Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 - Teoría Electromagnética
31/05/2024-1

# Ayudantía: Líneas de Transmisión

Catalina Sierra - catalina.sierra@uc.cl

## 1. Introducción

La principal **diferencia entre la teoría de circuitos eléctricos y de líneas de transmisión es el tamaño de sus componentes respecto a las longitudes de onda involucradas**. El análisis de circuitos asume que las dimensiones físicas de la red son mucho más pequeñas que las $\lambda$ involucradas, mientras que las LT y sus componentes pueden tener dimensiones similares o mayores que las $\lambda$ presentes.

Luego, una **línea de transmisión** es una red de **parámetros distribuidos**, donde corrientes y voltajes pueden variar en magnitud y fase en su largo, mientras que el análisis de circuitos trabaja con **parámetros concentrados** donde corriente y voltaje no varían de forma apreciable dentro de las dimensiones de los elementos.

Las líneas de transmisión son empleadas para transportar ondas EM y generalmente se representan por 2 cables, ya que en el caso de los modos TEM se requiere al menos dos conductores.

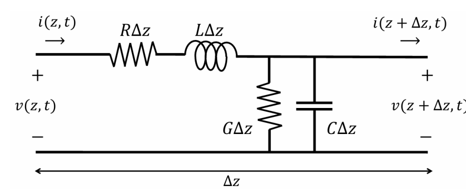


Figura 1: Circuito equivalente de parámetros concentrados

## 2. Impedancia de entrada y ROE

La línea de transmisión sin pérdidas de la Figura 2 termina en una carga $Z_L = 100 + j100\ [\Omega]$ y está compuesta de dos tramos: el primero de impedancia característica $Z_0 = 75\ [\Omega]$ y largo $1{,}5\lambda_0$, y el segundo $Z_1 = 50\ [\Omega]$ y largo $0{,}75\lambda_1$.

En base a esto determine:

- Impedancia de entrada $Z_{in}$ para posición señalada con línea vertical punteada (ver Fig. 2)
- ROE de la línea $Z_0$

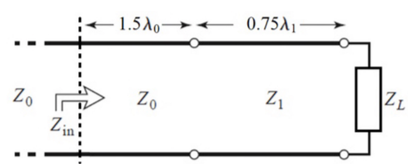


Figura 2: Línea de transmisión sin pérdidas del problema 2

**Solución**

Para determinar la impedancia de entrada $Z_{in}$ solicitada resulta necesario saber la impedancia, que denominaremos $Z_{in_2}$, que hay desde el final de $Z_0$ hacia la derecha, (como se muestra en la Figura 3 en color azul). Esto lo hacemos considerando la ecuación de impedancia de línea de transmisión sin pérdidas:

$$\boxed{Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}}$$

De esta forma:

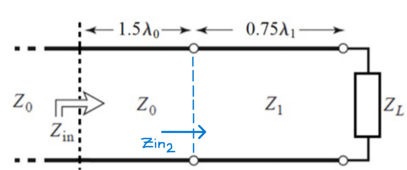


Figura 3: LT sin pérdidas del problema 2 con anotaciones

$$Z_{in_2} = 50 \cdot \frac{100 + j100 + j50 \cdot \tan(\beta_1 l_1)}{50 + j(100 + j100) \cdot \tan(\beta_1 l_1)} = 50 \cdot \frac{100 + j100 + j50 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot 0{,}75\lambda_1\right)}{50 + j(100 + j100) \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot 0{,}75\lambda_1\right)}$$

$$= 50 \cdot \frac{100 + j100 + j50 \cdot \tan(3\pi/2)}{50 + j(100 + j100) \cdot \tan(3\pi/2)} \approx 50 \cdot \frac{j50 \cdot \tan(3\pi/2)}{j(100 + j100) \cdot \tan(3\pi/2)} = 50 \cdot \frac{50}{100 + j100} = 12{,}5 - j12{,}5\ [\Omega]$$

Ahora podemos calcular $Z_{in}$ de forma equivalente:

$$Z_{in} = 75 \cdot \frac{12{,}5 + j12{,}5 + j75 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot 1{,}5\lambda_2\right)}{75 + j(12{,}5 + j12{,}5) \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot 1{,}5\lambda_2\right)} = 75 \cdot \frac{12{,}5 + j12{,}5 + j75 \cdot \tan(3\pi)}{75 + j(12{,}5 + j12{,}5) \cdot \tan(3\pi)} = 12{,}5 - j12{,}5\ [\Omega]$$

Ahora podemos calcular la ROE de la línea $Z_0$, partiendo por el coeficiente de reflexión.

Notemos que para efectos de la fórmula debemos entender que $Z_L$ corresponderá a la impedancia "de la carga" vista desde $Z_0$, lo cual corresponde a $Z_{in_2}$, y no debe confundirse con el valor dado para $Z_L$ en las Figuras 2 y 3.

Asimismo, $Z_0$ corresponde a la impedancia de la línea y al solicitarse calcular la ROE para la línea $Z_0$, utilizamos su valor de impedancia entregado que es de $75[\Omega]$. De esta forma tendremos:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_{in_2} - Z_0}{Z_{in_2} + Z_0} = \frac{12{,}5 - j12{,}5 - 75}{12{,}5 - j12{,}5 + 75} = -0{,}68 - j0{,}24 = 0{,}72111\angle{-160{,}5^o}$$

Finalmente calculamos la ROE, resultando:

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0{,}72111}{1 - 0{,}72111} = 6{,}1712$$

# 3. LT terminada en dos líneas

Considere la línea de transmisión que está terminada en 2 líneas, como se muestra en la Figura 4.

Los largos de los segmentos son $l_0 = l_1 = 1m$ y $l_2 = 0{,}8m$, y las impedancias de carga son $Z_1 = 30 + j70[\Omega]$ y $Z_2 = 75 - j10[\Omega]$.

Si todas las líneas son alimentadas con una señal de voltaje incidente $V_0{}^+ = 10V$ a frecuencia $f_0 = 1GHz$ y tienen las siguientes características:

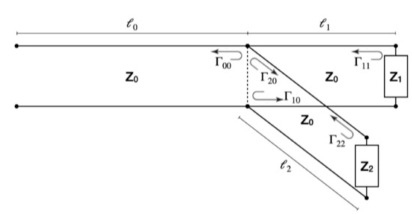

Figura 4: LT terminada en 2 líneas

$C = 73[pF/m]$ ; $L = 0{,}184[\mu H/m]$ ; $R = 0[\Omega/m]$ ; $G = 0[S/m]$

Determine:

- Constante de propagación, velocidad de propagación, permitividad del dieléctrico, longitud de onda e impedancia característica de la línea.

- $\Gamma_{00}$
- La potencia entregada a cada carga.

**<u>Solución</u>**
Partimos calculando constante de propagación, velocidad, permitividad del dieléctrico, longitud de onda e impedancia característica:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} = j23{,}028 \\
v_p &= \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2{,}7285 \times 10^8 \, [m/s] \\
\epsilon_r &= \frac{c^2}{{v_p}^2} = 1{,}21 \\
\lambda &= \frac{v_p}{f} = 0{,}27285 \, [m] \\
Z_0 &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = 50{,}21 \, [\Omega]
\end{aligned}$$

Para determinar $\Gamma_{00}$ usamos:

$$\Gamma_{00} = \frac{Z_{in_1}||Z_{in_2} - Z_0}{Z_{in_1}||Z_{in_2} + Z_0}$$

Pero necesitamos encontrar los valores de $Z_{in_1}$ y $Z_{in_2}$. Calculamos entonces las impedancias utilizando la fórmula para impedancias de entrada:

$$\begin{aligned}
Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \\
Z_{in_1} &= Z_0 \frac{Z_1 + jZ_0 \tan(\beta l_1)}{Z_0 + jZ_1 \tan(\beta l_1)} = 50{,}21 \frac{(30 + j70) + j50{,}21 \tan(2\pi/0{,}27285)}{50{,}21 + j(30 + j70) \tan(2\pi/0{,}27285)} = 40{,}46 - j84{,}05 \, [\Omega] \\
Z_{in_2} &= Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta l_2)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta l_2)} = 50{,}21 \frac{(75 - j10) + j50{,}21 \tan(1{,}6\pi/0{,}27285)}{50{,}21 + j(75 - j10) \tan(1{,}6\pi/0{,}27285)} = 70{,}22 + j16{,}38 \, [\Omega]
\end{aligned}$$

Entonces calculamos $Z_{in_1}||Z_{in_2}$:

$$Z_{in_1}||Z_{in_2} = \frac{Z_{in_1} Z_{in_2}}{Z_{in_1} + Z_{in_2}} = 48{,}8 - j17{,}5 \, [\Omega]$$

Y podemos encontrar el valor de $\Gamma_{00}$:

$$\Gamma_{00} = \frac{Z_{in_1}||Z_{in_2} - Z_0}{Z_{in_1}||Z_{in_2} + Z_0} = \frac{(48{,}8 - j17{,}5) - 50{,}21}{(48{,}8 - j17{,}5) + 50{,}21} = 0{,}0164 - j0{,}1738 = 0{,}1746\angle - 1{,}4762 \, [rad]$$

Finalmente la potencia entregada a cada carga se calcula como:

$$P_{avg}{}^1 = \frac{1}{2}|V_0{}^+|^2 Re\left\{\frac{1}{Z_{in_1}}\right\} = \frac{1}{2}10^2 Re\left\{\frac{1}{40{,}46 - j84{,}05}\right\} = 0{,}2325\,[W]$$
$$P_{avg}{}^2 = \frac{1}{2}|V_0{}^+|^2 Re\left\{\frac{1}{Z_{in_2}}\right\} = \frac{1}{2}10^2 Re\left\{\frac{1}{70{,}22 + j16{,}38}\right\} = 0{,}675\,[W]$$

## 4. Terminación CA en LT sin pérdidas

Una señal viaja por un cable coaxial sin pérdidas desde el generador hacia la carga y su amplitud es $V_0{}^+ = 10[V]$.

Si la carga es circuito abierto, muestre cuánto es el voltaje total en la línea a una distancia $d = 3\lambda/4$ de la carga.

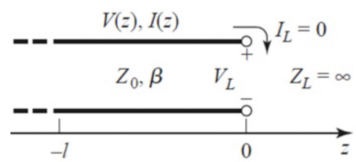

Figura 5: Referencia de LT terminada en circuito abierto

**Solución**
Sabemos que cuando la terminación es en circuito abierto ($Z_L \to \infty$) se cumple:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 1$$
$$ROE = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \approx \infty$$

El valor de $\Gamma = 1$ significa que la onda se refleja con igual magnitud y fase que la onda incidente. Podemos determinar el voltaje a una cierta distancia utilizando la fórmula:

$$V(z) = V_0{}^+(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{+j\beta z}) = V_0{}^+ e^{-j\beta z} + V_0{}^- e^{+j\beta z} = 2V_0{}^+ \cos(\beta z)$$
$$V(d) = 10(e^{-j2\pi\cdot 0{,}75} + e^{+j2\pi\cdot 0{,}75}) = 10 \cdot 2\cos(3\pi/2) = 0\,[V]$$

Esto podemos interpretarlo considerando que nos podemos encontrar en un punto tal que onda incidente y reflejada se superponen, cancelándose, por lo cual el voltaje es nulo.

Al ser la reflexión en fase con la onda incidente, resulta un voltaje nulo en $3\lambda/4$ debido a la cancelación de las componentes de la onda.

## 5. Terminación CC en LT sin pérdidas

De forma análoga al problema anterior, una señal viaja por un cable coaxial sin pérdidas desde el generador hacia la carga y su amplitud es $V_0{}^+ = 10[V]$.

Si la carga es cortocircuito, muestre cuánto es el voltaje total en la línea a una distancia $d = 3\lambda/4$ de la carga.

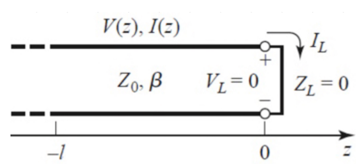

Figura 6: Referencia de LT terminada en cortocircuito

**Solución**
Sabemos que cuando la terminación es en cortocircuito ($Z_L = 0$) se cumple:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1$$
$$ROE = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \approx \infty$$

El valor de $\Gamma = -1$ explica que la onda se refleja con igual magnitud, con un cambio de fase o desfase de 180 grados.

Podemos determinar el voltaje a una cierta distancia utilizando la fórmula:

$$V(z) = {V_0}^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{+j\beta z}) = {V_0}^+ e^{-j\beta z} - {V_0}^- e^{+j\beta z} = -j2{V_0}^+ \sin(\beta z)$$
$$V(d) = 10(e^{-j2\pi \cdot 0{,}75} - e^{+j2\pi \cdot 0{,}75}) = 10 \cdot -j2 \sin(3\pi/2) = j20[V]$$

En una línea de transmisión terminada en cortocircuito, el voltaje en cualquier punto de la línea se representa como una función sinusoidal imaginaria, como se pudo ver en su fórmula derivada.

Esto se debe a que la reflexión en un cortocircuito introduce un desfase de 180 grados entre la onda incidente y la reflejada, resultando en una onda estacionaria. La reflexión está desfasada 180 grados respecto a la onda incidente, resultando en un voltaje puramente imaginario de $20j[V]$ en $3\lambda/4$, debido a la suma de las componentes de la onda.