

Clase 05

Relatividad Especial

Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition: pp. 502 – 552

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Ya estudiamos el fenómeno electrostático. Pero para entender a las cargas, debemos pensar como cargas y movernos como cargas.
- Esto ocurre a una velocidad muy alta. La física convencional no nos será de ayuda. Necesitamos la física relativista.
- **Objetivos de Aprendizaje involucrados:**
 - **OA-03:** Comprender los conceptos base de la Teoría de la Relatividad Especial: simultaneidad de sucesos, dilatación temporal y contracción de longitudes.
 - **OA-04:** Plantear y resolver problemas de mediana complejidad entre sistemas inerciales, empleando Transformaciones de Lorentz para la determinación de posición, tiempo, velocidad, energía, momento y fuerza.
 - **OA-05:** Determinar e interpretar la relación entre electricidad y magnetismo, empleando los elementos de la Mecánica Relativista.

Contenidos

- Sistemas Inerciales
- Simultaneidad de sucesos
- Dilatación temporal
- Contracción espacial
- Transformaciones de Lorentz
- Mecánica relativista
- Electrodinámica Relativista

Sistemas de Referencia Inerciales

- Corresponden a un sistema de referencia a velocidad constante.
- Los fenómenos físicos son indistinguibles con respecto a cualquiera de estos sistemas de referencia.
- En un tren inercial podríamos jugar pool de la misma forma que en un bar.



Postulados de la Relatividad Especial

- Postulado 1:

Todas las leyes de la física son válidas para todos los sistemas inerciales.



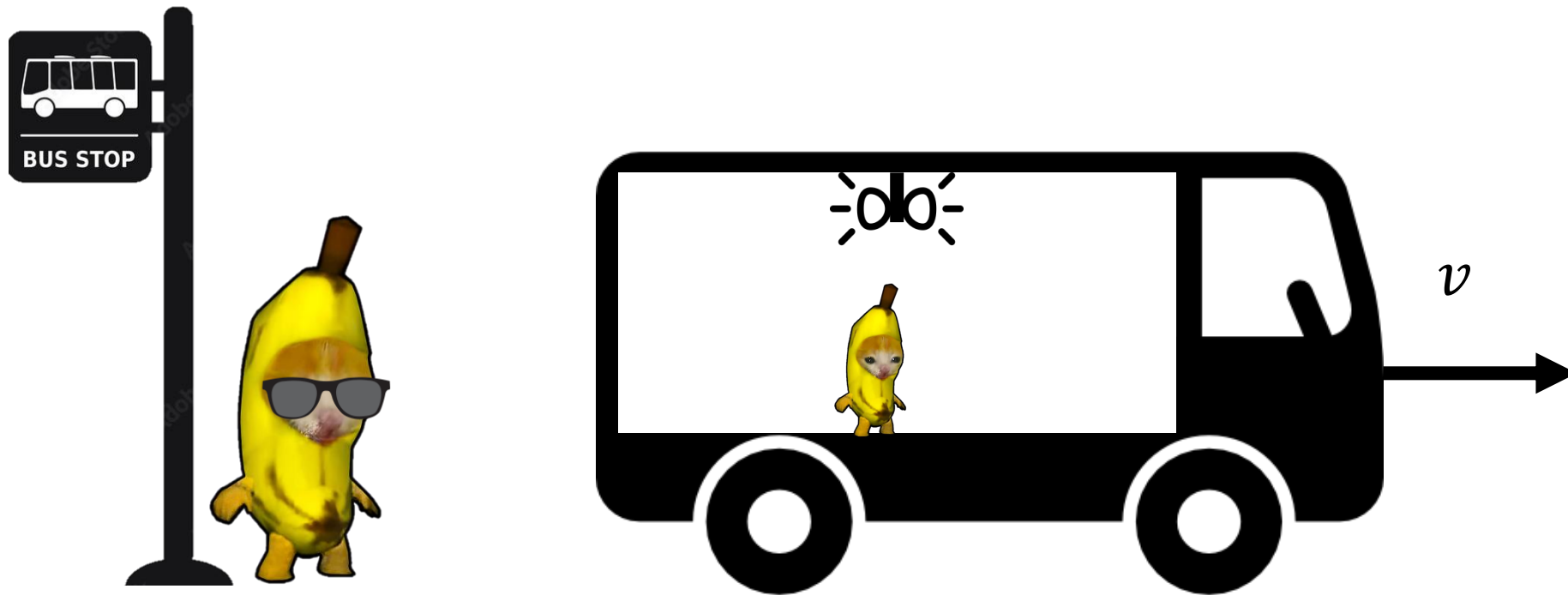
- Postulado 2:

La velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los observadores, y tiene el mismo valor, independiente del estado de movimiento de la fuente.

c

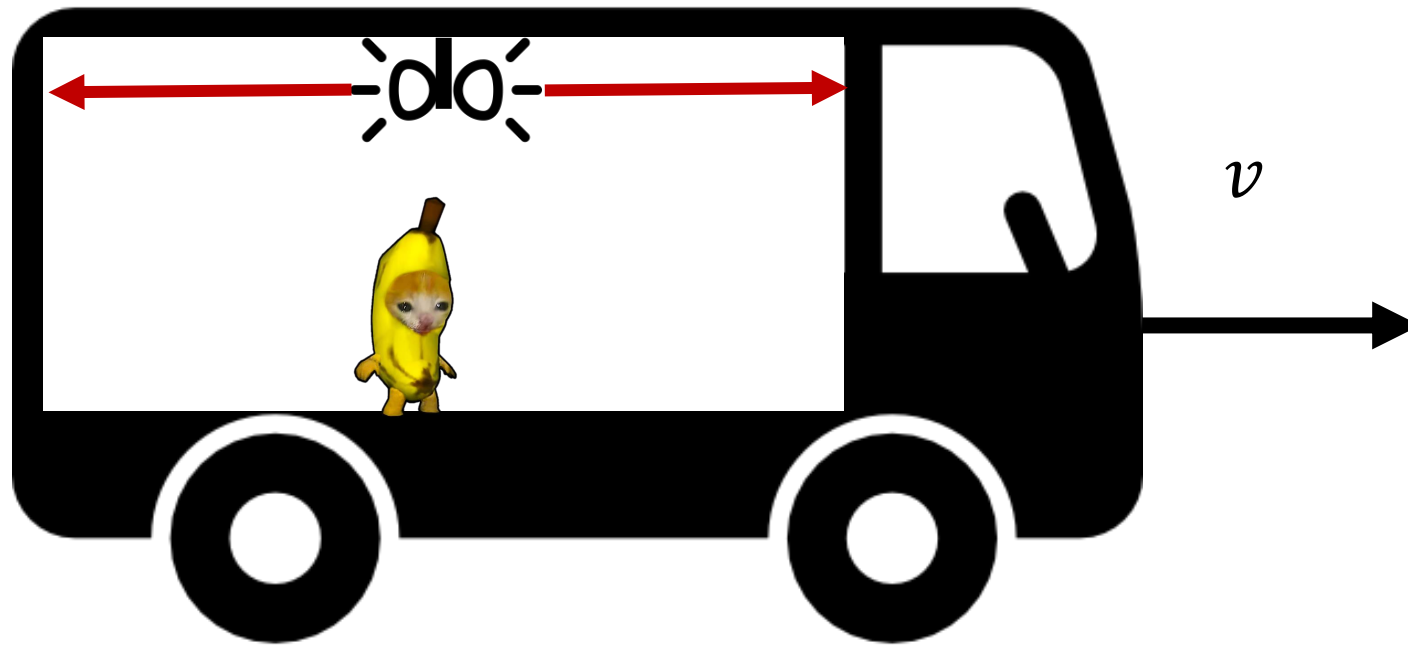
Simultaneidad de sucesos

- Experimento Mental #1



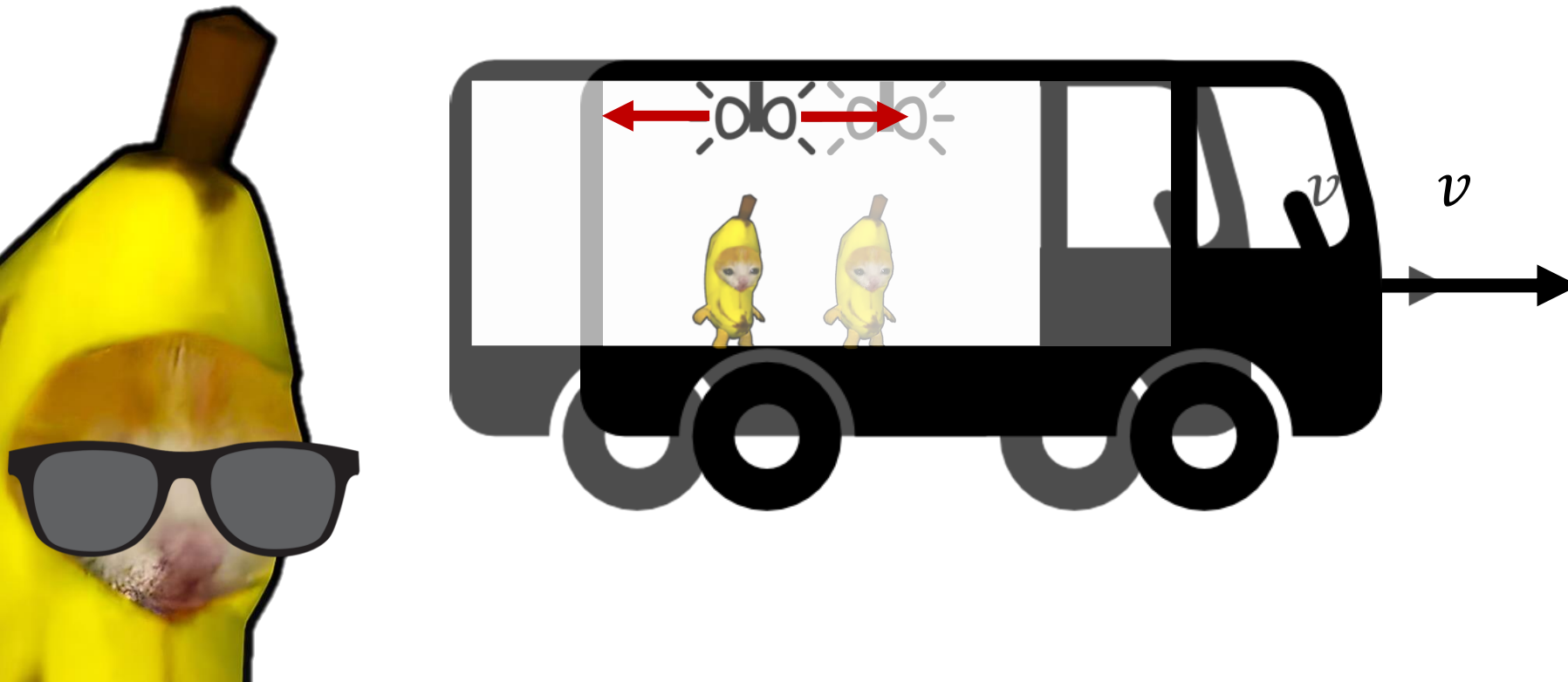
Simultaneidad de sucesos

- Sistema inercial del bus



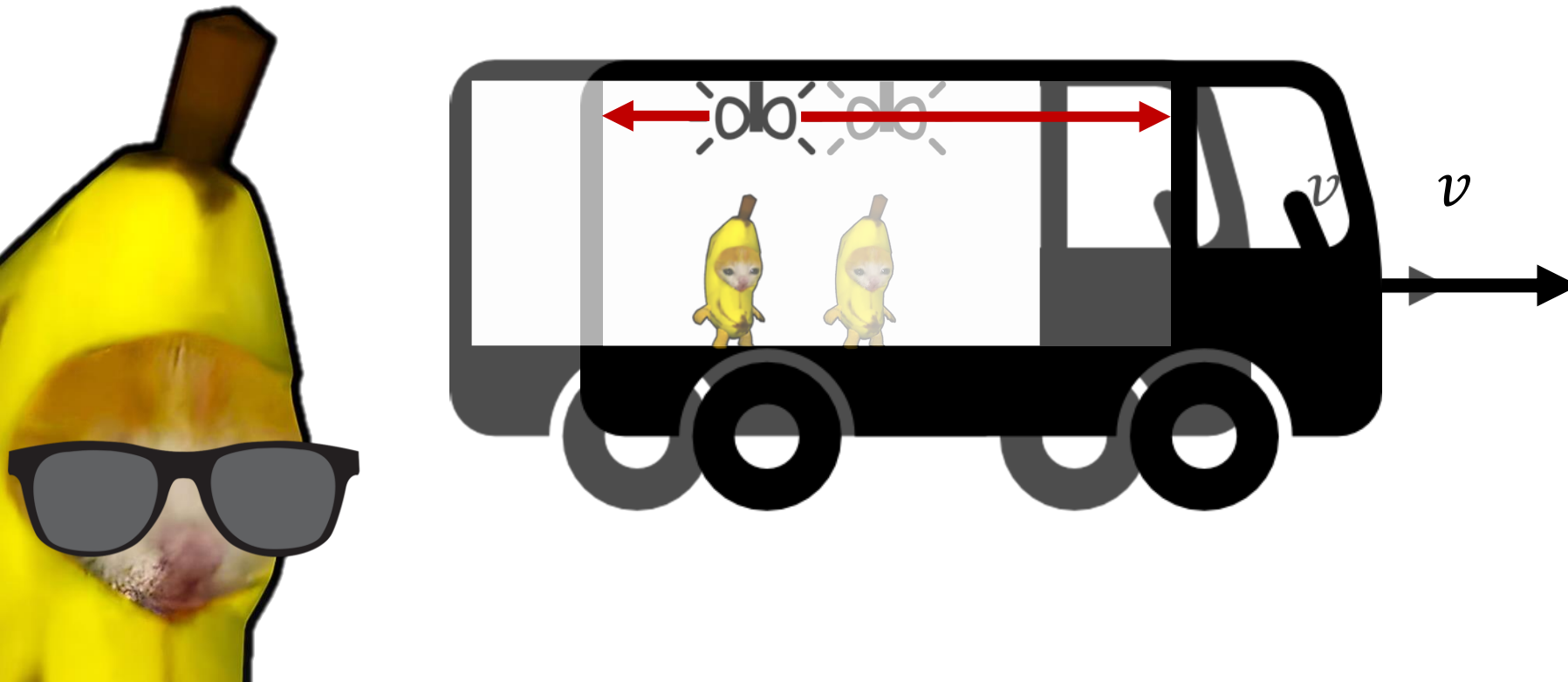
Simultaneidad de sucesos

- Sistema inercial del paradero



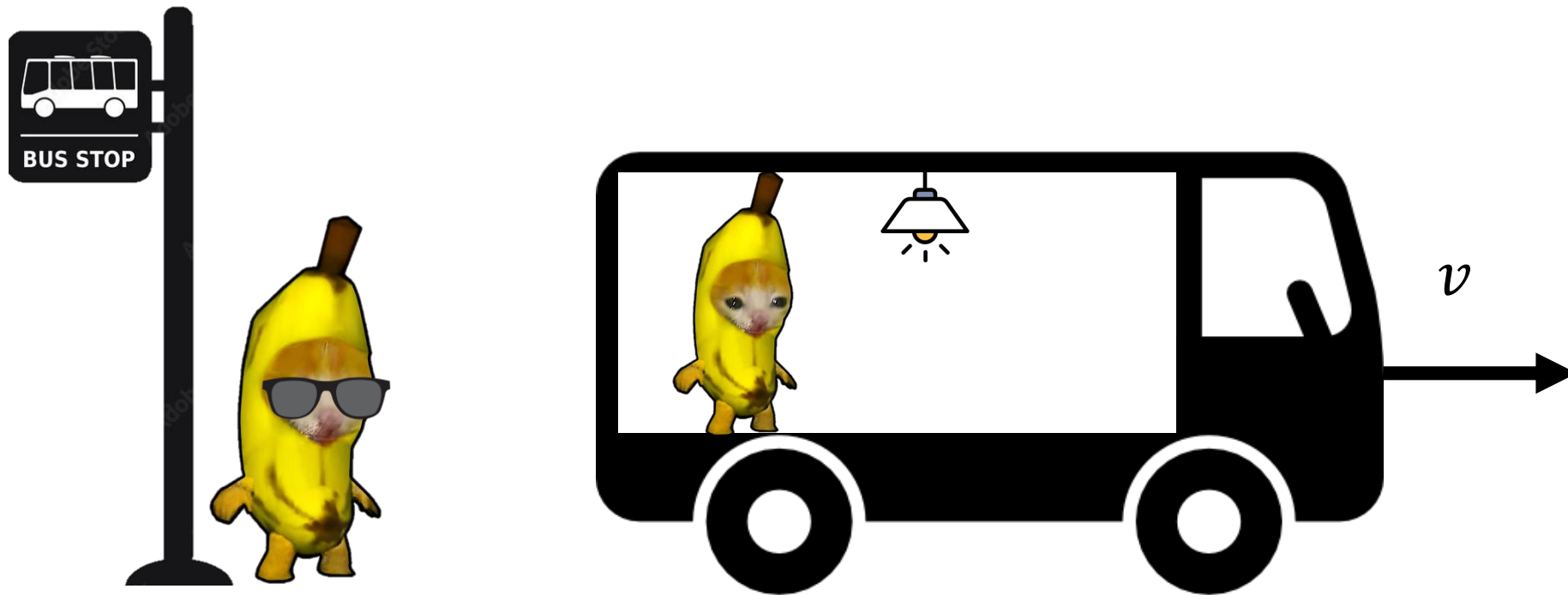
Simultaneidad de sucesos

- Sucesos simultáneos para un observador inercial, no necesariamente lo son para otro observador inercial.



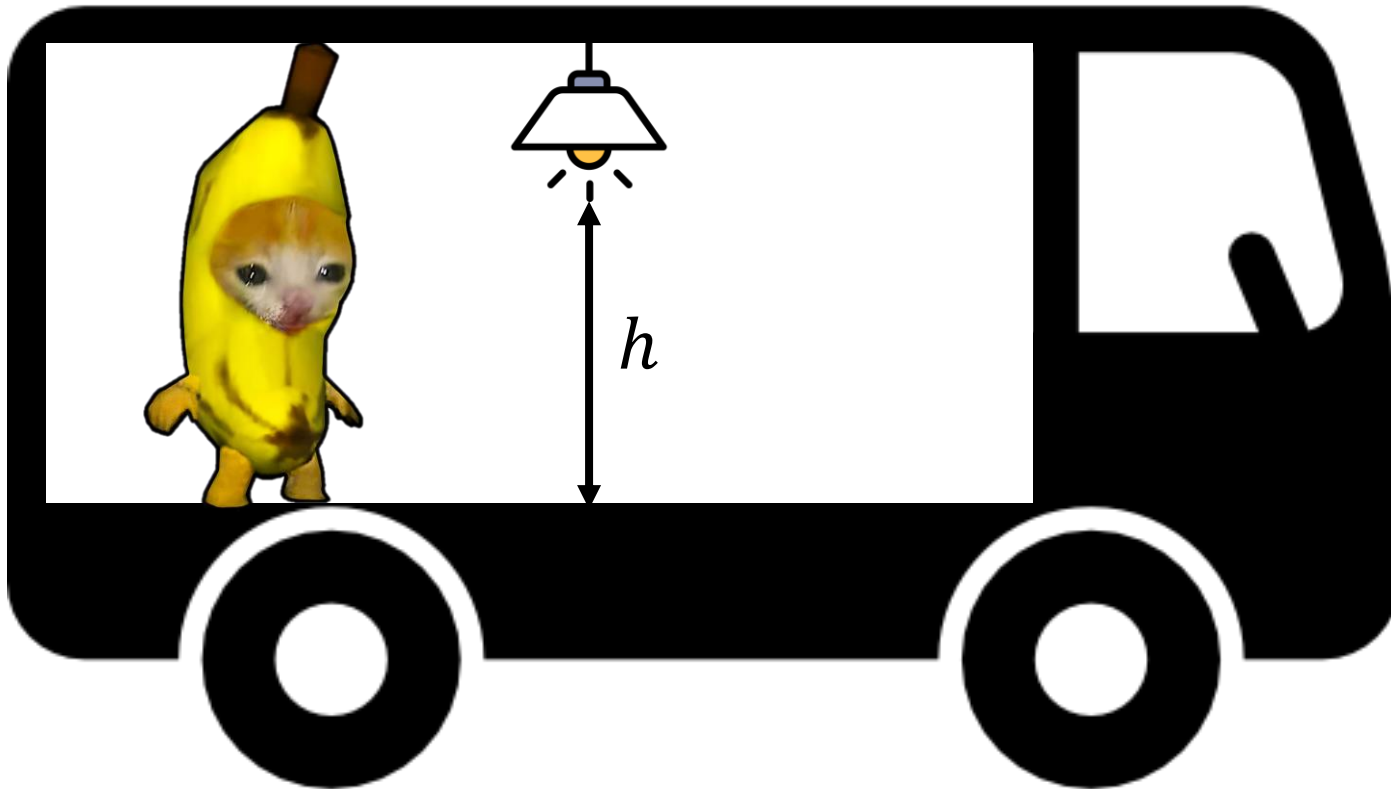
Dilatación temporal

- Experimento Mental #2



Dilatación temporal

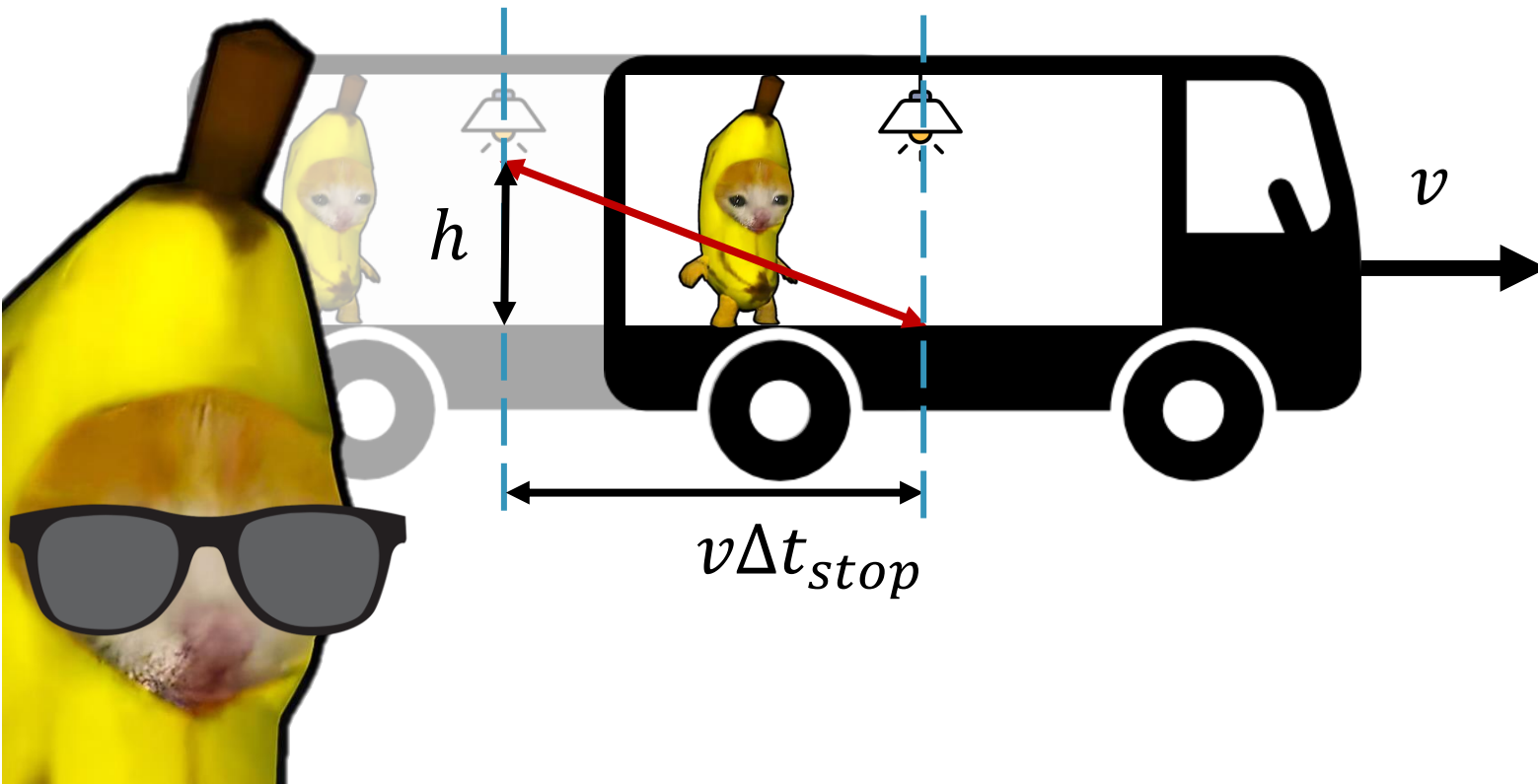
- Sistema inercial del bus



$$\Delta t_{bus} = \frac{h}{c}$$

Dilatación temporal

- Sistema inercial del paradero



$$\Delta t_{stop} = \frac{\sqrt{h^2 + v^2 \Delta t_{stop}^2}}{c}$$

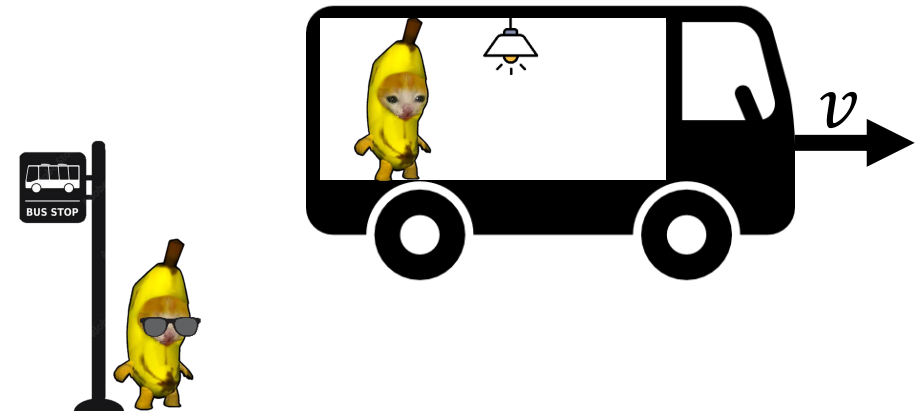
$$\Delta t_{stop} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{h}{c}$$

$$\Delta t_{stop} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Delta t_{bus}$$

Dilatación temporal

- Notemos que: $1 < \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma$
- Luego: $\Delta t_{bus} < \gamma \Delta t_{bus} = t_{stop}$

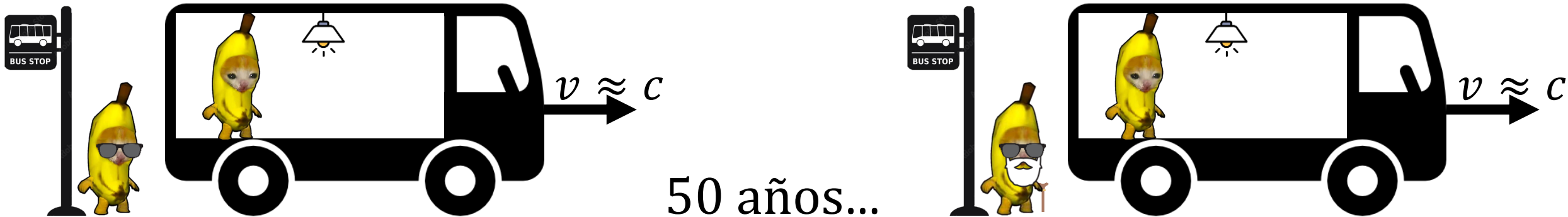
$$\Delta t_{bus} < \Delta t_{stop}$$



Dilatación temporal

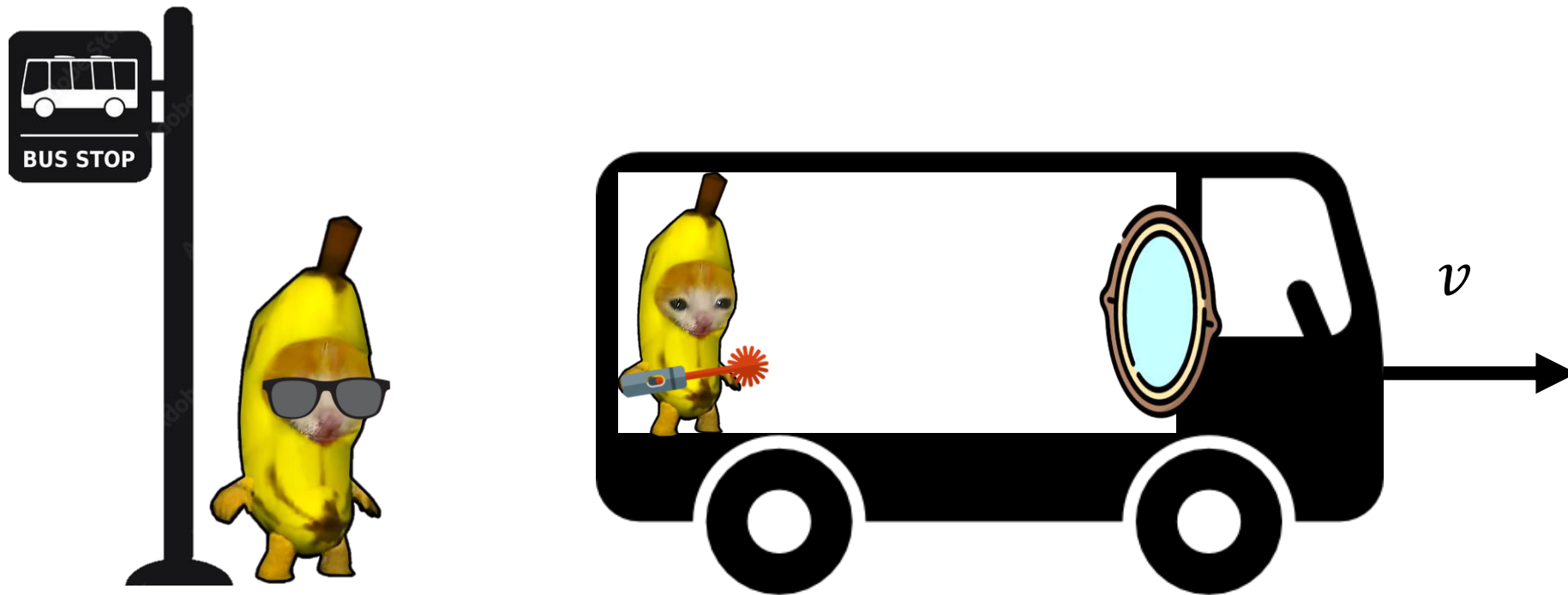
- Para un observador en movimiento, transcurrió menos tiempo. Su reloj corre más “lento”.

$$\Delta t_{bus} < \Delta t_{stop}$$



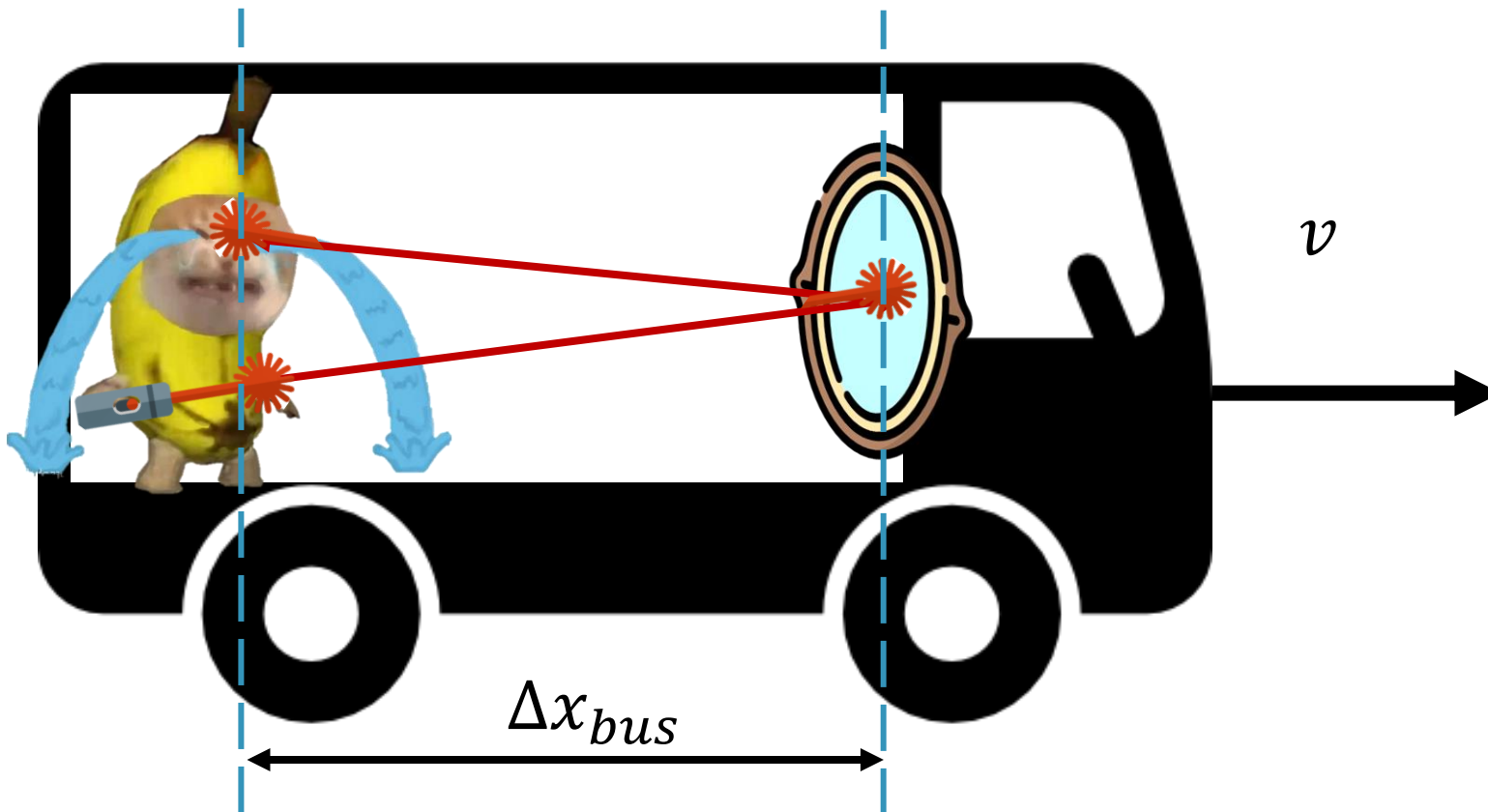
Contracción Espacial

- Experimento Mental #3



Contracción Espacial

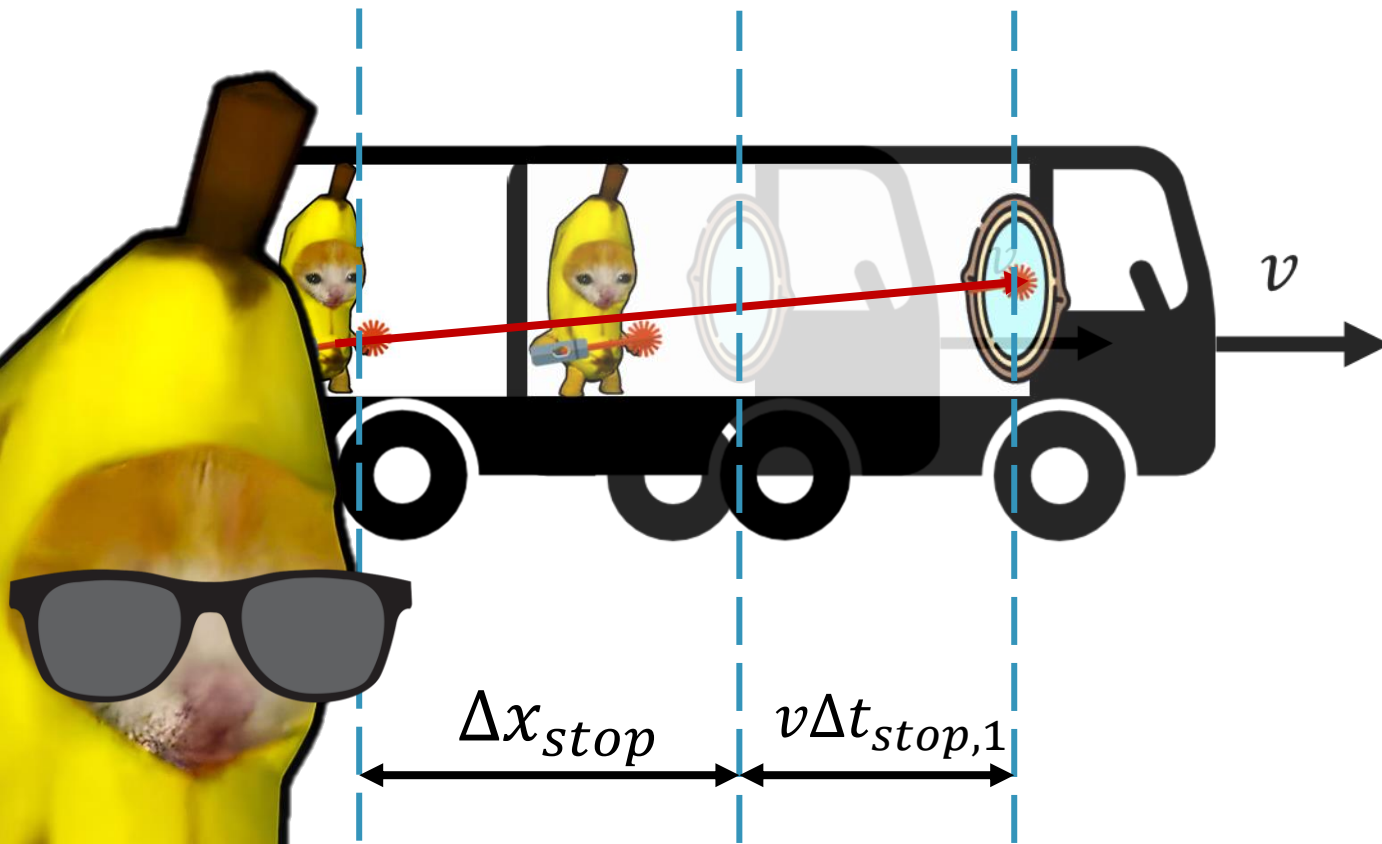
- Sistema inercial del bus



$$\Delta t_{bus} = 2 \frac{\Delta x_{bus}}{c}$$

Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero

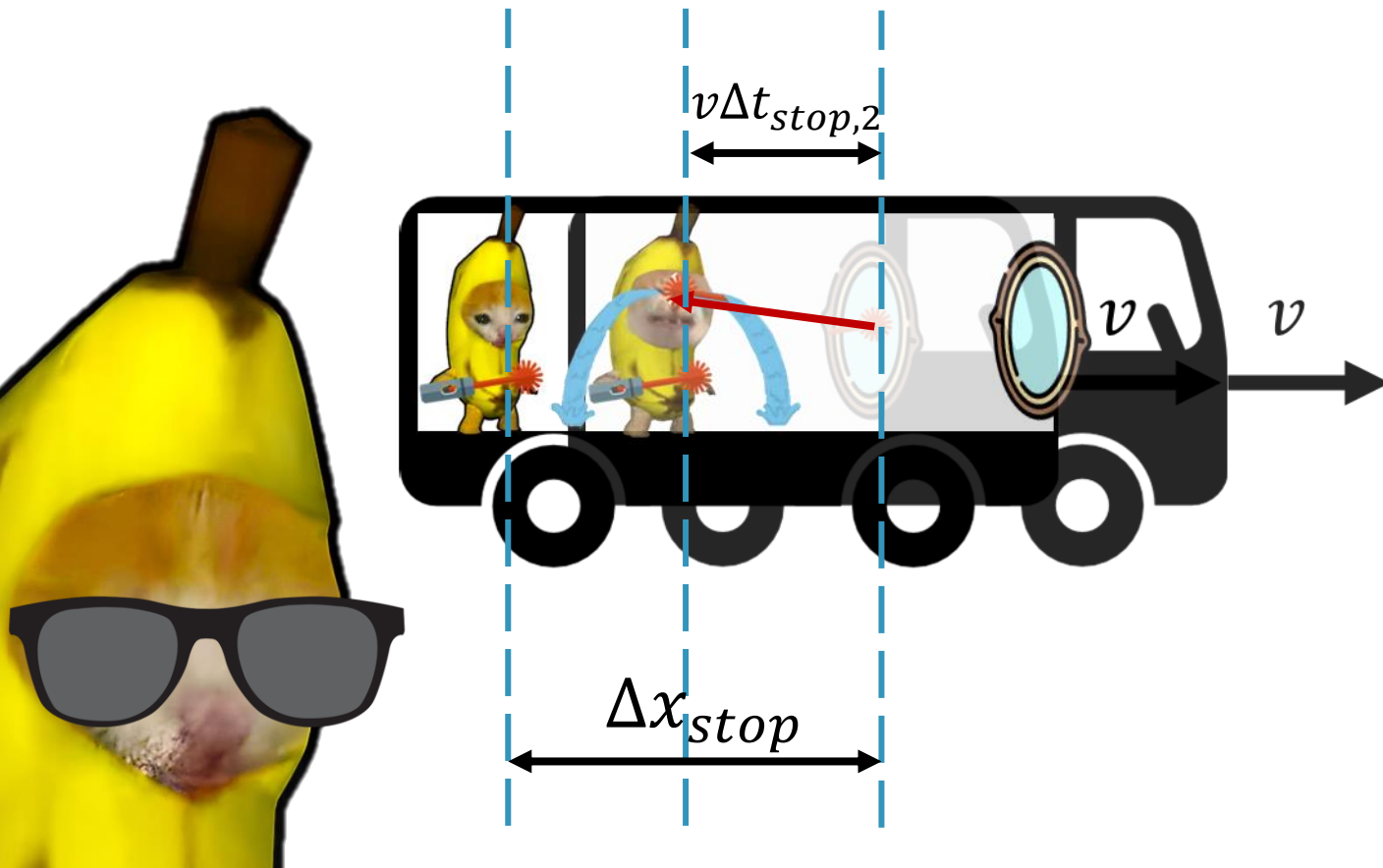


$$\Delta t_{stop,1} = \frac{\Delta x_{stop} + v\Delta t_{stop,1}}{c}$$

$$\Delta t_{stop,1} = \frac{\Delta x_{stop}}{c + v}$$

Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero



$$\Delta t_{stop,2} = \frac{\Delta x_{stop} - v\Delta t_{stop,2}}{c}$$

$$\Delta t_{stop,2} = \frac{\Delta x_{stop}}{c - v}$$

Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero

$$\Delta t_{stop,1} = \frac{\Delta x_{stop}}{c + v} \quad \Delta t_{stop,2} = \frac{\Delta x_{stop}}{c - v}$$

$$\Delta t_{stop} = \Delta t_{stop,1} + \Delta t_{stop,2} = 2 \frac{\Delta x_{stop}}{c} \frac{1}{1 - (v^2/c^2)}$$



Contracción Espacial

- Sistema inercial del paradero

$$\Delta t_{bus} = 2 \frac{\Delta x_{bus}}{c}$$

$$\Delta t_{stop} = 2 \frac{\Delta x_{stop}}{c} \frac{1}{1 - (v^2/c^2)}$$

$$\Delta t_{stop} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Delta t_{bus}$$

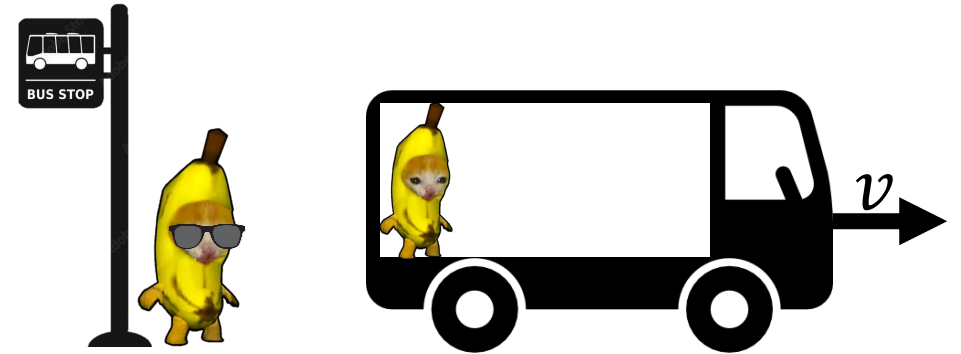
$$\Delta x_{stop} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Delta x_{bus}$$



Contracción espacial

- Notemos que: $1 > \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma}$
- Luego: $\Delta x_{bus} > \frac{1}{\gamma} \Delta x_{bus} = \Delta x_{stop}$

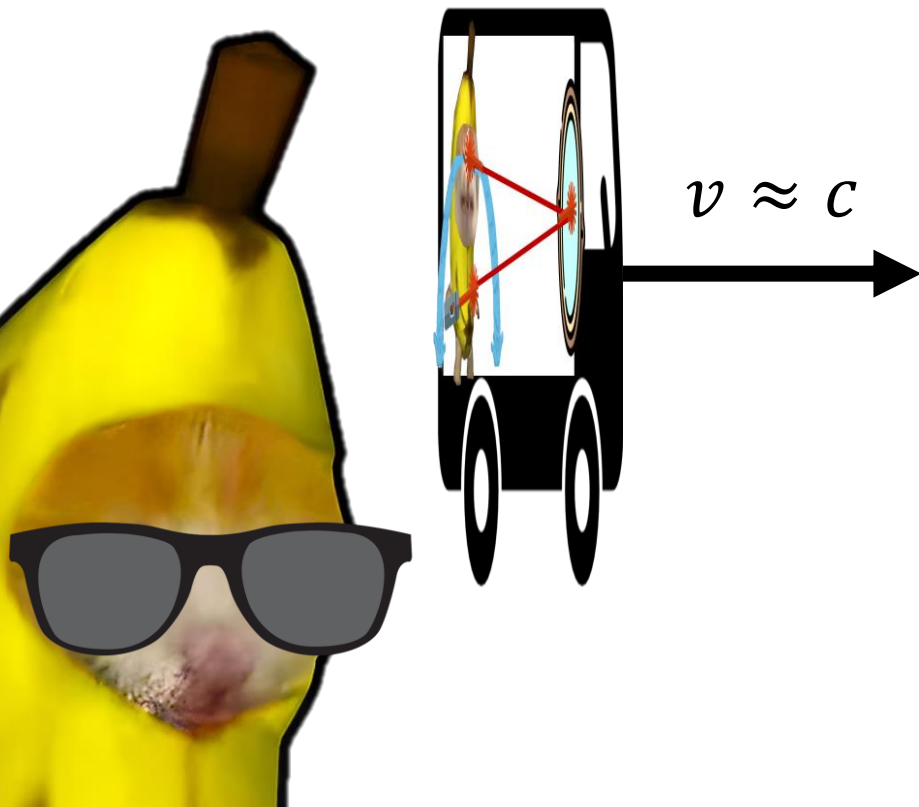
$$\Delta x_{bus} > \Delta x_{stop}$$



Contracción espacial

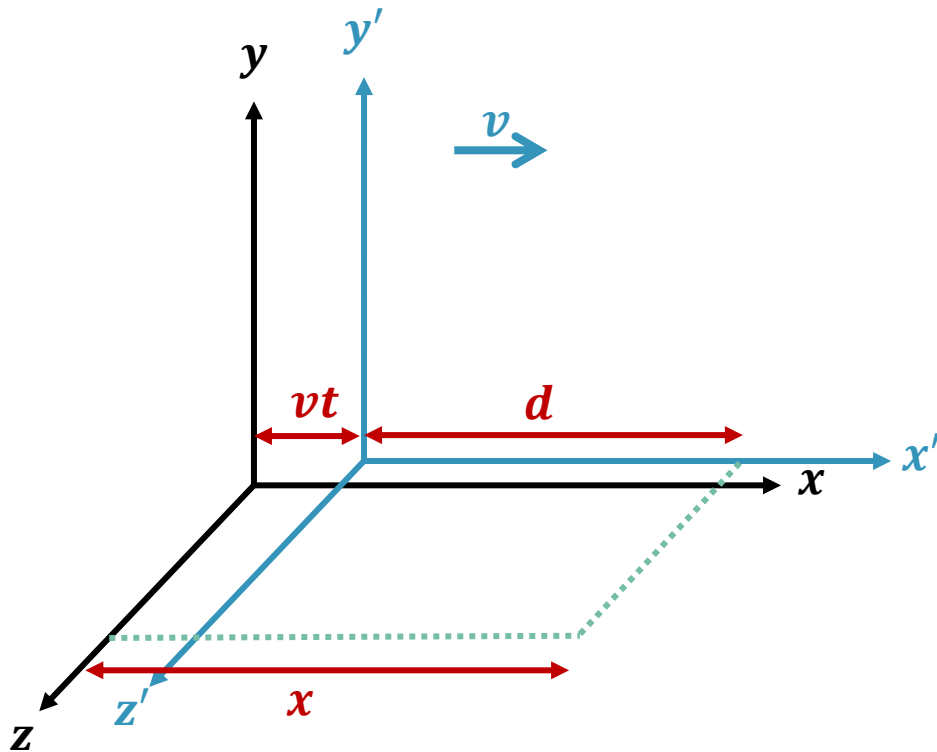
- Para un observador estático, las distancias parecieran acortarse.

$$\Delta x_{bus} > \Delta x_{stop}$$



Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Galilei



$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

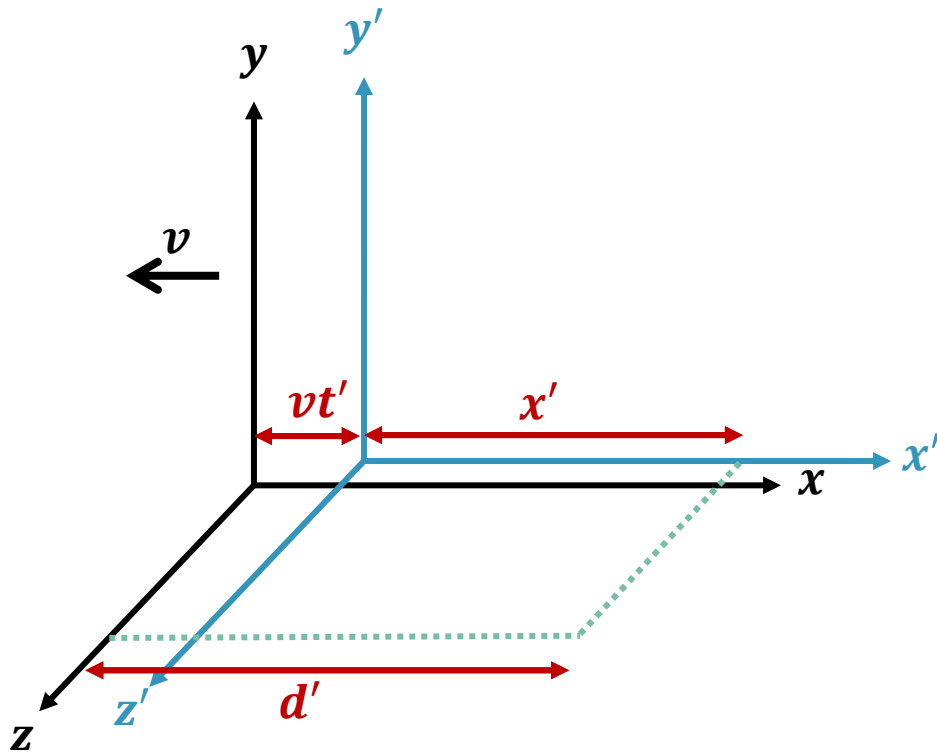
$$t' = t$$

A velocidades pequeñas esto funciona.

Sin embargo, fallan cuando nos acercamos a c .

Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Lorentz



$$d' = x' + vt'$$

$$\frac{1}{\gamma}x = x' + vt'$$

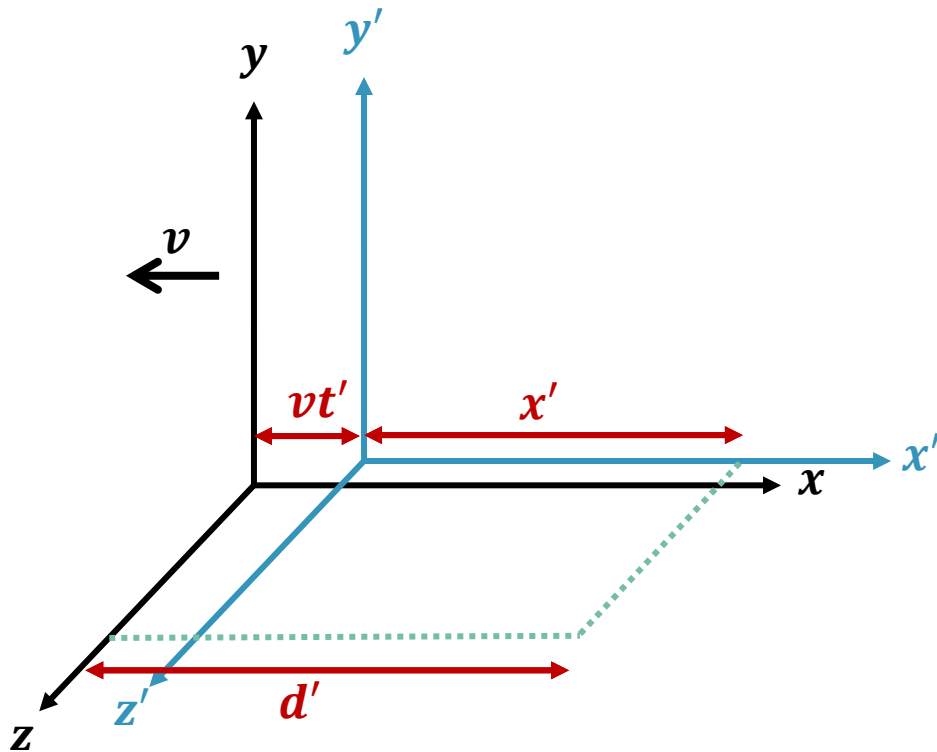
$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z'\end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}$$

Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Lorentz



$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z'\end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}$$

$$x' = \frac{1}{\gamma}x - vt'$$

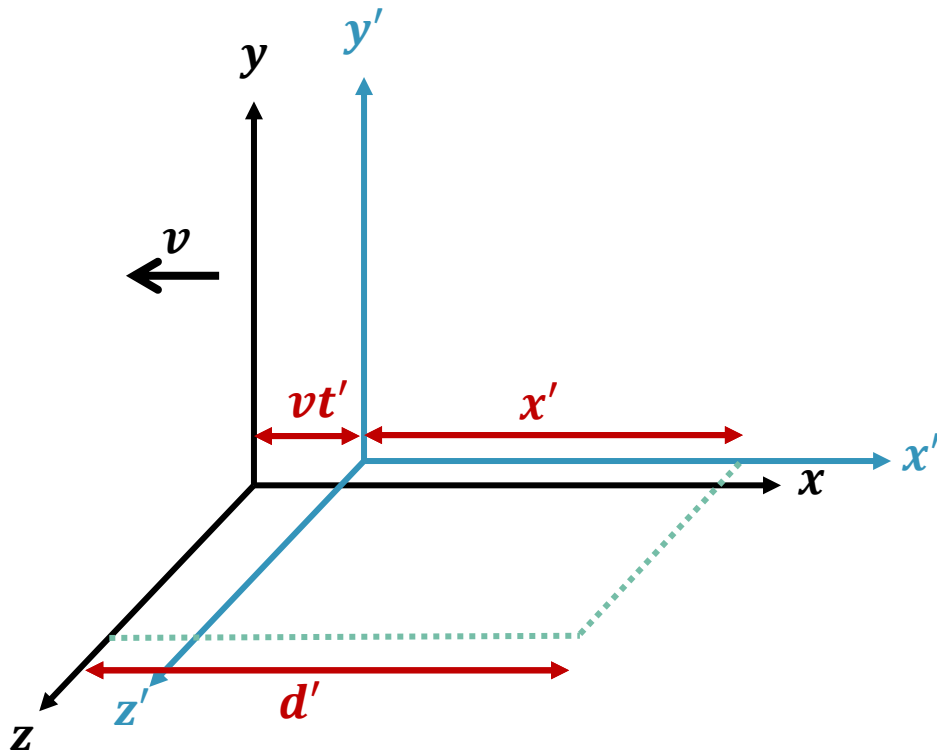
$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$\frac{1}{\gamma}x - vt' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{(1 - \gamma^2)}{v\gamma}x\right) = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Transformaciones de Lorentz

- Transformadas de Lorentz



$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

Mecánica Relativista

Con estas nuevas definiciones de distancia y tiempo, podemos replantear las ecuaciones de mecánica clásica.

Consideremos 3 elementos principales:

- Velocidad
- Momentum y Energía
- Fuerza

Mecánica Relativista: Velocidad

- De las transformaciones de Lorentz

$$\left. \begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned} \right\} u'_x = \frac{(dx - vdt) \frac{1}{dt}}{\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \frac{1}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} dy' &= dy \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned} \right\} u'_y = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} \frac{1}{dt} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

$$\left. \begin{aligned} dz' &= dz \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned} \right\} u'_z = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} \frac{1}{dt} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

Mecánica Relativista: Velocidad

- Podemos cambiar libremente de sistemas, solo basta con intercambiar los pares \mathbf{u}' y \mathbf{u} , e invertir el sentido de v

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}$$



$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}$$

Mecánica Relativista: Momentum y Energía

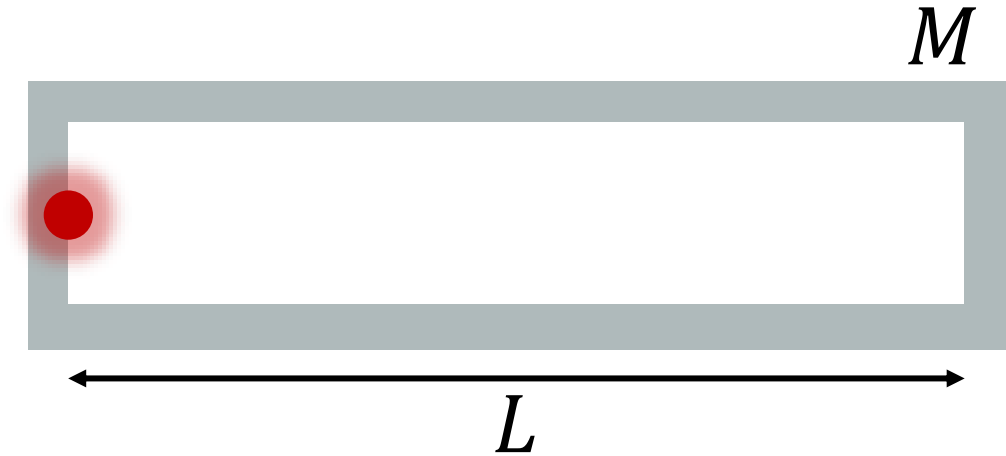
Supongamos que disparamos una partícula a velocidad c dentro de una caja de largo L y masa M .

La partícula tendrá energía:

$$E = p_x c$$

Por conservación de momentum, la caja experimentará un pequeño culatazo a velocidad $v \ll c$.

$$p_x = Mv$$



Mecánica Relativista: Momentum y Energía

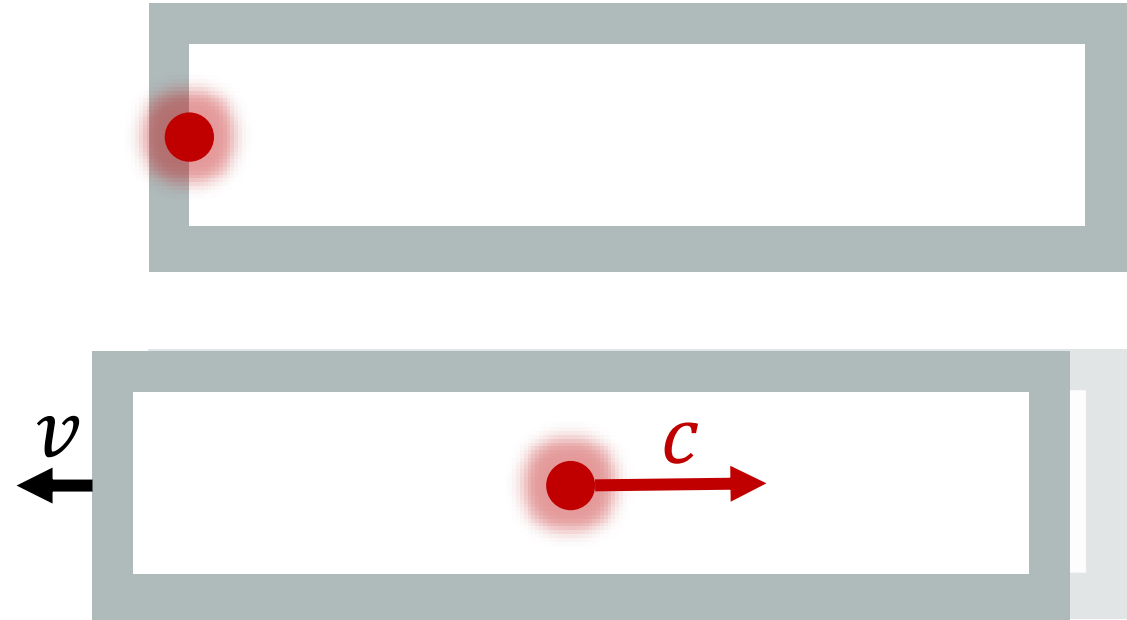
Supongamos que disparamos una partícula a velocidad c dentro de una caja de largo L y masa M .

La partícula tendrá energía:

$$E = p_x c$$

Por conservación de momentum, la caja experimentará un pequeño culatazo a velocidad $v \ll c$.

$$p_x = Mv$$



Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Al llegar el final de la caja, la partícula habrá tardado:

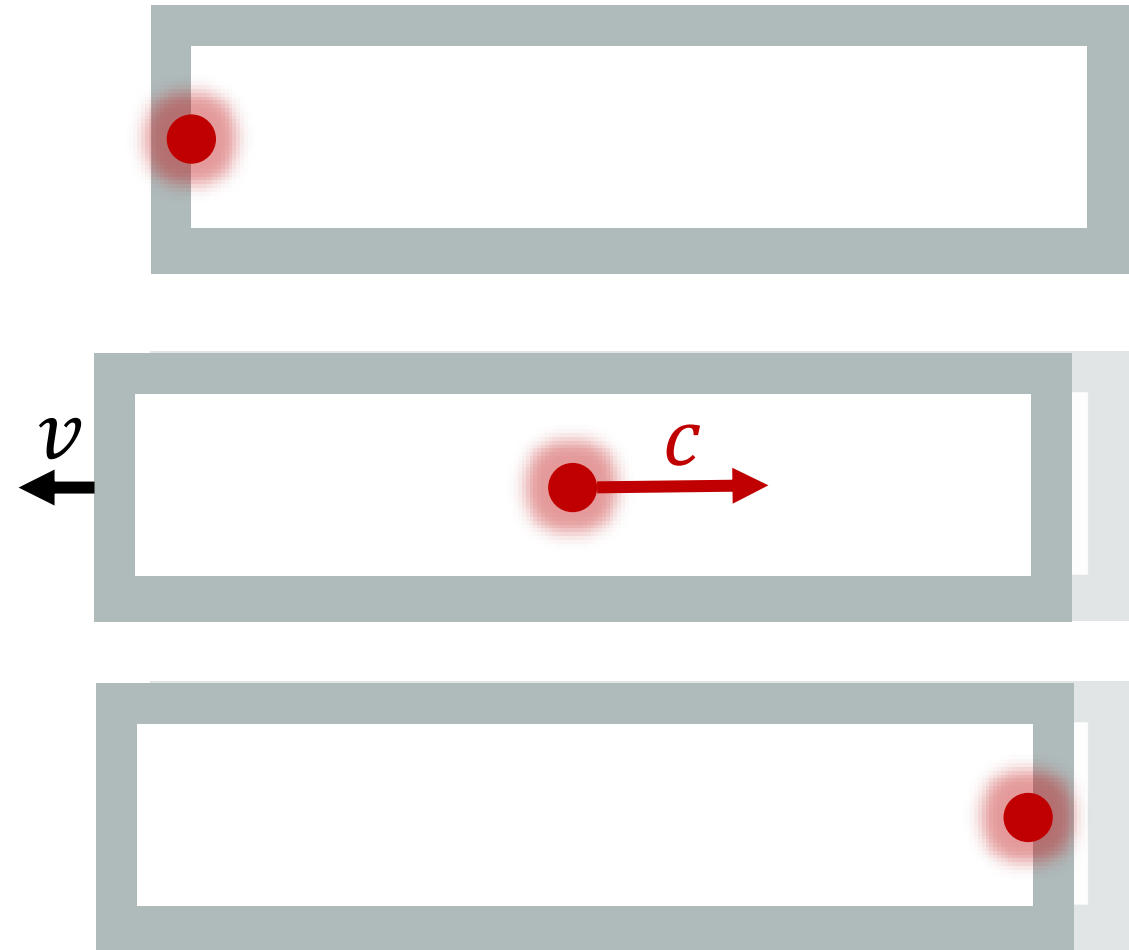
$$t = L/c$$

Asimismo, la caja se habrá movido:

$$d = vt = vL/c$$

Igualando momentum y reemplazando v :

$$\frac{E}{c} = Mv = Mdc/L$$



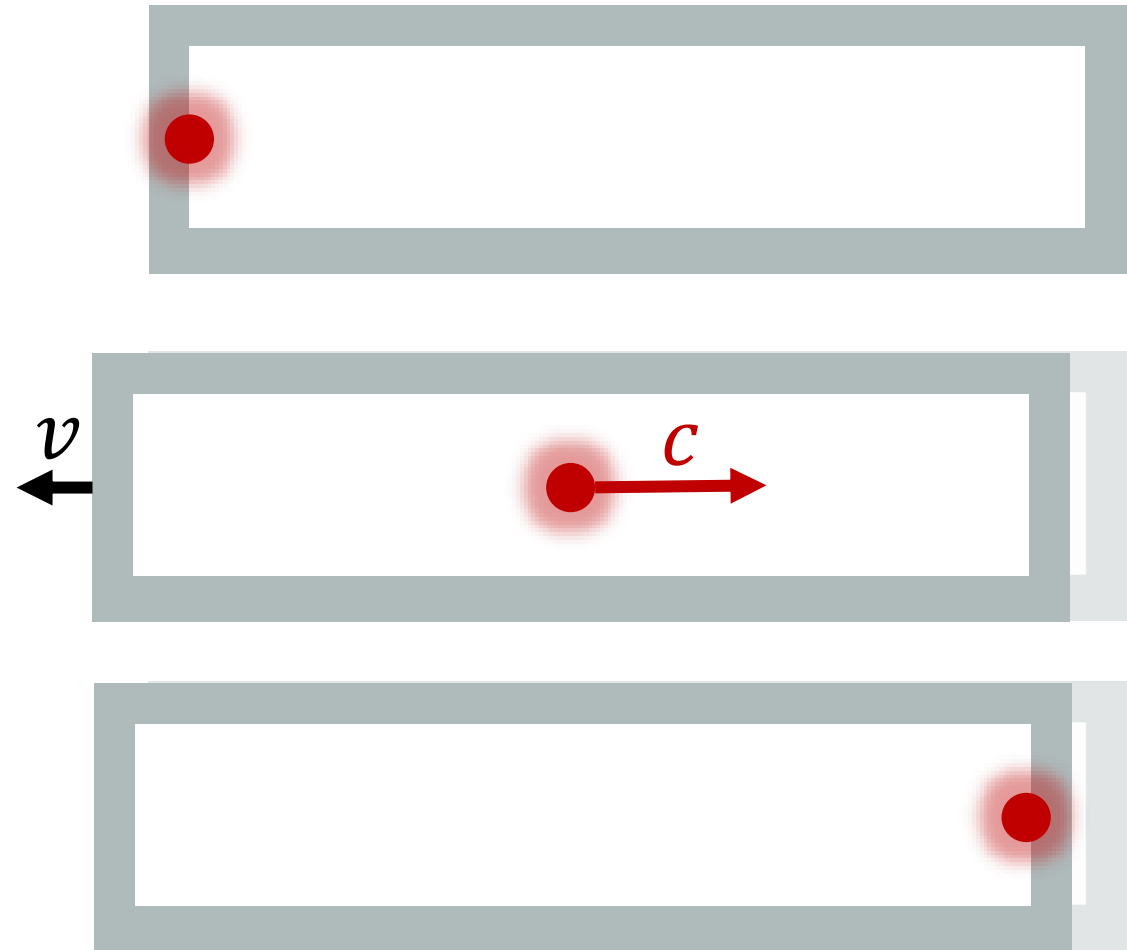
Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Despejando:

$$d = \frac{EL}{Mc^2}$$

No hay fuerzas externas actuando en el sistema. El centro de masa no cambió. La partícula debió transferir una pequeña cantidad de masa m .

$$Md = mL$$



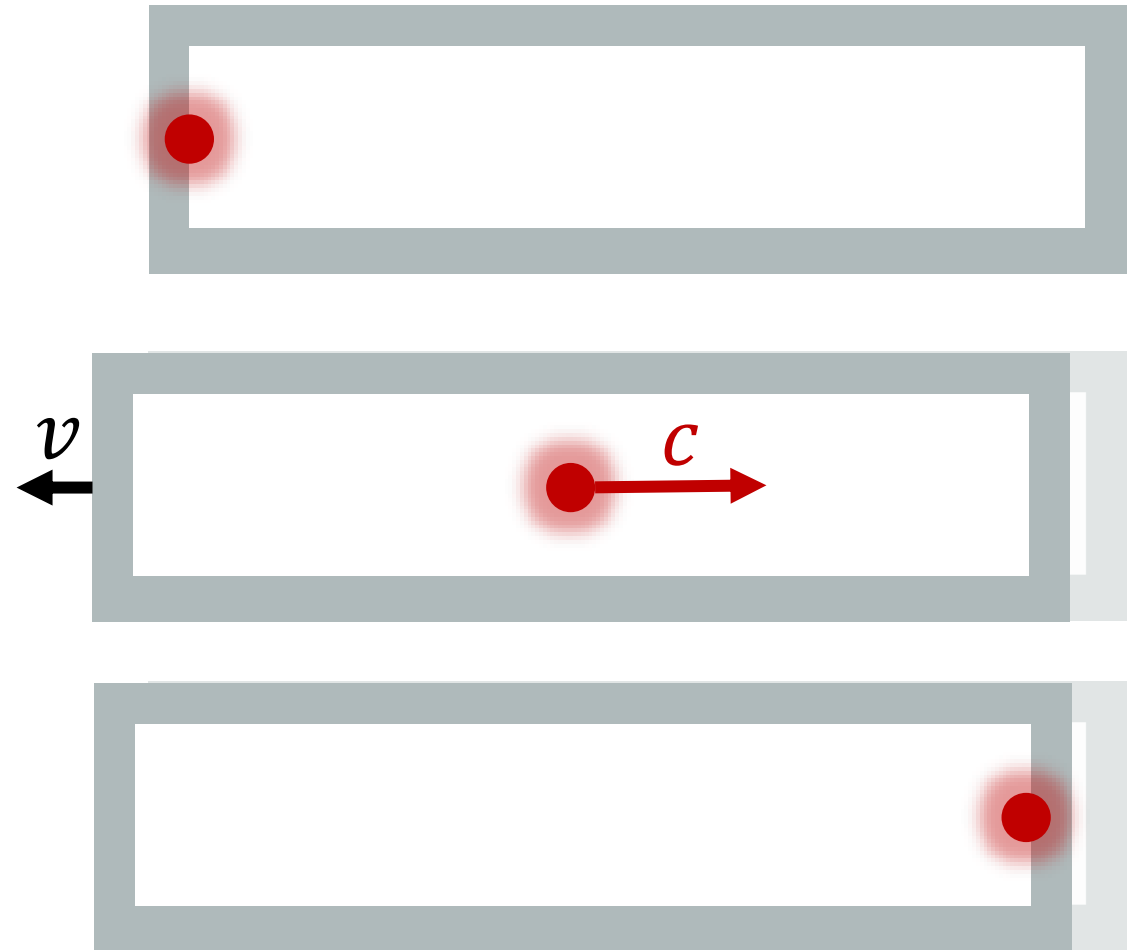
Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Tenemos:

$$\frac{mL}{M} = \frac{EL}{Mc^2}$$

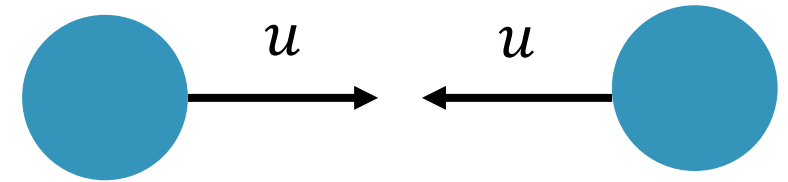
Luego:

$$E = mc^2$$



Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Consideremos el choque inelástico entre dos objetos que se acercan a velocidad u .



Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Por conservación de masa y momentum:

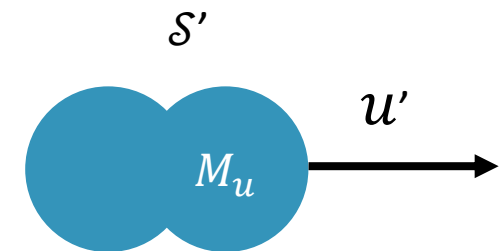
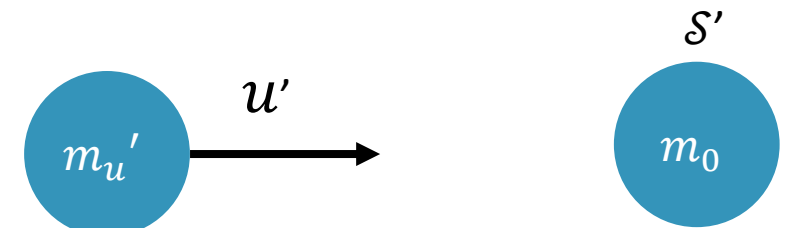
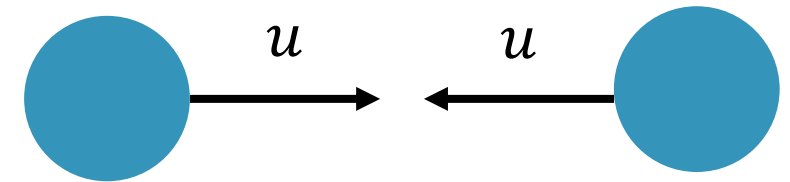
$$m_0 + m'_u = M_u \quad m'_u u' = M_u u$$

Luego:

$$m_0 + m'_u = m'_u \frac{u'}{u}$$
$$m'_u = \frac{m_0}{(u'/u - 1)}$$

$$m'_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$$

"Masa" relativista



Mecánica Relativista: Momentum y Energía

A partir de m'_u :

$$p' = m'_u u' \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{m_0 u'}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$$

$$E' = m'_u c^2 \quad \Rightarrow \quad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$$

Si todo está escrito en función de u' , debería ser posible encontrar una transformación de Lorentz para momentum y energía entre sistemas.

Mecánica Relativista: Momentum y Energía

Reemplazemos u'_x usando Transformaciones de Lorentz:

$$p'_x = \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{u'_x}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\right)^2 / c^2}} \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\right) = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\right)^2}} \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\right)$$

$$p'_x = \frac{m_0 c (u_x - v)}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 - (u_x - v)^2}} = \frac{m_0 (u_x - v)}{\sqrt{1 - 2vu_x/c^2 + (vu_x/c^2)^2 - u_x^2/c^2 + 2uvc^2 - v^2/c^2}}$$

$$p'_x = \frac{m_0 u_x - m_0 v}{\sqrt{1 - (u_x^2 + v^2)/c^2 + (vu_x/c^2)^2}} = \frac{m_0 u_x - m_0 v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u_x^2/c^2)}} = \frac{m_u u_x - m_u v}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right)$$

Para las otras componentes se tiene que $p'_y = p_y$ y $p'_z = p_z$.
Les recomiendo comprobarlo.

Mecánica Relativista: Fuerza

Sabemos que la fuerza es la derivada del momentum. Luego:

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp'_x}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dp'_x/dt}{dt'/dt} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right) \right)}{\frac{d}{dt} \left(\gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \right)} = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} \frac{dE}{dt}}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}$$

La energía es simplemente trabajo: $\Delta E = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2} (F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} = \frac{F_x \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right) - \frac{v}{c^2} (F_y u_y + F_z u_z)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}$$

$$F'_x = F_x - \frac{\frac{v}{c^2} (F_y u_y + F_z u_z)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}$$

Mecánica Relativista: Fuerza

Para el caso de las otras componentes:

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp'_y}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dp'_y/dt}{dt'/dt} = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp'_z}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dp'_z/dt}{dt'/dt} = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

Así:

$$\mathbf{F}' = \gamma \left\langle F_x - \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{v}{c^2}\right) (F_y u_y + F_z u_z), \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} \frac{F_y}{\gamma}, \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} \frac{F_z}{\gamma} \right\rangle$$

Mecánica Relativista

Vectorialmente, la fuerza será:

$$\mathbf{F}' = \gamma \left\langle F_x - \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{v}{c^2}\right) (F_y u_y + F_z u_z), \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} \frac{F_y}{\gamma}, \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} \frac{F_z}{\gamma} \right\rangle$$

Pero:

$$\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^{-1} = \left(1 - \left(\frac{u'_x v + v^2}{c^2 + v u'_x}\right)\right)^{-1} = \gamma^2 (1 + v u'_x / c^2)$$

$$\mathbf{F}' = \gamma \left\langle F_x - \gamma^2 \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right) \left(\frac{v}{c^2}\right) (F_y u_y + F_z u_z), \gamma \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right) F_y, \gamma \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right) F_z \right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma \langle F_x + F_y + F_z \rangle + \left\langle -\gamma \left(\frac{v}{c^2}\right) (F_y u'_y + F_z u'_z), \gamma \left(\frac{v}{c^2}\right) u'_x F_y, \gamma \left(\frac{v}{c^2}\right) u'_x F_z \right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma \langle F_x + F_y + F_z \rangle + \left\langle -\gamma \left(\frac{v}{c^2}\right) (F_y u'_y + F_z u'_z), \gamma \left(\frac{v u'_x}{c^2}\right) F_y, \gamma \left(\frac{v u'_x}{c^2}\right) F_z \right\rangle$$

Mecánica Relativista

Realizando un poco de álgebra:

$$\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} + \gamma \left\langle -\left(\frac{v}{c^2}\right) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'), \left(\frac{v}{c^2}\right) u'_x F_x, \left(\frac{v}{c^2}\right) u'_x F_y, \left(\frac{v}{c^2}\right) u'_x F_z \right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} + \gamma \left\langle -\left(\frac{v}{c^2}\right) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'), 0, 0 \right\rangle + \gamma \left\langle \left(\frac{v}{c^2}\right) (u'_x F_x), \left(\frac{v}{c^2}\right) u'_x F_y, \left(\frac{v}{c^2}\right) u'_x F_z \right\rangle$$

$$\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} + \gamma \left\langle -\left(\frac{v}{c^2}\right) \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}', 0, 0 \right\rangle + \gamma \left(\frac{u'_x v}{c^2} \right) \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} - \frac{\gamma}{c^2} \langle v, 0, 0 \rangle (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}') + \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{u}' \cdot \langle v, 0, 0 \rangle) \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} - \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}') + \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) \mathbf{F}$$

Mecánica Relativista

Reescribimos la expresión en función de \mathbf{u}

$$\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} + \frac{\gamma}{c^2} \left[-\mathbf{v}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}') + \frac{1}{c^2} (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) \mathbf{F} \right] = \gamma \mathbf{F} + \frac{\gamma}{c^2} [\mathbf{v}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{F}]$$

Inspeccionando la expresión obtenida, es posible identificar un triple producto vectorial:

$$\mathbf{F}' = \gamma \mathbf{F} + \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F})$$

Si $v \ll c$, $\gamma \approx 1$. Luego

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{F}]$$

Electrodinámica Relativista

Este contenido se desbloqueará después de la clase presencial.

;)

Resumen

Este contenido se desbloqueará después de la clase presencial.

;)

Cerremos la clase de hoy

Este contenido se desbloqueará después de la clase presencial.

;)