Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2113 – Teoría Electromagnética

Control 5

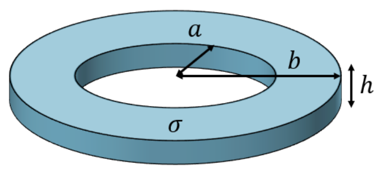
4 de abril de 2024

Nombre:

Pregunta 1

Considere un disco de radio interno a, radio externo b, grosor h y conductividad σ. Usando ecuaciones de Poisson/Laplace, encuentre la resistencia entre las caras superior e inferior.

PD: Puede comprobar su resultado usando otro método. Pero si no lo resuelve mediante Poisson/Laplace, su desarrollo no será considerado.



Fórmulas útiles

$$I = \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \qquad E = -\nabla V \qquad \vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}} \qquad \Delta V = IR$$

Solución:

No hay presencia de cargas, entonces aplicamos Laplace e integramos 2 veces.

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

$$V(z) = Az + B$$

[1pt] Criterio de asignación:

- 0.5pt punto por plantear la ecuación de Laplace.
- 0.5pt punto por integrar 2 veces y llegar a $V(z) = Az + B$.
- No hay otros puntajes intermedios.

Aplicamos las condiciones de borde para determinar A y B. Sea V_0 el potencial entre las dos superficies horizontales tal que $V(z=0)=0$ y $V(z=h)=V_0$, $V=V(z)$.

$$V(z=0)=0 \longrightarrow B=0$$
$$V(z=h)=V_0 \longrightarrow A=\frac{V_0}{h}$$

Reemplazando las constantes, el potencial eléctrico será simplemente:

$$V=\frac{V_0}{h}z$$

[2pt] Criterio de asignación:

- 1pt por plantear las condiciones.
- 1pt por la expresión de potencial eléctrico con los parámetros despejados.
- No hay otros puntajes intermedios.

Con la expresión obtenida, despejamos campo y corriente.

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\frac{dV}{dz}\hat{z}=-\frac{V_0}{h}\hat{z}$$

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}=-\frac{\sigma V_0}{h}\hat{z}$$

$$d\mathbf{S}=-\rho d\phi d\rho\hat{z}$$

$$I=\int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\int_{\rho=a}^{b}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{V_0\sigma}{h}\rho d\phi d\rho=\frac{V_0\sigma}{h}2\pi\frac{\rho^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{V_0\sigma\pi(b^2-a^2)}{h}$$

[2pt] Criterio de asignación:

- 2pt si logró obtener el valor de la corriente.
- 1pt si logró obtener hasta densidad de corriente.
- 0.5pt si logró obtener hasta campo eléctrico.
- No hay otros puntajes intermedios.

Finalmente, aplicando $\Delta V = IR$

$$\boxed{R = \frac{V_0 - 0}{I} = \frac{4h}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}}$$

[1pt] Criterio de asignación:

- 1pt por llegar a la expresión.
- No hay otros puntajes intermedios.