Clase 04
Electrostática en Materiales

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 177 – 198

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Ya estudiamos el caso electrostático del vacío. Toca ampliarlo a cualquier medio material.
- Nos centraremos en dieléctricos y en definir un material simple a base de propiedades eléctricas.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-06:** Plantear y resolver ecuaciones del electromagnetismo para resolver problemas en medios materiales (polarización y magnetización).
- **OA-10:** Distinguir el significado de la formulación diferencial e integral de las ecuaciones de Maxwell, tanto para campos estáticos como variantes en el tiempo.

Contenidos

- Corrientes
- Conductores
- Dieléctricos y Polarización
- Susceptibilidad y Permitividad eléctrica
- Materiales eléctricos
- Ecuación de continuidad

Corriente y Densidad de Corriente

- La corriente se define como la **carga neta** que fluye a través de un área por unidad de tiempo.

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

- La densidad de corriente se definirá como el flujo corriente que pasa perpendicularmente a través de una unidad de superficie.

$$\boxed{\mathbf{J} = \frac{\Delta I}{\Delta S}}$$

Corriente y Densidad de Corriente

- La primera expresión es un escalar, la segunda es un vector. ¿Cómo se vinculan entonces?
- Dado que se atraviesa perpendicularmente un área superficial:

$$\boxed{\Delta I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta S}}$$

- Integrando:

$$\boxed{I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}$$

Corrientes de convección y conducción

La densidad de corriente puede producirse de 3 formas:

- **Corriente de convección:** dada por flujos de cargas en medios aislantes, de densidad ρ_v y velocidad $\mathbf{u}$.

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}}$$

- **Corrientes de conducción:** dada por la influencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un conductor de conductividad σ.

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E}}$$

- **Corrientes de desplazamiento:** Causadas por [redacted]

[redacted]

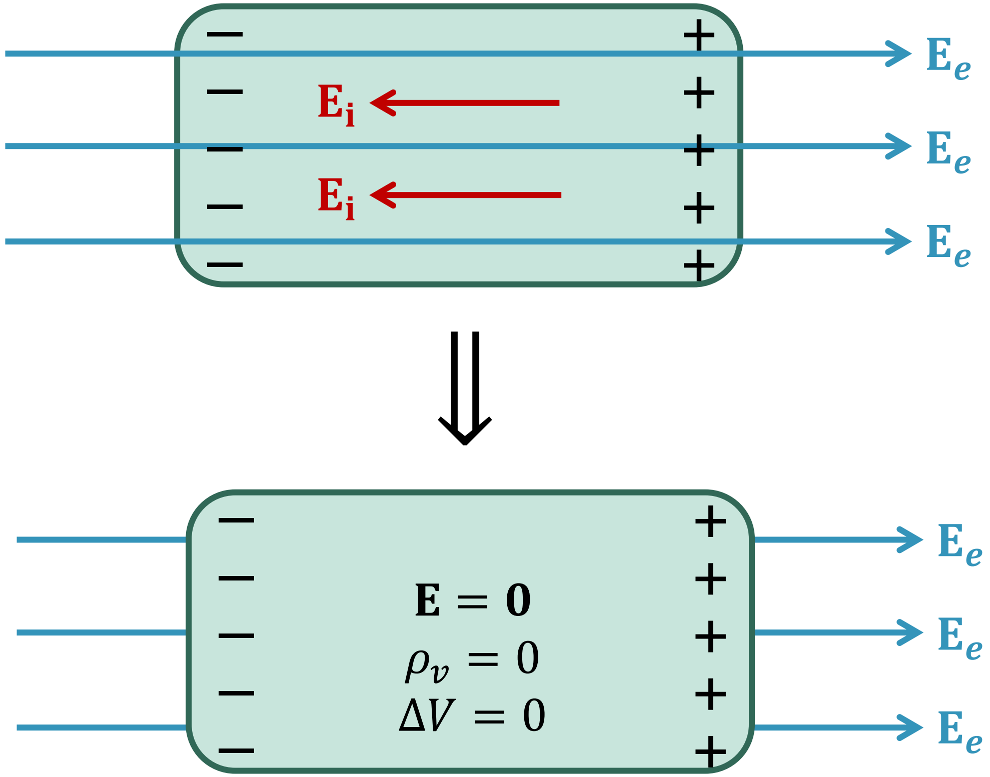
Conductores

- Son materiales con abundancia de cargas libres.

- 2 casos de estudio:
    - Conductores aislados
    - Conductores a un potencial fijo

Conductores aislados

- La presencia de un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_e$ desplaza las cargas positivas.
- Se induce un campo eléctrico interno $\mathbf{E}_i$ que desplaza las cargas negativas en sentido contrario.
- Si el conductor es perfecto ($\sigma = \infty$), el campo al interior es nulo.

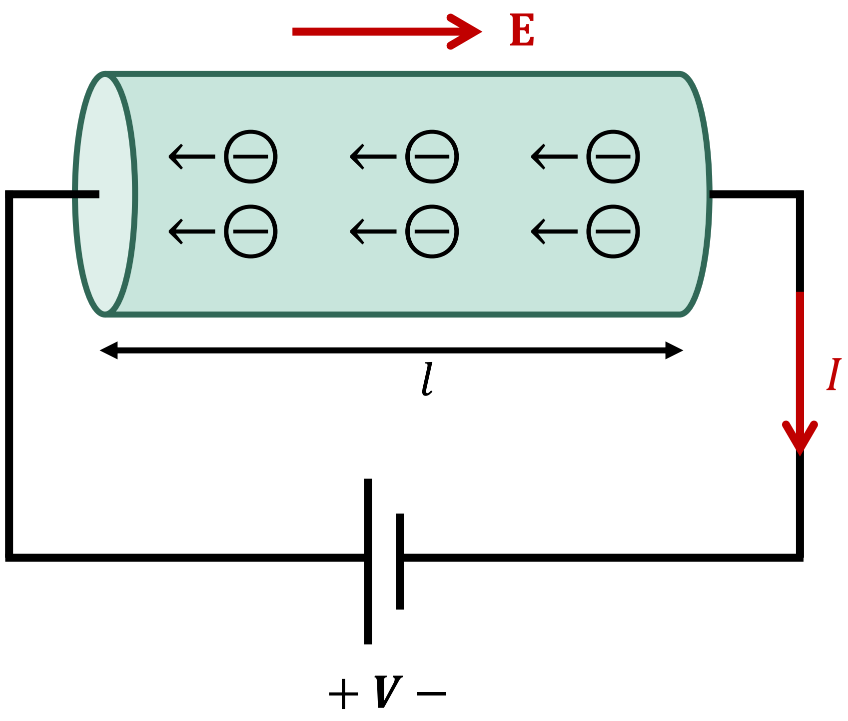


Conductores a potencial fijo

- En este caso las cargas tienen un camino por el cual circular libremente, lo cual genera una corriente I.
- Sabemos que la magnitud del campo estará dada por:

$$V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} \qquad \Longrightarrow \qquad E = \frac{V}{l}$$

- Esto nos lleva a un viejo conocido.

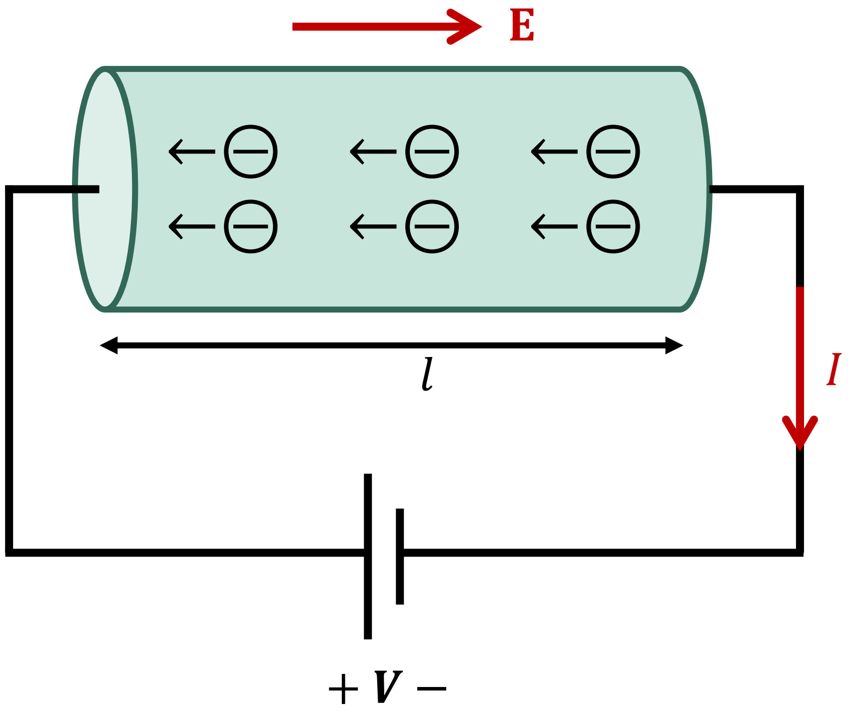


Conductores a potencial fijo

- El conductor tiene área transversal uniforme: $J = I/S$
- La corriente generada es una corriente de conducción: $J = \sigma E$
- Igualando J:

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{l}$$

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{V}{I}}$$



Conductores a potencial fijo

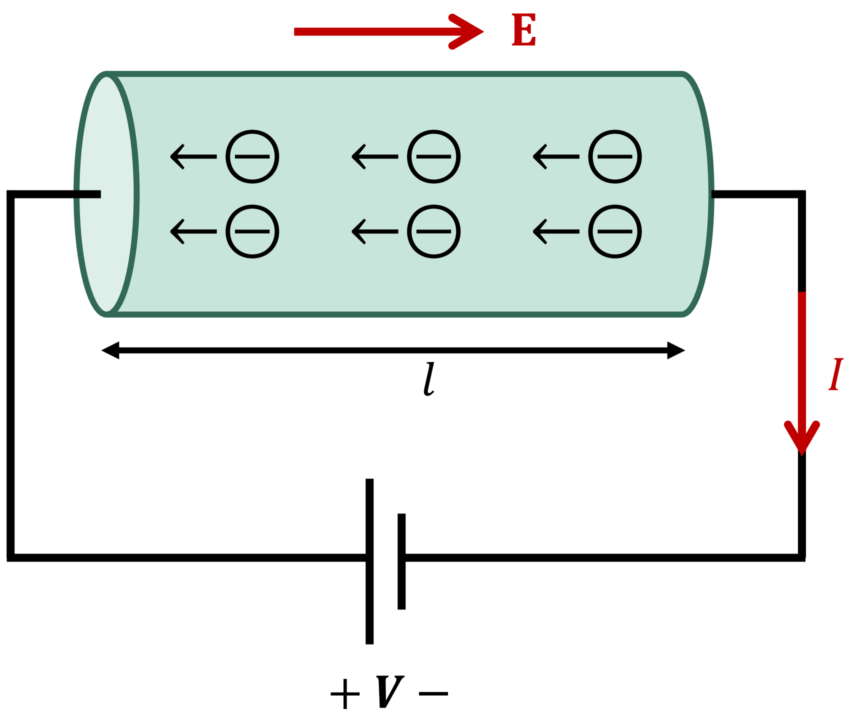
- De este modo:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}$$

Ley de Ohm microscópica

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{\int_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}}{\int_S \sigma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}}$$

Ley de Ohm macroscópica



Conductores a potencial fijo

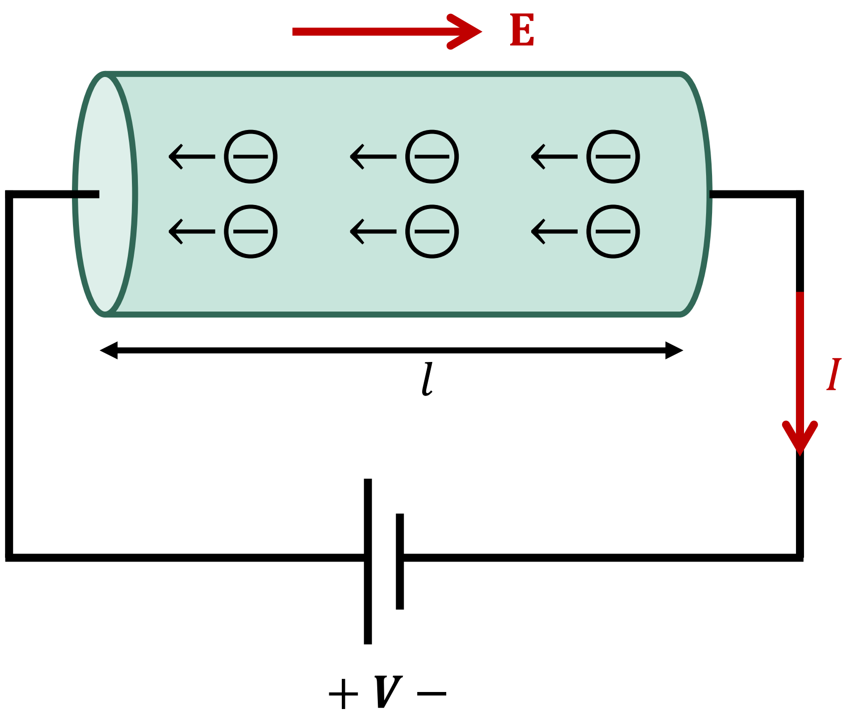
- Y para la potencia:

$$dP = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \rho_v dv \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

- Integramos:

$$\boxed{P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv}$$

Ley de Joule



- Si el conductor es uniforme ($dv = dl\ dS$):

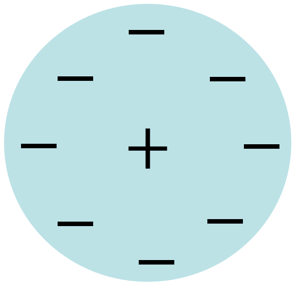
$$P = \int_V E dl \int_S J dS = VI$$

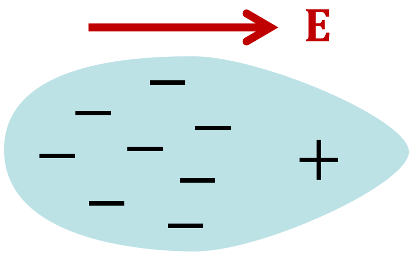
Dieléctricos y Polarización

- Ya vimos lo que pasa al aplicar el campo a un conductor.
- ¿Y si ahora es un dieléctrico (aislante)?

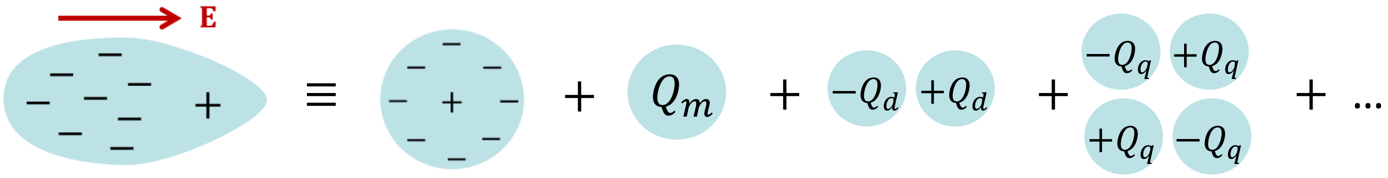
Dieléctricos y Polarización

- Consideremos un átomo eléctricamente neutro.
- Al aplicar un campo, las cargas positivas y negativas se ven desplazadas en sentidos opuestos.



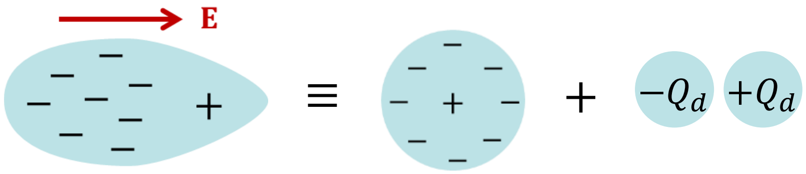


- Por expansión multipolar, el sistema puede reescribirse como:



Dieléctricos y Polarización

- Simplificando:



- Podemos definir la polarización como el momento dipolar por unidad de volumen del dieléctrico.

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\sum_{k=1}^{N} Q_k \boldsymbol{d}}{\Delta v} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{p}}{\Delta v}}$$

Dieléctricos y Polarización

- De la clase anterior, sabemos que el potencial dipolar es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\int_\Omega \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}_\mathrm{r}\rho(\mathbf{r}')\,d\tau'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\int_\Omega \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}_\mathrm{r}\,\frac{\Delta Q}{\Delta v}(\mathrm{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\int_\Omega \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_\mathrm{r}\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}$$

- O bien:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_\mathrm{r}dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{P}\cdot\frac{\mathbf{a}_\mathrm{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dv'$$

Dieléctricos y Polarización

- Usando la identidad $\nabla \cdot f\mathbf{A} = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$:

$$\mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\nabla' \cdot \mathbf{P}$$

- Luego:

$$V = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{P} \cdot \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) dv' = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\nabla' \cdot \mathbf{P}\right] dv'$$

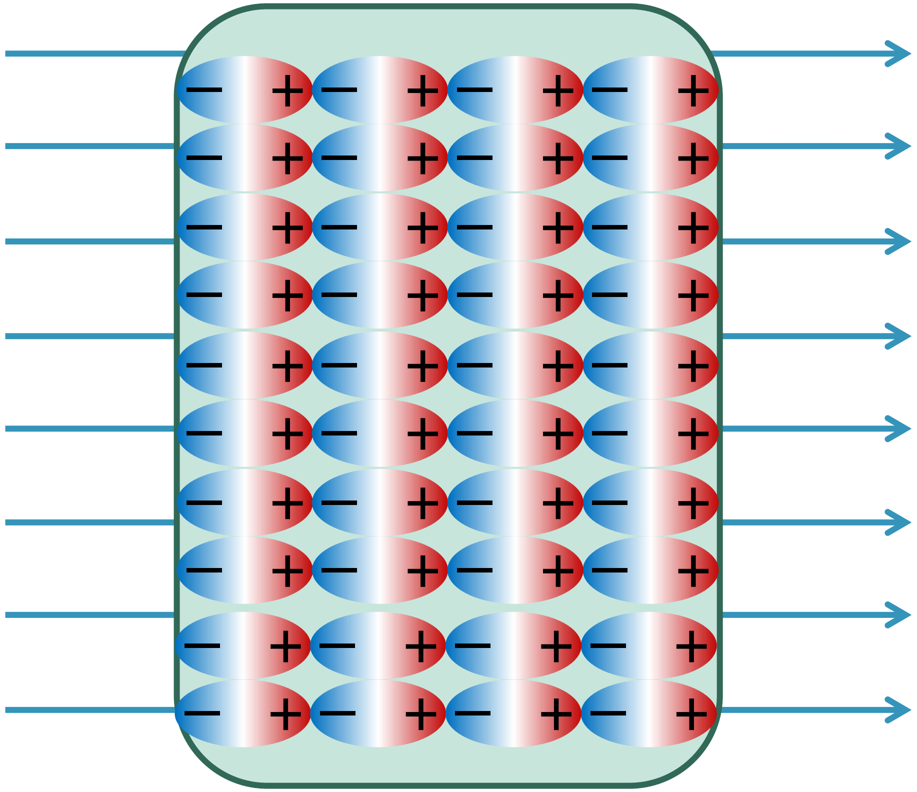
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\left[\oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n dS' + \int_{V'} -\nabla' \cdot \mathbf{P}\, dv'\right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\left[\oint_{S'} \rho_{ps} dS' + \int_{V'} \rho_{pv}\, dv'\right]$$

Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

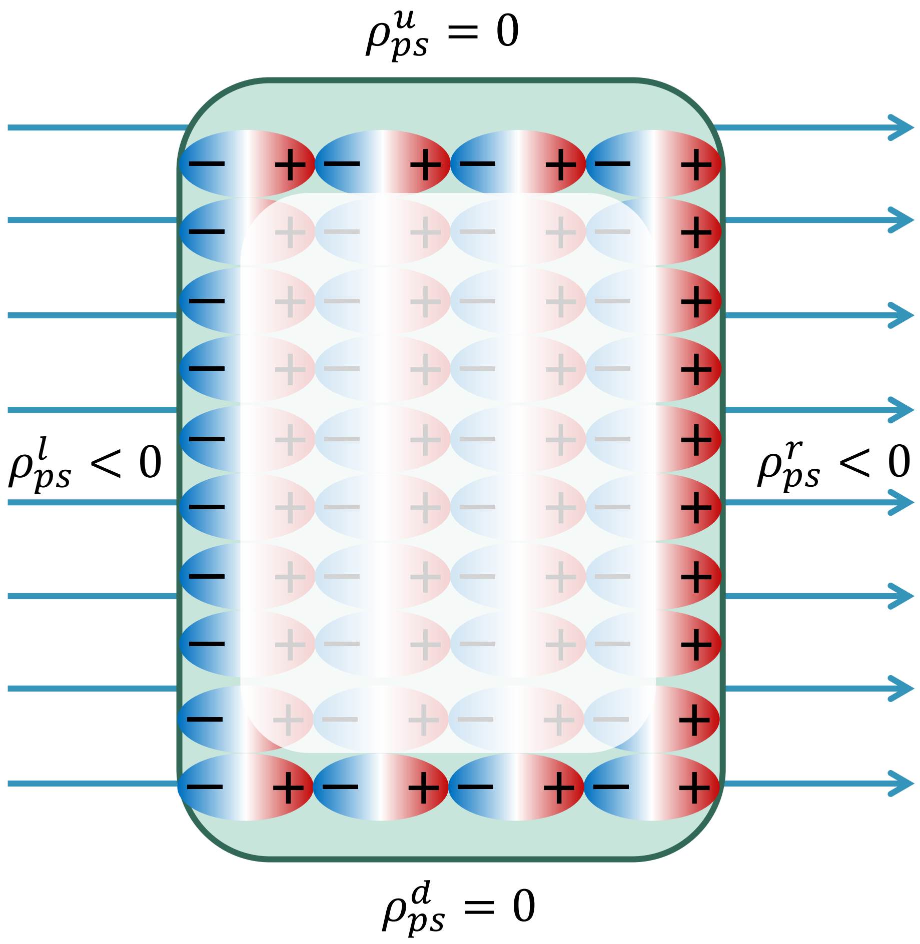
- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.



Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

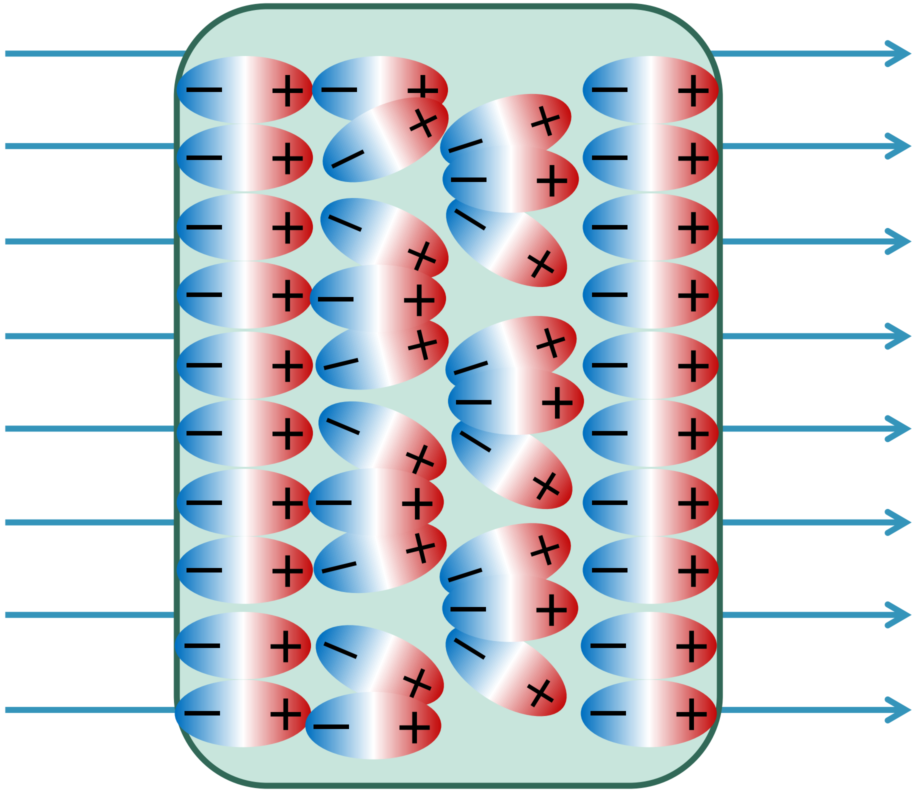
- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.



Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

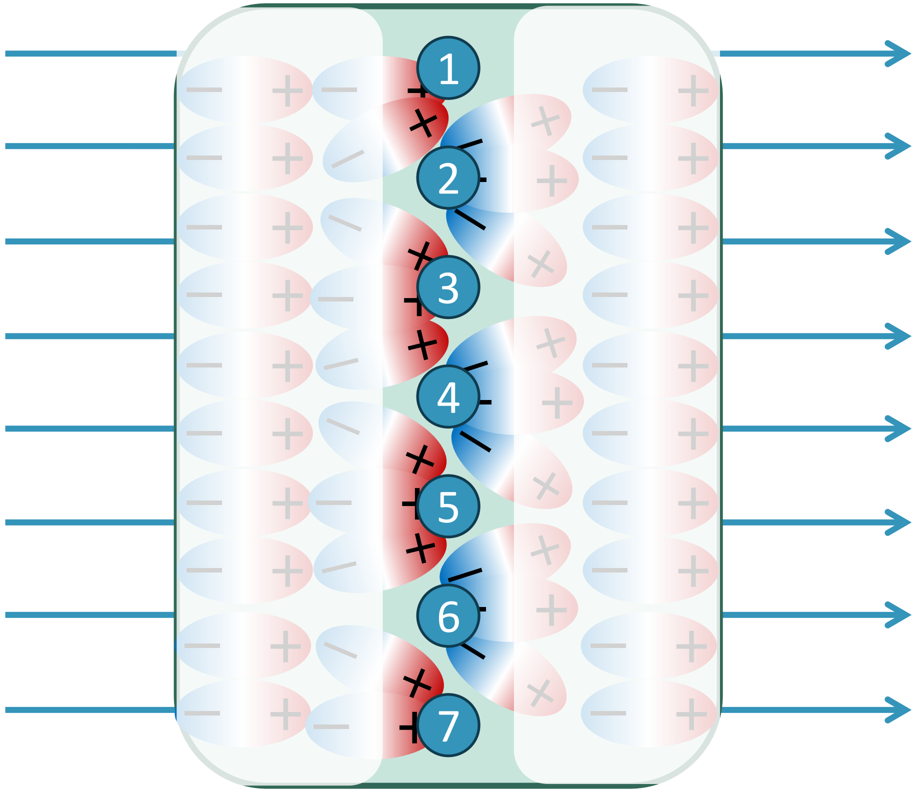
- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.



Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.



$\rho_{pv}^{1,3,5,7} > 0$ $\rho_{pv}^{2,4,6} < 0$

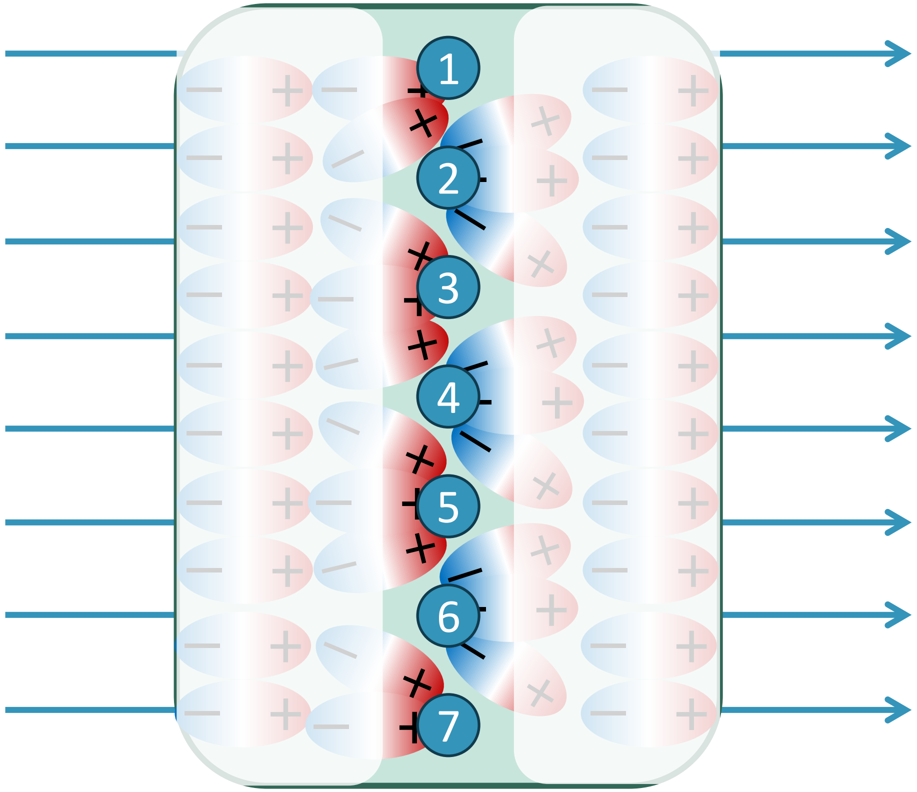
Dieléctricos y Polarización

Producto de la polarización nacen 2 densidades de cargas ligadas:

- ρ_{ps} : confinadas a la superficie.
- ρ_{pv} : confinadas al volumen.

Si el dieléctrico era inicialmente neutro, y no agregamos cargas libres:

$$\oint_S \rho_{ps} dS + \int_V \rho_{pv}\, dv = 0$$



$\rho_{pv}^{1,3,5,7} > 0$ $\rho_{pv}^{2,4,6} < 0$

Dieléctricos y Polarización

- Si incorporamos cargas libres al dieléctrico y consideramos solo las cargas volumétricas, por Ley de Gauss:

$$\rho_{tot} = \rho_v + \rho_{pv} = \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\rho_v = \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} - \rho_{pv} = \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} - \rho_{pv} = \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$$

Campo en un Dieléctrico

Susceptibilidad y permitividad eléctrica

- En algunos dieléctricos, la polarización es proporcional al campo aplicado a razón χ_e (susceptibilidad eléctrica):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

- Luego, podemos definir la permitividad eléctrica como:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ε_0: permitividad del vacío
ε_r: permitividad relativa

- Así

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}}$$

Campo en un Dieléctrico

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
  Capacidad de permitir el flujo de corriente (conductores vs dieléctricos).
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes

  Presencia de una densidad de cargas (monopolos, dipolos naturales).
- Linealidad
- Isotropía
- Homogeneidad

Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad

  D varía linealmente con E, permitividad constante (lineales vs no lineales).
- Isotropía
- Homogeneidad

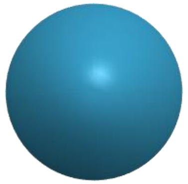
Tipos de Materiales Eléctricos

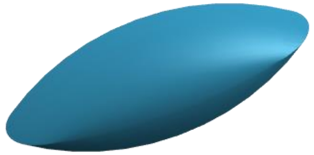
Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía

  No hay regiones espaciales predilectas para la permitividad.

  Simetría rotacional. (Isotrópicos vs anisotrópicos).
- Homogeneidad





Tipos de Materiales Eléctricos

Podemos caracterizar un material eléctrico en base a un conjunto de propiedades:

- Conductividad
- Presencia de fuentes
- Linealidad
- Isotropía
- <u>Homogeneidad</u>

  La permitividad es constante en toda la extensión del material.

  Simetría traslacional. (Homogéneos vs no-homogéneos).

Tipos de Materiales Eléctricos

Definiremos un dieléctrico simple como aquel material que es:

- No conductor
- Libre de fuentes
- Lineal
- Isotrópico
- Homogéneo

Ecuación de continuidad

- Consideremos un volumen con un flujo de corriente hacia el exterior.
- Las cargas no aparecen y desaparecen mágicamente, si fluye una corriente hacia el exterior, se deben estar perdiendo cargas en el interior del volumen.

$$I_{out} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_{in}}{dt}$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv = -\frac{d}{dt}\int_v \rho_v dv = -\int_v \frac{d\rho_v}{dt} dv$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}}$$

Ecuación de continuidad

Ecuación de continuidad

- En resumen: Al salir corriente se pierde carga.

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}}$$

Ecuación de continuidad

- Si el flujo de cargas es estable:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\boxed{\sum I = 0}$$

Ley de Kirchoff

Resumen

- Repasamos los conceptos de corriente y resistencia, así como los efectos de conducción y polarización en materiales eléctricos.
- Al definir $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ podemos aplicar las ecuaciones de Maxwell antes vistas a medios materiales.
- Aprendimos las distintas características de un material eléctrico, y con ellas definimos un material "simple".
- Formulamos la ecuación de continuidad y a partir de ella obtuvimos la ley de corrientes de Kirchhoff.

Cerremos la clase de hoy

- Terminamos de hacer un análisis “clásico” de la Teoría Electrostática.
- Veamos qué comienza a suceder cuando las cosas se mueven increíblemente rápido.

- Próxima Clase (Viernes 15/marzo):

  Relatividad Especial

- Bibliografía:

  Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition: pp. 502 – 552

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Momentum

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$$

Producto Cruz

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$