Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Tarea 3

Fecha de entrega: 04 de julio de 2024

Pregunta 1: Impedance Matching

Considere una carga $Z_L = 40 - j210\ \Omega$, la cual se ubica al final de una línea de transmisión de $Z_0 = 100\ \Omega$. El circuito opera a una frecuencia tal que la longitud de onda en la línea es de 20 cm.

Utilizando el método analítico, diseñe:

(a) [**3 puntos**] Una red de adaptación de tipo L.

En primer lugar, notamos que la componente resistiva de la carga es tal que $R_L < Z_0$. De este modo, la topología corresponde a una red de tipo **paralelo-serie**. Luego:

$$B = \frac{\pm\sqrt{(Z_0 - R_L)/R_L}}{Z_0} = \pm\frac{\sqrt{1.5}}{100} \approx \pm 1.225 \times 10^{-2}\ [S]$$
$$X = \pm\sqrt{(R_L - Z_0)R_L} - X_L \approx 210 \pm 49\ [\Omega]$$

Probando las combinaciones posibles, se tiene que las soluciones para la red L son $(B_1, X_1) = (1.225 \times 10^{-2}, 259)$ y $(B_2, X_2) = (-1.225 \times 10^{-2}, 161)$.

$$Z_{eq1} = \left(jB_1 + \frac{1}{jX_1 + Z_L}\right)^{-1} = \left(j0.01225 + \frac{1}{40 + j49}\right)^{-1} = 100.02 - j0.03 \approx 100\ [\Omega]$$

$$Z_{eq2} = \left(jB_2 + \frac{1}{jX_2 + Z_L}\right)^{-1} = \left(-j0.01225 + \frac{1}{40 - j49}\right)^{-1} = 100.02 + j0.03 \approx 100\ [\Omega]$$

Con lo cual comprobamos que las soluciones son correctas.

(b) **[3 puntos]** Una red de adaptación mediante *stub* en serie y corto-circuito.

El primer paso es encontrar el valor de t necesario para obtener la distancia a la cual se ubicará el stub.

$$Y_L = G_L + jB_L = \frac{1}{40 - j210} = 8.75 \times 10^{-4} + j4.59 \times 10^{-3}$$

$$t = \frac{B_L \pm \sqrt{G_L\left[(Y_0 - G_L)^2 + B_L^2\right]/Y_0}}{G_L - Y_0} = -0.5 \mp 0.33$$

De modo que las posibles soluciones son $t_1 = -0.83$ y $t_2 = -0.17$. Luego, la distancia del stub estará dada por:

$$d_1 = 0.2 \cdot \frac{1}{2\pi}(\pi + \tan^{-1}(-0.83)) = 7.79\ [cm]$$

$$d_2 = 0.2 \cdot \frac{1}{2\pi}(\pi + \tan^{-1}(-0.17)) = 9.46\ [cm]$$

Luego, la reactancia de compensación estará dada por:

$$X = \frac{G_L^2 t - (Y_0 - B_L t)(B_L + Y_0 t)}{Y_0(G_L^2 + (B_L + Y_0 t)^2)}$$

con $X_{t1} = 348.25\ [\Omega]$ y $X_{t2} = -343.12\ [\Omega]$. Luego, el largo del stub en cortocircuito estará dado por:

$$l = -\lambda \frac{1}{2\pi} \tan^{-}1\left(\frac{X}{Z_0}\right)$$

con soluciones $l_2 = 4.11\ [cm]$ y $l_1 = -4.01\ [cm]$. Notemos que en el caso de l_1 nos da una distancia negativa, de modo que debemos sumar $\lambda/2$ tantas veces como sea necesario para llegar a una distancia positiva. Con ello, se tiene que $l_1 = 5.9\ [cm]$.

Recuerde que estos métodos tienen 2 soluciones posibles. Debe presentar ambas alternativas en cada caso.

Bonificación: Genere un código en Python que permita graficar la curva $|\Gamma|$ vs f.

- Recompensa: 1 punto, asignable a cualquiera de las preguntas de la I3.
- Restricción: Solo para los 10 primeros en resolver el problema.
- Requisitos: Debe subir el código de respaldo.
- Códigos "sospechosamente" parecidos perderán la oportunidad de acceder a la bonificación.

Pregunta 2: Carta de Smith

Resuelva nuevamente el Problema 1. Esta vez utilizando exclusivamente la carta de Smith.

Observaciones:

- Para el caso del inciso (a), es altamente recomendable que utilice la carta de Smith con gráfica de admitancias. Se sugiere revisar el video de la Clase 22 - Diapositiva 51.
- Para el caso del inciso (b), note que el *stub* está en **corto-circuito**. Sea cuidadoso con el punto de la Carta de Smith respecto al cual hará su análisis.

CASO 1: RED TIPO L DE PARÁMETROS CONCENTRADOS

1. Ubicamos la impedancia normalizada $z_L = 0.4 + j2.1$ en la carta de Smith.
2. Marcamos el círculo de resistencia unitaria ($r = 1$) y conductancia unitaria ($g = 1$) en la carta de Smith (trazos negros).
3. Nos movemos siguiendo el circulo de resistencia $r = 0.4$, hasta encontrar las dos intersecciones con el círculo $g = 1$ (trazos morados).
4. Determinamos el valor de las reactancias serie, las cuales se calculan como la diferencia entre el valor de reactancia del punto en que se ubica la solución y el valor de reactancia inicial (trazos celestes). Así:

$$x_1 = -0.5 - (-2.1) = 1.6$$
$$x_2 = 0.5 - (-2.1) = 2.6$$

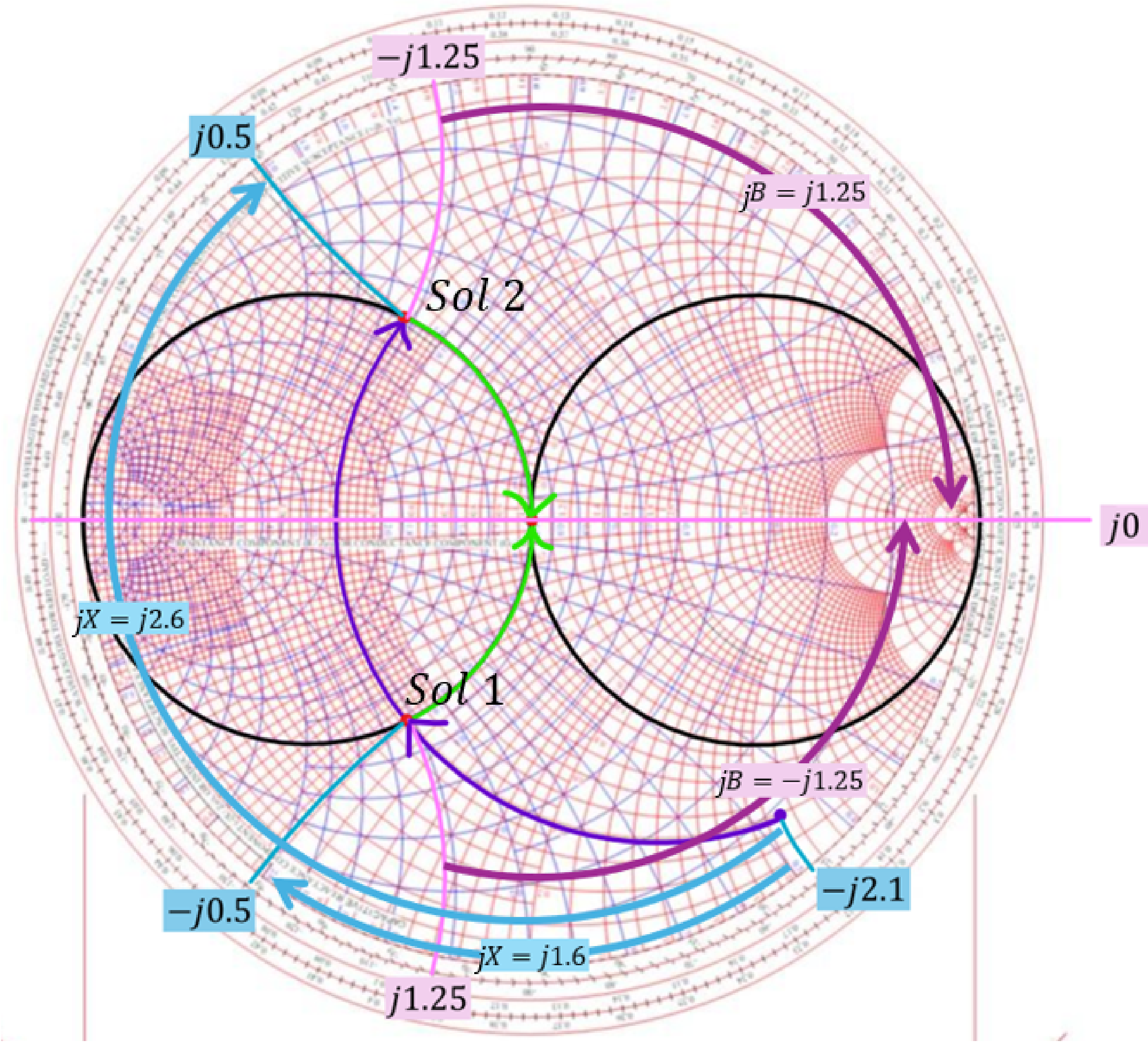
   Luego, desnormalizamos, lo que deja como soluciones $X_1 = 160$ $[\Omega]$ y $X_1 = 260$ $[\Omega]$.

5. Nos movemos siguiendo el circulo de conductancia $g = 1$, hasta intersectar con el centro (trazos verdes).
6. Determinamos el valor de las susceptancias paralelo, las cuales se calculan como la diferencia entre el valor de susceptancia entre el centro de la carta y el punto en que se ubica la solución (trazos rosados). Así:

$$b_1 = 0 - 1.25 = 1.25$$
$$b_2 = 0 - (-1.25) = -1.25$$

   Luego, desnormalizamos. Al ser susceptancias debemos dividir por la impedancia de la línea, no multiplicar. Esto deja como soluciones $B_1 = 0.0125$ $[S]$ y $B_2 = -0.0125$ $[S]$.

   De este modo, obtenemos el mismo par de soluciones que en la Pregunta 1.



−j1.25
j0.5
jB = j1.25
Sol 2
j0
jX = j2.6
Sol 1
jB = −j1.25
−j2.1
−j0.5
jX = j1.6
j1.25

CASO 2: STUB SERIE EN CORTOCIRCUITO

1. Primero trazamos la impedancia normalizada, la ROE (trazo morado) y el círculo de resistencia unitaria $r = 1$ (trazo negro).

2. A partir de la intersección de la ROE y el círculo unitario, encontramos las soluciones posibles.

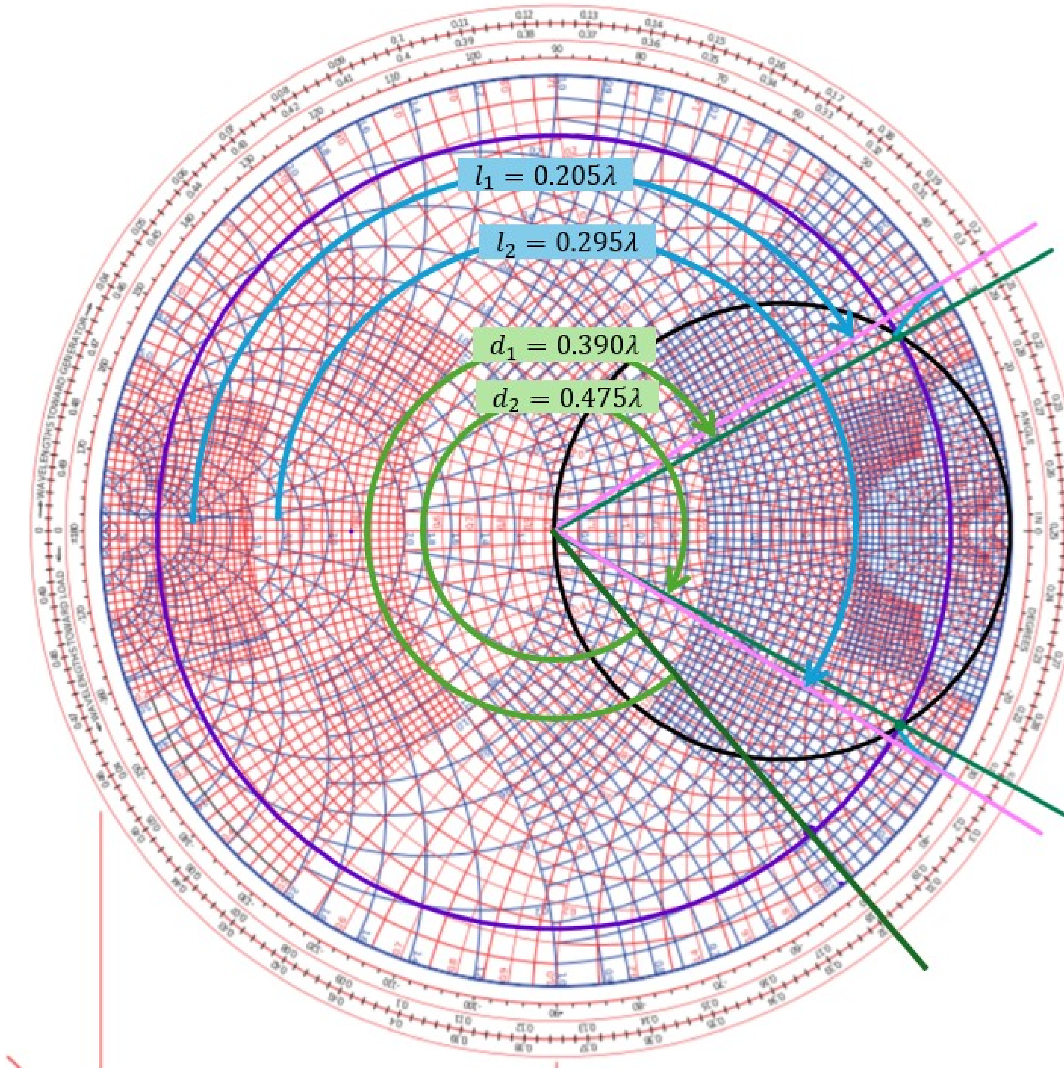
3. Trazamos el arco desde la carga hacia las soluciones (trazo verde claro). La longitud de dicho arco nos dará la distancia a la cual se debe ubicar el stub (en longitudes de onda). Multiplicando por la longitud de onda se tiene que:

$$d_1 = 0.390\lambda = 0.390 \cdot 20 = 7.8\ [cm]$$
$$d_2 = 0.475\lambda = 0.475 \cdot 20 = 9.5\ [cm]$$

4. Una vez determinada la ubicación del stub, resta obtener el largo. Para ello, determinamos la reactancia producida por el stub (trazo rosado) y nos movemos desde el extremo izquierdo de la carta (cortocircuito) hasta la reactancia de mismo valor y signo opuesto, a modo de neutralizar el efecto. En consecuencia, las longitudes de los arcos medidos (trazos celestes)son:

$$l_1 = 0.295\lambda = 0.295 \cdot 20 = 5.9\ [cm]$$
$$l_2 = 0.205\lambda = 0.205 \cdot 20 = 4.1\ [cm]$$

   De modo que los resultados son análogos a los obtenidos en la Pregunta 1.


$l_1 = 0.205\lambda$
$l_2 = 0.295\lambda$
$d_1 = 0.390\lambda$
$d_2 = 0.475\lambda$

Pregunta 3: Guías de Ondas

Se tiene un equipo de radar que opera a una frecuencia 7.5 GHz. La onda que ingresa del generador a la antena emisora se debe transmitir por medio de una guía de onda, que está rellena con aire y que posee dimensiones transversales a y b. Para un correcto funcionamiento del sistema, es indispensable que no exista dispersión modal, de modo que únicamente debe propagarse el modo dominante.

En su inventario de trabajo, usted cuenta con guías de onda WR137, WR102, WR90 y WR75, las cuales siguen el estándar EIA de medidas, presentado en la imagen adjunta. Empleando las ecuaciones vistas en clase, determine qué modelos de guía de onda pueden ser utilizados para operar el equipo de radar.

Waveguide name			Inner dimensions of waveguide opening	
EIA	RCSC *	IEC	A inch[mm]	B inch[mm]
WR340	WG9A	R26	3.4 [86.36]	1.7 [43.18]
WR284	WG10	R32	2.84 [72.136]	1.34 [34.036]
	WG11		2.372 [60.2488]	1.122 [28.4988]
WR229	WG11A	R40	2.29 [58.166]	1.145 [29.083]
WR187	WG12	R48	1.872 [47.5488]	0.872 [22.1488]
WR159	WG13	R58	1.59 [40.386]	0.795 [20.193]
WR137	WG14	R70	1.372 [34.8488]	0.622 [15.7988
WR112	WG15	R84	1.122 [28.4988]	0.497 [12.6238]
WR102			1.02 [25.908]	0.51 [12.954]
WR90	WG16	R100	0.9 [22.86]	0.4 [10.16]
WR75	WG17	R120	0.75 [19.05]	0.375 [9.525]
WR62	WG18	R140	0.622 [15.7988]	0.311 [7.8994]

Figura 1: Dimensiones de WG rectangular para estándar EIA.

Para satisfacer los requerimientos técnicos, se deben seleccionar aquellas guías que cumplan con:

- Tener una frecuencia de corte TE_{10} bajo los 7.5 GHz.
- Tenener el resto de frecuencias de corte para los modos TE y TM sobre los 7.5 GHz. Para ello basta con chequear los siguientes modos más bajos: TE_{01} y TE_{20}.

El cálculo de la frecuencia de corte consiste en simplemente evaluar la expresión:

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Luego:

$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2a} \qquad\qquad f_{c_{01}} = \frac{c}{2b}$$

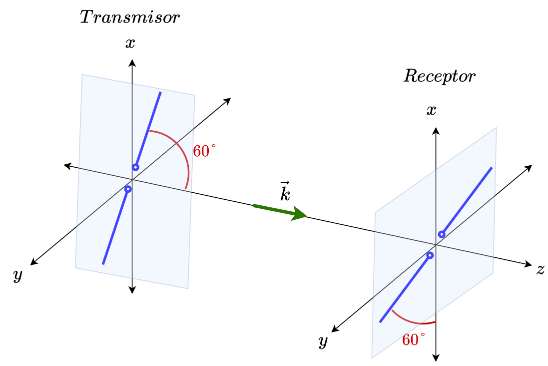
Evaluando las frecuencias:

Modelo	$f_{c_{10}}$	$f_{c_{01}}$	$f_{c_{20}}$	¿Cumple?
WG137	4.30	9.49	8.61	Sí
WG102	5.79	11.57	11.60	Sí
WG90	6.56	14.76	13.1	Sí
WG75	7.87	15.74	15.75	No

De este modo, los modelos que pueden ser empleados son: WG137, WG102 y WG90.

Pregunta 4: Antenas

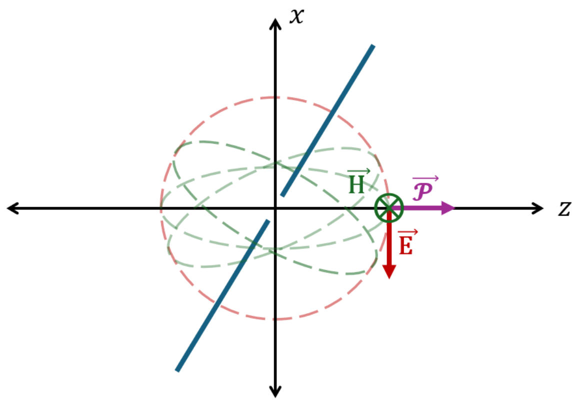
Considere un enlace aéreo transmisor-receptor, formado por dos antenas de tipo $\lambda/2$, las cuales se encuentran separadas a una distancia de 250 metros. El posicionamiento de las antenas corresponde al de la figura, con la antena transmisora en el plano $x-z$ y la antena receptora en el plano $x-y$.



El sistema opera a una frecuencia de 1.5 MHz. La impedancia de ambas antenas es de $Z_L = 75 + j45\Omega$ y están conectadas a su respectivo generador y receptor a través de un cable coaxial de $Z_0 = 75\ \Omega$. Por un lado, el generador opera a un voltaje de 100 V_{RMS} y su resistencia interna es de $R_g = 75\ \Omega$. Por otro lado, el receptor puede modelarse como una resistencia $R_{RX} = 75\ \Omega$.

(a) [**0.5 puntos**] Bosqueje el vector de Pointing, campo eléctrico y campo magnético para la onda enlazada, propagada en la dirección $\vec{\mathbf{k}}$.

Para el caso de antenas dipolo, se tiene que estas solo tienen componente polar para el campo eléctrico y componente azimutal para el campo magnético. Luego:

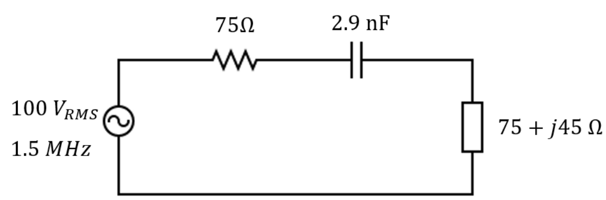


(b) **[0.75 puntos]** Determine la red de adaptación con parámetros concentrados, necesaria para adaptar el generador a la antena transmisora. Incluya el dibujo del circuito equivalente.

Dado que la componente resistiva de la antena es igual a la de la línea de transmisión, simplemente basta con balancear incluyendo una reactancia serie. Para el caso de ambas antenas, $X = -45\Omega$, de modo que la reactancia de compensación es capacitiva. Luego:

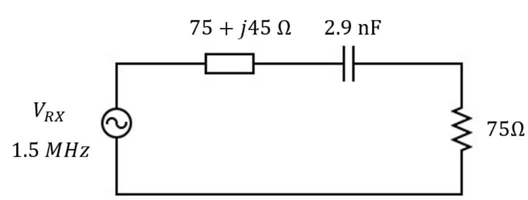
$$C = \frac{1}{2\pi f|X|} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.5 \times 10^6 \cdot 45} = 2.35\ [nF]$$

De este modo, el circuito equivalente es:



(c) **[0.75 puntos]** Determine la red de adaptación con parámetros concentrados, necesaria para adaptar la antena receptora a la carga del receptor. Incluya el dibujo del circuito equivalente.

En este caso, la compensación es la misma. Luego, el circuito equivalente es:



(d) **[0.5 punto]** Determine la potencia entregada por el generador a la antena transmisora.

Dado que la carga está adaptada, se tiene máxima transferencia de potencia. Como el voltaje ya está dado en RMS, no es necesario aplicar el factor $\sqrt{2}$. Luego:

$$P_{in} = \left(V_{in}^{RMS} \cdot \frac{R_L}{R_L + R_L}\right)^2 \cdot \frac{1}{R_L} = \frac{100^2}{4 \cdot 75} = 33.3\ [W]$$

(e) **[0.5 punto]** Verifique que se cumple la condición de campo lejano.

De acuerdo a lo visto en clases, la condición para campo lejano en una antena $\lambda/2$ es $d \geq \lambda/2$. Dado que la frecuencia de operación es de 1.5 MHz, la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{300 \times 10^6}{1.5 \times 10^6} = 200 \ [m]$$

Luego, la condición será:

$$d > 100[m]$$

Dado que las antenas están separadas por 250 [m], se cumple la condición de campo lejano.

(f) **[1.5 puntos]** Determine el campo eléctrico transmitido y recibido.

De acuerdo a lo visto en clases, la ecuación del campo eléctrico para un dipolo $\lambda/2$ en campo lejano está dada por:

$$|E_t| = \frac{\eta I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{(120\pi) \cdot (100/75)}{2\pi \cdot 250} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = 0.261 \ \left[\frac{V}{m}\right]$$

De modo que para campo transmitido:

$$E_t = (0.261 \ \vec{\mathbf{a}}_x) \cos(\omega t - \beta z + \phi_0)$$

Para el caso del campo recibido, este corresponde a la proyección del campo transmitido sobre la antena receptora, en un ángulo de 60°. De este modo:

$$|E_r| = |E_r| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \cos\frac{\pi}{3} = 0.261 \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{3} = 0.131 \ \left[\frac{V}{m}\right]$$

Separando las componentes en x e y:

$$E_r = (-0.0655 \ \vec{\mathbf{a}}_x + 0.1134 \ \vec{\mathbf{a}}_y) \cos(\omega t - \beta z + \phi_0)$$

(g) **[1.5 puntos]** Determine las ganancias directivas y la potencia recibida P_r. **Hint:** Para el caso base de una antena dipolo orientada verticalmente (como hemos visto en clases), la ganancia directiva está dada por el patrón de potencia $f^2(\theta)$, donde:

$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

Las ganancias directivas estarán dadas por:

$$G_d = (f(\theta))^2 = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

En el caso de la antena transmisora, si esta estuviese perfectamente alineada al eje z, su dirección de ganancia estaría a los 90°. Dado que está inclinada en el mismo plano en que viaja la onda, esta dirección se verá modificada y el ángulo de envío de la señal será $\theta = 60°$.

$$G_{dt} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}\right]^2 = \frac{2}{3}$$

En el caso de la antena receptora, esta se encuentra inclinada en un plano perpendicular al de la onda. De este modo, el ángulo de ganancia en el cual se recepciona la señal no se verá afectado, y estará ubicado a $\theta = 90°$.

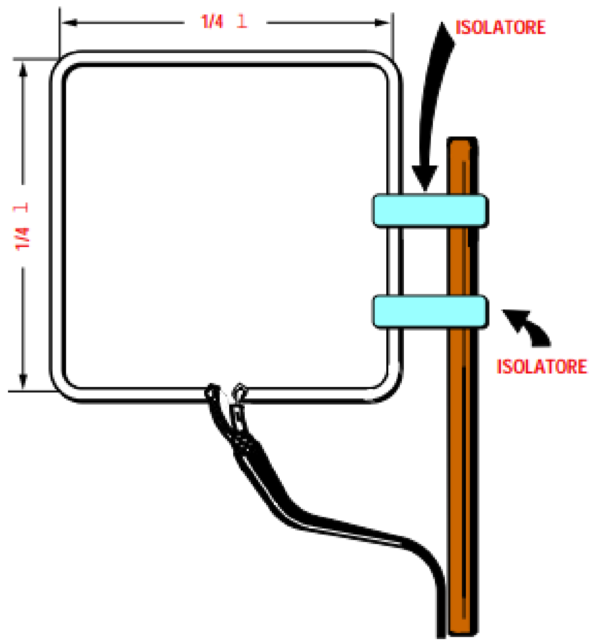
$$G_{dr} = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}}\right]^2 = 1$$

Empleando la Ecuación de Friis, la potencia recibida estará dada por:

$$P_r = G_{dr}G_{dt}\left[\frac{\lambda}{4\pi r}\right]^2 P_t = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\left[\frac{200}{4\pi\cdot 250}\right]^2\cdot 33.33 = 0.09[W]$$

Pregunta 5: 4NEC2

Empleando el software 4NEC2, simule una antena tipo Quad, la cual se encuentra en paralelo al eje $x - z$, centrada en el eje z y con su lado inferior a una altura de 2 metros del suelo (plano $x - y$). Utilice la Figura adjunta como referencia:



La antena debe diseñarse para operar a una frecuencia de 50 MHz, siendo alimentada a 1 V por un cable coaxial de 75 Ω (`Main` $\rightarrow$ `Char Impedance`).

En particular:

- **[1.5 puntos]** Muestre su diseño de la antena (3D), el patrón de Ganancia Total para campo lejano (3D) y el patrón de campo cercano (2D).
- **[1.5 puntos]** Muestre el diagrama polar de Ganancia Total. Señale la máxima ganancia de la antena y clasifíquela en función de su directividad. En caso de ser posible, determine el ancho de haz.
- **[1.5 puntos]** Realice un barrido en frecuencia y muestre las gráficas de SWR y coeficiente de reflexión. Repita el procedimiento, esta vez adaptando la conexión al coaxial con una red de parámetros concentrados de tipo L-lowpass.
- **[1.5 puntos]** Una vez adaptada la impedancia, genere el gráfico de la carta de Smith para el barrido en frecuencia. Contraste la curva de desplazamiento obtenida (curva color rojo con puntos negros) con las gráficas del inciso anterior. Presente al menos 3 casos que considere de interés (con la gráfica y valores relevantes incluidos).