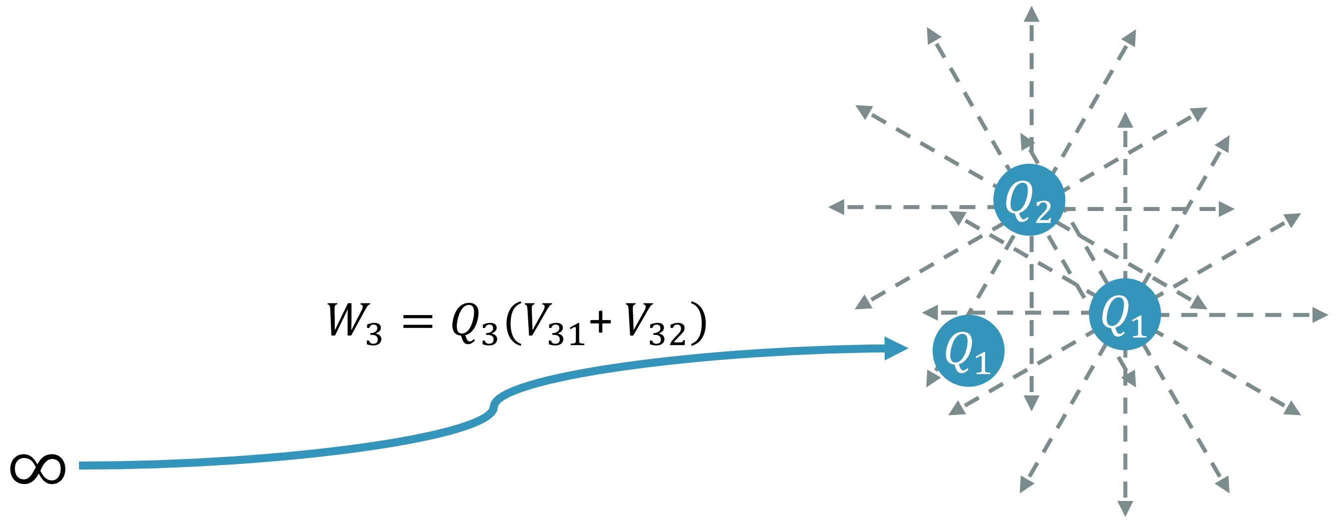
- Traigamos cargas desde el infinito hasta un lugar determinado.



Densidad de Energía (w_E)

- <u>Pregunta de interés</u>: ¿Cuánta energía hay en un conjunto de cargas?

- Traigamos cargas desde el infinito hasta un lugar determinado.



Densidad de Energía (w_E)

- Sumando los distintos trabajos:

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + Q_2 V_{21} + Q_3 (V_{31} + V_{32})$$

- Y si invertimos el orden en que se llevaron las cargas:

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + Q_2 V_{23} + Q_1 (V_{13} + V_{12})$$

- Luego:

$$2W_E = Q_1 (V_{12} + V_{13}) + Q_2 (V_{21} + V_{23}) + Q_3 (V_{31} + V_{32})$$

Densidad de Energía (w_E)

- Desarrollamos:

$$2W_E = Q_1(V_{12} + V_{13}) + Q_2(V_{21} + V_{23}) + Q_3(V_{31} + V_{32})$$

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3$$

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3)$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_kV_k}$$

Distribución discreta

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \rho_\tau V\, d\tau}$$

Distribución continua

Densidad de Energía (w_E)

- De la primera ecuación de Maxwell tenemos que: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v (\nabla \cdot \mathbf{D})V dv$$

- Usando la identidad: $(\nabla \cdot \mathbf{A})V = \nabla \cdot (V\mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla V)$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \nabla \cdot (V\mathbf{D}) dv - \frac{1}{2}\int_v \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Densidad de Energía (w_E)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \nabla \cdot (V\mathbf{D}) dv - \frac{1}{2}\int_v \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

$$-\nabla V = \mathbf{E}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv$$

- V varia a razón $1/r$, D varía a razón $1/r^2$, y $d\mathbf{S}$ varía a razón r^2. Luego, si la superficie crece infinitamente, el primer término de W_E desaparece:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \frac{D^2}{\varepsilon_0} dv \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_E = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}}$$

Densidad de Energía

Resumen

- Hicimos un repaso general por los conceptos de fuerza, campo, flujo, potencial y densidad de energía electrostáticos.
- Establecimos las distintas relaciones entre cada una de estas variables. En especial, entre potencial y campo: $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$.
- Obtuvimos la primera y parte de la segunda ecuación de Maxwell.

Cerremos la clase de hoy

- El potencial parece ser una buena herramienta para estimar campos.
- A medida que me alejo, la fuente de campo se asemeja a una sola carga, ¿será posible realizar estimaciones más precisas?

- Próxima Clase (Martes 12/marzo):

  Expansión Multipolar.

- Bibliografía:

  Griffiths, D. (2013).Introduction to Electrodynamics. 4th Edition: pp. 151 –166

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Potencial Eléctrico

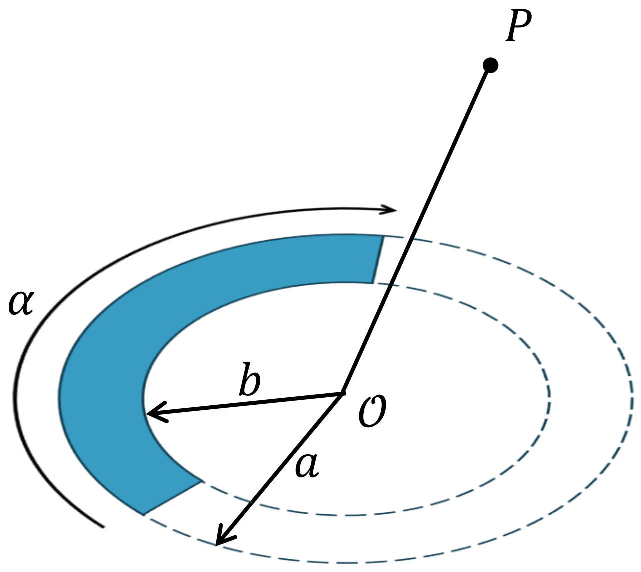
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho_\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

Relación Campo-Potencial

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

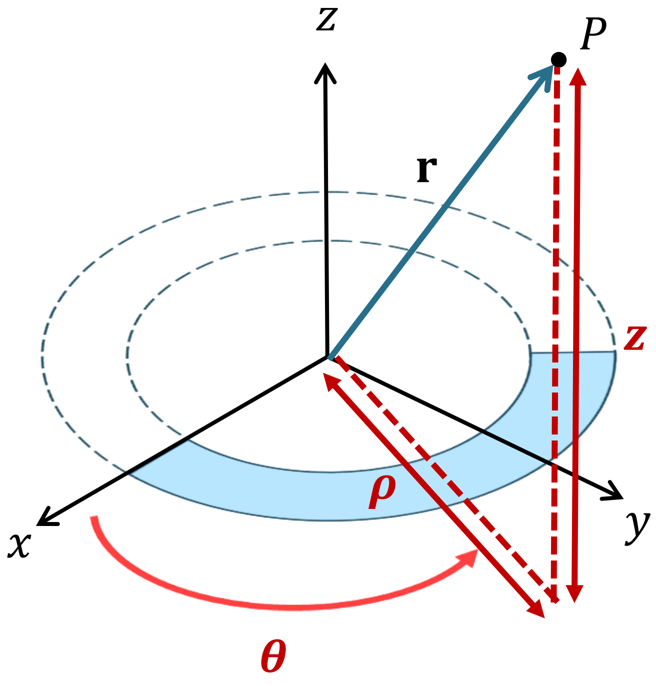
Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

- Considere un segmento de anillo plano, con radio externo a, radio interno b y arco $0 < \alpha \leq 2\pi$. Determine una expresión para el potencial eléctrico en cualquier punto P del espacio.



Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$

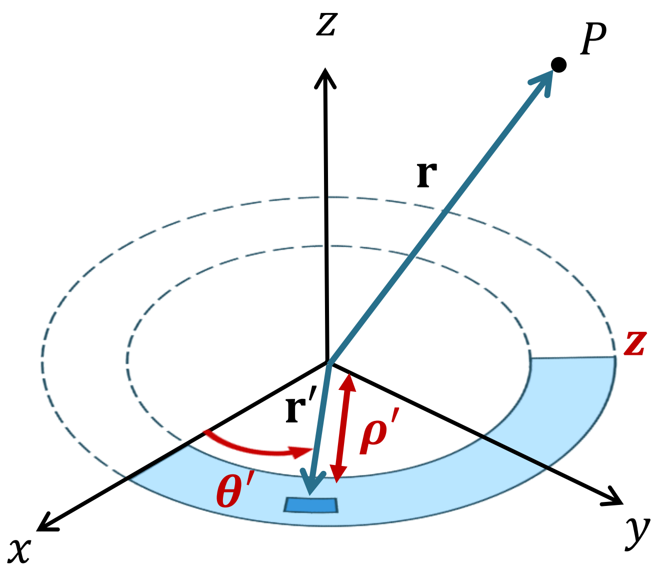
- Primero definamos nuestros 2 vectores: $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$.



$$\mathbf{r}=\rho\mathbf{a}_\rho+\theta\mathbf{a}_\theta+z\mathbf{a}_z$$

Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

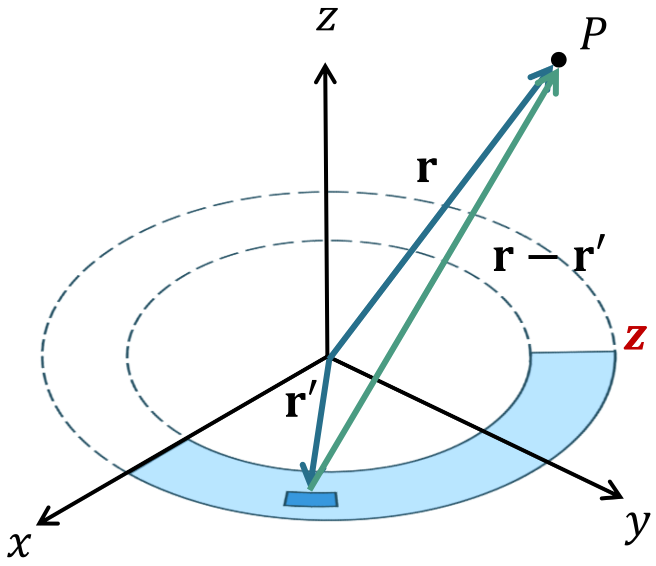
- Primero definamos nuestros 2 vectores: $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$.



$$\mathbf{r}' = \rho'\mathbf{a}_\rho + \theta'\mathbf{a}_\theta + 0\mathbf{a}_z$$

Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

- Ahora, el vecto $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$estará dado por la ley de cosenos



$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{a}_\rho + \theta\mathbf{a}_\theta + z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}' = \rho'\mathbf{a}_\rho + \theta'\mathbf{a}_\theta + 0\mathbf{a}_z$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 = r^2 + (r')^2 \; - 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'$$

Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

- Mucho cuidado al determinar las magnitudes r^2, $(r')^2$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ pues son vectores que están definidos en coordenadas cilíndricas. Usamos auxiliarmente coordenadas cartesiandas:

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$
$$z = z$$

$$r^2 \quad = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + z^2 = \rho^2 + z^2$$

$$(r')^2 = \rho'^2\cos^2\theta' + \rho'^2\sin^2\theta' + z^2 = \rho'^2$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \rho\rho'\cos(\theta)\cos(\theta') + \rho\rho'\sin(\theta)sin(\theta')$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \rho\rho'\cos(\theta - \theta')$$

Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

- Reemplazando en la ley de cosenos:

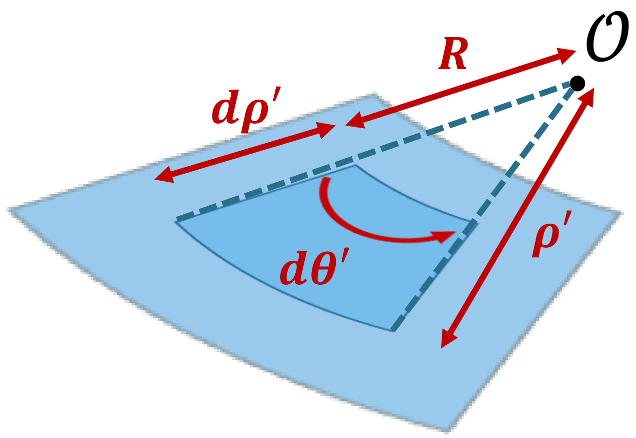
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 = r^2 + (r')^2 \; - 2\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 = \rho^2 + z^2 + {\rho'}^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + z^2 + {\rho'}^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}$$

Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

- Ya tenemos $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ nos falta el diferencial de área

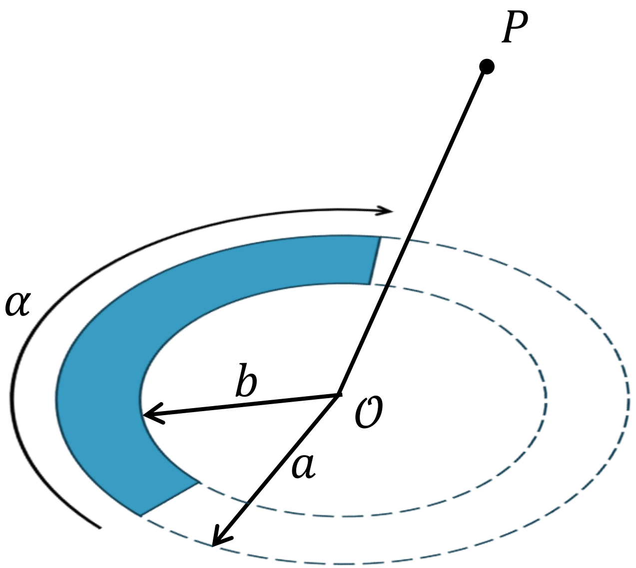


$$dS = (\rho' d\theta')\,(\rho' - R)$$

$$dS = \rho'\, d\theta'\, d\rho'$$

Ejemplo 1: El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

- Determinemos la expresión para el potencial:



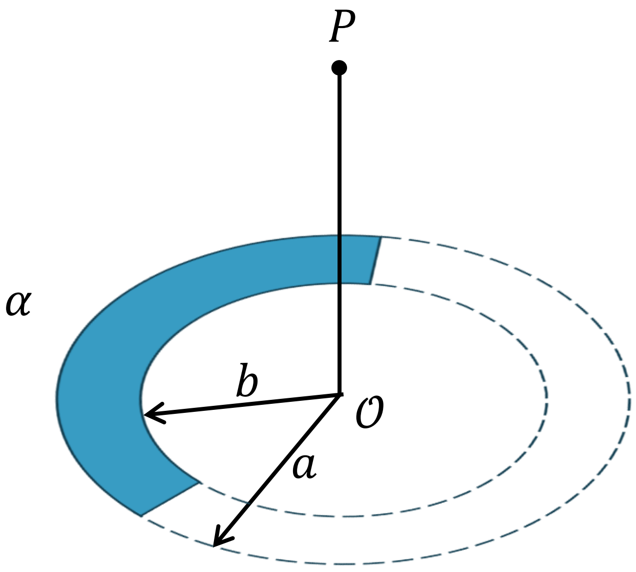
$$V(\rho, \theta, z) = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$V(\rho, \theta, z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\rho'=a}^{b} \int_{\theta'=0}^{\alpha} \frac{\rho'\, d\theta'\, d\rho'}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}}$$

Volver

Ejemplo 2: Cálculo de potencial

- La expresión anterior es compleja de abordar en lápiz y papel. Tomemos un caso particular donde *P* se ubica en el eje *z:* $V(0,0,z)$.



$$V(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=b}^{a}\int_{\theta=0}^{\alpha}\frac{\rho'\,d\theta'\,d\rho'}{\sqrt{z^2+\rho'^2}}$$

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=b}^{a}\frac{\rho'\,d\rho'}{\sqrt{z^2+\rho'^2}} = \frac{\sigma\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+\rho'^2}\right]_a^b$$

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2}-\sqrt{z^2+b^2}\right) = \frac{\sigma\alpha|z|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}-\sqrt{1+\frac{b^2}{z^2}}\right)$$

Ejemplo 2: Cálculo de potencial

- Este resultado es bastante notable:

1) Si $\alpha = 2\pi$ tenemos el voltaje de un anillo plano.

$$V(z) = \frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}} - \sqrt{1+\frac{b^2}{z^2}}\right)$$

2) Si además $b = 0$ tenemos el voltaje de un disco.

$$V(z) = \frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}} - 1\right)$$

3) Y si además $z \gg a$ tenemos el voltaje de una carga puntual.

$$V(z) = \frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_0}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}}_{\text{Taylor}} - 1\right)\frac{\pi}{\pi} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|z|}$$

Volver

Ejemplo 3: Estimación de $\mathbf{E_z}$

- Estimemos el valor de $\mathbf{E}_z$

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - \sqrt{z^2+b^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}V(0,0,z) = \frac{\sigma\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right)$$

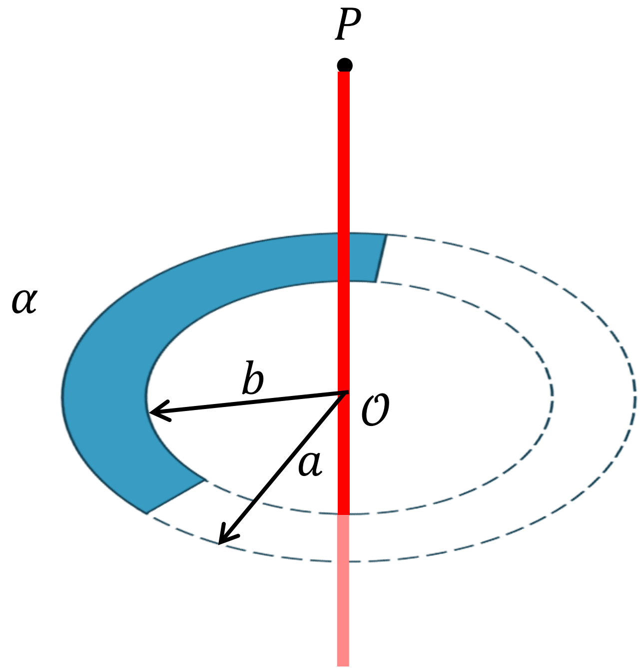
$$\mathbf{E}_z(0,0,z) = -\frac{\partial}{\partial z}V(0,0,z) = \frac{\sigma\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right)$$

Ejemplo 3: Estimación de $\mathbf{E_z}$

$$\mathbf{E}_z = -\frac{\partial}{\partial z} V(0,0,z) = \frac{\sigma\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right)$$

- ¿Es este $\mathbf{E}_z$ válido para todo el espacio?

No, pues estamos confinados solo a una pequeña porción del espacio: la recta del eje z.



Volver