

Clase 28

Caracterización de Antenas

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 707-731

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Ya introducimos el funcionamiento de antenas.
- Además, determinamos el campo, potencia y resistencia de algunas antenas comunes.
- Objetivos de Aprendizaje:
 - OA-20:** Evaluar la ganancia, impedancia de entrada y polarización de antenas dipolo.
 - OA-21:** Evaluar la intensidad de señal y potencia transmitida y recibida para simples enlaces entre dipolos.

Contenidos

- Características
- Ecuación de Friis
- Ecuación del RADAR
- Phased Arrays

Patrón de Radiación

- Nos enfocaremos en 3 diagramas:
- Diagrama de Campo
- Diagrama de Radiación
- Diagrama de Potencia

Campo lejano

- Anteriormente hemos establecido la condición $r \gg dl$ para asumir campo lejano. Esto es un poco abstracto.
- ¿Qué tan lejos hay que estar para asumir campo lejano?

Campo lejano

- Anteriormente hemos establecido la condición $r \gg dl$ para asumir campo lejano. Esto es un poco abstracto.
- ¿Qué tan lejos hay que estar para asumir campo lejano?

$$r \geq r_{\min} = \frac{2d^2}{\lambda}$$

Distancia de Fresnel

- d corresponde a la dimensión máxima de la antena. Por ejemplo, en un dipolo $\lambda/2$, $d = \lambda/2$. De este modo $r_{\min} = \lambda/2$.

Patrón de Radiación

- Nos enfocaremos en 3 diagramas:

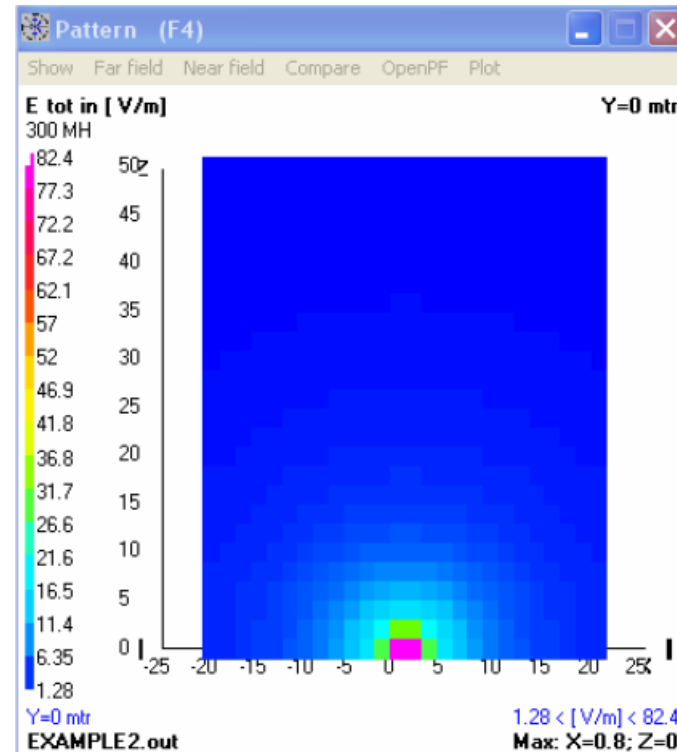
- Diagrama de Campo

También llamado diagrama de voltaje. Corresponde al módulo del campo eléctrico, normalizado por su máximo en θ y ϕ . Generalmente es difícil de obtener analíticamente. Se usan diferencias o elementos finitos.

- Diagrama de Radiación
- Diagrama de Potencia

Diagrama de Campo

- Ejemplo para una antena dipolo



Patrón de Radiación

- Nos enfocaremos en 3 diagramas:
- Diagrama de Campo
- Diagrama de Radiación
Corresponde al diagrama de campo, pero bajo el supuesto de campo lejano.
- Diagrama de Potencia

Diagrama de Radiación: Dipolo Hertziano

- De la clase anterior vimos que:

$$E_{\theta} = j \frac{\eta I_0 \beta dl}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r}$$

$$E_r = E_{\phi} = 0$$

- Tomamos el módulo:

$$|\mathbf{E}| = \eta \frac{I_0 \beta dl}{4\pi r} |\sin \theta|$$

- Normalizamos:

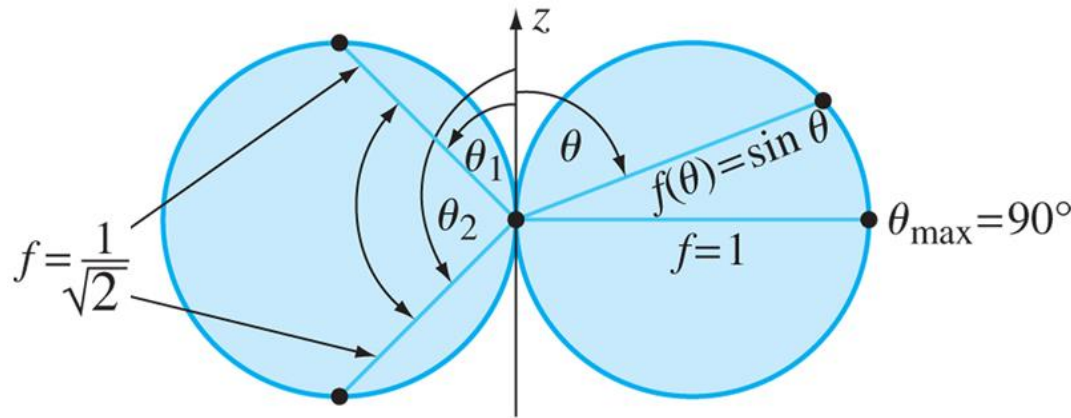
$$f(\theta) = |\sin \theta|$$

$$f(\phi) = 1$$

Diagrama de Campo: Dipolo Hertziano

- Tenemos los patrones:

$$f(\theta) = |\sin \theta|$$



$$f(\phi) = 1$$

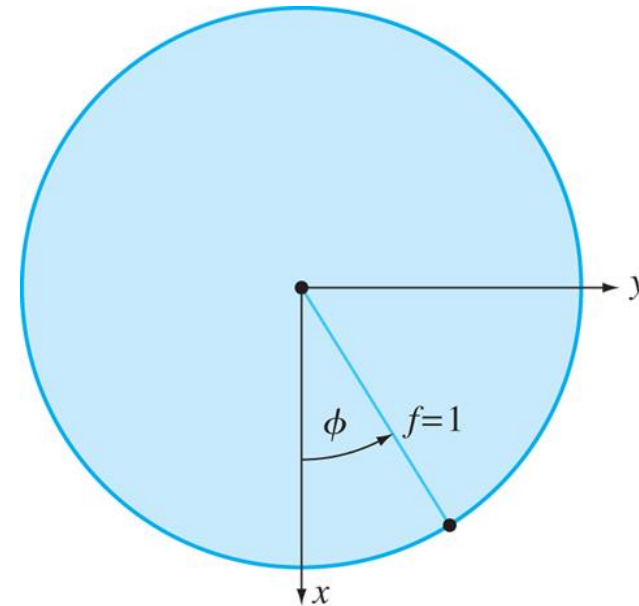
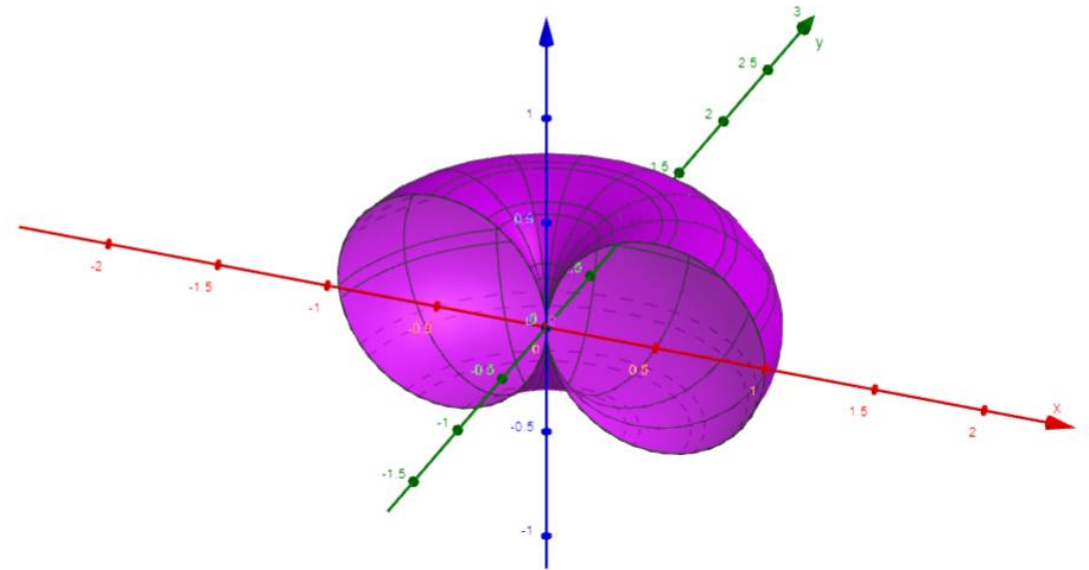
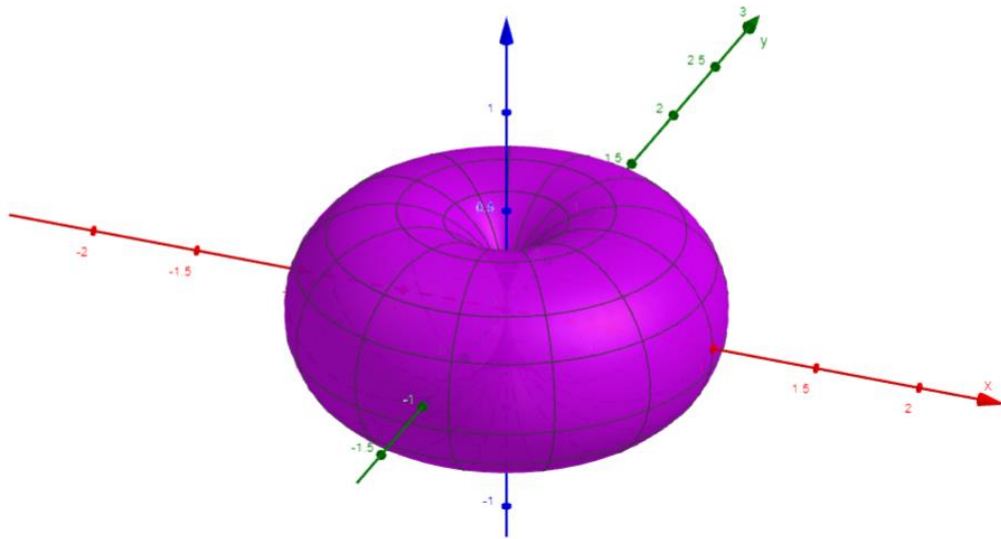


Diagrama de Radiación: Dipolo Hertziano

- Luego:



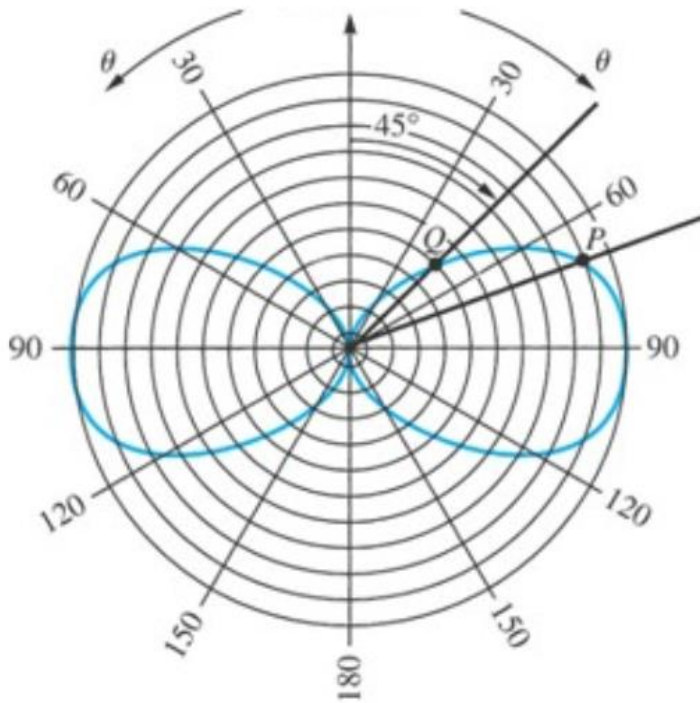
Patrón de Radiación

- Nos enfocaremos en 3 diagramas:
- Diagrama de Campo
- Diagrama de Radiación
- Diagrama de Potencia
Corresponde a la gráfica del cuadrado del campo eléctrico. También normalizada.

Diagrama de Potencia: Dipolo Hertziano

- Tenemos los patrones:

$$f^2(\theta) = \sin^2 \theta$$



$$f^2(\phi) = 1$$

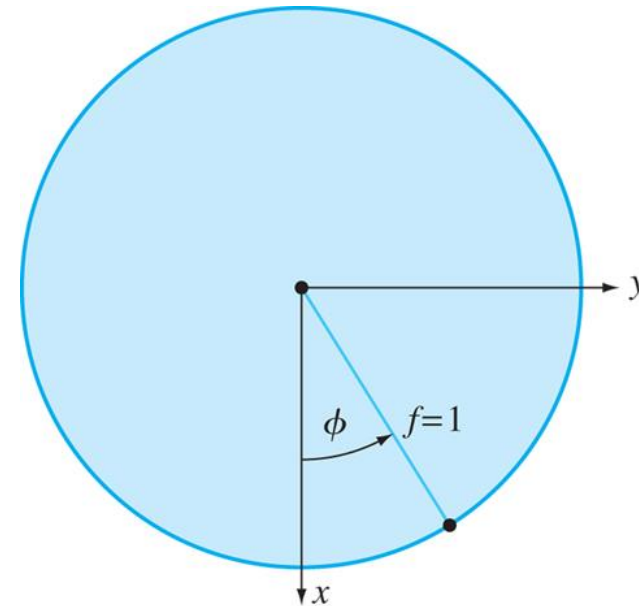
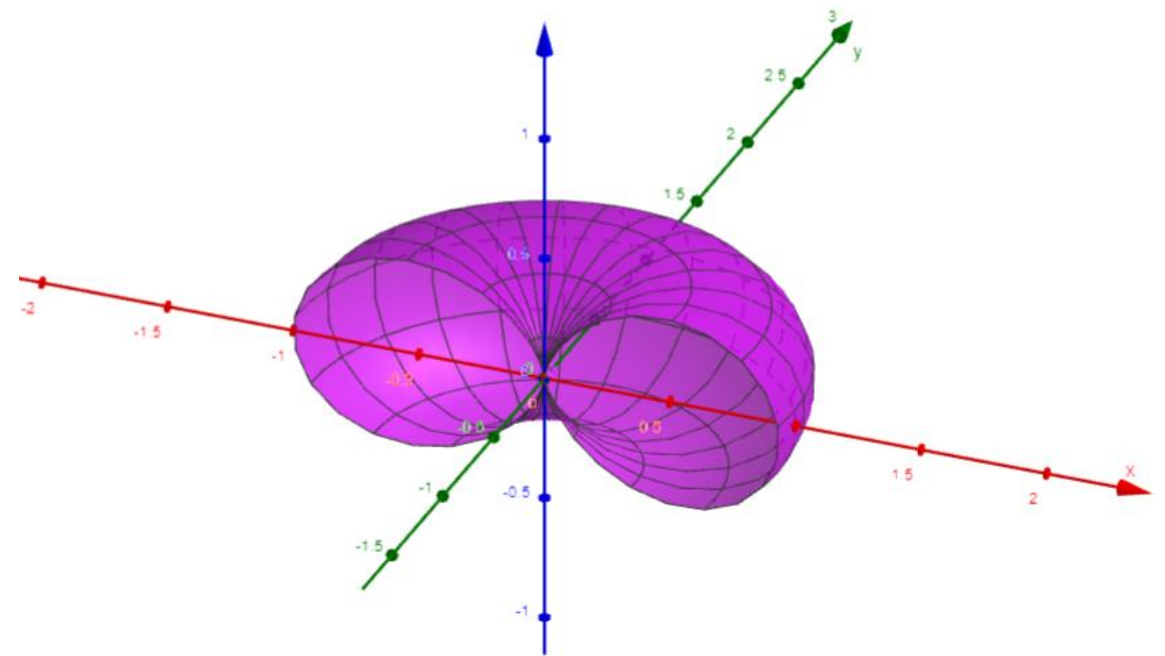
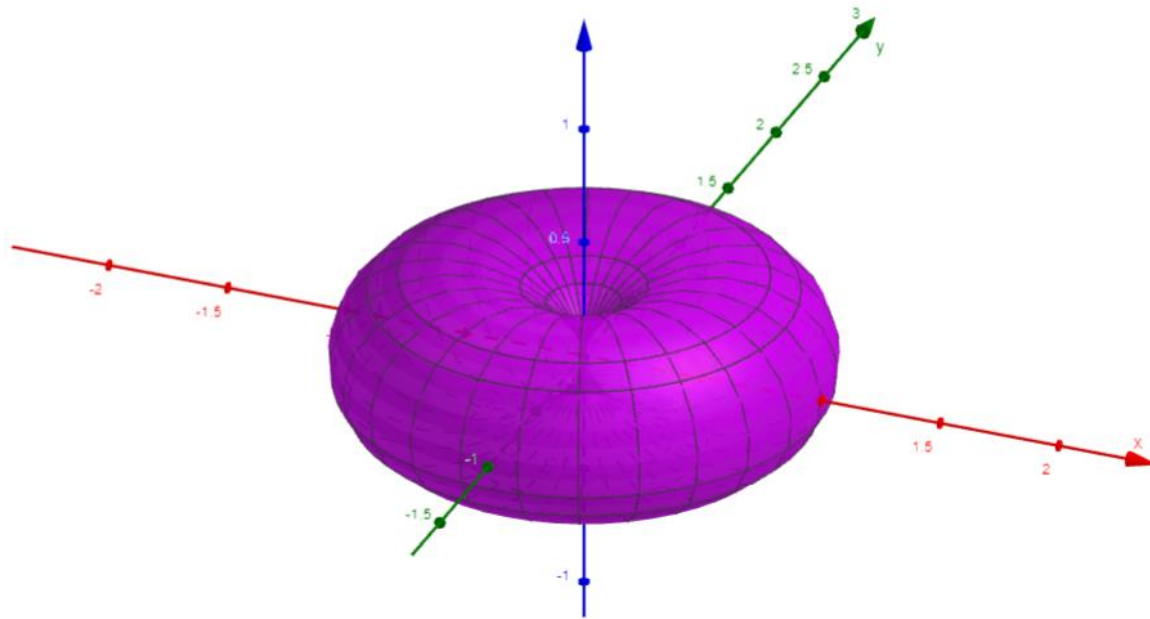


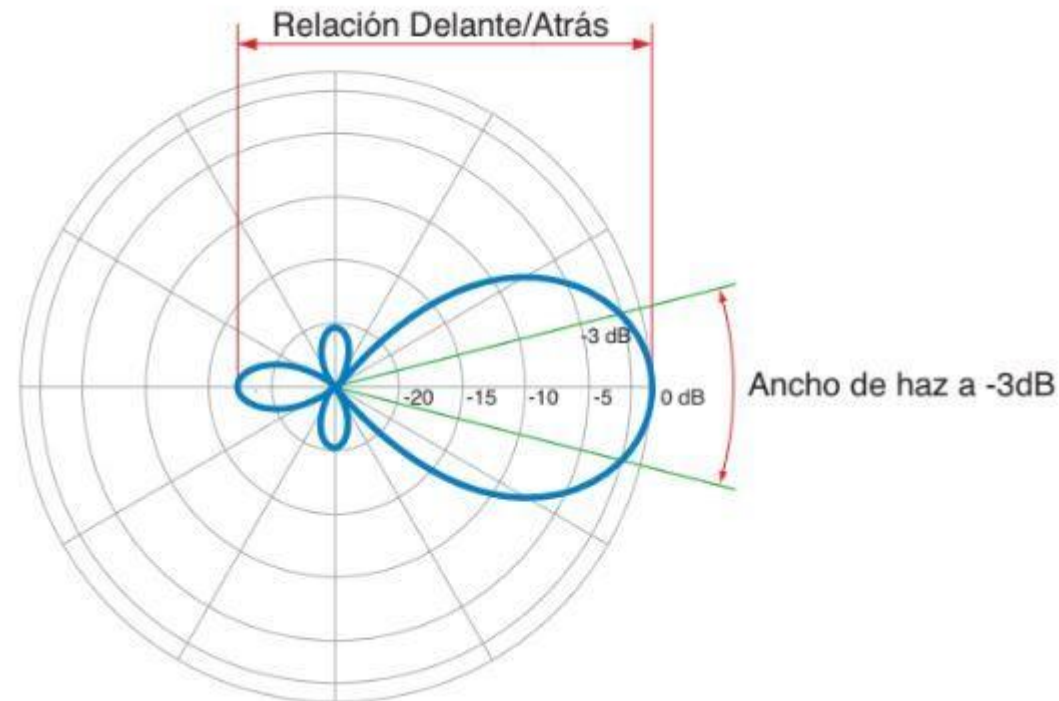
Diagrama de Potencia: Dipolo Hertziano

- Luego:



Ancho de Haz

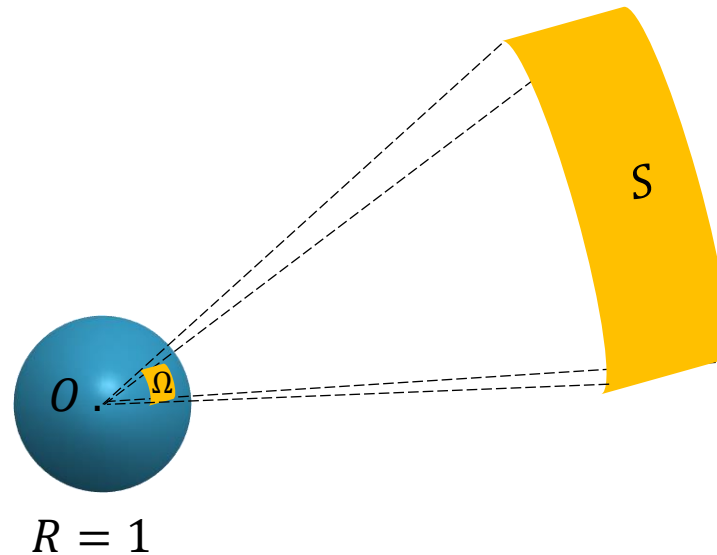
- Se define como el arco descrito en el diagrama de radiación, limitado por los puntos donde la ganancia cae 3dB por debajo del máximo.



Intensidad de Radiación

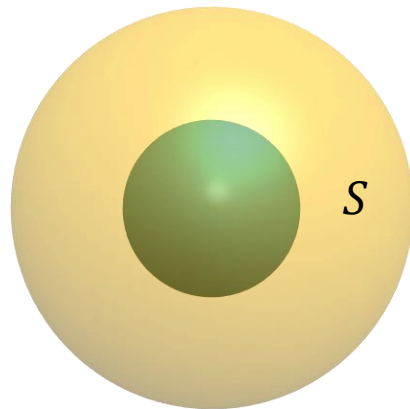
- Ángulo sólido (Ω)

Consideremos una superficie S vista desde un punto O . Se define el ángulo sólido como el área resultante de la proyección cónica de S sobre una esfera unitaria centrada en O .



Intensidad de Radiación

- Ángulo sólido (Ω)
Su unidad de medida es el estereorradián (sr).



Si la esfera está envuelta
por la superficie:

$$\Omega = 4\pi \text{ [sr]}$$

Intensidad de Radiación

- Definiremos la intensidad de radiación como:

$$U(\theta, \phi) = r^2 \bar{\mathbf{P}}$$

- Desarrollando:

$$P_{rad} = \oint_S \bar{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{P} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{P} r^2 d\Omega$$

$$P_{rad} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{P} r^2 d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} U(\theta, \phi) d\Omega$$

Intensidad de Radiación

- Si en lugar de la Intensidad instantánea contamos con la intensidad promedio \bar{U} :

$$P_{rad} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{U} d\Omega = \bar{U} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} d\Omega = \bar{U} 4\pi$$

- Luego:

$$\bar{U} = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

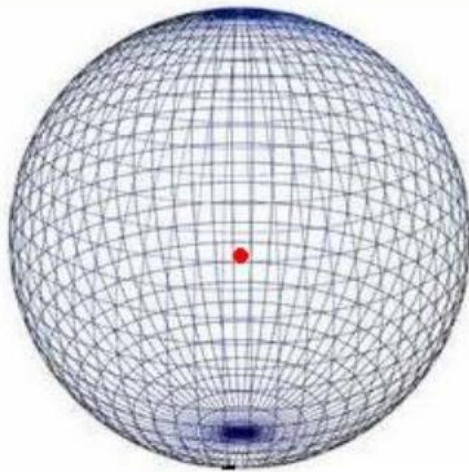
Ganancia Directiva

- Es una medida del grado de concentración de la radiación en una dirección particular.
- En otras palabras, corresponde a la capacidad de la antena de dirigir la potencia hacia alguna dirección particular.
- Matemáticamente, se define como:

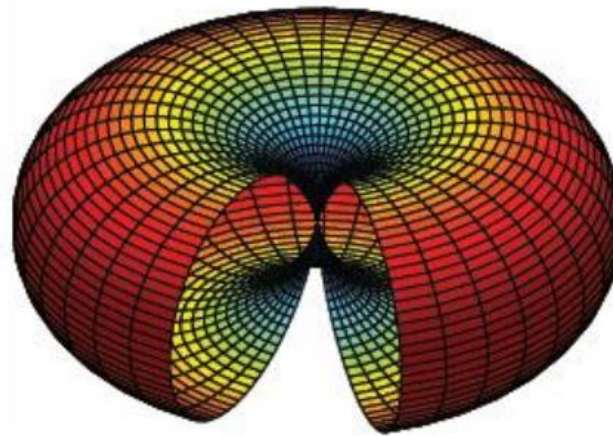
$$G_d(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{\text{prom}}} = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{\text{rad}}}$$

Ganancia directiva

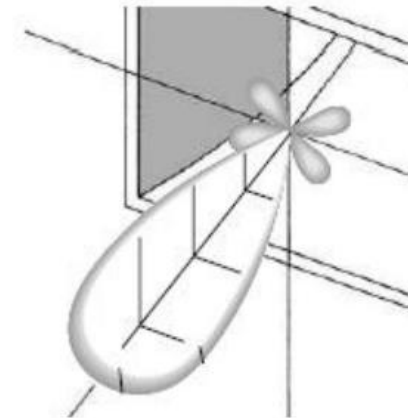
- Dependiendo de la geometría de la antena, podemos clasificar la antena en 3 tipos (en realidad 2):



Isotrópica
(ficticia)



Omnidireccional



Direccional

Directividad

- Definiremos la directividad como la máxima Ganancia directiva de una antena:

$$D = G_{d,max}(\theta, \phi) = \frac{U_{max}}{U_{prom}} = \frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}}$$

- Comúnmente, la directividad se expresa en decibeles:

$$D_{dB} = 10 \log_{10} D$$

- Propuesto:** Determine D para un dipolo hertziano y $\lambda/2$.

Ganancia de Potencia

- La ganancia directiva solo contempla factores geométricos y de diseño de la antena.
- Recordemos que el material de la antena no es ideal, y por lo tanto genera pérdidas.
- Si consideramos una antena conductora. Esta presentará una resistencia óhmica equivalente R_l , que generará una pérdida de potencia P_l .

$$P_{in} = P_l + P_{rad} = \frac{1}{2} |I_{in}|^2 (R_l + R_{rad})$$

Ganancia de Potencia

- Definiremos la ganancia de potencia como:

$$G_p(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{in}}$$

- Al igual que la directividad, las ganancias G_p y G_d se expresan comúnmente en decibels:

$$G_{dB} = 10 \log_{10} G$$

Eficiencia de una Antena

- Definiremos la eficiencia como la razón entre la ganancia de potencia y la ganancia directiva, con respecto a alguna dirección determinada:

$$e_r = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{in}}} = \frac{R_{\text{rad}}}{R_l + R_{\text{rad}}}$$

- De este modo, para una antena 100% eficiente, $G_d \approx G_p$.

Área Efectiva

- Hasta ahora nos hemos limitado solo a antenas transmisoras.
- Como usuarios, es más frecuente que empleemos antenas receptoras.
- Si la onda recibida ingresa desde la dirección de mayor Ganancia Directiva, entonces:

$$P_r = \int \bar{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{S} = \bar{P}S$$

- En la práctica, esta situación es poco probable.

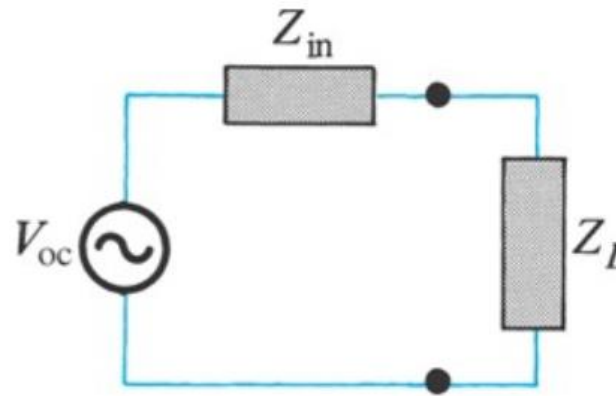
Área Efectiva

- Para lidiar con este problema, introduciremos el concepto de área efectiva.
- Más que como un área, es mejor entenderlo como una relación de potencias, de lo contrario se vuelve extraño para el caso de antenas lineales.
- En síntesis, el área efectiva se entiende como la medida de la capacidad de la antena para recibir energía desde una onda viajera.

$$A_e = \frac{P_r}{\bar{P}}$$

Área Efectiva: Dipolo Hertziano

- Para el caso del dipolo hertziano, podemos modelar el problema circuitalmente. De este modo, la onda transmitida se puede representar como un equivalente de thevenin, y la antena receptora como una carga.



- Si el sistema está bien adaptado $X_{in} = -X_L$, por lo que $Z_{in} = Z_L^*$.

Área Efectiva: Dipolo Hertziano

- Si el sistema está bien adaptado, tendremos máxima transferencia de potencia:

$$P_r = \frac{1}{2} \left[\frac{V_{oc}}{2R_{rad}} \right]^2 R_{rad} = \frac{V_{oc}^2}{8R_{rad}}$$

- V_{oc} puede escribirse como $V_{oc} = Edl$. Siendo E la intensidad de campo efectivo paralelo al eje del dipolo. De modo que

$$P_r = \frac{E^2 dl^2}{8R_{rad}} = \frac{E^2 dl^2}{8 \cdot 80\pi^2 (dl/\lambda)^2} = \frac{E^2 \lambda^2}{640\pi^2}$$

Área Efectiva: Dipolo Hertziano

- Por otro lado, sabemos que la potencia promedio estará dada por:

$$\bar{P} = \frac{E^2}{2\eta_0} = \frac{E^2}{240\pi}$$

- Reemplazando en la definición de área efectiva:

$$A_e = \frac{P_r}{\bar{P}} = 1.5 \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D$$

Área Efectiva: Generalizado

- Si reemplazamos D por la ganancia directiva $G_d(\theta, \phi)$ tenemos una definición generalizada para el área efectiva, para **cualquier antena y cualquier dirección**.

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_d(\theta, \phi)$$

Polarización

- Dependiendo de su construcción, las antenas pueden diseñarse para transmitir o recibir eficientemente un tipo determinado de ondas.



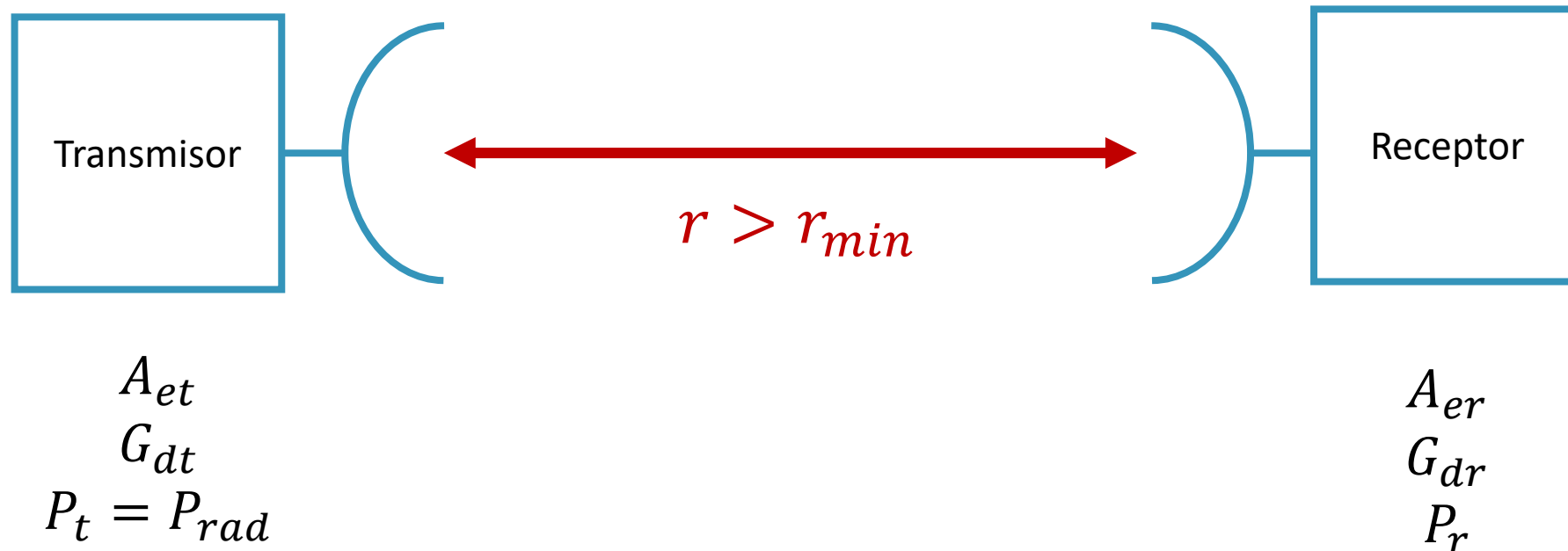
Polarización Lineal (e.g., antenas dipolo)
Útiles para señales terrestres



Polarización Circular (e.g., antenas helicoidales)
Útiles para señales satelitales

Ecuación de Friis

- Supongamos un sistema transmisor-receptor de antenas, las cuales están distanciadas a una separación de campo lejano.



Ecuación de Friis

- Para el caso del transmisor, tenemos:

$$G_{dt} = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_t} = \frac{4\pi r^2 \bar{P}}{P_t}$$

$$\bar{P} = \frac{P_t}{4\pi r^2} G_{dt}(\theta, \phi)$$

- Mientras que para el receptor:

$$P_r = A_{er} \bar{P} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{dr}(\theta, \phi) \bar{P}$$

Ecuación de Friis

- Combinando ambas expresiones, se tiene la Ecuación de Friis

$$P_r = G_{dr}(\theta, \phi) G_{dt}(\theta, \phi) \left[\frac{\lambda}{4\pi r} \right]^2 P_t$$

- Esta expresión relaciona la potencia recibida por una antena con la potencia transmitida por la otra.
- **Solo es válida en caso de campo lejano.**

RADAR (*Radio Detection And Ranging*)

- Es un dispositivo capaz de detectar objetos, su ubicación y velocidad.
- Emite pulsos electromagnéticos con alta directividad y generalmente la misma antena recibe los ecos.
- La distancia al objeto es proporcional al tiempo de ida y vuelta.

RADAR (*Radio Detection And Ranging*)

- Es un dispositivo capaz de detectar objetos, su ubicación y velocidad.
- Emite pulsos electromagnéticos con alta directividad y generalmente la misma antena recibe los ecos.
- La distancia al objeto es proporcional al tiempo de ida y vuelta.

En esencia, funciona
igual que el ultrasonido
de un nóctulo



Scattering Cross Section (σ)

- Evidentemente, para poder detectar el pulso electromagnético, este debe ser reflejado en cierto grado.
- La capacidad de un objeto de reflejar (*scatter*) el pulso incidente depende de la **sección transversal del radar (STR)** o **scattering cross section (σ)**.
- Este parámetro depende de:
 - El material del objetivo
 - El tamaño del objetivo
 - El ángulo de incidencia del haz
 - La polarización de la onda transmitida y recibida

Ecuación del RADAR

- La potencia recibida por un radar estará dada por:

$$P_r = \frac{P_{rad} G_{dt}}{4\pi r^2} \overset{\text{STR}}{\sigma} \frac{1}{4\pi r^2} \overset{\text{Área efectiva de la antena receptora}}{A_e}$$

Potencia inicialmente irradiada por el transmisor
Factor de reflexión isotrópica del objetivo

- Reescribiendo el área efectiva como $A_e = \lambda^2 G_{dt} / 4\pi$, tenemos:

$$P_r = \frac{(\lambda G_{dt})^2 \sigma P_{rad}}{(4\pi)^3 r^4}$$

Ecuación del RADAR

- Finalmente, basta con despejar r para encontrar la distancia del objetivo:

$$r = \left[\frac{\lambda^2 G_d^2 \sigma P_{rad}}{(4\pi)^3 P_r} \right]^{1/4}$$

- Dada una potencia mínima detectable por el equipo ($P_r = P_{min}$), es posible determinar el rango de alcance del radar (r_{max}).

Ecuación del RADAR

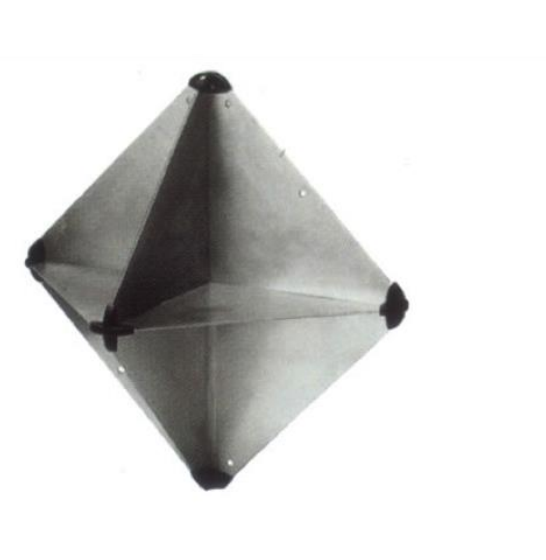
- Un diseño inteligente permite burlar la detección del radar



equivalente a una bolita de acero de 1 cm de diámetro



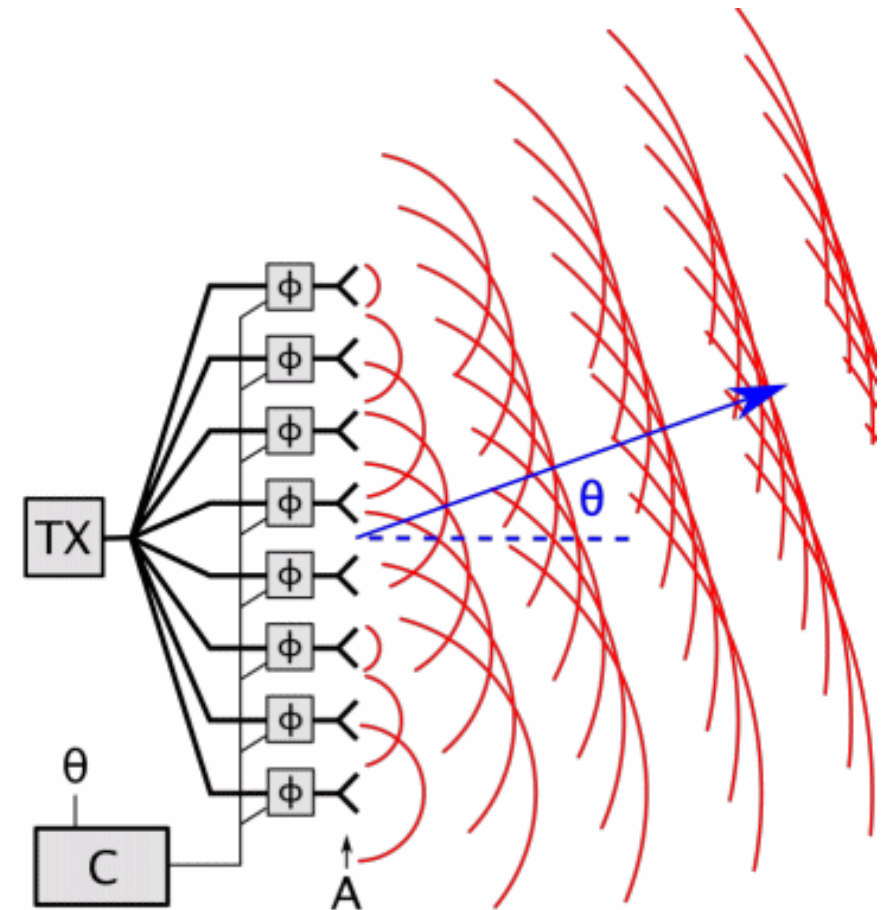
equivalente a esfera de acero de 1 m de diámetro



equivalente a esfera de
acero de 10 m de diámetro

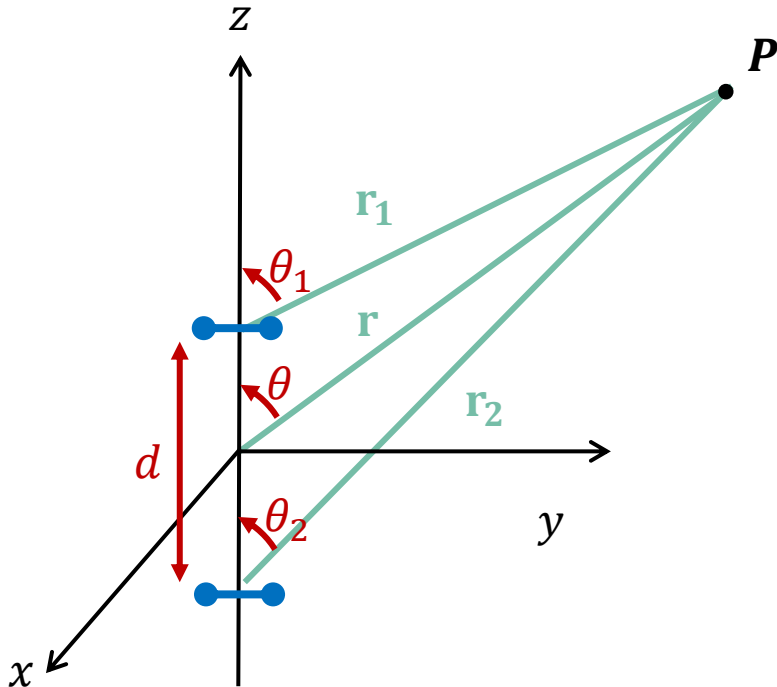
Arreglos de Antenas (Phased Arrays)

- Son agrupaciones de antenas posicionadas a una determinada distancia y alimentadas con corrientes a distintas fases.
- Al modificar la separación d y la fase α , podemos generar interferencias constructivas o destructivas.
- ¿Para qué? ¡Mejor directividad!



Arreglo de 2 antenas

- Supongamos que tenemos un arreglo de 2 dipolos hertzianos orientados horizontalmente.



- Sabemos que el campo para una antena de este tipo está dado por:

$$E_{\theta} = \frac{j\eta I_0 \beta dl}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r}$$

- Pero con el cambio de orientación:

$$E_{\theta} = \frac{j\eta I_0 \beta dl}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r}$$

Arreglo de 2 antenas

- Aplicando superposición, sumamos los campos individuales de cada antena:

$$E = \frac{j\eta I_0 \beta dl}{4\pi} \left[\frac{\cos \theta_1}{r_1} e^{-j\beta r_1} e^{j\alpha} \mathbf{a}_{\theta_1} + \frac{\cos \theta_2}{r_2} e^{-j\beta r_2} \mathbf{a}_{\theta_2} \right]$$

- Asumiendo que P está suficientemente lejos, podemos asumir que $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$. Para magnitud, podemos hacer $r_1 \approx r_2 \approx r$.
- No obstante, para la fase esto no es válido, y debemos usar la misma aproximación que empleamos en las clases de expansión multipolar de un dipolo.

$$r_1 = r - \frac{d}{2} \cos \theta \qquad r_2 = r + \frac{d}{2} \cos \theta$$

Arreglo de 2 antenas

- Reemplazando en la ecuación de campo:

$$E = \frac{j\eta I_0 \beta dl}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r} \left[e^{j\frac{\beta d}{2} \cos \theta} e^{j\alpha} + e^{-j\frac{\beta d}{2} \cos \theta} \right] \mathbf{a}_\theta$$

- **Trucazo:** Factorizamos por el factor $e^{j\alpha/2}$.

$$E = \frac{j\eta I_0 \beta dl}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r} e^{j\alpha/2} \left[e^{j\frac{\beta d}{2} \cos \theta} e^{j\alpha/2} + e^{-j\frac{\beta d}{2} \cos \theta} e^{-j\alpha/2} \right] \mathbf{a}_\theta$$

$$E = \frac{j\eta I_0 \beta dl}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r} e^{j\alpha/2} 2 \cos \left[\frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right] \mathbf{a}_\theta$$

Arreglo de 2 antenas

- La expresión resultante puede dividirse en 2 componentes:

$$E = \left\{ \frac{j\eta I_0 \beta dl}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r} \right\} \left\{ e^{j\alpha/2} 2 \cos \left[\frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right] \right\} \mathbf{a}_\theta$$

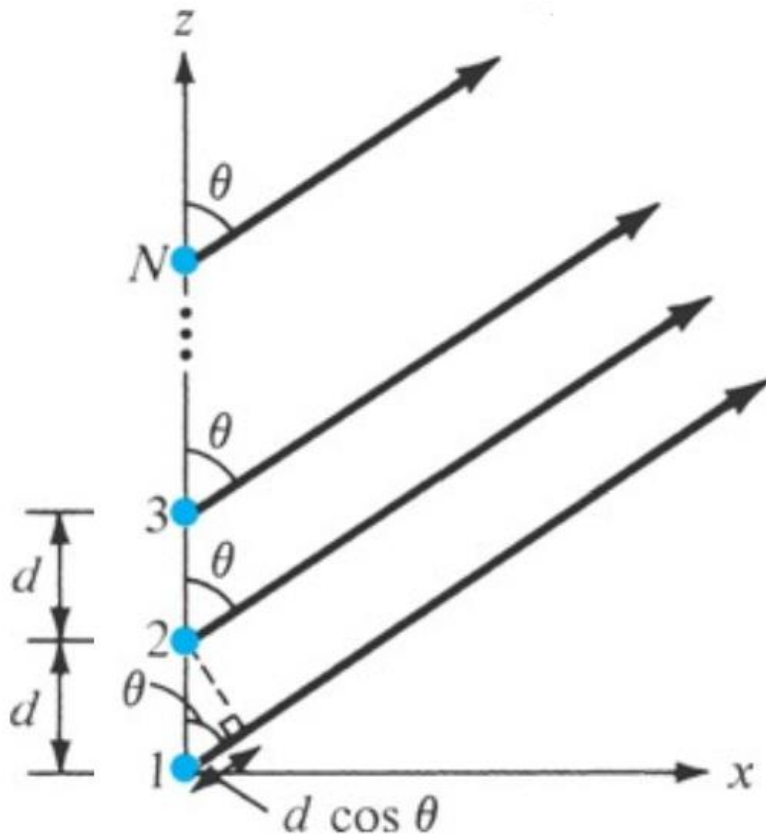
Patrón individual de un
dipolo hertziano

Patrón asociado al grupo
de antenas

- La segunda componente se conoce como **patrón de grupo** o **Array Factor (AF)**.

$$AF = e^{j\alpha/2} 2 \cos \left[\frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right]$$

Arreglo de N antenas



- ¿Qué pasa si ahora son N antenas?

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots + \mathbf{E}_N$$

- Análogo al caso de 2 antenas, tendremos:

$$AF = 1 + e^{j\psi} + e^{2j\psi} + e^{3j\psi} + \cdots + e^{(N-1)j\psi}$$

con

$$\psi = \beta d \cos \theta + \alpha$$

Arreglo de N antenas

- Podemos notar que la expresión de AF corresponde a la serie geométrica:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x}$$

- De modo que:

$$\text{AF} = \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}}$$

- Y esto puede reescribirse como:

$$\text{AF} = \frac{e^{jN\psi/2}}{e^{j\psi/2}} \frac{e^{jN\psi/2} - e^{-jN\psi/2}}{e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2}} = e^{j(N-1)\psi/2} \frac{\sin N\psi/2}{\sin \psi/2}$$

Arreglo de N antenas

- Finalmente, si el arreglo está centrado en el origen, el término exponencial desaparece y con ello tenemos:

$$AF = \frac{\sin \frac{N\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

- Notemos que si $N = 2$

$$AF = \frac{\sin \psi}{\sin \frac{\psi}{2}} = 2 \cos \frac{\psi}{2} = 2 \cos \left[\frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right]$$

Array Factor

- Consideremos algunas observaciones respecto a la expresión de AF para un arreglo de N antenas:

1. El valor máximo que puede tomar AF es $AF = N$. Este máximo ocurrirá cuando $\psi = 0$. Es decir:

$$\theta = \cos^{-1} \left(-\frac{\alpha}{\beta d} \right)$$

2. AF es una función periódica con múltiples ceros, ubicados en:

$$\frac{N\psi}{2} = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Arreglos: casos particulares

- Arreglo **Broadside**

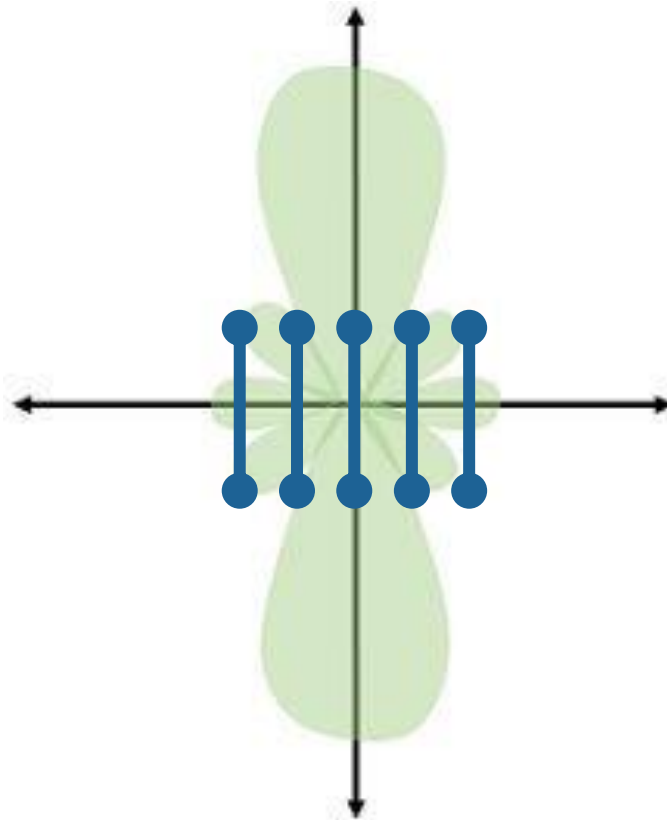
Es aquel con $\alpha = 0$, $\theta = 90^\circ$ y $\psi = 0$. Su máximo de radiación está dirigido en dirección normal al eje del arreglo.

- Arreglo **End-fire**

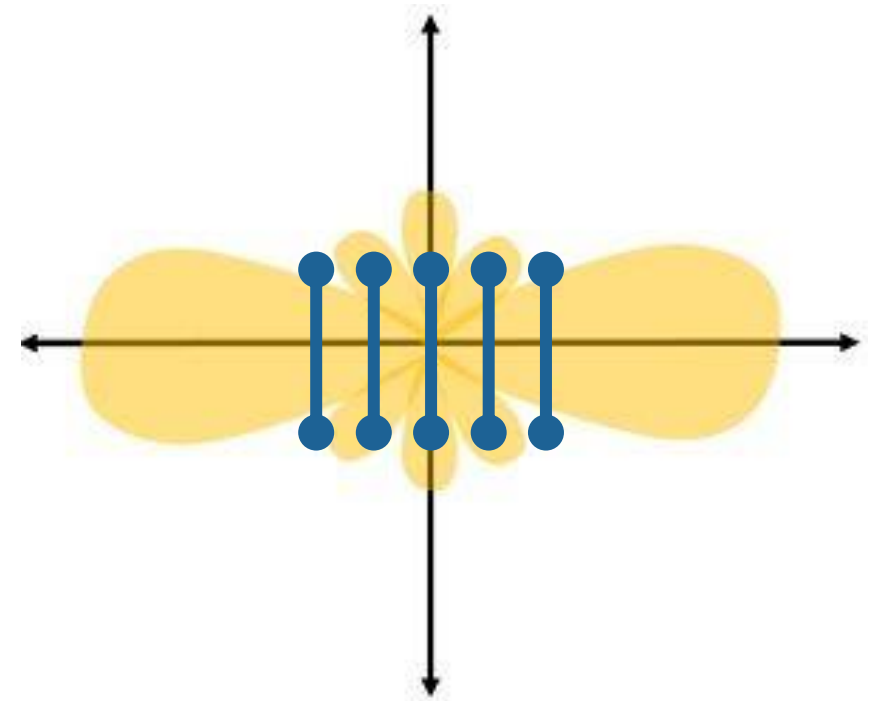
Es aquel con $\psi = 0$ y $\theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$, de manera que $\alpha = \begin{cases} -\beta d \\ \beta d \end{cases}$. Su máximo de radiación es en dirección a lo largo del eje.

Arreglos: casos particulares

Arreglo **Broadside**



Arreglo **End-fire**



Resumen

- Analizamos las distintas características de una antena.
- Establecimos la ecuación de Friis para la relación de potencia en un sistema transmisor-receptor.
- Enunciamos la ecuación de radar.

Cerrando la clase de hoy

- Con esto cerramos el capítulo de antenas.
- Lo prometido es deuda: MRI.

Próxima Clase:

Imágenes por Resonancia Magnética (MRI)