Clase 10
Ondas Electromagnéticas

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 441 – 453
Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 473 – 480

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Hasta ahora consideramos que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ pueden tener un comportamiento arbitrario en el tiempo.
- A partir de ahora nos vamos a limitar a un caso muy particular, correspondiente a campos que varían **sinusoidalmente** en el tiempo.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-10:** Distinguir el significado de la formulación diferencial e integral de las ecuaciones de Maxwell, tanto para campos estáticos como variantes en el tiempo.
- **OA-11:** Determinar las expresiones correspondientes a ondas eléctricas, magnéticas y potencia asociada para condiciones de propagación libre en distintos tipos de medios.

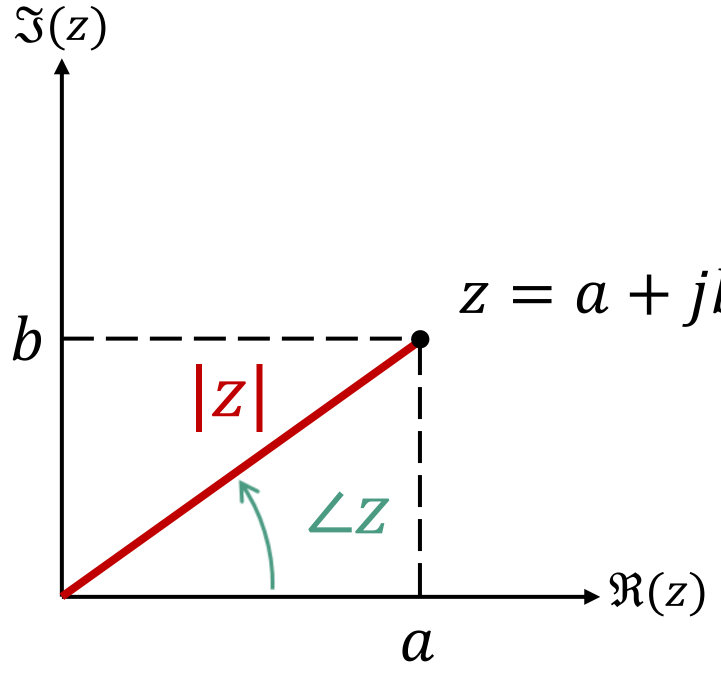
Contenidos

- Fasores
- Campos Armónicos en el Tiempo
- Ecuaciones de Maxwell para Campos Armónicos
- La Ecuación de Onda
- Solución Monocromática a la Ecuación de Onda
- Número de Onda
- Relación entre $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$
- Propagación de ondas EM

Fasores

- Son una notación alternativa para números complejos.
- Consiste en expresar el número complejo z en notación polar, definiendo una magnitud y una fase.

$$z = re^{j\theta}$$



$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\theta = \angle z = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Fasores

- Utilizando la identidad de Euler:

$$z = r(\cos\theta + j\,\sin\theta)$$

- Y si introducimos variabilidad temporal, de la forma: $\varphi = \omega t + \theta$

$$z(t) = re^{j(\omega t+\theta)} = re^{j\omega t}e^{j\theta}$$

- Donde θ corresponde al **desfase**. Puede ser una constante, un término variable en el espacio, o una mezcla de ambas.

Campos Armónicos en el Tiempo

- Si tenemos una señal de la forma:

$$A(\mathbf{r},t) = A_0\,[\cos(\omega t\ - \beta\mathbf{r} + \theta) + j\sin(\omega t\ - \beta\mathbf{r} + \theta)] = A_0 e^{j\omega t} e^{j(-\beta\mathbf{r}+\theta)}$$

- Podemos separar sus componentes geométrica y temporal como:

$$A(\mathbf{r},t) = \left(\mathbf{A_0} e^{j(-\beta\mathbf{r}+\theta)}\right)\left(e^{j\omega t}\right) = \mathbf{A_s}\, e^{j\omega t}$$

- Esto sigue siendo igual de válido si A es un campo vectorial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \left(\mathbf{A_0} e^{j(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\theta)}\right)\left(e^{j\omega t}\right) = \mathbf{A_s}\, e^{j\omega t}$$

Campos Armónicos en el Tiempo

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{A_0} e^{j(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\theta)}\right)\left(e^{j\omega t}\right) = \mathbf{A_s}\, e^{j\omega t}}$$

- Estos se conocen como **campos armónicos en el tiempo**.
- Corresponden a campos vectoriales cuyo comportamiento en el tiempo es sinusoidal.
- Si solo hay una frecuencia (ω), diremos que son de tipo **monocromático**.

Campos Armónicos en el Tiempo

- Supongamos ahora que $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ es puramente real:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\} = \Re\left\{\mathbf{A}_s\, e^{j\omega t}\right\}$$

- Si la derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = j\omega\, \Re\left\{\mathbf{A}_s\, e^{j\omega t}\right\}$$

- Aquí vamos de nuevo…

Ecs. de Maxwell para Campos Armónicos

- Si ahora $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son campos armónicos reales, podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell como:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \, dv$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La Ecuación de Onda

- Consideremos un medio **simple** (lineal, isotrópico, homogéneo, no conductor y libre de fuentes).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Aplicando rotor:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

La Ecuación de Onda

- Consideremos un medio **simple** (lineal, isotrópico, homogéneo, no conductor y libre de fuentes).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Aplicando rotor:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu\varepsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0}$$

La Ecuación de Onda

- Este resultado se conoce como la **Ecuación de Onda**

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0} \qquad \boxed{\nabla^2\mathbf{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0}$$

- Estas ecuaciones describen ondas propagándose a velocidad

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- Para el caso del vacío se ha demostrado experimentalmente que:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$$

Número de onda (β)

- Reescribamos la Ecuación de Onda usando notación fasorial

$$\nabla^2\mathbf{E} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} = 0 \qquad\qquad \nabla^2\mathbf{B} + \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{B} = 0$$

- Definiremos el número de onda como:

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Solución Monocromática a la Ec. de Onda

- Definiendo el **operador Hertziano** como:

$$\square = \nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- Podemos reescribir la ecuación de onda de la forma

$$\square \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Solución Monocromática a la Ec. de Onda

- Una solución a la ecuación de onda $\Box \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{E_s}e^{j\omega t}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{B_s}e^{j\omega t}$$

- No obstante, esto es válido solo si se cumple la relación:

$$\boxed{\frac{\omega^2}{|\mathbf{k}|^2} = u^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}}$$

Relación de dispersión

Número de onda

- El número de onda está íntimamente ligado al vector $\mathbf{k}$ que definimos previamente en:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{E_s}e^{j\omega t}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B_0}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0) = \mathbf{B_s}e^{j\omega t}$$

- El **vector de onda** ($\mathbf{k}$) simplemente nos indica la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo:

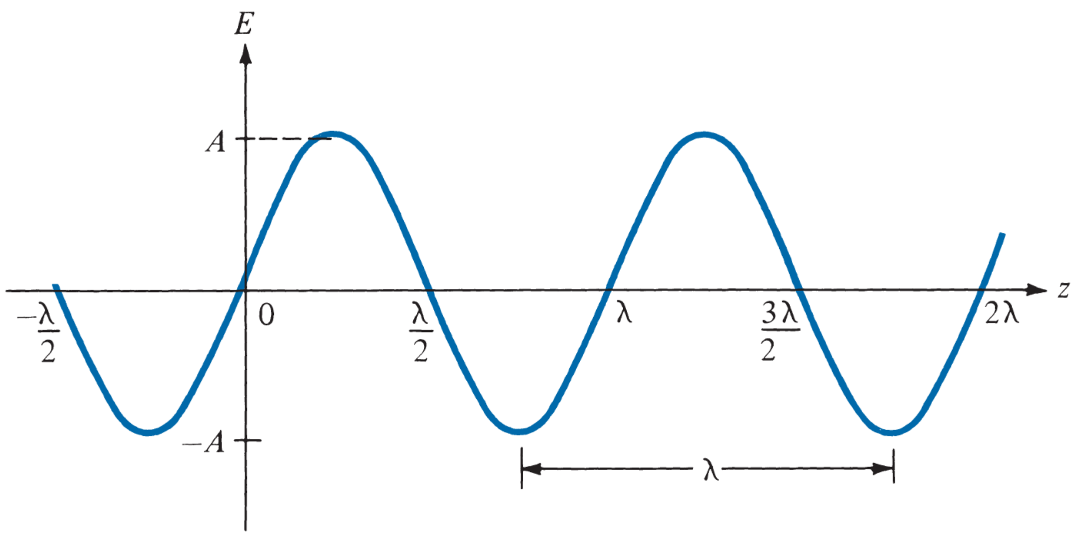
$\mathbf{k} = \beta\ \mathbf{a}_x$ (onda propagada en el eje x)

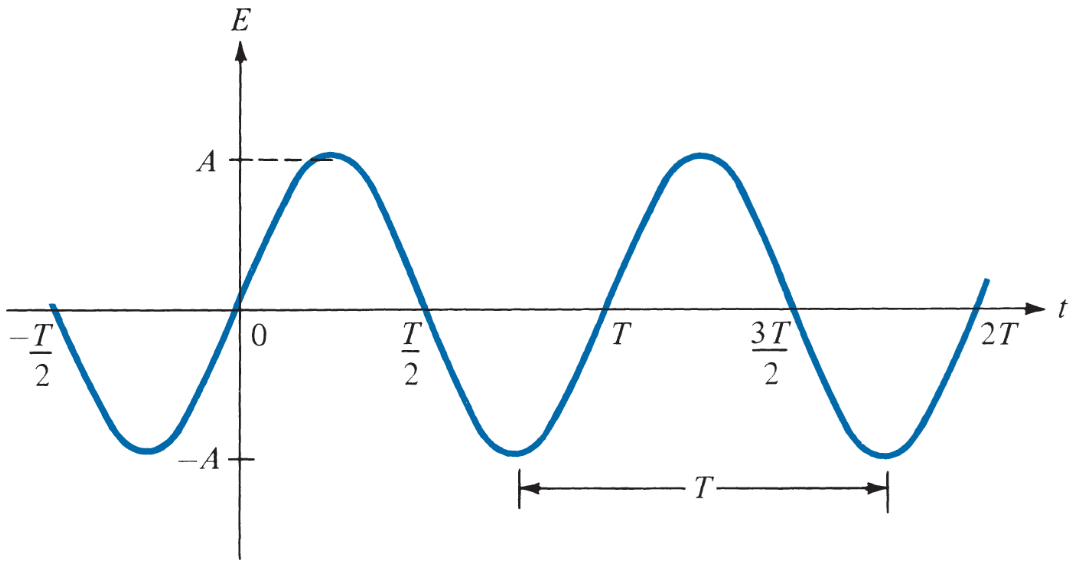
$\mathbf{k} = \beta\ \mathbf{a}_y$ (onda propagada en el eje y)

$\mathbf{k} = \beta\ \mathbf{a}_z$ (onda propagada en el eje z)

Solución Monocromática a la Ec. de Onda

- Dado que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ es una función en espacio y en tiempo, podemos graficarla manteniendo uno de los 2 parámetros constantes.





Solución Monocromática a la Ec. de Onda

- De la gráfica anterior se desprenden una serie de relaciones

$$u = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi}\lambda$$

- Definiremos el **número de onda** como el número de ciclos de una onda por unidad de distancia:

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Relación entre $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

- Anteriormente vimos que una solución a la Ecuación de Onda era:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta) = \mathbf{E}_\mathbf{s} e^{j\omega t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta) = \mathbf{B}_\mathbf{s} e^{j\omega t}\end{aligned}} \quad s.a. \quad \boxed{\frac{\omega^2}{|\mathbf{k}|^2} = u^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}}$$

- Analicemos un poco más el comportamiento de estas soluciones. Aplicando rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta)$$
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta)$$

Relación entre $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

- Recordando las condiciones para un medio simple:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta) = \omega \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta)$$
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta) = -\mu\varepsilon\omega \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta)$$

- De modo que:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\mu\varepsilon\omega \mathbf{E}_0\end{gathered}}$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ son **perpendiculares entre sí**.

Relación entre $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

- Sin perder generalidad, tomemos el caso:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{E}_0 \cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)\ \ \mathbf{a}_y$$

- Aplicando

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(\beta\ \mathbf{a}_x \times \mathrm{E}_0\mathbf{a}_y\right)\cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \beta\mathrm{E}_0 \cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)\ \ \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\omega}{u_x}\mathrm{E}_0 \cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)\ \ \mathbf{a}_z$$

$$\frac{\omega}{u_x}\mathrm{E}_0 \cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)\ \ \mathbf{a}_z = \omega\mathrm{B}_0 \cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)\ \ \mathbf{a}_z$$

$$\mathrm{E}_0 \cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)\ \ \mathbf{a}_z = u_x\mathrm{B}_0 \cos(\omega t - (\beta\ \mathbf{a}_x)\cdot\mathbf{r} + \theta)\ \ \mathbf{a}_z$$

Relación entre $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

- Del resultado anterior:

$$\mathrm{E}_0 \cos(\omega t - (\beta\, \mathbf{a}_x) \cdot \mathbf{r} + \theta)\, \mathbf{a}_y \quad \longleftrightarrow \quad u_x \mathrm{B}_0 \cos(\omega t - (\beta\, \mathbf{a}_x) \cdot \mathbf{r} + \theta)\, \mathbf{a}_z$$

- Los campos no solo son perpendiculares, también están **en fase**.

- Por otro lado, sus magnitudes deben satisfacer :

$$\mathrm{E}_0 = u_x \mathrm{B}_0$$

$$\boxed{u = \frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}}$$

Velocidad de fase

Propagación de ondas EM

- Anteriormente vimos que una solución a la Ecuación de Onda era:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta) = \mathbf{E_s}e^{j\omega t}\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}_0\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta) = \mathbf{B_s}e^{j\omega t}\end{aligned}} \quad s.a. \quad \boxed{\frac{\omega^2}{|\mathbf{k}|^2} = u^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}}$$

- Analicemos un poco más el comportamiento de estas soluciones. Aplicando divergencia:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0\sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta)$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta)$$

Propagación de ondas EM

- Recordando las condiciones para un medio simple:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Tenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta) = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta) = 0$$

- De modo que:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \end{aligned}}$$

Propagación de ondas EM

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \end{aligned}}$$

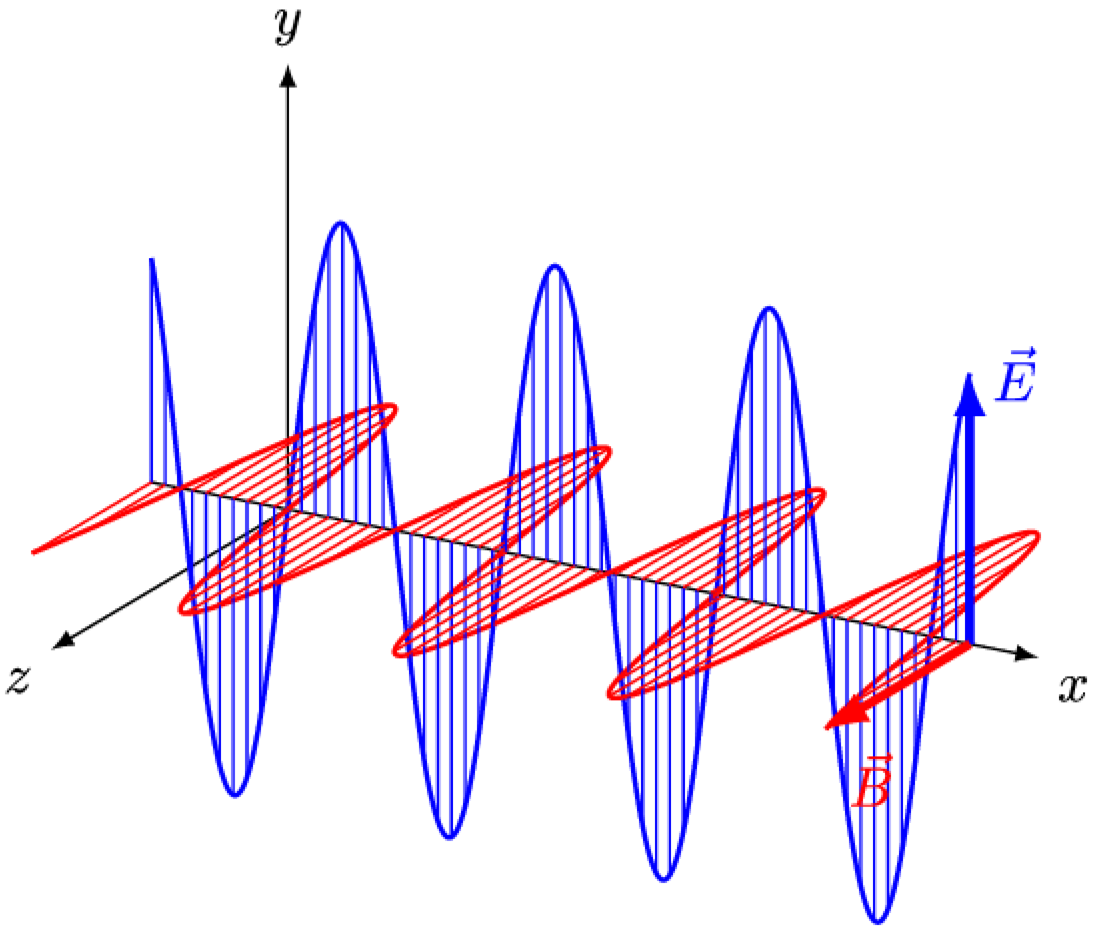
- Este resultado nos dice que el campo EM es una **onda transversal**, pues no tiene componente vectorial en $\mathbf{k}$.

- Asimismo, notamos que la amplitud de la onda solo varía en función de t y de $\mathbf{k}$. De este modo, para cada instante $(\mathbf{r}', t')$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}', t')$ son constantes en todo el plano perpendicular a $\mathbf{k}$.

- Es decir, es una **Onda Electromagnética Plana**.

Propagación de ondas EM

- En resumen:



Resumen

- Recordamos la notación fasorial y su versatilidad para representar campos armónicos.
- Reformulamos las ecuaciones de Maxwell para el caso de Campos Armónicos en el Tiempo.
- Definimos la Ecuación de Onda y su solución para campos electromagnéticos.
- Definimos el concepto de número de onda.
- Caracterizamos la relación geométrica entre las ondas de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.

Cerrando la clase de hoy

- Ya caracterizamos las ondas electromagnéticas en términos generales.
- Nos interesa saber cómo se comportan en los distintos medios vistos en el curso (vacío, dieléctricos, conductores).

Próxima Clase (11/Abril):

Propagación de Ondas

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 480 – 489

Cerrando la clase de hoy

- Necesito que:

Estudien para la I1

(Les irá bien, yo lo sé <3)