Clase 09
Ecuaciones de Maxwell

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 421 – 440

}

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Hasta ahora hemos visto que cargas estáticas generan campos eléctricos, y cargas en movimiento constante (corrientes constantes) generan campos magnéticos.
- ¿Qué ocurrirá con corrientes variables?

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-09:** Distinguir las distintas formas de la Ley de Faraday y saber aplicarlas para determinar la FEM inducida en diversas situaciones de campos magnéticos variantes en el tiempo y/o trayectorias cerradas.
- **OA-10:** Distinguir el significado de la formulación diferencial e integral de las ecuaciones de Maxwell, tanto para campos estáticos como variantes en el tiempo.

Contenidos

- Fuerza electromotriz
- Ley de Faraday-Lenz
- Tipos de FEM inducida
- Corriente de Desplazamiento
- Ecuaciones de Maxwell completas
- Potenciales variantes en el tiempo

Fuerza electromotriz (FEM)

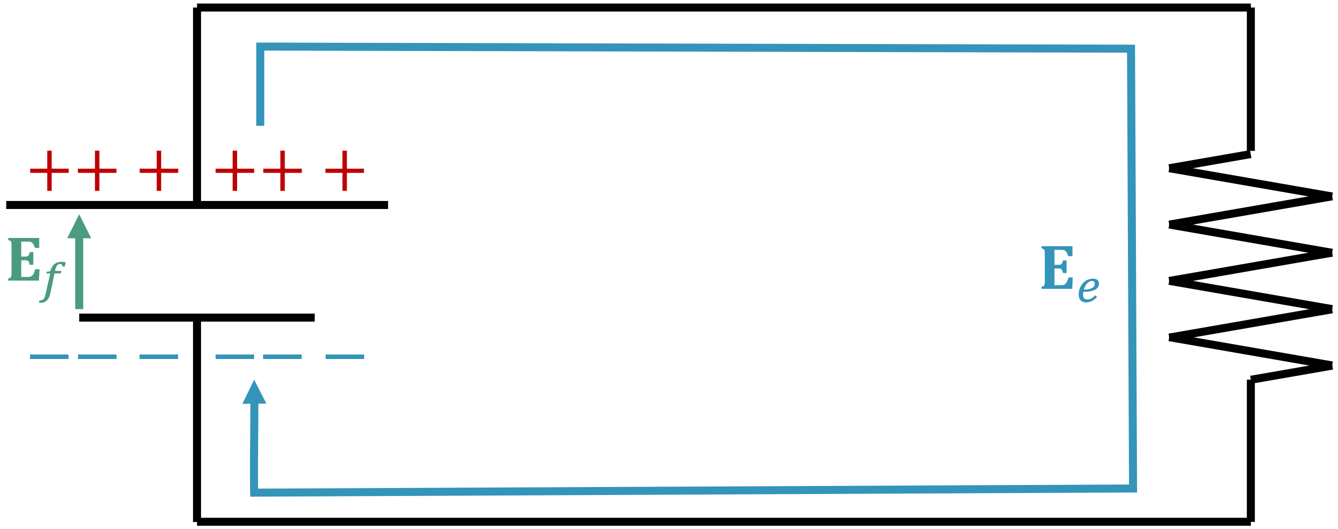
- Volvamos a lo básico. ¿Qué ocurre con el campo en un circuito?

Fuerza electromotriz (FEM)

- Dentro de la batería ocurre una reacción electroquímica que genera un campo eléctrico por fuerza electromotriz $\mathbf{E}_f$.

Fuerza electromotriz (FEM)

- La diferencia de potenciales en los extremos de la batería generarán como respuesta un campo $\mathbf{E}_e = -\nabla V$.



Fuerza electromotriz (FEM)

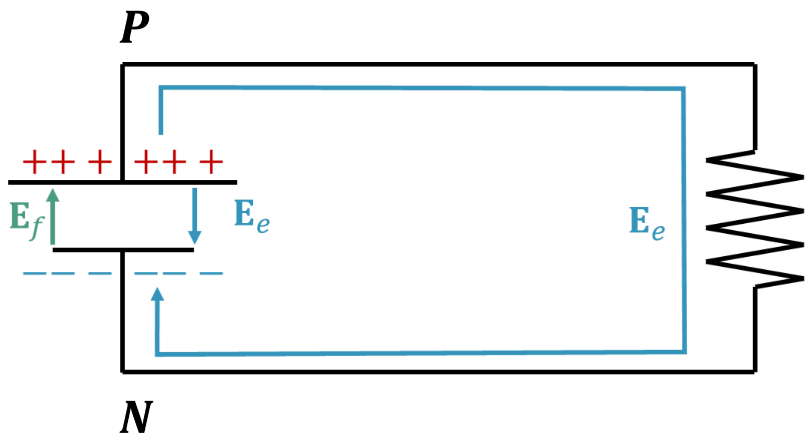
- ¡Pero este campo también está ocurriendo al interior de la batería!

Fuerza electromotriz (FEM)

- ¿Cómo es el campo entonces?

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_e$$

- Si integramos en una trayectoria cerrada:



$$\oint_L \mathbf{E} = \oint_L \mathbf{E}_f + \oint_L \mathbf{E}_e = IR$$

- Pero vimos que por ley de Maxwell el campo eléctrico generado por cargas es <u>conservativo</u>.

$$\oint_L \mathbf{E} = \int_N^P \mathbf{E}_f + 0 = IR$$

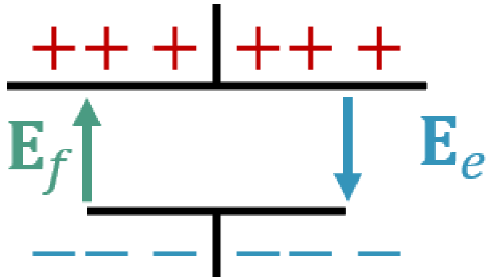
¡$\mathbf{E}_e$ no es quien mantiene el flujo de corriente en el circuito, porque no hace trabajo neto en un circuito cerrado!

Fuerza electromotriz (FEM)

- El campo $\mathbf{E}_f$ generado por el potencial electroquímico es no conservativo, y es el responsable de mantener el flujo de corriente en el circuito.

$$\int_N^P \mathbf{E}_f = IR$$

- Si limitamos nuestro análisis solo al interior de la batería:



$$V_{emf} = \int_N^P \mathbf{E}_f = -\int_N^P \mathbf{E}_e = IR$$

- V_{emf} es lo que comúnmente conocemos como Voltaje. Usualmente no es lo mismo que potencial eléctrico.

Fuerza electromotriz (FEM)

En resumen:

1. Una FEM es generada por fuentes que no son directamente eléctricas (e.g., químicas, mecánicas, **magnéticas**).
2. Los campos eléctricos FEM son no conservativos.
3. En general nos referiremos a la FEM como Voltaje.

Ley de Faraday-Lenz

- Un campo magnético variante en el tiempo puede generar una FEM inducida.

- La FEM inducida será proporcional a la tasa de cambio del flujo magnético enlazado por el circuito (Ley de Faraday).
- La FEM inducida será en sentido opuesto al campo (Ley de Lenz).

$$\boxed{V_{emf} = -\frac{d\lambda}{dt} = -N\frac{d\Psi}{dt}}$$

Ley de Faraday-Lenz

Ley de Faraday-Lenz

- En base a las relaciones que hemos visto anteriormente, podemos reescribir la Ley de Faraday-Lenz en términos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.

$$V_{emf} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad\qquad \Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -N \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}$$

Ley de Faraday-Lenz

Tipos de FEM inducida

Consideremos una espira de una sola vuelta ($N = 1$). La variación de flujo magnético (y por ende, la FEM inducida) puede ser generada de 3 formas distintas:

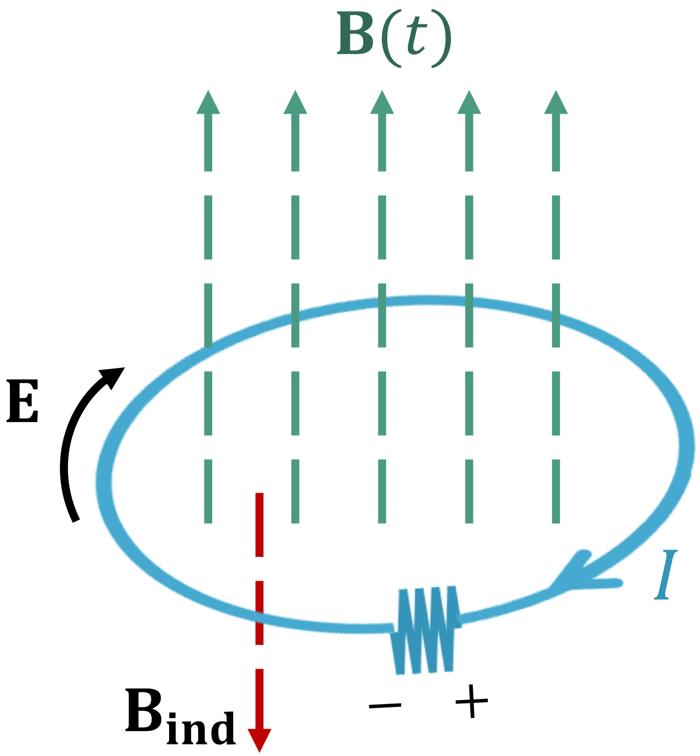
1. Variando el campo $\mathbf{B}$.
2. Variando el área de la espira.
3. Variando el campo $\mathbf{B}$ y el área de la espira.

Caso 1: Variando el campo $\mathbf{B}$

- En este caso, mantenemos estática la espira y variamos en el tiempo el valor de $\mathbf{B}$.
- Usando Stokes:

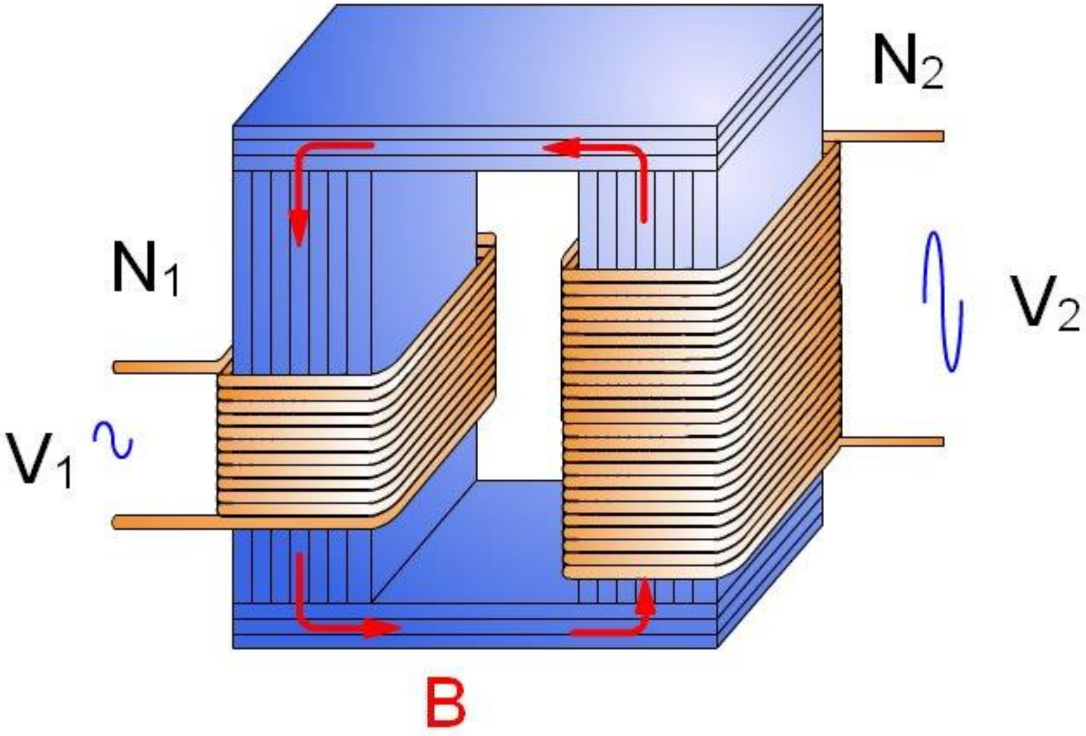
$$V_{emf} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$



Caso 1: Variando el campo $\mathbf{B}$

- Este tipo de FEM suele darse mucho en Transformadores.

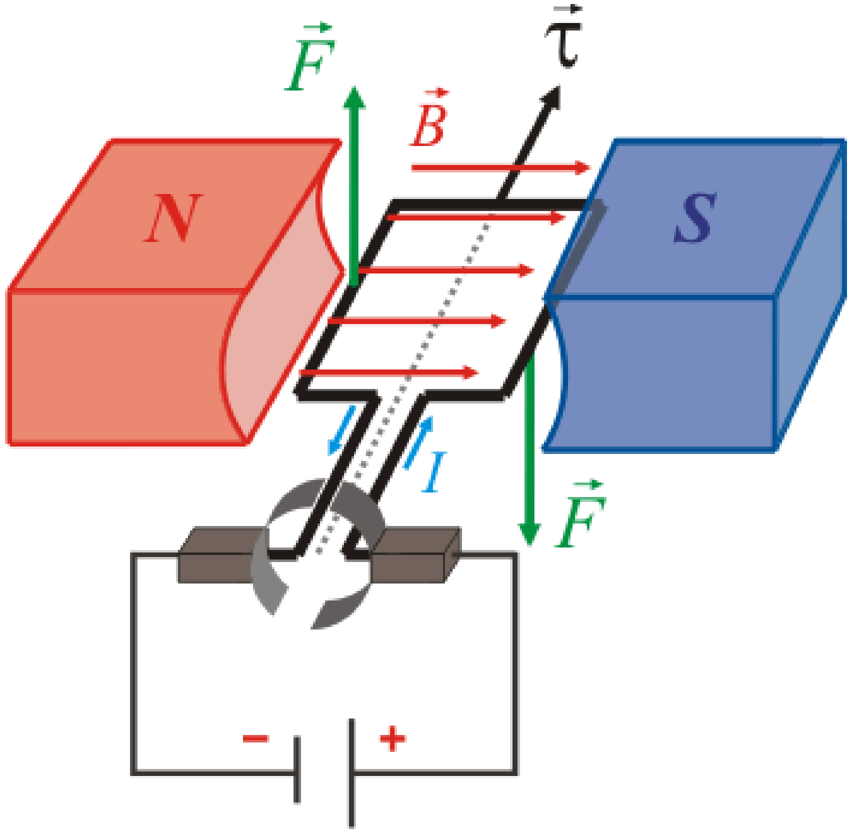


Caso 2: Variando el área de la espira

- En este caso, mantenemos estático el campo, variamos el área efectiva de la espira, y con ello, el flujo captado.

- Usando ley de Lorentz, definiremos el campo eléctrico inducido como:

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{Q} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$



Caso 2: Variando el área de la espira

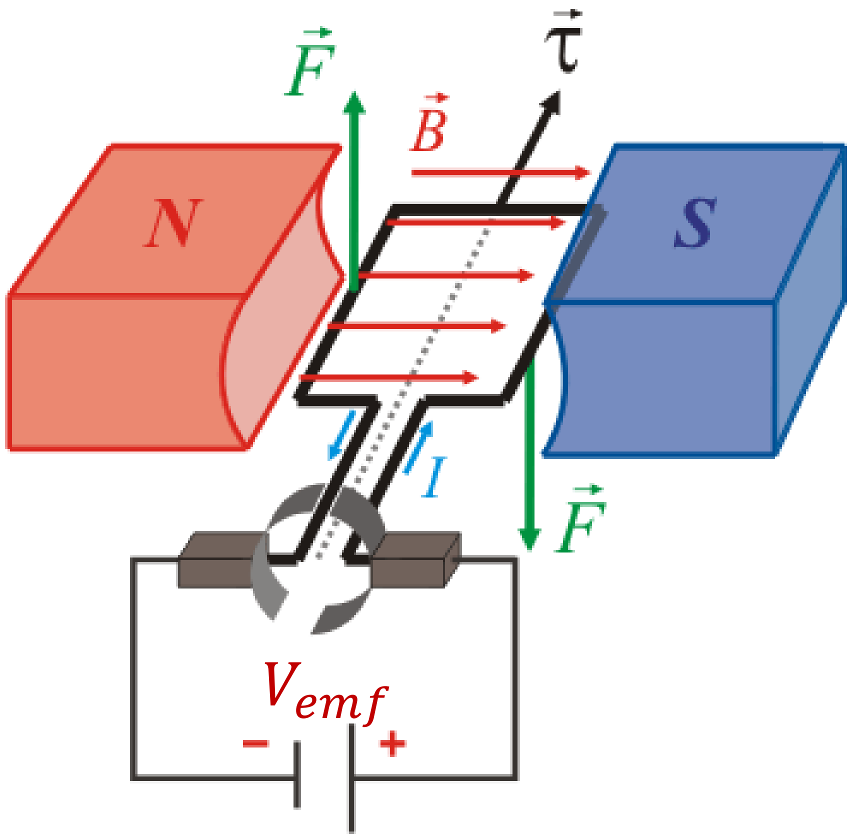
- Si integramos sobre el loop de la espira:

$$V_{emf} = \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

- Aplicando Stokes

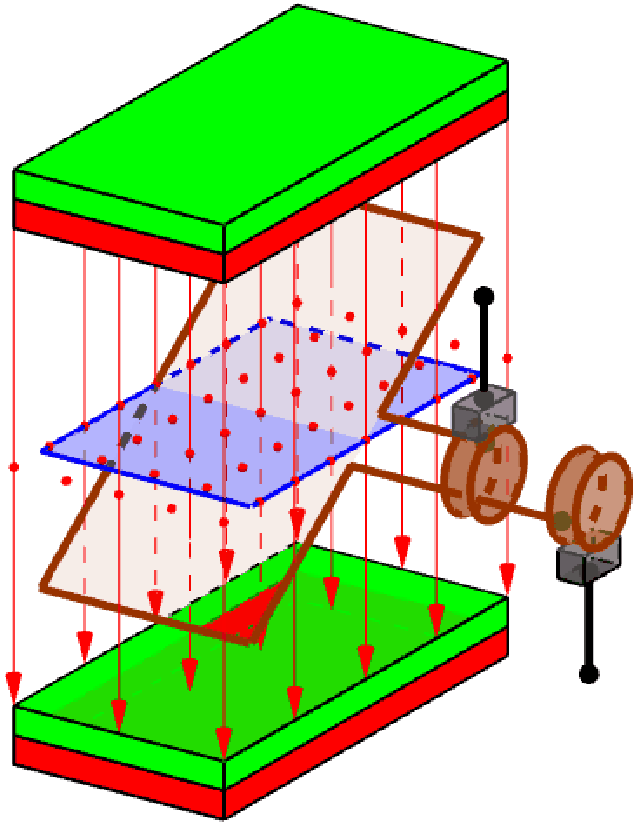
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}_m = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}$$



Caso 2: Variando el área de la espira

- Este tipo de FEM suele darse mucho en Generadores.



Caso 3: Variando $\mathbf{B}$ y el área de la espira

- Esto es simplemente el caso mixto de los dos anteriores.

$$V_{emf} = \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Recordando...

Corrientes de convección y conducción

La densidad de corriente puede producirse de 3 formas:

- **Corriente de convección:** dada por flujos de cargas en medios aislantes, de densidad ρ_v y velocidad $\mathbf{u}$.

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}}$$

- **Corrientes de conducción:** dada por la influencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un conductor de conductividad σ.

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E}}$$

- **Corrientes de desplazamiento:** Causadas por [redacted]

[redacted]

14-03-2024 Clase 04 - Electrostática en Materiales 6

Corriente de desplazamiento

- De la tercera ley de Maxwell:

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

- Si aplicamos divergencia y ecuación de continuidad:

$$\mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H}) = \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- La divergencia de un rotor es siempre cero…

  pero si trabajamos con corrientes variables $-\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$.

Corriente de desplazamiento

- De la tercera ley de Maxwell:

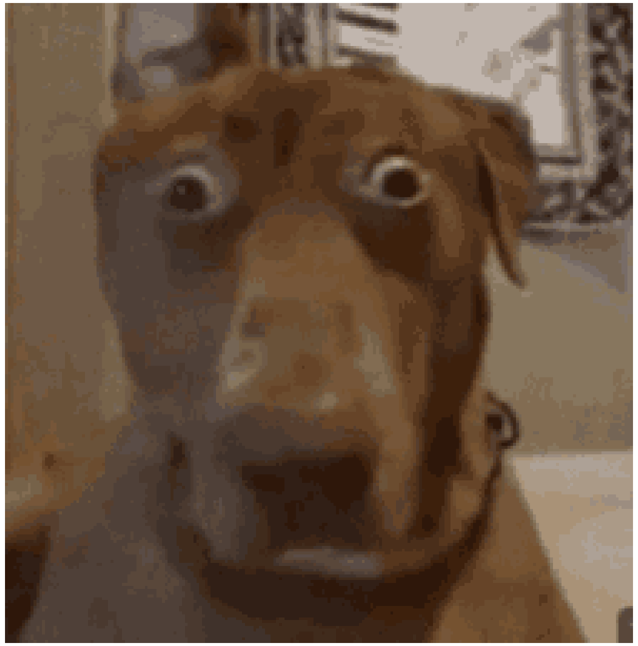
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

- Si aplicamos divergencia y ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- La divergencia de un rotor es siempre cero…

  pero si trabajamos con corrientes variables $-\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$.



Corriente de desplazamiento

- A modo de solucionar esta inconsistencia, incorporamos un término:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$$

- Tal que:

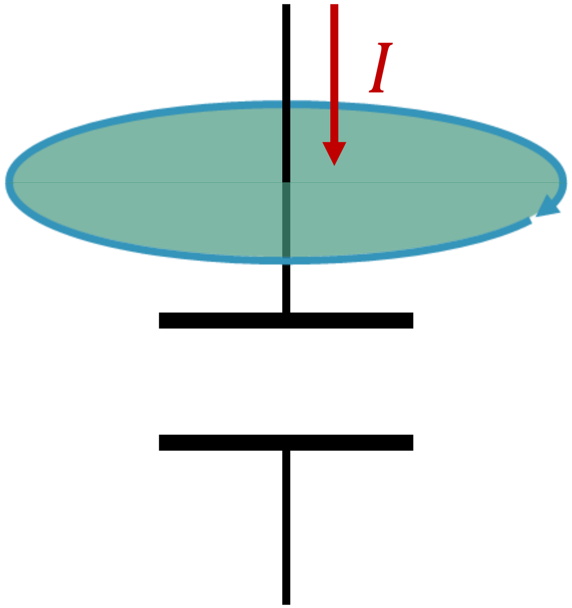
$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

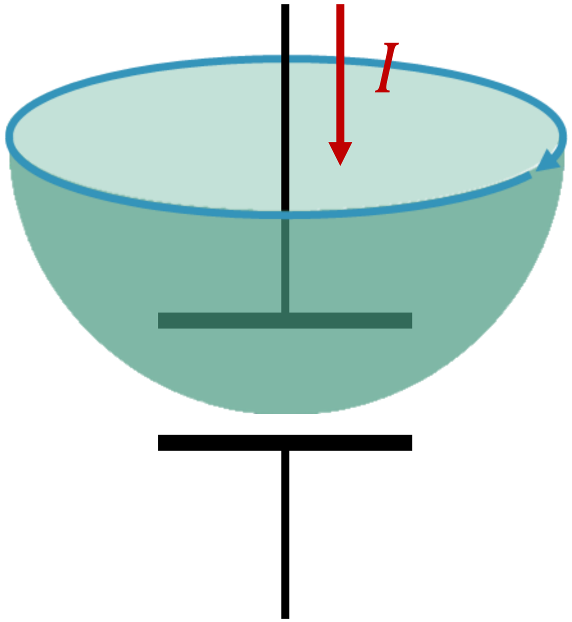
- De este modo:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Corriente de desplazamiento

- Consideremos el caso de un capacitor. Apliquemos ley de ampere para una superficie plana y una curva:

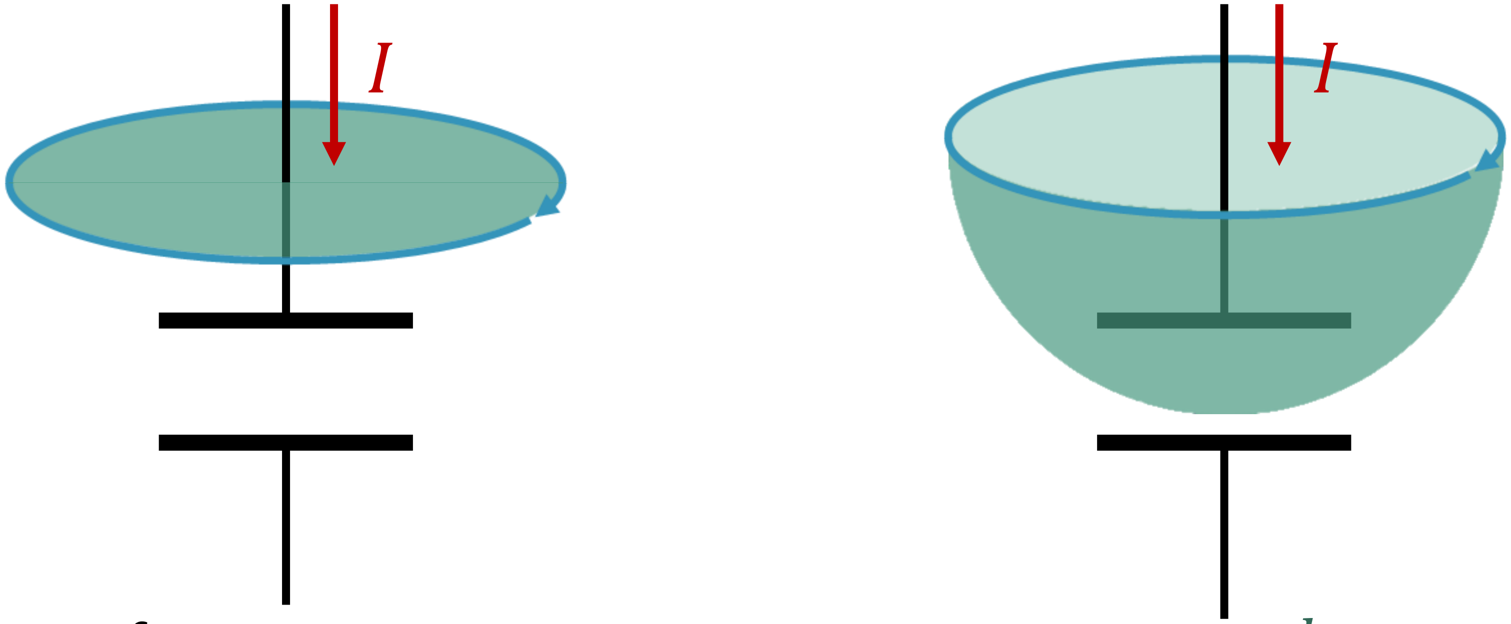




$$\oint_L H \cdot dl = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{enc} = I \qquad \oint_L H \cdot dl = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{enc} = 0?$$

Corriente de desplazamiento

- La corriente de desplazamiento es necesaria para mantener la consistencia:



$$\oint_L H \cdot dl = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{enc} = I \qquad \oint_L H \cdot dl = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ}{dt} = I$$

Entonces…

La densidad de corriente puede producirse de 3 formas:

- **Corriente de convección:** dada por flujos de cargas en medios aislantes, de densidad ρ_v y velocidad $\mathbf{u}$.

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}}$$

- **Corrientes de conducción:** dada por la influencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en un conductor de conductividad σ.

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \sigma \mathbf{E}}$$

- **Corrientes de desplazamiento:** Causadas por cambios temporales en el campo eléctrico.

$$\boxed{\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$$

Ecuaciones de Maxwell completas

- Con electrostática planteamos las ecuaciones para $\mathbf{E}$.
- Con magnetostática planteamos las ecuaciones para $\mathbf{H}$.
- Con relatividad nos dimos cuenta que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son un mismo fenómeno, y que hay una interrelación entre ellos.
- Con materiales definimos adecuadamente $\mathbf{D}$ y $\mathbf{B}$.
- Con condiciones de Borde vimos los cambios de un medio a otro.

- Y ahora finalmente tenemos nuestras ecuaciones en su forma final.

Ecuaciones de Maxwell

- Con electros
- Con magnet
- Con relativi   o fenómeno, y que hay u
- Con materia
- Con condici   o a otro.

- Y ahora finalmente tenemos nuestras ecuaciones en su forma final.

Ecuaciones de Maxwell completas

- Las ecuaciones de Maxwell en su forma final son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \, dv$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ecuaciones de Maxwell completas

- Para el caso de materiales:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \rho\mathbf{u}$$

Ecuaciones de Maxwell completas

- Y las condiciones de Borde:

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times a_{\perp} = 0$$

$$\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{J}_s \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times a_{\perp} = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{D}_2^{\perp} - \mathbf{D}_1^{\perp} = \rho_s \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot a_{\perp} = \rho_s$$

$$\mathbf{B}_1^{\perp} - \mathbf{B}_2^{\perp} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot a_{\perp} = 0$$

- Caso conductor:

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} = \mathbf{E}_2^{\parallel} = \mathbf{D}_2^{\perp} = 0 \qquad \mathbf{D}_1^{\perp} = \rho_s \qquad \mathbf{B}_1^{\perp} = \mathbf{B}_2^{\perp} = \mathbf{H}_2^{\parallel} = 0 \qquad \mathbf{H}_1^{\parallel} = \mathbf{J}_s$$

Potenciales variantes en el tiempo

- Recordemos a 2 viejos amigos del caso estático:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V \qquad\qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

- El potencial vectorial magnético se origina de $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, por lo que sigue siendo igual de válido para campos variantes en el tiempo.
- Pero el potencial eléctrico cambia, pues ahora el campo eléctrico tiene una componente no conservativa.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Potenciales variantes en el tiempo

- De la Ley de Faraday-Lenz:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

- Tenemos una nueva versión para conservatividad. Luego:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

- De este modo, las nuevas relaciones para potenciales variantes en el tiempo serán:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \qquad \boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

Potenciales variantes en el tiempo

- De la primera Ley de Maxwell: $\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = \mathbf{\nabla} \cdot \left(\mathbf{E} = -\mathbf{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$$\mathbf{\nabla}^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Potenciales variantes en el tiempo

- De la tercera Ley de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu\varepsilon \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Potenciales variantes en el tiempo

- Hasta ahora tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{J} + \mu\varepsilon \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

- Convenientemente, haremos:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

Potenciales variantes en el tiempo

- Reemplazando, obtenemos:

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}}$$

- De hecho, estas corresponden a ecuaciones de [redacted].
- Y sus soluciones corresponden a los [redacted].
- Retomaremos esta conversación mucho más adelante.

Resumen

- Analizamos el caso dinámico y cómo las variaciones en el flujo magnético inducen un campo eléctrico.
- Completamos las ecuaciones de Maxwell y resolvimos las inconsistencias con la ecuación de continuidad.
- Extendimos nuestra conclusión a los resultados de capítulos anteriores: materiales, condiciones de borde y potenciales electromagnéticos.

Cerremos la clase de hoy

- Hemos culminado el análisis “teórico” del electromagnetismo.
- Empezaremos a analizar distintas aplicaciones particulares de esta teoría.
- Primera parada: Ondas.

Próxima Clase:

Ondas Electromagnéticas

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 441 – 453

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 473 – 480

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen

- ❑ Ecuaciones de Maxwell.
- ❑ Números Complejos.
- ❑ Fasores (Números complejos en notación polar).