Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Control 3

14 de marzo de 2024

Nombre:

Pregunta 1: Expansión Multipolar

Considere una esfera de radio R, centrada en el origen, y que posee una densidad de carga volumétrica:

$$\rho(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^2}(R - 2r)sin\theta$$

donde r, θ, y ϕ son las coordenadas esféricas.

Sea P un punto que se mueve a lo largo del eje z. Encuentre:

a) La expresión para el vector $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

b) La expresión para el diferencial de volumen dv'.

c) Los primeros 4 momentos polares (monopolo, dipolo, cuadripolo, octopolo).

d) Concluya respecto a la distribución de cargas, de acuerdo al resultado obtenido en (c).

e) El potencial aproximado en el eje z, lejos de la esfera. Basta con el primer término no nulo.

f) El campo eléctrico aproximado en el eje z, lejos de la esfera.

Los Polinomios de Legendre para $n = 0...3$ están dados por:

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Respuesta:

a) [**0.5 pts**]

Definimos los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r + 0\mathbf{a}_\theta + 0\mathbf{a}_\phi \qquad\qquad \mathbf{r} = r'\mathbf{a}_r + \theta'\mathbf{a}_\theta + \phi'\mathbf{a}_\phi$$

O en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r} = 0\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \qquad\qquad \mathbf{r}' = r'sin\theta'cos\phi'\mathbf{a}_x + r'sin\theta'sin\phi'\mathbf{a}_y + r'cos\theta'\mathbf{a}_z$$

De este modo, la resta de ambos vectores puede ser escrita, en esféricas o cartesianas, como:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (r - r')\mathbf{a}_r - \theta'\mathbf{a}_\theta - \phi'\mathbf{a}_\phi$$
$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = r'sin\theta'cos\phi'\mathbf{a}_x + r'sin\theta'sin\phi'\mathbf{a}_y + (z - r'cos\theta')\mathbf{a}_z$$

En cuanto al módulo de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, este será:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}|' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

$$\boxed{|\mathbf{r} - \mathbf{r}|' = \sqrt{z^2 + (r')^2 - 2zr'cos\theta'}}$$

Criterio de corrección:

- (+0.25 pt) puntos si tiene ambos vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ definidos correctamente.
- (+0.25 pt) si tiene expresado correctamente el módulo $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.
- No hay puntajes intermedios.

Observación al corrector: Por error de enunciado se solicitó el "vector" $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Considere puntaje completo para quienes llegaron a la expresión de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

b) **[0.5 pts]**

El diferencial de radio está dado por dr', el diferencial de arco polar está dado por $r'd\theta'$, y el diferencial de arco azimutal está dado por $r'sin\theta'd\phi'$. Luego, el diferencial de volumen será:

$$\boxed{dv' = (r')^2 sin\theta' dr' d\theta' d\phi'}$$

Criterio de corrección:

- (+0.5 pt) puntos si define correctamente la expresión del diferencial.
- No hay puntajes intermedios.

c) **[2 pts]**

El momento n-polar estará dado por:

$$\int_{r'=0}^{R}\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{\phi'=0}^{2\pi}(r')^n P_n(cos\theta)\rho(r',\theta',\phi')(r')^2 sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

Monopolo ($n = 0$):

$$\int_{r'=0}^{R}\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{\phi'=0}^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(r')^2}(R-2r')sin\theta'(r')^2 sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\frac{2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{r'=0}^{R}(R-2r')dr'\cdot\int_{\theta'=0}^{\pi}sin^2\theta' d\theta'$$

$$\frac{2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\cancelto{0}{[Rr'-(r')^2]_0^R}\cdot\int_{\theta'=0}^{\pi}sin^2\theta' d\theta' = 0$$

Dipolo ($n = 1$):

$$\int_{r'=0}^{R}\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{\phi'=0}^{2\pi} r'cos\theta' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(r')^2}(R-2r')sin\theta'(r')^2 sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\frac{2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{r'=0}^{R} r'(R-2r')dr'\cdot\cancel{\int_{\theta'=0}^{\pi} cos\theta' sin^2\theta' d\theta'} = 0$$

Cuadripolo ($n = 2$):

$$\int_{r'=0}^{R}\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{\phi'=0}^{2\pi} (r')^2\frac{1}{2}(3cos^2\theta'-1)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(r')^2}(R-2r')sin\theta'(r')^2 sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\frac{\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{r'=0}^{R}(r')^2(R-2r')dr'\cdot\int_{\theta'=0}^{\pi}(3cos^2\theta'-1)sin^2\theta' d\theta'$$

$$\frac{\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{R^4}{6}\right]\cdot\left[\frac{\pi}{8}\right] = \frac{\pi R^5}{192\varepsilon_0}$$

Octopolo ($n = 3$):

$$\int_{r'=0}^{R}\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{\phi'=0}^{2\pi} (r')^3\frac{1}{2}(5cos^3\theta'-cos\theta')\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{(r')^2}(R-2r')sin\theta'(r')^2 sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

$$\frac{\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{r'=0}^{R}(r')^3(R-2r')dr'\cdot\cancel{\int_{\theta'=0}^{\pi}(5cos^3\theta'-cos\theta')sin^2\theta' d\theta'} = 0$$

Criterio de corrección:

- (+0.5 pt) por cada momento correcto.
- No hay puntajes intermedios.

d) **[1 pts]**

A partir del resultado anterior se concluye, que al menos para una aproximación hasta $n = 3$, la distribución se comporta como un cuadripolo puro.

Criterio de corrección:

- (1 pt) Si concluye que la distribución solo corresponde a un cuadripolo.
- (0.5pt) Para cualquier otra conclusión por error de arrastre, pero **debe incluir un valor no nulo para el cuadripolo**.
- (0 pt) En cualquier otro caso.

e) **[1 pts]**

Por expansión multipolar, la expresión para el voltaje será:

$$V(r', \theta', \phi') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int_{r'=0}^{R} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} (r')^n P_n(cos\theta) \rho(r', \theta', \phi')(r')^2 sin\theta' d\phi' d\theta' dr'$$

De c) tenemos que el primer término no nulo es el cuadripolo ($n = 2$). Luego:

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{R^5}{768\varepsilon_0^2 r^3}$$

Dado que se nos pide la expresión en z, debemos volver a cartesianas:

$$\boxed{V(0, 0, z) = \frac{R^5}{768\varepsilon_0^2 z^3}}$$

Criterio de corrección:

- (+0.5 pt) Si llega a la expresión en esféricas.
- (+0.5 pt) Si llega a la expresión en cartesianas.
- Si por error de arrastre llega a otra expresión, otorgue la mitad del puntaje en cada caso. Esto solo en caso que el desarrollo sea coherente.

f) **[1 pts]**

La relación potencial-campo está dada por:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Dado que solo tenemos componente en z:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{R^5}{256\varepsilon_0^2 r^4}}$$

Criterio de corrección:

- (1 pt) Si llega a la expresión correcta.
- (0.75 pt) Si llega a la expresión correcta en esféricas.
- (0.25 pt) Si logra un desarrollo coherente pero errado por error de arrastre (valor de V, derivar mal, error de signo, etc.).