

Clase 03

Expansión Multipolar

Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition: pp. 151 – 166

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- En algunas situaciones, podemos aproximar las distribuciones de carga como si fuesen una carga puntual.
- Esto no siempre podrá ser una buena idea, y necesitaremos obtener a estimaciones más precisas.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-01:** Plantear y resolver ecuaciones para la determinación de Fuerzas, Campos, Flujos, Potenciales, Torques y Energías electromagnéticas en problemas de mediana complejidad.
- **OA-02:** Comprender y aplicar el concepto de expansión multipolar para la estimación precisa de campos electromagnéticos.

Contexto

- Vamos a necesitar:

Ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Potencial Eléctrico

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho_{\tau}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

Relación Campo-Potencial

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Contenidos

- Monopolo Eléctrico
- Dipolo Eléctrico
- Expansión multipolar
- Momento dipolar y origen de coordenadas
- Expansión multipolar y campo eléctrico

Monopolo Eléctrico

- Dada una carga aislada o *monopolo*, el potencial eléctrico será:

$$V_{mon}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Esto también se hace válido para un arreglo de cargas Q cualquiera, cuando tomamos suficiente distancia.

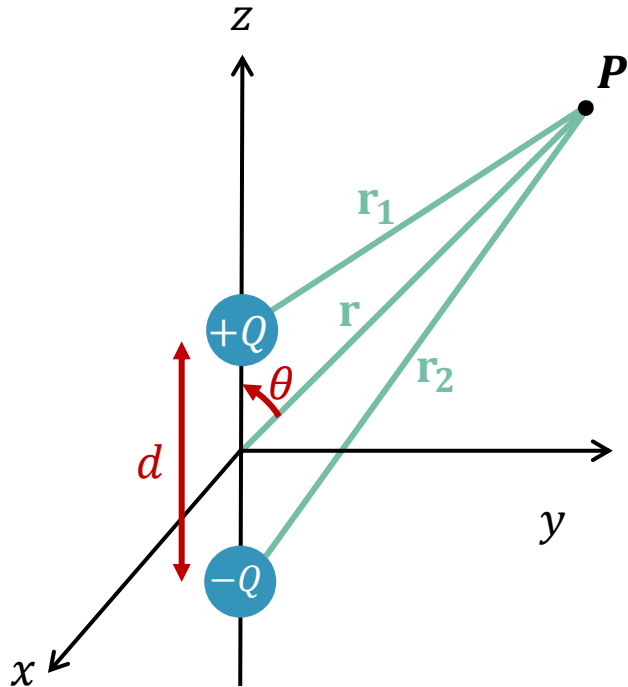


Dipolo Eléctrico

- Consideremos el siguiente caso para 2 cargas de signo opuesto:

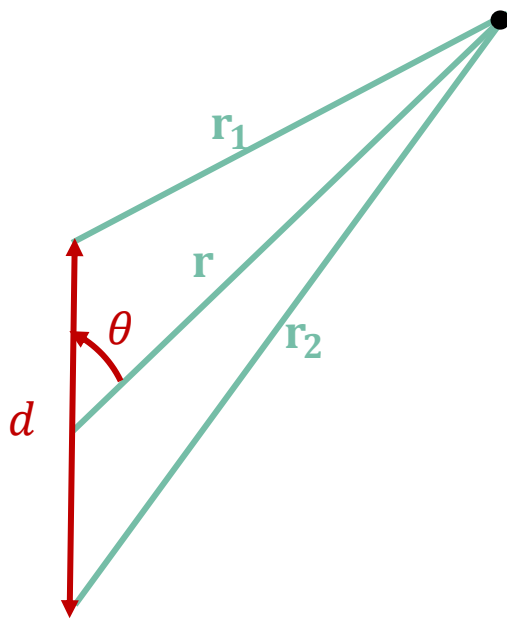
Por superposición:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$



Dipolo Eléctrico

- Consideremos el siguiente caso para 2 cargas de signo opuesto:



Por Ley de Cosenos :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - r d \cos\theta, & r_2^2 &= r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r d \cos\theta \\ r_1^2 &= r^2 \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos\theta\right), & r_2^2 &= r^2 \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos\theta\right) \end{aligned}$$

Si $d \ll r$:

$$r_1 = r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos\theta}, \quad r_2 = r \sqrt{1 + \frac{d}{r} \cos\theta}$$

Dipolo Eléctrico

Así:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{r} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{r} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Desarrollamos expansión binomial: $(1 + x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos\theta \right), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos\theta \right)$$

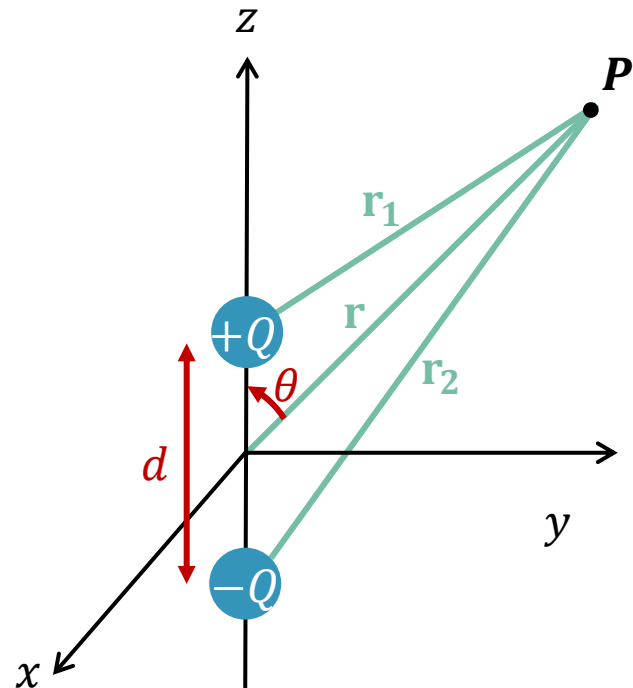
Luego:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{d}{r^2} \cos\theta$$

Dipolo Eléctrico

- Consideremos el siguiente caso para 2 cargas de signo opuesto:

Reemplazando:



$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos\theta}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(d\mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r}{r^2}$$

$$V_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Potencial dipolar

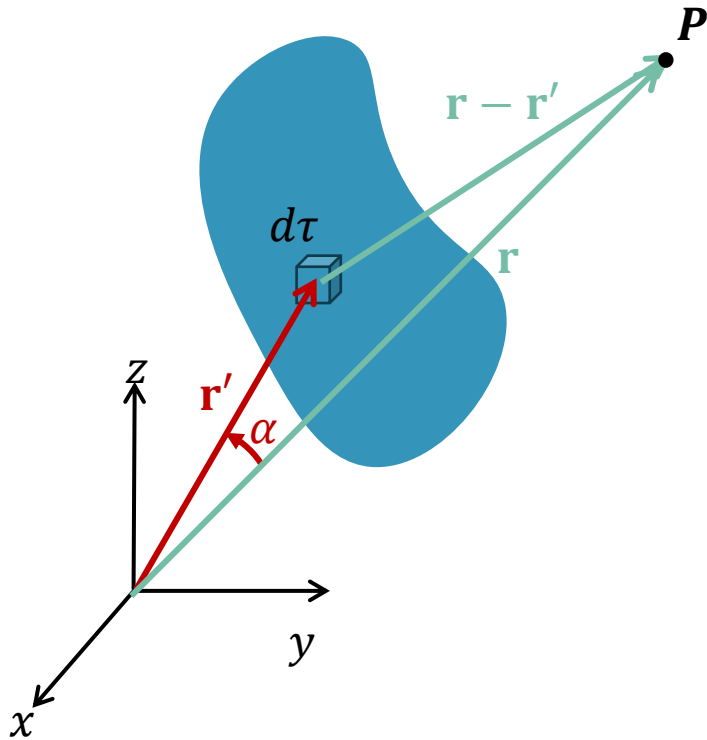
$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$$

Momento dipolar

Expansión Multipolar

Sabemos que el potencial está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau$$



Expansión Multipolar

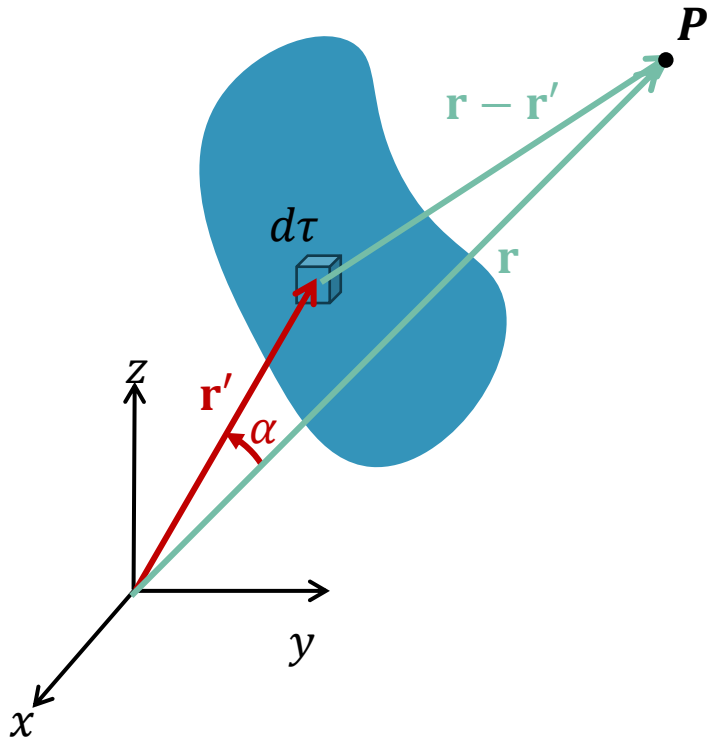
Replicando ley de cosenos, pero sin simplificar:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha \right]$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \alpha \right) \right]$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 + \epsilon}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}}$$



Expansión Multipolar

Usando expansión binomial:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots \right)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha \right)^3 + \dots \right]$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{r'}{r} \right) (\cos\alpha) + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3\cos^2\alpha - 1}{2} \right) - \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}{2} \right) + \dots \right]$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\alpha)$$

Expansión multipolar

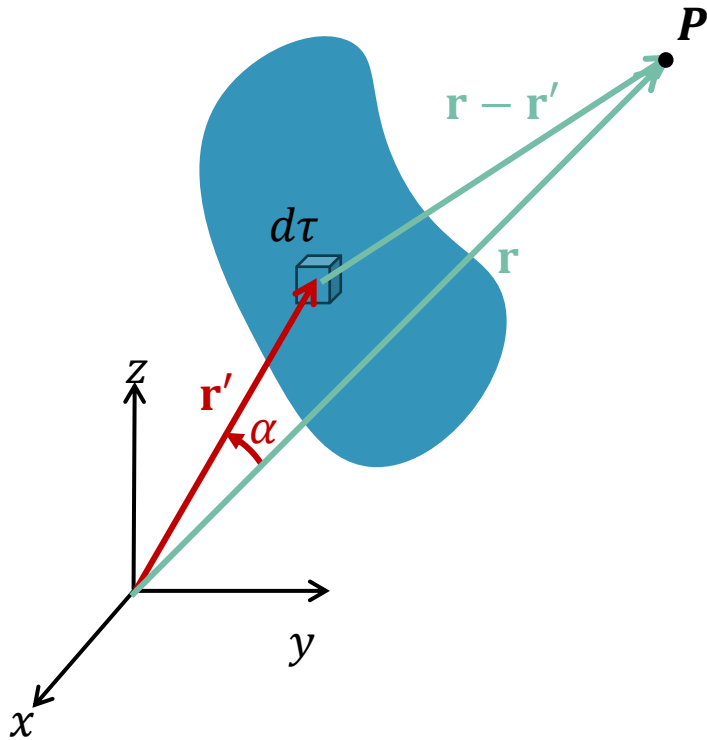
Expansión Multipolar

Sabemos que el potencial está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

Luego, la expansión multipolar del potencial eléctrico será:

$$V(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int_{\Omega} r'^n P_n(\cos\alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$



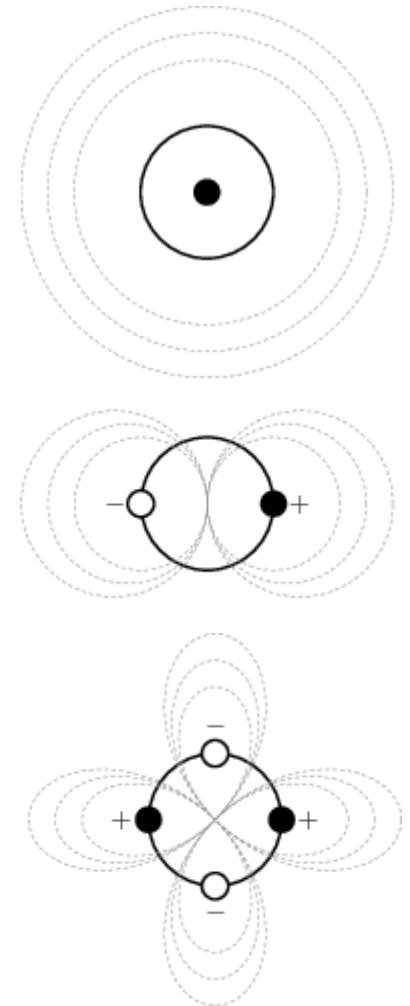
Expansión Multipolar

Desarrollando los términos de la expansión:

$$n = 0 \quad V_{mono}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r}$$














$$n = 1 \quad V_{dip}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} r' \cos \alpha \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r^2}$$

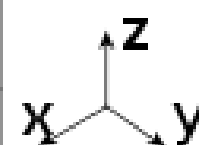
$$n = 2 \quad V_{quad}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} r'^2 \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r^3}$$



Expansión Multipolar

Esto ya lo han visto antes, pero no desde esta perspectiva.

l:		$P_\ell^m(\cos\theta) \cos(m\varphi)$							$P_\ell^{ m }(\cos\theta) \sin(m \varphi)$						
0	s														
1	p														
2	d														
3	f														
4	g														
5	h														
6	i														
	m:	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	



Momento dipolar y Origen de Coordenadas

Para el caso del monopolo

$$V_{mono}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r}$$

el momento monopolar $\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$ es independiente del origen de coordenadas, pues solo corresponde a sumar las cargas.

Momento dipolar y Origen de Coordenadas

Por otro lado, para el dipolo

$$V_{dip}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} r' \cos \alpha \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r^2}$$

el momento dipolar $\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'$ sí varía según el origen de coordenadas, pues tiene una dependencia de r' .

No obstante, este momento tiene un comportamiento muy especial.

Momento dipolar y Origen de Coordenadas

- Consideremos un nuevo punto de referencia \mathbf{a} , tal que:

$$\mathbf{p}' = \int_{\Omega} (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

- Dado que \mathbf{a} es un vector constante:

$$\mathbf{p}' = \int_{\Omega} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' - \int_{\Omega} \mathbf{a} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{a} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q$$

Momento dipolar y Origen de Coordenadas

- De este modo, si la carga neta Q es cero, el momento dipolar es independiente del origen.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{a}Q$$



E-02

Expansión Multipolar y Campo Eléctrico

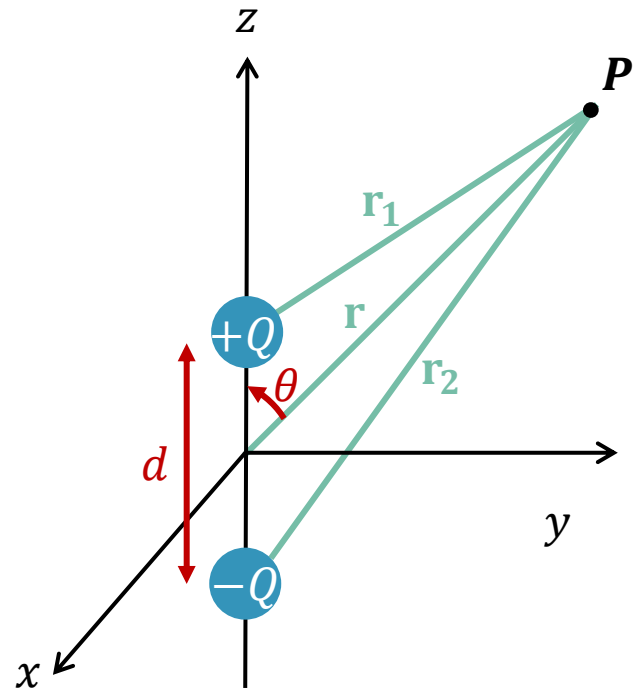
- Como vimos en la clase anterior, el potencial y el campo están relacionados según:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

- De este modo, a partir de la expansión multipolar del potencial eléctrico, es posible hacer estimaciones precisas del Campo Eléctrico.

Expansión Multipolar y Campo Eléctrico

- Para el caso de nuestro dipolo:



$$V_{dip} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V_{dip} = -\left[\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta \right]$$

$$\mathbf{E} = -\left[-\frac{Qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^3} \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^2} \mathbf{a}_\theta \right]$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta]$$

Resumen

- No siempre podemos aproximar una distribución de cargas como una carga puntual.
- La expansión multipolar nos permite obtener estimaciones más precisas del potencial eléctrico.

$$V(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int_{\Omega} r'^n P_n(\cos\alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

- Potenciales precisos permiten estimar campos precisos: $\mathbf{E} = -\nabla V$.
- El momento dipolar es inmune a la posición cuando $\sum_{n=1}^N Q_n = 0$.

Cerremos la clase de hoy

- Ya analizamos por completo el comportamiento de Campos Electrostáticos en el vacío, para distintas distribuciones de cargas.
- Nos resta analizar el comportamiento en medios materiales.
- Próxima Clase (Jueves 14/marzo):
Electrostática en Materiales.
- Bibliografía:
Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 177 – 198

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Regla del producto

$$\nabla \cdot f \mathbf{A} = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

Potencial dipolar

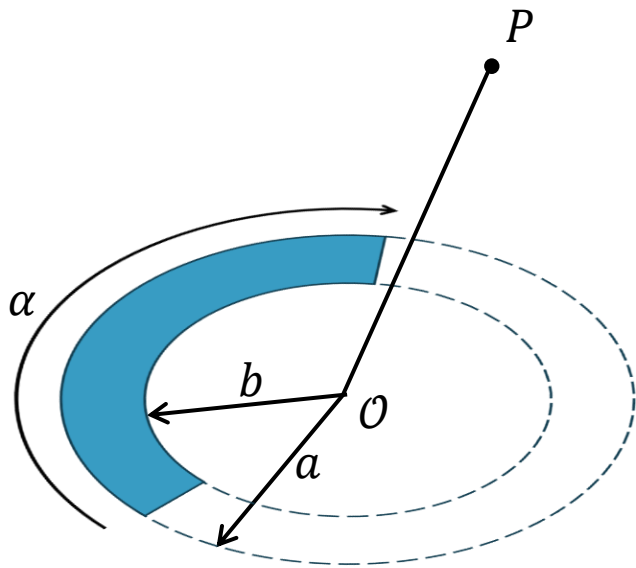
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{p} \rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r^2}$$

Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_{tot}$$

Ejemplo 1: Caso Monopolo

- Retomemos el Ejemplo 1 de la clase anterior:



$$V(\rho, \theta, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho'=a}^b \int_{\theta'=0}^{\alpha} \frac{\sigma \rho' d\theta' d\rho'}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta')}}}$$

Si \mathbf{r} se hace drásticamente grande:

$$V(\rho, \theta, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho'=a}^b \int_{\theta'=0}^{\alpha} \frac{\sigma \rho' d\theta' d\rho'}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

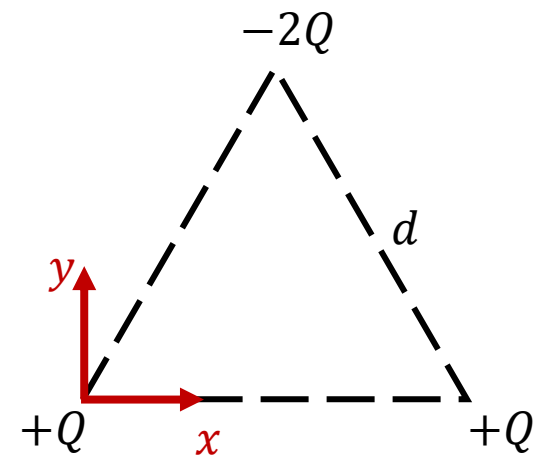
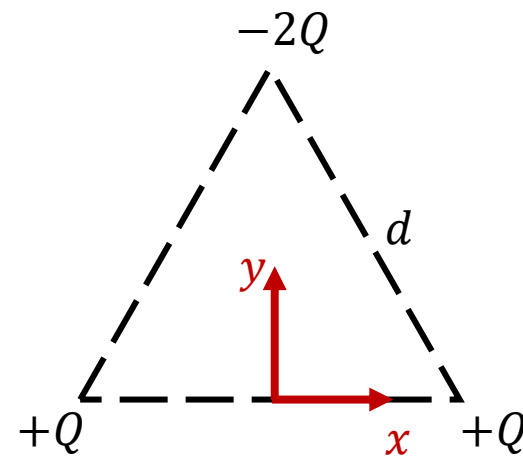
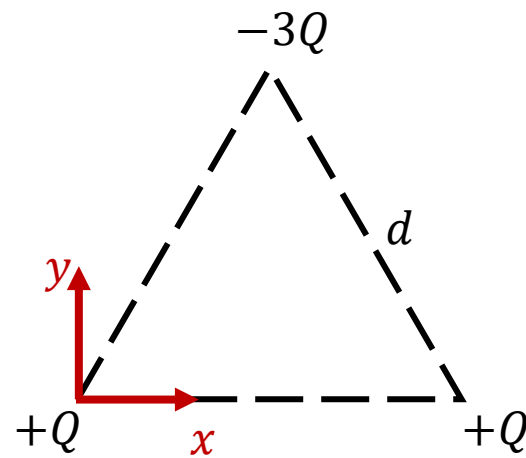
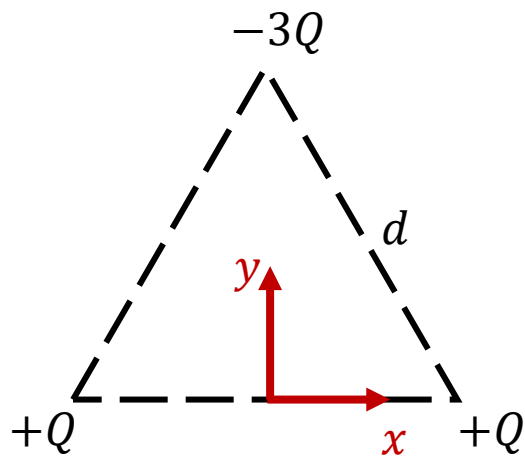
$$V(\rho, \theta, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\rho^2 + z^2}} \int_{\rho'=a}^b \int_{\theta'=0}^{\alpha} \sigma \rho' d\theta' d\rho'$$

$$V(\rho, \theta, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|}$$



Ejemplo 02: Momento Dipolar

- Determine el momento dipolar para los siguientes arreglos de cargas puntuales:



Ejemplo 02: Momento Dipolar

- Determine el momento dipolar para los siguientes arreglos de cargas puntuales:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= -\frac{d}{2} 3Q \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{d}{2} 3Q \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_3 &= 0 \hat{x} - \frac{d\sqrt{3}}{2} 3Q \hat{y} \end{aligned}$$

$$\sum_i \mathbf{p}_i = 0 \hat{x} - \frac{3\sqrt{3}}{2} dQ \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= 0 \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_2 &= dQ \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_3 &= -\frac{3d}{2} Q \hat{x} - \frac{d\sqrt{3}}{2} 3Q \hat{y} \end{aligned}$$

$$\sum_i \mathbf{p}_i = -\frac{1}{2} dQ \hat{x} - \frac{3\sqrt{3}}{2} dQ \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= -\frac{d}{2} 2Q \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{d}{2} 2Q \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_3 &= 0 \hat{x} - \frac{d\sqrt{3}}{2} 2Q \hat{y} \end{aligned}$$

$$\sum_i \mathbf{p}_i = 0 \hat{x} - \sqrt{3} dQ \hat{y}$$

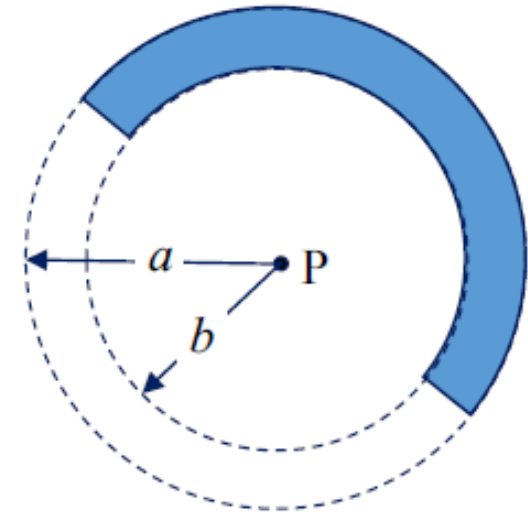
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= 0 \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{d}{2} 2Q \hat{x} + 0 \hat{y} \\ \mathbf{p}_3 &= -\frac{d}{2} 2Q \hat{x} - \frac{d\sqrt{3}}{2} 2Q \hat{y} \end{aligned}$$

$$\sum_i \mathbf{p}_i = 0 \hat{x} - \sqrt{3} dQ \hat{y}$$

Control! Escojan su pregunta

- Pregunta 1:

Considere un anillo plano semicircular con densidad de carga uniforme σ y centro en el origen. Determine el Potencial en el centro P .



- Pregunta 2:

Sea un cilindro con carga volumétrica uniforme, centrado en el origen y con su eje alineado a z . Determine una expresión equivalente para las densidades de carga lineal y superficial a lo largo de z .

