



Interrogación 01

09 de abril de 2024

Instrucciones

- Tiempo Límite de la Evaluación: **2 horas**.
- Puntaje Máximo: 36 puntos.
- Se permite el uso de calculadora. Se prohíbe el uso de otros dispositivos electrónicos, tales como celulares, tablets, computadores, etc.
- Responda cada pregunta en una hoja separada. **No combine respuestas de distintas preguntas en una misma hoja.**
- Para cada pregunta escriba su nombre y el número de pregunta en la hoja correspondiente. **Aquellas hojas que carezcan de esta información no serán corregidas.**
- Responda con **letra legible**. Desarrollos tachados o garabateados no serán considerados en la corrección. En caso de que se solicite una expresión o respuesta numérica, déjela claramente señalada, encerrándola en un recuadro.
- Solo habrán 3 instancias de dudas: al inicio de la evaluación, a los 45 minutos y a los 90 minutos. Las dudas a tratar serán exclusivamente de enunciado.
- Este curso se adscribe y compromete al Código de Honor UC:

Como miembro de la comunidad de la Pontificia Universidad Católica de Chile, me comprometo a respetar los principios y normativas que la rigen. Asimismo, me comprometo a actuar con rectitud y honestidad en las relaciones con los demás integrantes de la comunidad y en la realización de todo trabajo, particularmente en aquellas actividades vinculadas a la docencia, al aprendizaje y la creación, difusión y transferencia del conocimiento. Además, me comprometo a velar por la dignidad e integridad de las personas, evitando incurrir en y, rechazando, toda conducta abusiva de carácter físico, verbal, psicológico y de violencia sexual. Del mismo modo, asumo el compromiso de cuidar los bienes de la Universidad

- En caso de detectar copia u otro tipo de acto deshonesto en esta evaluación, se le solicitará firmar esta hoja a modo de respaldo. La falta implicará la reprobación inmediata del curso con nota 1.1 y el caso será notificado a la Dirección de Pregrado.

Pregunta 1 [6 puntos]

Escoja y responda brevemente 6 de los siguientes 9 ítems. Si lo considera necesario, puede apoyarse en el uso de fórmulas o expresiones matemáticas. **Sea claro en señalar los ítems escogidos. Solo se corregirán los 6 primeros en ser respondidos.**

- a) [1pt] Explique la diferencia entre Voltaje y Potencial Eléctrico.

Solución:

El potencial eléctrico o diferencia de potencial es generado directamente por fuentes eléctricas (cargas). Su campo eléctrico asociado es de carácter conservativo.

En contraste, el Voltaje es una fuerza electromotriz, que puede ser producida directamente por cargas, pero generalmente es producida por métodos indirectos (reacciones químicas, efecto fotoeléctrico, dínamo, inducción magnética, etc.). El campo eléctrico generado es no conservativo.

Solo en el caso de voltajes generados directamente por cargas podemos tratar al voltaje y al potencial como iguales.

[Ver Clase 09 - Slide 10]

- b) [1pt] Explique por qué al aplicar expansión multipolar es necesario estar a una distancia lejana al sistema de cargas.

Solución:

Al deducir la expansión multipolar, primero aplicamos ley de cosenos y luego empleamos una expansión binomial del tipo $(1 + x)^{-1/2}$. El requisito para realizar la expansión es que x sea muy pequeño. En el caso de la expansión multipolar $x = \frac{d}{r} \cos \theta$. De modo que la condición a satisfacer es que r debe ser mucho más grande que d .

[Ver Clase 03 - Slide 8]

- c) [1pt] Escriba un ejemplo de matriz de permitividad relativa para un material:

- Homogéneo, isotrópico y no-lineal.
- Heterogéneo, anisotrópico y lineal.

Solución:

Primer caso: como el material debe ser homogéneo, la matriz no debe tener dependencia de las variables x , y , z , o sus variantes en cilíndricas o esféricas. Como debe ser isotrópico, solo debe tomar valores, idénticos, en la diagonal. Como debe ser no lineal, los valores deben depender de E_x , E_y , E_z , o sus variantes cilíndricas o esféricas.

$$\varepsilon_r = \begin{bmatrix} E_x E_y E_z & 0 & 0 \\ 0 & E_x E_y E_z & 0 \\ 0 & 0 & E_x E_y E_z \end{bmatrix}$$

Segundo caso: como el material debe ser heterogéneo, la matriz debe tener dependencia

de las variables x, y, z , o sus variantes en cilíndricas o esféricas. Como debe ser anisotrópico, basta con incorporar elementos fuera de la diagonal. Como debe ser lineal, no debe depender de E_x, E_y, E_z , o sus variantes cilíndricas o esféricas.

$$\varepsilon_r = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 2 & 0 & z \end{bmatrix}$$

[Ver Clase 04 - Slides 28-30]

- d) [1pt] Explique el experimento mental de Contracción de Longitudes.

Solución:

Se consideran dos observadores en marcos de referencia inerciales. Uno de ellos se mantiene en reposo y el otro se mueve a una velocidad cercana a la luz. Se analiza la trayectoria en ida y retorno de un haz de luz para uno de los sistemas, pero visto desde la perspectiva de ambos sistemas. La conclusión del experimento es que para el observador que esté en el marco de referencia en reposo, los objetos en movimiento del otro sistema presentarán contracciones en sus longitudes, asociadas a un factor γ^{-1} .

[Ver Clase 05 - Slides 15-22]

- e) [1pt] Explique los 3 tipos de corriente vistos en el curso.

Solución:

- Corrientes de convección: Generadas por flujos de cargas a velocidad \mathbf{u} en medios aislados ($\mathbf{J} = \rho\mathbf{u}$).
- Corrientes de conducción: generadas por la influencia de un campo eléctrico en un conductor ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$).
- Corrientes de desplazamiento: generadas por la variación de la densidad de flujo eléctrico en el tiempo ($\mathbf{J} = \partial\mathbf{D}/\partial t$)

[Ver Clase 09 - Slide 26]

- f) [1pt] Nombre y explique las 3 formas de generar un campo eléctrico por medio de inducción magnética.

Solución:

- Variando en el tiempo la intensidad del campo magnético, de modo que el flujo en el tiempo varíe. Este metodo se utiliza en transformadores.
- Variando el área efectiva en el tiempo, por ejemplo, haciendo rotar una espira. Este método se da en generadores DC.
- Mediante un caso mixto de los dos anteriores, donde tanto el campo como el área efectiva varíen en el tiempo, de modo que el flujo magnético cambie.

[Ver Clase 09 - Slide 13]

- g) [1pt] ¿Por qué el campo magnético generado por un cable conductor no produce trabajo sobre las cargas que circulan en dicho cable?

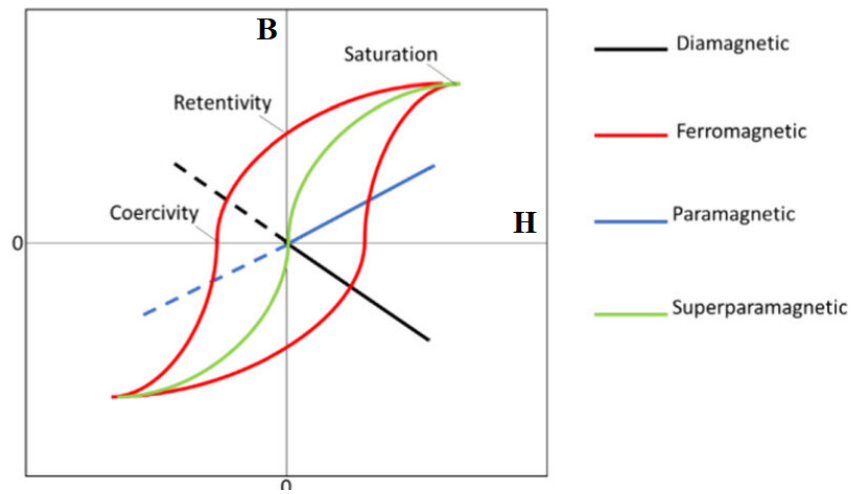
Solución:

Por ley de Lorentz $\mathbf{F}_M = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ podemos notar que la dirección hacia la cual se mueven las cargas es perpendicular a la dirección de la fuerza aplicada. De este modo $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\ell} = 0$
[Ver Clase 06 - Slide 25]

- h) [1pt] Bosqueje la curva B-H para un material diamagnético. Sea claro en los ejes.

Solución:

Simplemente es una recta con pendiente negativa que pasa por el origen.



[Clase 07/08 - Ejemplo en clase]

- i) [1pt] Señale los pasos a seguir para resolver un problema de condiciones de borde aplicando Poisson/Laplace.

Solución:

- Resolver la ecuación diferencial.
- Aplicar las condiciones de borde.
- Determinar el potencial V .
- Determinar el campo eléctrico y la corriente.
- Obtener cualquier otra variable eléctrica mediante las relaciones vistas en clase.

[Clase 08 - Slide 27]

Pregunta 2 [6 puntos]

En base a la gráfica presentada, responda lo siguiente:

- a) [2pt] Explique cada uno de los procesos asociados a los tramos (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,2).

Solución:

- (1,2): El material inicialmente está desmagnetizado y se aplica un campo magnético externo. Paulatinamente, el material comienza a acumular densidad de flujo hasta llegar a saturación.
 - (2,3): Se invierte el sentido del campo magnético aplicado, de manera que el flujo en el material comienza a descender. Al ser un material ferromagnético, parte del flujo queda confinado en el material, de modo que la curva retornará por otro camino, el cruce por el eje y se conoce como Flujo remanente, y se entiende como el flujo que quedó retenido luego de “apagar” el campo magnético externo. Se sigue aplicando campo externo en la dirección opuesta, hasta eliminar cualquier rastro de flujo al interior del material. Con ello, se llega al valor de Coercitividad en 3.
 - (3,4) Se sigue aplicando campo externo en sentido opuesto, hasta alcanzar la saturación.
 - (4,5) Se vuelve a aplicar un campo magnético externo en sentido positivo. Se llega hasta el punto de Flujo Remanente.
 - (5,2) Se sigue aplicando campo externo en sentido positivo, se elimina invierte el sentido del flujo retenido tras pasar el punto de coercitividad, y se lleva nuevamente a saturación.
- b) [1pt] Explique qué es el Flujo Remanente y la Coercitividad de un material magnético. Determine dichos valores para el caso de la gráfica.

Solución:

- Flujo Remanente: Capacidad del material ferromagnético de retener flujo. Equivale a la “fuerza” del imán. En la gráfica corresponde a $B_r = 1,5[T]$.
 - Coercitividad: corresponde al campo externo que debe ser aplicado para eliminar la magnetización en el material. En la gráfica corresponde a $H_c = 400[A/m]$
- c) [1pt] Indique a qué tipo de material magnético corresponde. Señale sus características en términos de la Coercitividad y el Flujo Remanente.

Solución:

El material es evidentemente **ferromagnético**. A partir de la gráfica se aprecia que tiene alto flujo remanente y baja coercitividad. Por lo cual se trata de un imán **fuerte**, pero que **puede perder con facilidad sus características**.

- d) [1pt] Determine el valor aproximado de las pérdidas del material (en [J/m]) para un ciclo completo de histéresis. (Considere $1 \text{ [J/m]} = 1 \text{ [TA/m]}$).

Solución:

De manera aproximada, el área cubierta por la curva de histéresis es de 20 cuadros. Considerando que cada cuadro es de $0,5 \cdot 400 = 200 \text{ [J/m]}$, entonces las pérdidas son aproximadamente de 4000 [J/m] .

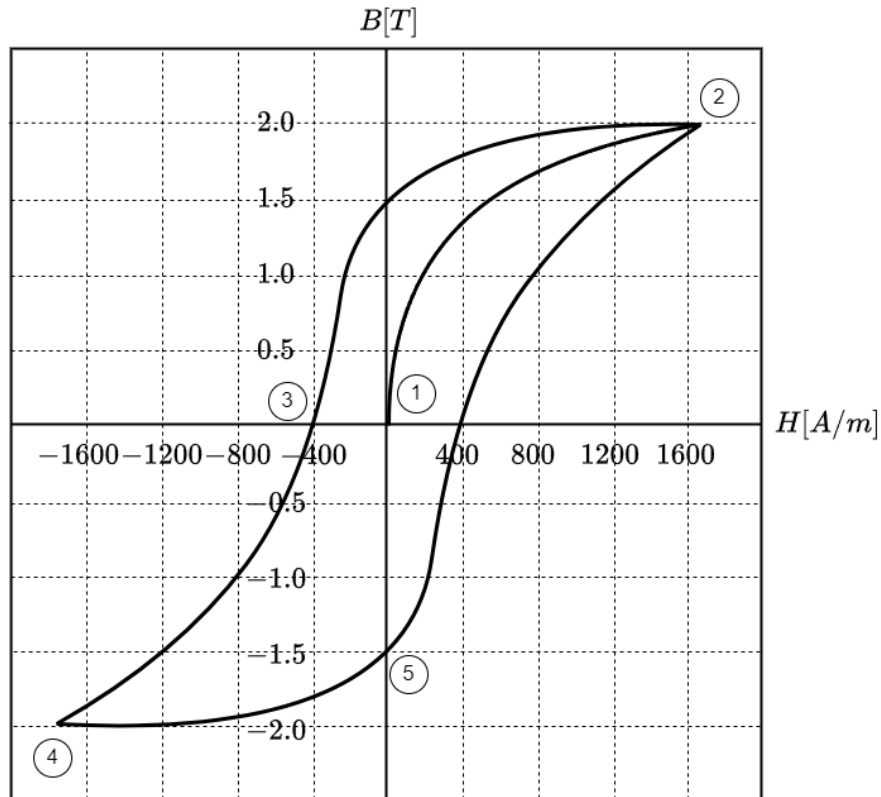
- e) [1pt] Suponga que se aplica un campo magnético sobre el material, tal que este se lleva a saturación. Posteriormente, el campo aplicado comienza a disminuirse gradualmente hasta generar una densidad de flujo de $1,75 \text{ [T]}$. Determine la permeabilidad relativa bajo estas condiciones.

Solución:

Dado que el material se llevó a saturación, debemos seguir la trayectoria (2,3) hasta llegar al punto donde $B = 1,75 \text{ [T]}$. A dicho punto, el campo externo es de $H = 400 \text{ [A/m]}$. Luego aplicamos la relación:

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$$

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1,75 \text{ [N/Am]}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [N/A}^2] \cdot 400 \text{ [A/m]}} = \boxed{3481,51}$$

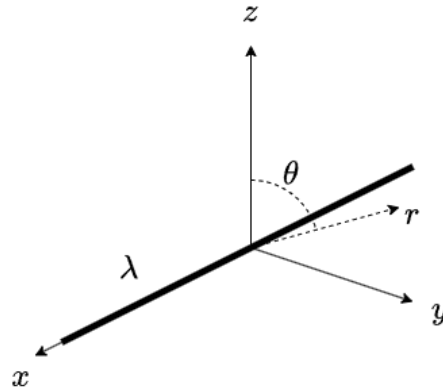


Pregunta 3 [6 puntos]

Considere el sistema \mathcal{S} mostrado en la figura, donde un cable infinito con densidad de carga λ reposa en el eje x . Sea \mathcal{S}' el sistema para un observador que se mueve a una velocidad $v\vec{\mathbf{a}}_x$ cercana a la velocidad de la luz, determine:

- [1pt] La transformación de Lorentz para la densidad de carga λ' . (*Hint*: la carga total en ambos sistemas debiese ser la misma).
- [1pt] La transformación de Lorentz para la densidad de corriente $\vec{\mathbf{J}}'$.
- [2pts] Los campos $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{E}}'$, $\vec{\mathbf{H}}$ y $\vec{\mathbf{H}}'$.
- [2pts] Muestre que para los campos anteriormente determinados se cumple que:

$$E'_r = \gamma \left(E_r - \frac{v}{c^2} B_\theta \right) \qquad B'_\theta = \gamma \left(B_\theta - \frac{v}{c^2} E_r \right)$$



Solución:

a)

Aplicando conservación de cargas, tenemos que la carga total para un segmento de largo L :

$$\lambda L = \lambda' L'$$

Luego, empleando contracción de longitudes:

$$\lambda L = \lambda' \frac{L}{\gamma}$$

De modo que:

$$\boxed{\lambda' = \gamma \lambda}$$

b)

En este caso, simplemente es aplicar la fórmula $\vec{\mathbf{J}} = \rho \vec{\mathbf{u}}$. Considerando que el sistema se mueve a velocidad $-v \vec{\mathbf{a}}_x$ con respecto al sistema \mathcal{S} :

$$\boxed{\vec{\mathbf{J}}' = -\gamma \lambda v \vec{\mathbf{a}}_x}$$

c)

Aplicando Ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

Dada la simetría del problema, usaremos un cilindro como superficie Gaussiana. Dado que sus tapas serán paralelas al campo, podemos ignorarlas y solo considerar la superficie del manto en el lado izquierdo de la Ley de Gauss. Luego, para el sistema \mathcal{S} :

$$2\pi r L E_r = L \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

Análogamente, para \mathcal{S}' :

$$\boxed{E'_r = \frac{\gamma \lambda}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

Para el caso del campo magnético, notamos que en el sistema \mathcal{S} no hay corrientes. Debido a esta ausencia de fuentes, el campo magnético en \mathcal{S} es simplemente:

$$\boxed{\vec{\mathbf{H}} = 0}$$

Por otro lado, en el sistema \mathcal{S}' determinamos que existe una densidad de corriente $\vec{\mathbf{J}}$, y por tanto, un campo magnético. Emplearemos Ley de Ampère:

$$\oint_L \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{encerrada}}$$

Usando regla de mano derecha, notamos inmediatamente que el campo generado por esta corriente tendrá dirección $\vec{\mathbf{a}}_\theta$. Luego, considerando un camino amperiano circular de radio r :

$$\begin{aligned} 2\pi r B_\theta &= -\gamma\lambda v \\ 2\pi r \mu_0 H_\theta &= -\gamma\lambda v \end{aligned}$$

$$\boxed{B_\theta = -\frac{\gamma\lambda v}{2\pi\mu_0 r}}$$

d)

Tomemos la primera expresión y reemplacemos con las expresiones obtenidas:

$$\begin{aligned} E'_r &= \gamma \left(E_r - \frac{v}{c^2} B_\theta \right) \\ \frac{\gamma\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} &= \gamma \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - 0 \right) \\ \frac{\gamma\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} &= \frac{\gamma\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Repliquemos el procedimiento para la segunda expresión:

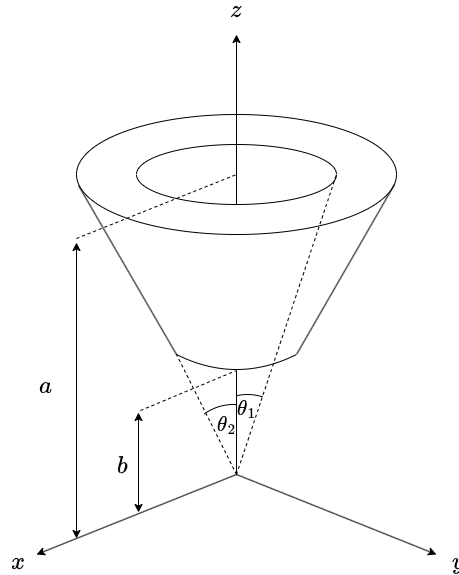
$$\begin{aligned} B'_\theta &= \gamma \left(B_\theta - \frac{v}{c^2} E_r \right) \\ -\frac{\mu_0\gamma\lambda v}{2\pi r} &= \gamma \left(0 - \frac{v}{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \right) \\ -\frac{\mu_0\gamma\lambda v}{2\pi r} &= -\frac{\mu_0\gamma\lambda v}{2\pi r} \end{aligned}$$

De modo que el resultado obtenido es consistente con ambas expresiones.

Pregunta 4 [6 puntos]

Considere el cascarón cónico truncado, de conductividad σ , mostrado en la figura. Se pretende determinar la resistencia entre los mantos interno y externo. Para ello:

- [1pt] Formule la ecuación de Poisson o Laplace correspondiente.
- [1pt] Determine el potencial eléctrico entre los mantos. Considere que el manto interno está conectado a tierra.
- [1pt] Determine el campo eléctrico entre los mantos.
- [2pt] Determine la corriente circulante entre los mantos.
- [1pt] Determine la resistencia entre los mantos.



Solución:

a)

Dado que no se tiene presencia de cargas, simplemente aplicamos la ecuación de Laplace. Como se pretende determinar la resistencia entre los mantos, la única dirección que nos importa es la polar: \vec{a}_θ . Así, la expresión para la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} V \right) = 0}$$

b)

Integramos por primera vez:

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} V &= A \\ \frac{\partial}{\partial \theta} V &= \frac{A}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Integramos por segunda vez y utilizamos la integral directa entregada en el formulario:

$$V = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

Aplicando la condición de borde $V(\theta_1) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= A \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) + B \\ B &= -A \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) \end{aligned}$$

Aplicando la condición de borde $V(\theta_2) = V_0$:

$$\begin{aligned} V_0 &= A \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) - A \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) \\ A &= \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]} \end{aligned}$$

Luego:

$$\boxed{V = \frac{V_0}{\ln \left[\frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]} \left[\frac{\tan \theta/2}{\tan \theta_1/2} \right]}$$

c)

Para determinar el campo, simplemente utilizamos la relación $\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V$. Dado que el voltaje solo está definido en términos de θ , basta con derivar en dicha variable.

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial \theta} V = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(A \ln \left[\tan \frac{\theta}{2} \right] + B \right) = -\frac{1}{\rho \sin \theta} A \vec{\mathbf{a}}_{\theta}$$

Reemplazando A :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{1}{\ln \left[\frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]} \frac{V_0}{2} \vec{\mathbf{a}}_{\theta}$$

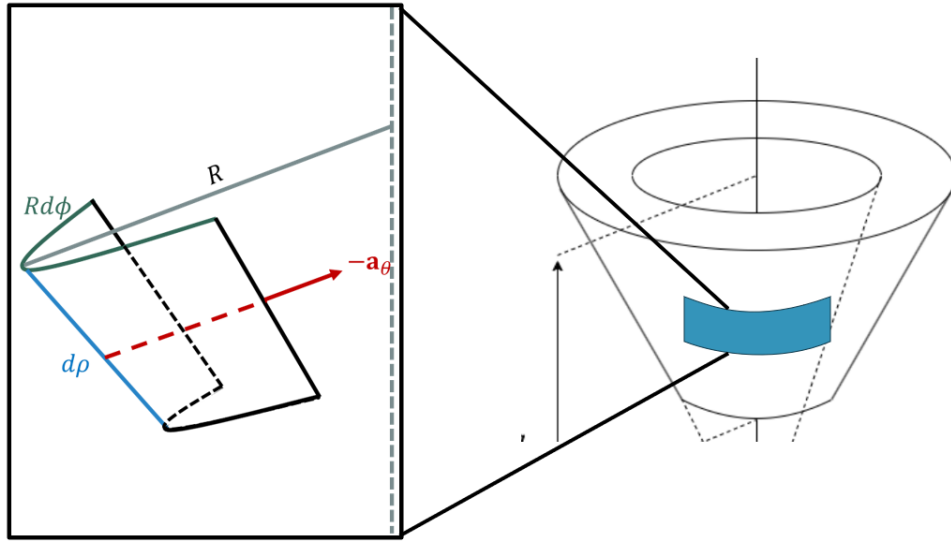
d)

Definiremos la densidad de corriente $\vec{\mathbf{J}}$ como:

$$\vec{\mathbf{J}} = -\frac{1}{\rho} \frac{A \sigma}{\sin \theta} \vec{\mathbf{a}}_{\theta}$$

Por otro lado, el diferencial de superficie estará dado por:

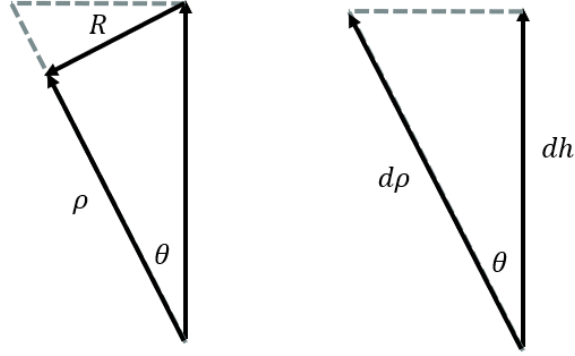
$$d\vec{\mathbf{S}} = -R \, dr \, d\phi \, \vec{\mathbf{a}}_{\theta}$$



De la geometría del problema se desprende que:

$$R = \rho \tan \theta$$

$$dr = dh \cos \theta$$



Así:

$$d\vec{S} = -\rho \tan \theta \cos \theta dh d\phi \vec{a}_\theta$$

Luego, la corriente estará dada por:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(-\frac{1}{\rho} \frac{A\sigma}{\sin \theta} \right) (-\rho \tan \theta \cos \theta dh d\phi) = 2\pi A\sigma(b-a)$$

Reemplazando A :

$$I = \frac{2\pi\sigma V_0}{\ln \left[\frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]} (b-a)$$

e)

Simplemente aplicamos Ley de Ohm $R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{V_0}{I}$:

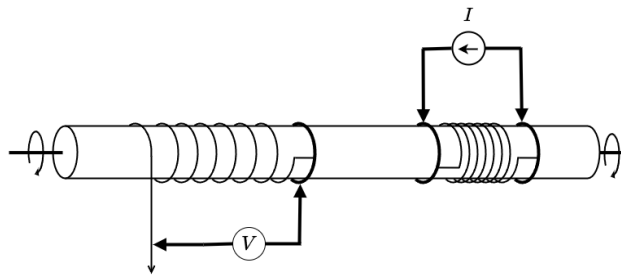
$$R = \frac{\ln \left[\frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]}{2\pi\sigma(b-a)}$$

Pregunta 5 [6 puntos]

Pregunta 5(a) [3 puntos]

El circuito mostrado en la figura corresponde a un cilindro ferromagnético en cuyo lado derecho se ha incorporado un sistema de alimentación por contactos. Dicho sistema consiste en un devanado por el cual circula una corriente I , de manera tal que se produce un flujo magnético de 50 [Wb] al interior de la barra. Al lado izquierdo de la barra se tiene un segundo devanado, cuyo extremo derecho está soldado a la barra, mientras que el extremo izquierdo se halla libre. Ambos terminales del segundo devanado están acoplados a un voltímetro, el cual mide constantemente la tensión entre ellos.

Suponga que en un determinado instante se tira del extremo libre del devanado izquierdo, de manera que este comienza a desenrollarse y el flujo enlazado decae a una tasa de 1 [Wb/s]. Grafique el voltaje registrado por el voltímetro en función del tiempo.



Solución:

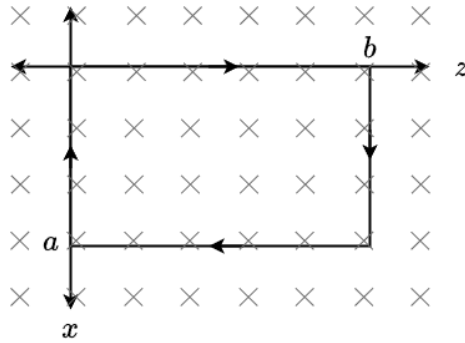
De acuerdo a lo visto en Ley de Faraday-Lenz, solo existen 3 formas de generar una FEM por inducción magnética: mediante un campo magnético que varíe en el tiempo, mediante una modificación al área encerrada por el camino amperiano, o mediante una combinación de ambas. En este caso, no se está dando ninguna de estas 3 situaciones. El flujo está cambiando porque se está modificando el flujo enlazado, pero este no corresponde a un mecanismo de inducción magnética. De este modo:

$$V(t) = 0$$

Pregunta 5(b) [3 puntos]

Sea la densidad de flujo magnético $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{a}_y$, con B_0 y ω constante:

- [1pt] Encuentre el campo eléctrico inducido \vec{E} en el loop rectangular de la figura.
- [1pt] Grafique \vec{B} y \vec{E} en función del tiempo.
- [1pt] Explique el comportamiento de la gráfica de \vec{E} en base a la Ley de Faraday-Lenz.



Solución:

a)

Calculamos el flujo magnético empleando coordenadas cartesianas (es una espira rectangular)

$$\begin{aligned}\phi &= \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \phi(t) &= \int_0^a \int_0^b B(t) \hat{y} \cdot \hat{y} \, dx dz \\ \phi(t) &= abB_0 \cos(\omega t)\end{aligned}$$

La *fem* inducida es

$$\begin{aligned}\epsilon_{ind} &= -\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \\ \epsilon_{ind} &= ab\omega B_0 \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Recordemos que

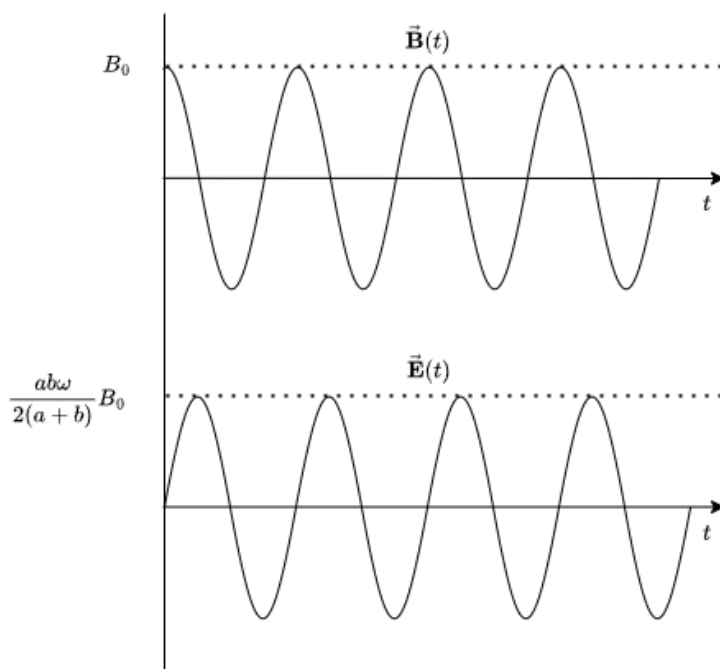
$$\epsilon_{ind} = \oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l}$$

El loop de Faraday donde se integra el campo es solo el perímetro de la espira, así

$$E_{ind} = \frac{ab\omega B_0 \sin(\omega t)}{2(a+b)}$$

b)

En general, para graficar funciones que oscilan nos interesa considerar **amplitudes máximas/mínimas y el desfase**. Aquí es directo ver que las amplitudes difieren en un factor de $\frac{ab\omega}{2(a+b)}$ y hay un desfase de 90° (un seno es un coseno desfasado en 90°).



c)

Finalmente, el comportamiento de la gráfica se explica de la siguiente forma:

Comienza a disminuir el flujo magnético (pendiente negativa) \rightarrow se induce una *fem* positiva \rightarrow corriente inducida en el mismo sentido de la imagen (horario) \rightarrow campo magnético inducido entrando a la hoja para evitar la disminución de flujo.

Comienza a aumentar el flujo magnético (pendiente positiva) \rightarrow se induce una *fem* negativa \rightarrow corriente inducida en el sentido opuesto de la imagen (antihorario) \rightarrow campo magnético inducido saliendo a la hoja para evitar la aumento de flujo.

Pregunta 6 [6 puntos]

El circuito de la Figura corresponde a un transformador cuyo núcleo está elaborado a base de acero laminado en frío, material considerado como un conductor ideal de flujo magnético. En un lamentable incidente, el último practicante del laboratorio derribó accidentalmente este transformador, rompiéndolo en dos pedazos. A modo de disimular el incidente, el practicante unió las piezas usando cantidades grotescas de resina epóxica (regiones achuradas de la figura), la cual tiene una permeabilidad similar a la del vacío.

Datos: $N_1 = 2N_2 = N_3 = 100$; $\ell = 1[mm]$; Área transversal = $3000[mm^2]$.

- a) [2pts] Determine la autoinductancia para cada uno de los devanados del transformador.

Solución:

Por principio de superposición

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq,1}} = \frac{N_1^2}{\frac{3\ell}{\mu_0 S} + \frac{\ell}{\mu_0 S} \parallel \frac{3\ell}{\mu_0 S}} = \frac{N_1^2}{\frac{\ell}{\mu_0 S}(3 + 1 \parallel 3)} = \boxed{\frac{4N_1^2 \mu_0 S}{15\ell} \approx 10[mH]} \\
 L_2 &= \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq,2}} = \frac{N_2^2}{\frac{\ell}{\mu_0 S} + \frac{3\ell}{\mu_0 S} \parallel \frac{3\ell}{\mu_0 S}} = \frac{N_2^2}{\frac{\ell}{\mu_0 S}(1 + 3 \parallel 3)} = \boxed{\frac{2N_2^2 \mu_0 S}{3\ell} \approx 3,77[mH]} \\
 L_3 &= \frac{N_3^2}{\mathcal{R}_{eq,3}} = \frac{N_3^2}{\frac{3\ell}{\mu_0 S} + \frac{\ell}{\mu_0 S} \parallel \frac{3\ell}{\mu_0 S}} = \frac{N_3^2}{\frac{\ell}{\mu_0 S}(1 + 1 \parallel 3)} = \boxed{\frac{4N_3^2 \mu_0 S}{15\ell} \approx 10[mH]}
 \end{aligned}$$

- b) [2pts] Determine las inductancias mutuas M_{12} , M_{13} , M_{23} .

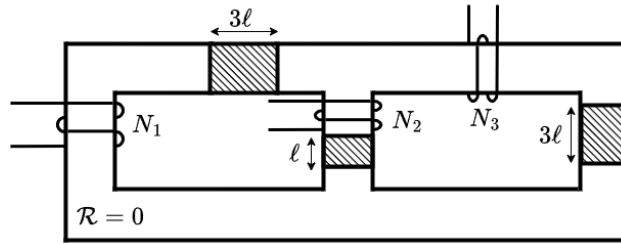
Solución:

Analicemos caso por caso. La inductancia M_{12} corresponde a la inductancia generada por el flujo de la bobina 2 que está circulando por la bobina 1. Si analizamos el flujo de la bobina 2, es evidente que se irá a partes iguales por \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_3 , de modo que $k_{12} = \frac{1}{2}$

$$M_{12} = k_{12} \sqrt{L_1 L_2} = \boxed{\frac{1}{2} \sqrt{L_1 L_2} \approx 3,07[mH]}$$

Los otros dos casos corresponden a las inductancias generadas por el flujo de la bobina 3 que está circulando por las bobinas 1 y 2. Para dicho caso, dado que la razón de las reluctancias \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 es 3 : 1, es evidente que 3/4 del flujo se irán por \mathcal{R}_2 y 1/4 por \mathcal{R}_1 . De este modo $k_{13} = \frac{1}{4}$ y $k_{23} = \frac{3}{4}$. Luego:

$$\begin{aligned}
 M_{13} &= k_{13} \sqrt{L_1 L_3} = \boxed{\frac{1}{4} \sqrt{L_1 L_3} \approx 2,5[mH]} \\
 M_{23} &= k_{23} \sqrt{L_2 L_3} = \boxed{\frac{3}{4} \sqrt{L_2 L_3} \approx 4,6[mH]}
 \end{aligned}$$



Luego de batallar retirando la resina epóxica, el técnico del laboratorio logró cerrar el gap central del transformador y reemplazar los gaps laterales con acero fundido. En una prueba inicial, decide retirar las bobinas N_1 y N_3 y hacer funcionar la bobina N_2 a una densidad de flujo de 2.8 [T] .

c) [2pts] Determine el valor de las reluctancias \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 .

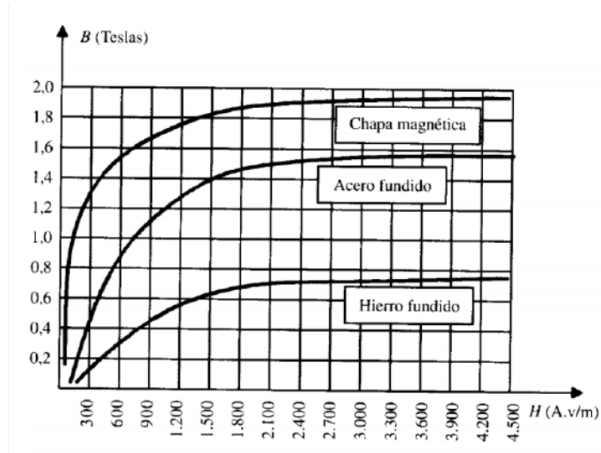
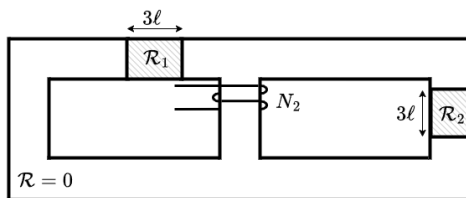
Solución:

En este caso, ambos gaps poseen características idénticas: mismo ancho, mismo material, misma área transversal. De este modo, el flujo suministrado por N_1 se repartirá en partes iguales en cada rama. De modo que cada reluctancia recibirá un flujo de $1,4 \text{ [T]}$. A partir de la gráfica se tiene que esto equivale a $H = 1500 \text{ [A/m]}$. De este modo, la permeabilidad será:

$$\mu = \frac{1,4 \text{ [T]}}{1500 \text{ [A/m]}} = 9,33 \cdot 10^{-4} \text{ [N/A}^2\text{]}$$

. Luego, el valor de las reluctancias será:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{3\ell}{\mu S} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}}{9,33 \cdot 10^{-4} \text{ [N/A}^2\text{]} \cdot 3000 \cdot 10^{-6} \text{ [m]}} = 1071,81 \left[\frac{\text{A}}{\text{T}} \right]$$



Electrostática y Magnetostática

$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{ \vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}' ^3} dV'$	$V(b) - V(a) = - \int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell}$	$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')}{ \vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}' } dV'$			
$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla V$	$I = \frac{dQ}{dt}$	$I = \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$	$\vec{\mathbf{J}} = \rho_v \vec{\mathbf{u}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$	$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{V}{I}$
$\vec{\mathbf{H}} = \int_{V'} \frac{\vec{\mathbf{J}} dV' \times (\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')}{4\pi \vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}' ^3}$	$\oint_L \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\ell} = I_{enc}$	$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$	$\Psi_M = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$	$F_m = q\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}$	
$\mathcal{F} = NI = \oint \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\ell}$	$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$	$\mathcal{F} = \Psi_M \mathcal{R}$	$L = \frac{N\Psi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$	$M = k\sqrt{L_1 L_2}$	

Condiciones de Borde

$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0$ $D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \rho_s$	$H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = J_s$ $B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0$	$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$	$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$
---	--	---	---------------------------------------

Inducción y Maxwell

$V_{fem} = -N \frac{d\psi_M}{dt}$	$V_{fem} = \oint_L \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = -N \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$	$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}})$			
$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_v$	$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$	$\oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \rho dV$	
$\oint_L \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$		$\oint_L \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$		$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$	$\vec{\mathbf{J}}_d = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$

Relatividad

Sea el \mathcal{S} el sistema en reposo y \mathcal{S}' el sistema en movimiento a velocidad $v \vec{\mathbf{a}}_x$:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$	$x' = \gamma(x - vt)$ $y' = y$ $z' = z$	$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$	$\frac{L'}{T'} = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{T}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
---------------------------------------	---	--	--	---

Sistemas de Coordenadas

Coordenadas Cartesianas

$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f$
---	--

$\nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{a}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{\mathbf{a}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{a}}_z$
--

Coordenadas Esféricas

$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \sin \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \theta \end{aligned}$	$dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$	$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
---	---	---

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{\mathbf{a}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{\mathbf{a}}_\phi$	$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
---	---

$\nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{\mathbf{a}}_\rho + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} \right] \vec{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \vec{\mathbf{a}}_\phi$

Coordenadas Cilindricas

$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$	$dV = \rho d\rho d\theta dz$	$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
--	------------------------------	---

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{\mathbf{a}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{\mathbf{a}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{\mathbf{a}}_z$	$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
--	---

$\nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{\mathbf{a}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \vec{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \vec{\mathbf{a}}_z$
--

Integrales y constantes útiles

$\begin{aligned} \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \end{aligned}$	$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) + C \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln x + C \end{aligned}$	$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ [C}^2/\text{Nm}^2\text{]} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [N/A}^2\text{]} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \end{aligned}$
---	---	--