Clase 14
Incidencia Normal y Reflexión

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 506 – 516

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Nos queda estudiar las ondas cuando estas pasan de un medio a otro.
- Hoy nos centraremos en un caso limitado: incidencia normal

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-11:** Determinar las expresiones correspondientes a ondas eléctricas, magnéticas y potencia asociada para condiciones de propagación libre en distintos tipos de medios.

Contenidos

- Reflexión y Transmisión de Ondas EM
- Vector de Poynting complejo
- Caso Vacío - Dieléctrico
- Caso Vacío - Buen Conductor
- Caso Vacío - Conductor Perfecto
- Ondas Estacionarias
- Razón de Onda Estacionaria (ROE o SWR)

Reflexión y Transmisión de ondas EM

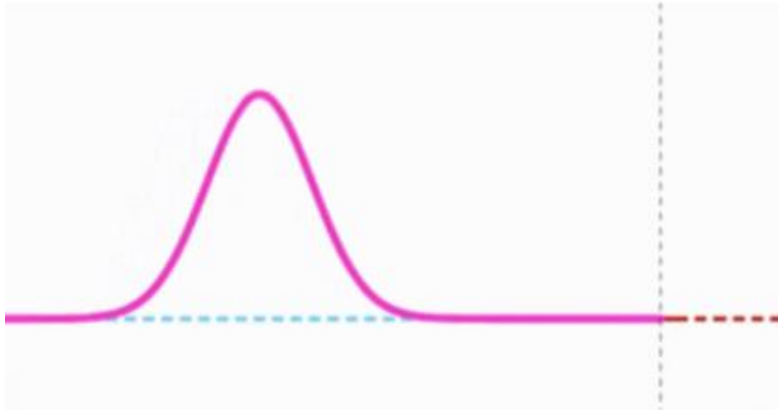
- Cuando las ondas planas pasan de un medio a otro, un parte de la energía cruza la interfase y la otra parte es reflejada.

$z = 0$

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- De este modo, tendremos 3 tipos de onda que nos interesará estudiar: la incidente, la reflejada y la transmitida.

$z = 0$

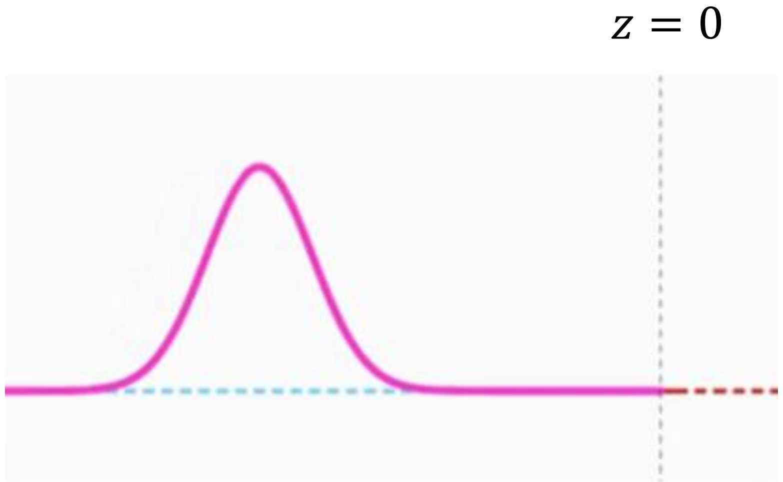


$\Longrightarrow$

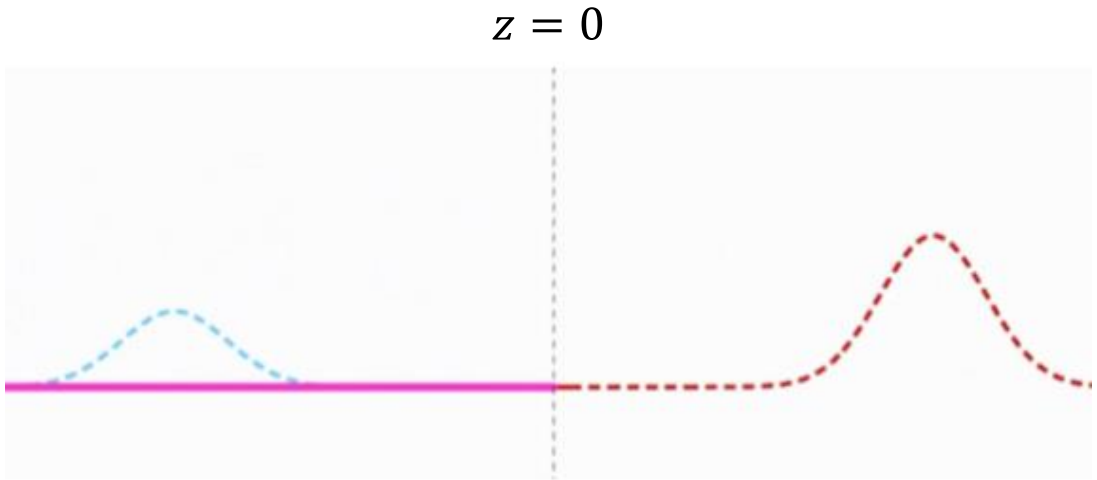
$z = 0$

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- De este modo, tendremos 3 tipos de onda que nos interesará estudiar: la incidente, la reflejada y la transmitida.



$$\Longrightarrow$$



$$\mathbf{E}_i = E_{i0} e^{-\gamma_1 z} \; \mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_r = E_{r0} e^{-\gamma_1^* z} \; \mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_t = E_{t0} e^{-\gamma_2 z} \; \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \; \mathbf{a}_y \qquad \mathbf{H}_r = -\frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-\gamma_1^* z} \; \mathbf{a}_y \qquad \mathbf{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \; \mathbf{a}_y$$

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- Hagamos un balance:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r \qquad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t$$

$z = 0$

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- Tenemos $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ $\quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$

  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r$ $\quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t$

- ¿Qué debiese ocurrir en la interfaz $(z = 0)$?

$z = 0$

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- Tenemos $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ $\quad$ $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$

  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r$ $\quad$ $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t$

- ¿Qué debiese ocurrir en la interfaz $(z = 0)$?

$z = 0$

Condiciones de Borde

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0$$

$$\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{J}_s$$

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- Tenemos $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ $\quad$ $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r \qquad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t$$

- ¿Qué debiese ocurrir en la interfaz $(z = 0)$?

$z = 0$

Condiciones de Borde

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0$$

$$\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{J}_s \approx 0$$

Asumiremos ausencia de corrientes superficiales.

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- Luego:

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0)$$

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t\,(0)$$

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

$$\frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{r0}}{\eta_1} = \frac{E_{t0}}{\eta_2}$$

$$\frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{r0}}{\eta_1} = \frac{E_{i0} + E_{r0}}{\eta_2}$$

$$\frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{t0} - E_{i0}}{\eta_1} = \frac{E_{t0}}{\eta_2}$$

Reflexión y Transmisión de ondas EM

- Desarrollemos ambas expresiones:

$$\frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{r0}}{\eta_1} = \frac{E_{i0} + E_{r0}}{\eta_2}$$

$$\frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{t0} - E_{i0}}{\eta_1} = \frac{E_{t0}}{\eta_2}$$

$$\left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}\right) E_{i0} = \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right) E_{r0}$$

$$\frac{2}{\eta_1} E_{i0} = \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right) E_{t0}$$

$$\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 \eta_2}\right) E_{i0} = \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2}\right) E_{r0}$$

$$\frac{2}{\eta_1} E_{i0} = \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2}\right) E_{t0}$$

Coeficiente de Reflexión y Transmisión

- Despejando obtenemos los **coeficientes de reflexión y transmisión**:

$$\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 \eta_2}\right) E_{i0} = \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2}\right) E_{r0} \qquad \frac{2}{\eta_1} E_{i0} = \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2}\right) E_{t0}$$

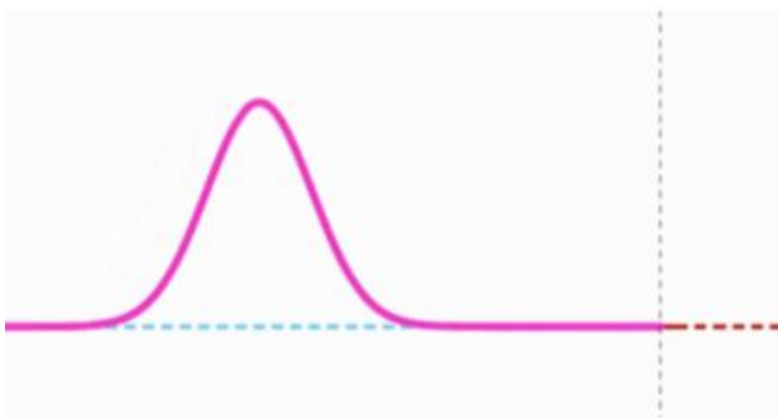
$$\boxed{\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \qquad \boxed{T = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

- Notemos que Γ y T pueden ser complejos, y que $0 \leq |\Gamma| \leq 1$.

Coeficiente de Reflexión y Transmisión

- Utilizando estos coeficientes:

$z = 0$



$\Longrightarrow$

$z = 0$

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{-\gamma_1 z}\ \mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_r = \Gamma E_0 e^{-\gamma_1^* z}\ \mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_t = T E_0 e^{-\gamma_2 z}\ \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z}\ \mathbf{a}_y \qquad \mathbf{H}_r = -\frac{\Gamma E_0}{\eta_1} e^{-\gamma_1^* z}\ \mathbf{a}_y \qquad \mathbf{H}_t = \frac{T E_0}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z}\ \mathbf{a}_y$$

Coeficiente de Reflexión y Transmisión

- Asimismo, podemos reformular las relaciones iniciales obtenidas de condiciones de borde.

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0)$$

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t\,(0)$$

$$E_0 + \Gamma E_0 = T E_0$$

$$\frac{E_0}{\eta_1} - \frac{\Gamma E_0}{\eta_1} = \frac{T E_0}{\eta_2}$$

$$\boxed{1 + \Gamma = T}$$

$$\boxed{\frac{1-\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2}}$$

Vector de Poynting Complejo

- Analicemos el vector de Poynting complejo en ambos medios:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0) = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r)^*$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0) = \left(E_0 e^{-\gamma_1 z} + \Gamma E_0 e^{-\gamma_1^* z}\right) \cdot \left(H_0 e^{-\gamma_1 z} - \Gamma H_0 e^{-\gamma_1^* z}\right)^* \ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0) = \frac{|E_0|^2}{|\eta_1|} e^{j\theta_{\eta_1}} e^{-2\alpha_1 z}\left(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}\right) \cdot \left(e^{j\beta_1 z} - \Gamma^* e^{-j\beta_1 z}\right)\mathbf{a}_z$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0) = \frac{|E_0|^2}{|\eta_1|} e^{j\theta_{\eta_1}} e^{-2\alpha_1 z}\left(1 - |\Gamma|^2 + \Gamma e^{2j\beta_1 z} - \Gamma^* e^{-2j\beta_1 z}\right) \ \mathbf{a}_z}$$

Vector de Poynting Complejo

- Analicemos el vector de Poynting complejo en ambos medios:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0) = \mathbf{E}\times\mathbf{H}^* = \mathbf{E}_\mathrm{t}\times\mathbf{H}_\mathrm{t}^*$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0) = (TE_0 e^{-\gamma_2 z})\cdot(TH_0 e^{-\gamma_2 z})^* \ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0) = \frac{|E_0|^2|T|^2}{\eta_2^*}e^{-2\alpha_2 z}\left(e^{-j\beta_2 z}\right)\cdot\left(e^{j\beta_2 z}\right)\mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0) = \frac{|E_0|^2|T|^2}{\eta_2^*}e^{-2\alpha_2 z} \ \mathbf{a}_z = \frac{|E_0|^2}{\eta_2^*}e^{-2\alpha_2 z}(1+\Gamma)\left(\frac{\eta_2^*}{\eta_1^*}(1-\Gamma^*)\right) \ \mathbf{a}_z$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0) = \frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_2 z}\left(1-|\mathit{\Gamma}|^2+\mathit{\Gamma}-\mathit{\Gamma}^*\right) \ \mathbf{a}_z}$$

Vector de Poynting Complejo

- De este modo:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_1 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma e^{2j\beta_1 z}-\Gamma^* e^{-2j\beta_1 z}\right)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_2 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*\right)\ \mathbf{a}_z$$

- Para $z=0$:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z=0^-)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*\right)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z=0^+)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*\right)\ \mathbf{a}_z$$

Vector de Poynting Complejo

- Para $z = 0$:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z = 0^-) = \frac{|E_0|^2}{|\eta_1|} e^{j\theta_{\eta_1}} (1 - |\Gamma|^2 + \Gamma - \Gamma^*)\ \mathbf{a}_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z = 0^+) = \frac{|E_0|^2}{|\eta_1|} e^{j\theta_{\eta_1}} (1 - |\Gamma|^2 + \Gamma - \Gamma^*)\ \mathbf{a}_z}$$

- ¡De modo que la potencia compleja se conserva!

Caso Vacío-Dieléctrico

- En este caso tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_1 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma e^{2j\beta_1 z}-\Gamma^* e^{-2j\beta_1 z}\right)\ \mathbf{a}_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_2 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*\right)\ \mathbf{a}_z}$$

Caso Vacío-Dieléctrico

- En este caso tendremos:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2+j2\Gamma\sin(2\beta_0 z)\right)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2\right)\ \mathbf{a}_z$$

Caso Vacío-Buen Conductor

- En este caso tendremos:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_1 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma e^{2j\beta_1 z}-\Gamma^* e^{-2j\beta_1 z}\right)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_2 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*\right)\ \mathbf{a}_z$$

Caso Vacío-Buen Conductor

- En este caso tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma e^{2j\beta_0 z}-\Gamma^* e^{-2j\beta_0 z}\right)\ \mathbf{a}_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}e^{-2\alpha_2 z}(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*)\ \mathbf{a}_z}$$

Caso Vacío-Conductor Perfecto

- En este caso tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_1 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma e^{2j\beta_1 z}-\Gamma^* e^{-2j\beta_1 z}\right)\ \mathbf{a}_z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0)=\frac{|E_0|^2}{|\eta_1|}e^{j\theta_{\eta_1}}e^{-2\alpha_2 z}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*\right)\ \mathbf{a}_z}$$

Caso Vacío-Conductor Perfecto

- En este caso tendremos:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma e^{2j\beta_0 z}-\Gamma e^{-2j\beta_0 z}\right)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z>0)=0$$

Caso Vacío-Conductor Perfecto

- En este caso tendremos:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(1-|-1|^2+(-1)e^{2j\beta_0 z}-(-1)e^{-2j\beta_0 z}\right)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(-e^{2j\beta_0 z}+e^{-2j\beta_0 z}\right)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=\frac{|E_0|^2}{\eta_0}(j2\sin(2\beta_0 z))\ \mathbf{a}_z$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z<0)=-j\frac{4|E_0|^2}{\eta_0}\sin(\beta_0 z)\cos(\beta_0 z)\ \mathbf{a}_z}$$

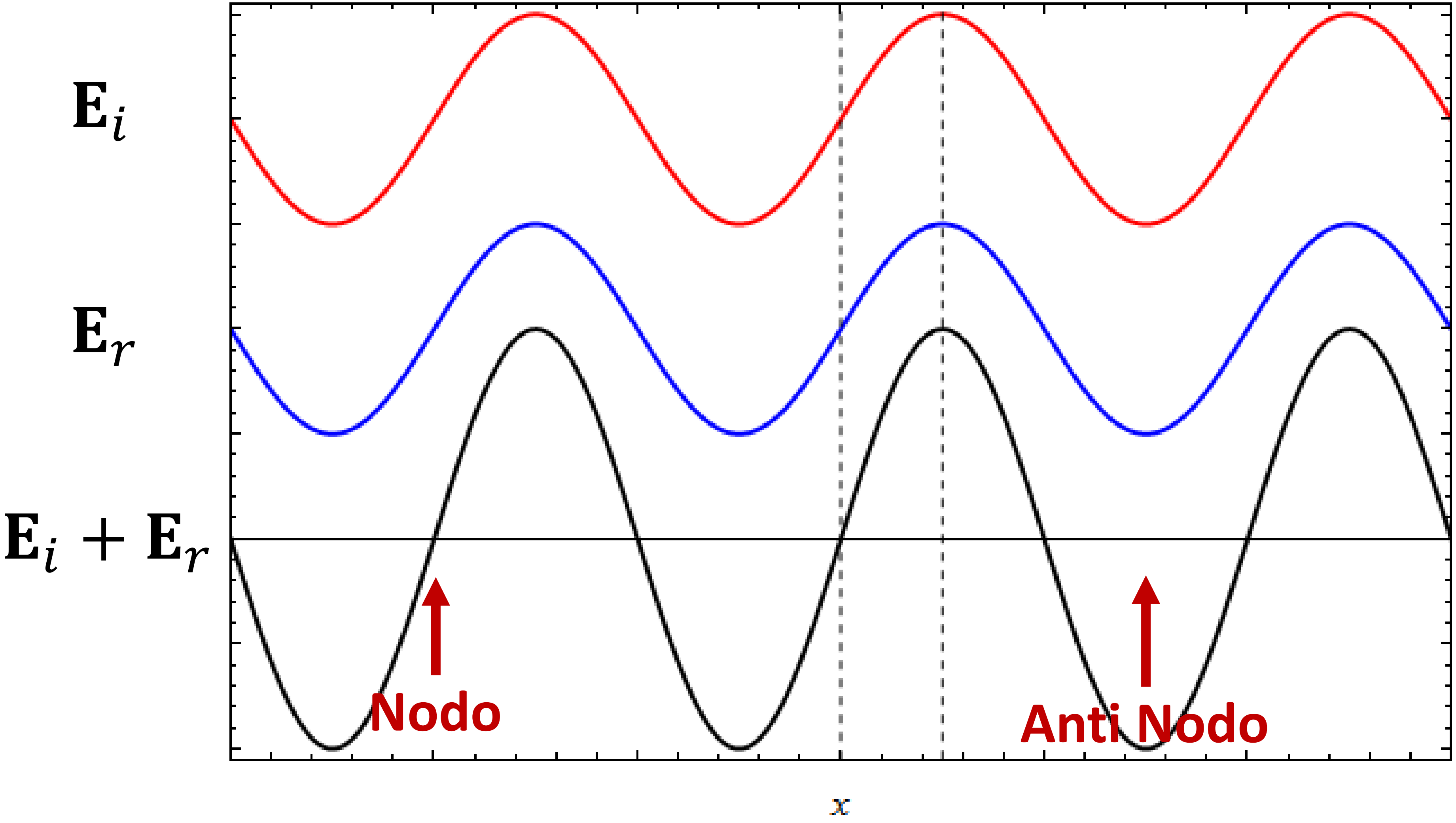
Caso Vacío-Conductor Perfecto

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z < 0) = -j\frac{4|E_0|^2}{\eta_0}\sin(j\beta_0 z)\cos(j\beta_0 z)\ \mathbf{a}_z$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}'(z > 0) = 0$$

- De modo que **no se entrega potencia real al conductor**.
- Hay una reflexión total de la onda, que genera una **onda estacionaria**.

Ondas Estacionarias



Razón de Onda Estacionaria (ROE o SWR)

- A partir de la animación anterior podemos notar que el máximo valor de la onda estacionaria será cuando la onda incidente y reflejada estén en fase:

$$|E_1|_{max} = E_0(1 + |\Gamma|)$$

- Análogamente, el mínimo será cuando estén en contrafase:

$$|E_1|_{min} = E_0(1 - |\Gamma|)$$

Razón de Onda Estacionaria (ROE o SWR)

- Definiremos la razón de onda estacionaria como:

$$\boxed{SWR = \frac{|E_1|_{max}}{|E_1|_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}}$$

- Despejando $|\Gamma|$:

$$\boxed{|\Gamma| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}}$$

Resumen

- Identificamos que al pasar de un medio a otro la onda puede transmitir y reflejar parte de la misma.
- Analizamos el fenómeno desde una perspectiva energética.
- Estudiamos 3 casos particulares.
- Notamos que la onda reflejada genera como consecuencia una onda estacionaria.
- Definimos la ROE y vimos como a partir de ella es posible determinar el coeficiente de reflexión.

Cerrando la clase de hoy

- Con el análisis realizado, solamente nos falta extendernos al caso de una incidencia arbitraria.

Próxima Clase:

Incidencia oblicua y Reflexión

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 517 – 528