Clase 20
ROE, Potencia y Terminaciones

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 564-571

Javier Silva Orellana

jjsilva8@uc.cl

Contexto

- La clase anterior estudiamos el caso de cargas desbalanceadas y establecimos una expresión general para la impedancia de entrada de una LT.
- Hoy desarrollaremos un par de conceptos adicionales, y estudiaremos una serie de casos notables.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-14:** Distinguir las ecuaciones y el significado de una línea de transmisión general y las versiones correspondientes para líneas sin pérdidas, para pérdidas bajas, para pérdidas altas, y para líneas sin distorsión.

Contenidos

- Ondas estacionarias
- Razón de Onda Estacionaria
- Potencia en LT
- Terminaciones

Ondas Estacionarias

- Consideremos una señal de voltaje en una LT, la cual posee una componente incidente V_i y reflejada V_r :

$$V(z) = V_i(z) + V_{r(z)} = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^+ \Gamma e^{j\beta z}$$

- Sumemos “0”:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + \Gamma V_0^+ e^{-j\beta z} - \Gamma V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^+ \Gamma e^{j\beta z}$$

$$V(z) = V_0^+ (1+\Gamma) e^{-j\beta z} + V_0^+ \Gamma \left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}\right)$$

$$V(z) = V_0^+ T e^{-j\beta z} + V_0^+ \Gamma 2\mathrm{jsin}(\beta z)$$

Ondas Estacionarias

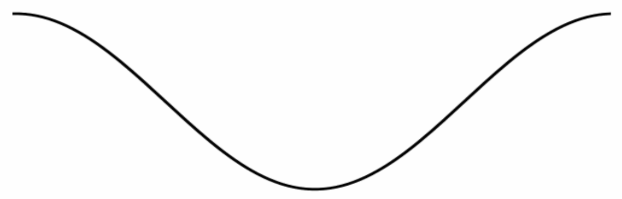
- A partir de $V(z) = V_0^+ T e^{-j\beta z} + V_0^+ \Gamma 2\mathrm{jsin}(\beta z)$

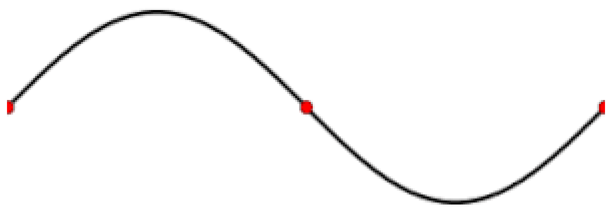
- Podemos reescribir la señal en el dominio del tiempo:

$$v(z) = V_0^+ |T| \cos(\omega t - \beta z + \theta_T + \theta_0^+) - 2V_0^+ |\Gamma| \sin(\beta z) \sin(\omega t + \theta_\Gamma + \theta_0^+)$$

Onda viajera

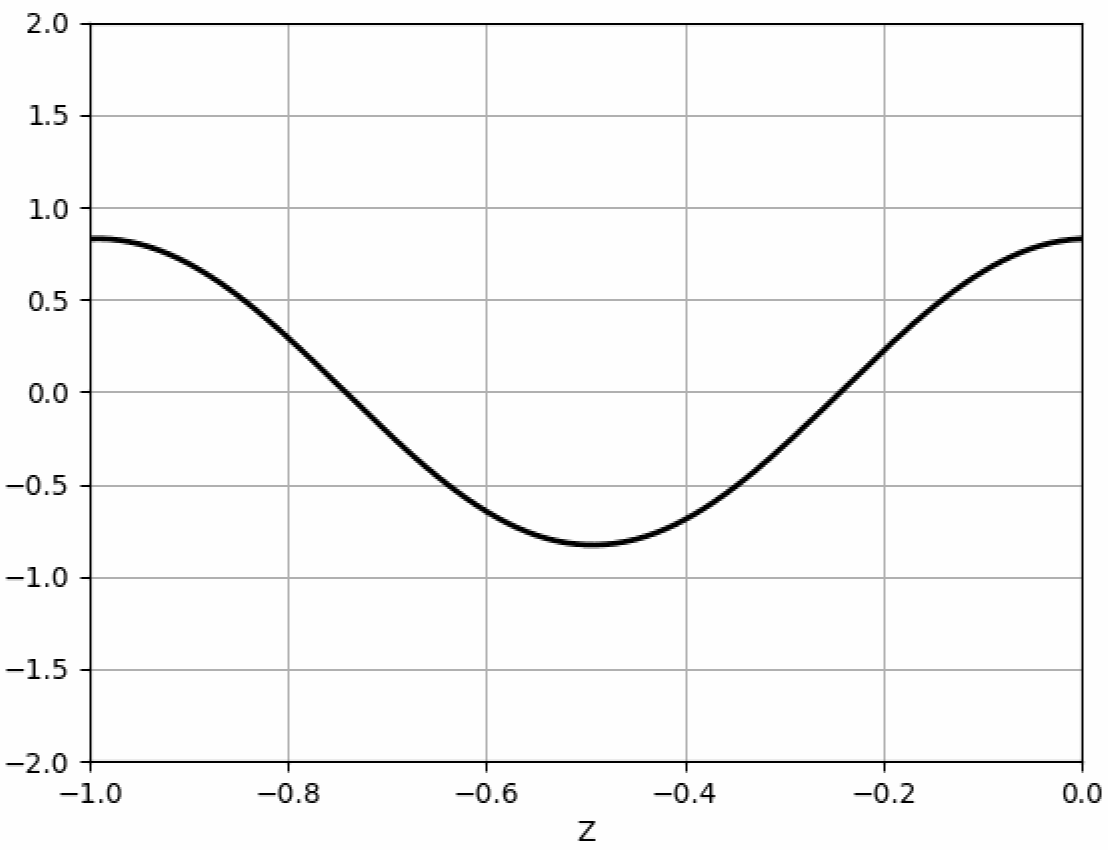
Onda estacionaria





Ondas Estacionarias

- La combinación de ambas ondas tendrá el siguiente comportamiento:



Razón de Onda Estacionaria

- Para un punto de la línea:

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) = V_0^+ e^{-j\beta z}(1 + \Gamma e^{j2\beta z})$$

- Determinemos el módulo:

$$|V(z)| = |V_0^+|\left|1 + \Gamma e^{j2\beta z}\right| = |V_0^+|\left|1 + |\Gamma| e^{j(\theta_\Gamma + 2\beta z)}\right|$$

- Dado que $e^{j(\theta_\Gamma + 2\beta z)}$ toma valores entre -1 y 1:

$$|V(z)|_{max} = |V_0^+|(1 + |\Gamma|) \qquad |V(z)|_{min} = |V_0^+|(1 - |\Gamma|)$$

Razón de Onda Estacionaria

- La razón de onda estacionaria (ROE o SWR) se definirá como la razón entre el voltaje máximo y mínimo en la LT:

$$ROE = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

- Este índice nos da una noción respecto al grado de reflexión o desbalance entre la carga y la línea. Ya vimos antes que reordenando:

$$|\Gamma| = \frac{ROE - 1}{ROE + 1}$$

Potencia en LT

- Ya hemos visto varias veces que:

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) \qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

- La potencia promedio estará dada por:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\Re\{V(z)I^*(z)\} = \frac{1}{2}\Re\left\{V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right)\frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right)^*\right\}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Re\left\{\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right)\left(e^{j\beta z} - \Gamma^* e^{-j\beta z}\right)\right\}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Re\left\{1 + \Gamma e^{j2\beta z} - \Gamma^* e^{-j2\beta z} - |\Gamma|^2\right\}$$

Potencia en LT

- Usando la propiedad $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$ tendremos:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Re\left\{1 + 2j\Im\left\{\Gamma e^{j2\beta z}\right\} - |\Gamma|^2\right\} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Re\{1 - |\Gamma|^2\}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}|\Gamma|^2$$

Entregada a la carga

Reflejada

Terminaciones

- El extremo final de una línea de transmisión puede acabar de distintas formas. En concreto estudiaremos los siguientes casos:

  - Corto-Circuito
  - Circuito Abierto
  - Línea $\lambda/2$
  - Transformador $\lambda/4$
  - Otra línea

Terminación en Corto-Circuito

- Esto es equivalente a que $Z_L = 0$.

- Examinemos los distintos parámetros:

$$\Gamma = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$$

$$\text{ROE} = \frac{1 + |(-1)|}{1 - |(-1)|} = \infty$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}|(-1)|^2 = 0$$

Terminación en Corto-Circuito

- Examinemos el voltaje y la corriente:

$$V(z) = V_o^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) = V_o^+\left(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}\right) = -j2V_o^+\sin(\beta z)$$

$$I(z) = \frac{V_o^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right) = \frac{V_o^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}\right) = \frac{2V_o^+}{Z_0}\cos(\beta z)$$

- En $z = 0$

$$V(z = 0) = 0 \qquad\qquad I(z = 0) = \frac{2V_o^+}{Z_0} = I_{\max}$$

- Lo cual es coherente para el caso de un cortocircuito.

Terminación en Corto-Circuito

- Examinemos la impedancia de entrada a $z = 0$:

$$Z_{in} = \left[\frac{0 + jZ_0 \tan(\beta 0)}{Z_0 + 0}\right] Z_0 = 0$$

- Por curiosidad, a $z = \lambda/2$ (recordemos que $\beta = 2\pi/\lambda$):

$$Z_{in} = \left[\frac{0 + jZ_0 \tan(\pi)}{Z_0 + 0}\right] Z_0 = jZ_0 \tan(\pi) = 0$$

- Por curiosidad, a $z = \lambda/4$:

$$Z_{in} = \left[\frac{0 + jZ_0 \tan(\pi/2)}{Z_0 + 0}\right] Z_0 = jZ_0 \tan(\pi/2) = j\infty$$

¿circuito abierto?

Terminación en Circuito Abierto

- Esto es equivalente a que $Z_L = \infty$.

- Examinemos los distintos parámetros:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_L}{Z_L} = 1$$

$$\text{ROE} = \frac{1 + |1|}{1 - |1|} = \infty$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}|1|^2 = 0$$

Terminación en Circuito Abierto

- Examinemos el voltaje y la corriente:

$$V(z) = V_o^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) = V_o^+\left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}\right) = 2V_o^+\cos(\beta z)$$

$$I(z) = \frac{V_o^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right) = \frac{V_o^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}\right) = -j\frac{2V_o^+}{Z_0}\sin(\beta z)$$

- En $z = 0$

$$V(z = 0) = 2V_o^+ = \mathrm{V}_{\mathrm{max}} \qquad\qquad I(z = 0) = 0$$

- Lo cual es coherente para el caso de un circuito abierto.

Terminación en Circuito Abierto

- Examinemos la impedancia de entrada a $z = 0$:

$$Z_{in} = \left[\frac{Z_L}{jZ_L \tan(0)}\right] Z_0 = -jZ_0 \cot(0) = j\infty$$

- Por curiosidad, a $z = \lambda/2$ (recordemos que $\beta = 2\pi/\lambda$):

$$Z_{in} = \left[\frac{Z_L}{jZ_L \tan(\pi)}\right] Z_0 = -jZ_0 \cot(\pi) = j\infty$$

- Por curiosidad, a $z = \lambda/4$:

$$Z_{in} = \left[\frac{Z_L}{jZ_L \tan(\pi/2)}\right] Z_0 = -jZ_0 \cot(\pi/2) = 0$$

¿cortocircuito?

Línea $\lambda/2$

- Notamos que ocurre algo bastante especial cuando el largo de la línea es de $\lambda/2$:

$$Z_{in} = \left[\frac{Z_L + jZ_0 \tan(\pi)}{Z_0 + jZ_L \tan(\pi)}\right] Z_0 = \frac{Z_L}{Z_0} Z_0 = Z_L$$

- De modo que para cualquier línea de largo $\mathrm{n}\frac{\lambda}{2}$ la impedancia de la carga no se verá afectada, independiente del valor que tome Z_0.

Transformador $\lambda/4$

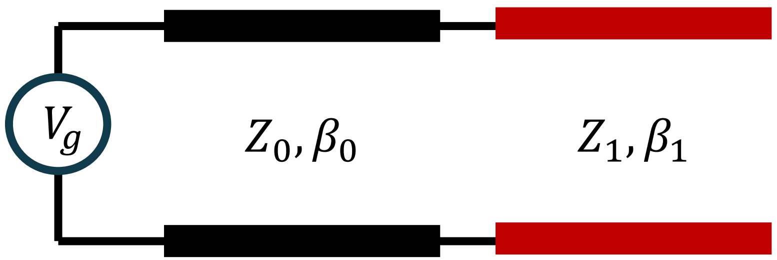
- Similarmente, también notamos que ocurre algo cuando el largo de la línea es de $\lambda/4$:

$$Z_{in} = \left[\frac{Z_L + jZ_0 \tan(\pi/2)}{Z_0 + jZ_L \tan(\pi/2)}\right] Z_0 = \frac{Z_0}{Z_L} Z_0 = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

- De modo que para cualquier línea de largo $\frac{\lambda}{4} + \mathrm{n}\frac{\lambda}{2}$ la impedancia de la carga se transformará en su inverso (admitancia), ponderado por Z_0^2.

Conexión a otra línea

- Análogo al caso de una carga, tendremos un cambio en la impedancia del medio.
- De este modo, también existirán reflexiones al cambiar de una línea de transmisión a otra.



- Podemos estimar las reflexiones como:

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$$

- Y el voltaje transmitido a la otra línea: (ignorando reflexiones desde Z_L)

$$V(z) = V_0^+ T e^{-j\beta_1 z}$$

$$\mathrm{T} = 1 + \Gamma = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_0}$$

Conexión a otra línea

- Similar a las Pérdidas de Retorno definiremos las **Pérdidas por Inserción** como la medida de la atenuación por el cambio de una línea a otra:

$$\boxed{\mathrm{IL} = -20\log_{10}|\mathrm{T}| \ \ [\mathrm{dB}]}$$

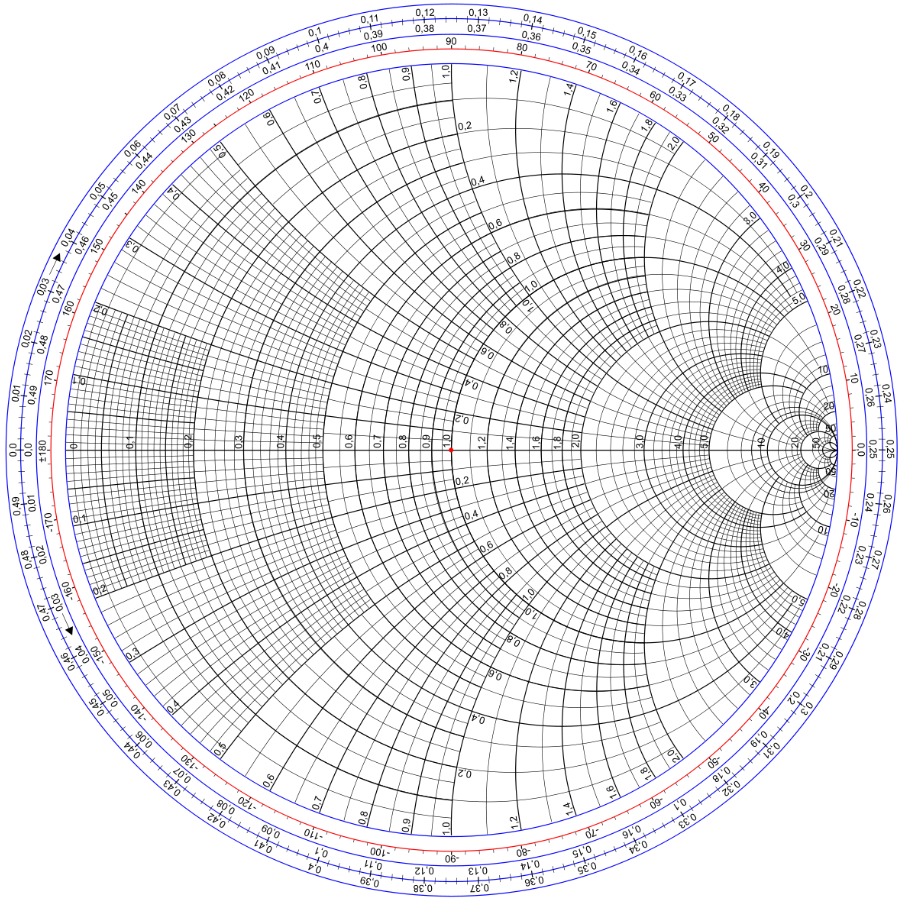
- Una línea de transmisión buena tendrá un IL pequeño y positivo (más intuitivo que las RL).

Resumen

- Estudiamos el caso de ondas estacionarias en LT y retomamos el concepto de ROE.
- Analizamos el comportamiento de la potencia en una LT.
- Estudiamos diversos casos de terminaciones y largos especiales para una LT.

Cerrando la clase de hoy

- Ahora viene lo feo…



Próxima Clase:

Carta de Smith.

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 572 – 584

Ejemplo

El circuito RF de la figura opera a 150 MHz y consta de 2 líneas coaxiales sin pérdidas que alimentan cargas complejas Z_{L1} y Z_{L2}. Determine:

a) (4 puntos) La impedancia total Z_{in} vista desde la entrada al circuito (ver figura)

b) (2 puntos) Para un voltaje de 100 V entregado a la entrada del circuito, encuentre la potencia activa promedio **total** (watts) entregada **a las cargas** Z_{L1} y Z_{L2}.

Notas importantes:

- Los tramos de longitudes despreciables son aquellos de líneas delgadas
- Note que los dieléctricos e impedancias características de las líneas son distintas