



## Control 5

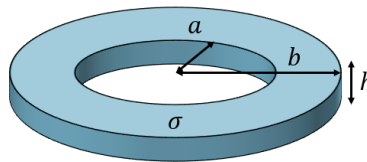
4 de abril de 2024

Nombre:

### Pregunta 1

Considere un disco de radio interno  $a$ , radio externo  $b$ , grosor  $h$  y conductividad  $\sigma$ . Usando ecuaciones de Poisson/Laplace, encuentre la resistencia entre las caras superior e inferior.

**PD: Puede comprobar su resultado usando otro método. Pero si no lo resuelve mediante Poisson/Laplace, su desarrollo no será considerado.**



Fórmulas útiles

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$E = -\nabla V$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\Delta V = IR$$

**Solución:**

No hay presencia de cargas, entonces aplicamos Laplace e integramos 2 veces.

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

$$V(z) = Az + B$$

**[1pt] Criterio de asignación:**

- 0.5pt punto por plantear la ecuación de Laplace.
- 0.5pt punto por integrar 2 veces y llegar a  $V(z) = Az + B$ .
- No hay otros puntajes intermedios.

Aplicamos las condiciones de borde para determinar  $A$  y  $B$ . Sea  $V_0$  el potencial entre las dos superficies horizontales tal que  $V(z=0) = 0$  y  $V(z=h) = V_0$ ,  $V = V(z)$ .

$$V(z=0) = 0 \longrightarrow B = 0$$

$$V(z=h) = V_0 \longrightarrow A = \frac{V_0}{h}$$

Reemplazando las constantes, el potencial eléctrico será simplemente:

$$V = \frac{V_0}{h}z$$

**[2pt] Criterio de asignación:**

- 1pt por plantear las condiciones.
- 1pt por la expresión de potencial eléctrico con los parámetros despejados.
- No hay otros puntajes intermedios.

Con la expresión obtenida, despejamos campo y corriente.

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\hat{z} = -\frac{V_0}{h}\hat{z}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{\sigma V_0}{h}\hat{z}$$

$$d\mathbf{S} = -\rho d\phi d\rho \hat{z}$$

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=a}^b \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{V_0\sigma}{h} \rho d\phi d\rho = \frac{V_0\sigma}{h} 2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_a^b = \frac{V_0\sigma\pi(b^2 - a^2)}{h}$$

**[2pt] Criterio de asignación:**

- 0.5pt por la expresión del campo eléctrico.
- 0.5pt por la expresión de densidad de corriente.
- 0.5pt por la expresión del diferencial de área.
- 0.5pt por la expresión de la corriente.

- Asignar mitad de puntaje (0.25pt) en caso de errores de arrastre en alguna de las expresiones.
- No hay otros puntajes intermedios.

Finalmente, aplicando  $\Delta V = IR$

$$R = \frac{V_0 - 0}{I} = \frac{h}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$

**[1pt] Criterio de asignación:**

- 1pt por llegar a la expresión.
- 0.5pt en caso de algún error de arrastre.
- No hay otros puntajes intermedios.