Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Curso IEE2113 Teoría Electromagnética
1^{er} semestre, 2024

Ayudantía 5: Incidencia Oblicua y Líneas de Transmisión

Profesor: Javier Silva
Ayudante : Rafael Ormazábal- riormazabal@uc.cl

Incidencia Oblicua

Problema 1: Incidencia oblicua con polarización circular

Una onda armónica electromagnética circularmente polarizada y con una potencia promedio por unidad de área de $1\frac{W}{m^2}$ incide sobre una lámina de vidrio flint con índice de refracción $n_2 = 1.7$. El índice de refracción del aire es $n_1 = 1$. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster.

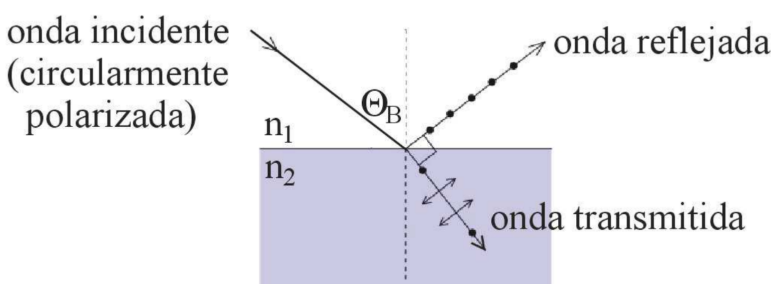

Figura 1: Incidencia oblicua para una onda polarizada circularmente

a) Calcule los coeficientes de reflexión y transmisión de ambos componentes del campo eléctrico.

b) Calcule las amplitudes de los campos eléctricos de la onda incidente y de la onda reflejada en la figura.

c) Determine la potencia promedio por unidad de área de la onda reflejada.

Solución:

a) Debido a que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster, el coeficiente de reflexión del componente paralelo es nulo:

$$\Gamma_{\parallel} = 0$$

Con esto en mente, el resto de los coeficientes se pueden calcular con las ecuaciones de Fresnel. El ángulo de incidencia se calcula usando la expresión del ángulo de Brewster:

$$tan(\theta_b) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

Ahora bien, si ponderamos por $\frac{\mu_0}{\mu_0}$ al interior de la raiz y desarrollamos:

$$tan(\theta_b) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{\mu_0}{\mu_0}} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Reemplazando para los valores del problema:

$$tan(\theta_b) = 1.7$$

$$\theta_b = \theta_i = 59.53°$$

Por otro lado, el ángulo de la onda transmitida se obtiene usando la Ley de Snell:

$$n_1 \cdot sin(\theta_1) = n_2 \cdot sin(\theta_2)$$

Despejando:

$$sin(\theta_t) = \frac{1}{1.7} \cdot sin(59.53°)$$

$$sin(\theta_t) = 30.47°$$

Luego, calculamos el coeficiente de transmisión para el componente paralelo:

$$T_{\parallel} = \frac{2 \cdot \frac{n_1}{n_2}}{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{cos(\theta_t)}{cos(\theta_i)} + 1}$$

Reemplazando:

$$T_{\parallel} = 0.5882$$

El coeficiente de transmisión para el componente perpendicular está dado por:

$$T_{\perp} = \frac{2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{cos(\theta_i)}{cos(\theta_t)}}{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{cos(\theta_i)}{cos(\theta_t)} + 1}$$

Reemplazando:

$$T_{\perp} = 0.5141$$

Finalmente, el coeficiente de reflexión del componente perpendicular:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{cos(\theta_i)}{cos(\theta_t)} - 1}{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{cos(\theta_i)}{cos(\theta_t)} + 1}$$

Reemplazando:

$$\Gamma_{\perp} = -0.4859$$

b) Como la onda incidente tiene polarización circular, cada componente aporta la mitad de potencia:

$$\frac{1}{2} < P >= \frac{E_{0,i,\perp}^2}{2\eta} = \frac{E_{0,i,\parallel}^2}{2\eta}$$

Por lo que $E_{0,r,\parallel} = E_{0,i,\perp}$. Reemplazando tenemos:

$$0.5 \cdot 1\frac{W}{m^2} = \frac{E_{0,i,\parallel}^2}{2 \cdot 120\pi\Omega}$$

$$E_{0,i,\parallel} = E_{0,i,\perp} = 19.42\frac{V}{m}$$

Vale la pena recordar que la impedancia del aire es muy cercana a $120\pi\Omega$. El componente paralelo del campo de la onda reflejado es nulo, ya que el ángulo de incidencia es el de Brewster:

$$E_{0,r,\parallel} = 0\frac{V}{m}$$

Finalmente, la amplitud del campo eléctrico perpendicular de la onda reflejada:

$$E_{0,r,\perp} = E_{0,i,\perp} \cdot |\Gamma_{\perp}|$$

$$E_{0,r,\perp} = 9.4336\frac{V}{m}$$

c) La potencia promedio por unidad de área de la onda reflejada solo depende del componente perpendicular, ya que el ángulo de incidencia es θ_b:

$$< P_r >= \frac{E_{0,r,\perp}^2}{2\eta}$$

Reemplazando:

$$< P_r >= 118\frac{mW}{m^2}$$

Problema 2: Reflexión interna total

En una interfaz agua-aire, como muestra la figura, incide una onda electromagnética linealmente polarizada con un ángulo de incidencia $\theta_i = 54°$. Más aún, la onda incidente tiene una polarización perpendicular. Si los índices de refracción de cada medio son $n_{\text{agua}} = 1.33$ y $n_{\text{aire}} = 1$:

Figura 2: Reflexión interna total

a) Demuestre que se está generando una reflexión interna total.

b) Determine la amplitud del campo eléctrico reflejado. Para esto considere $E_{0,i} = 15\frac{V}{m}$.
Hint: Ojo que el coeficiente de reflexión va a tener un valor complejo

c) Calcule la razón entre la potencia por unidad de área de la onda íncidente con la reflejada.

Solución:

a) Para que haya reflexión interna total, el ángulo de incidencia tiene que ser mayor al ángulo crítico. El ángulo crítico corresponde al ángulo de incidencia para el cual $\theta_t = 90°$, el cuál se puede obtener mediante la Ley de Snell:

$$sin(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} \cdot sin(\theta_t)$$

$$sin(\theta_c) = \frac{1}{1.33} \cdot sin(90°)$$

$$\theta_c = 48.75° < \theta_i = 54°$$

Por lo que hay reflexión interna total.

b) Las ecuaciones de Fresnel requieren el coseno del ángulo transmitido. Ahora bien, debido a que hay reflexión interna total, el seno del ángulo transmitido es mayor a uno, y el coseno va a ser complejo. Usando la Ley de Snell:

$$sin(\theta_t) = \frac{n_1}{n_2}\sin(\theta_i)$$

Reemplazando:

$$sin(\theta_t) = 1.076$$

Luego, usando que $sin^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$:

$$cos(\theta_t) = \sqrt{1 - sin^2(\theta_t)}$$

$cos(\theta_t) = 0.3972i$

El coeficiente de relexión para el componente perpendicular está dado por:

$$\Gamma = \frac{n_1 \cdot cos(\theta_i) - n_2 \cdot cos(\theta_t)}{n_1 \cdot cos(\theta_i) + n_2 \cdot cos(\theta_t)}$$

Reemplazando:

$$\Gamma = \frac{1.33 \cdot cos(54°) - 0.3972i}{1.33 \cdot cos(54°) + 0.3972i}$$

$$\Gamma = 0.5896 - 0.8077i = e^{-i53.88°}$$

Finalmente:

$$E_{r,\perp} = E_{i,\perp} \cdot \Gamma$$

$$E_{r,\perp} = 15\frac{V}{m} \cdot e^{-i53.88°}$$

c) La razón entre las potencias por unidad de área está dado por:

$$\frac{P_i}{P_r} = \frac{\frac{|E_i|^2}{2\eta}}{\frac{E_r^2}{2\eta}}$$

$$\frac{P_i}{P_r} = \frac{|E_i|^2}{|E_r|^2}$$

Ahora bien:

$$|E_r|^2 = |E_i|^2 \cdot |\Gamma|^2$$

Por lo que:

$$\frac{P_i}{P_r} = \frac{1}{|e^{-i53.88°}|^2}$$

Pero el módulo de una exponencial compleja es uno:

$$\frac{P_i}{P_r} = 1$$

Esto tiene sentido, ya que si hay reflexión interna total, no se debería transmitir potencia.

Líneas de Transmisión

Problema 3

Una línea telefónica tiene las siguientes características: $R = 30\frac{\Omega}{km}$, $L = 100\frac{mH}{km}$, $G = 0$ y $C = 20\frac{\mu F}{km}$. Si la onda tiene una frecuencia nominal de $f = 1kHz$:

a) Determine la impedancia característica de la línea.

b) La constante de propagación.

c) La velocidad de fase.

Solución:

a) La impedancia característica de la línea está dada por:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + j\omega C}}$$

Donde $\omega = 2\pi 1 \cdot 10^{-3}\frac{rad}{s}$. Debido a que R, L y C están por km, al dividirlos se cancelan los km y no hay que preocuparse por cambiar las unidades. Remplazando:

$$Z_0 = \sqrt{5 \cdot 10^3 < -2.73°\Omega} = 70.75 < -1.37°\Omega$$

b) La constante de propagación está dada por:

$$\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)}$$

Para pasar de km a m, que tiene más sentido para la constante de propagación, hacemos lo siguiente:

$$\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)(\frac{1km}{1000m})^2}$$

Reemplazando obtenemos:

$$\gamma = 2.12 \cdot 10^{-4} + i8.89 \cdot 10^{-3}\frac{1}{m}$$

Cuando se trata de la constante de propagación, tiene más sentido no usar notación polar, ya que el componente real (α: constante de atenuación) como el imaginario (β: constante de fase) tienen un significado físico.

c) Finalmente, la velocidad de fase es:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = 7.07 \cdot 10^5\frac{m}{s}$$