Clase 08
Condiciones de Borde

Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 198 – 206
Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 225 – 249
Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 376 – 380

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de campos en un solo medio, pero no hemos visto que ocurre al pasar de un medio a otro.
- De igual manera, nuestro análisis se ha limitado a casos donde siempre tenemos a mano las distribuciones de carga, potencial, campo, etc. Y pocas veces es así.

Objetivo:

- **OA-01**: Plantear y resolver ecuaciones para la determinación de Fuerzas, Campos, Flujos, Potenciales, Torques y Energías electromagnéticas en problemas de mediana complejidad.
- **OA-08**: Formular y resolver problemas asociados a condiciones de borde en materiales eléctricos y magnéticos, utilizando las ecuaciones de Poisson y Laplace.

Contenidos

- Condiciones de Borde Eléctricas
- Condiciones de Borde Magnéticas
- Ecuaciones de Poisson y Laplace
- Teorema de Unicidad
- Resolución de Ecs. de Poisson y Laplace

Condiciones de Borde

Nuestro análisis consistirá en lo siguiente:

1. Definir los campos ambos medios: $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ y $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$.
2. Descomponer los campos en sus componentes paralelas y normales.

$\boxed{\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^{\perp} + \mathbf{E}_1^{\parallel}}$ $\boxed{\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1^{\perp} + \mathbf{H}_1^{\parallel}}$ $\boxed{\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^{\perp} + \mathbf{E}_2^{\parallel}}$ $\boxed{\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^{\perp} + \mathbf{H}_2^{\parallel}}$

3. Aplicar las ecuaciones de Maxwell a la interfaz de los medios 1 y 2.
4. Establecer relaciones entre $\mathbf{E}_1^{\perp}$ y $\mathbf{E}_2^{\perp}$, $\mathbf{E}_1^{\parallel}$ y $\mathbf{E}_2^{\parallel}$, $\mathbf{H}_1^{\perp}$ y $\mathbf{H}_2^{\perp}$, $\mathbf{H}_1^{\parallel}$ y $\mathbf{H}_2^{\parallel}$.

Condiciones de Borde para $\mathbf{E}^{\parallel}$

- Aplicaremos un lazo cerrado en la interfaz.
- Vamos a utilizar la segunda ecuación de Maxwell.

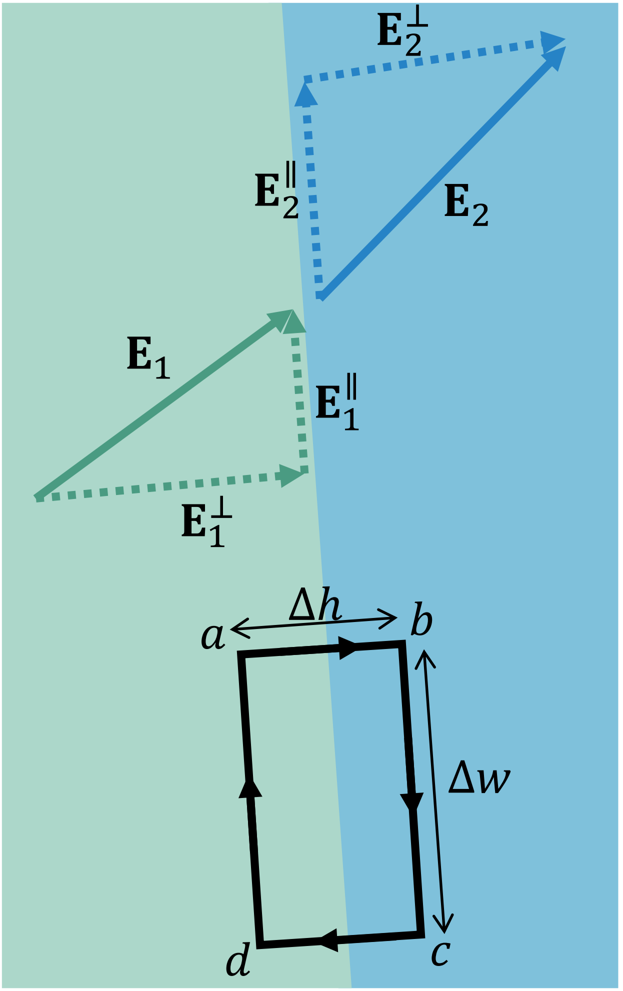
$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0}$$

- Luego:

$$E_1^{\perp}\frac{\Delta h}{2} + E_2^{\perp}\frac{\Delta h}{2} - E_2^{\parallel}\,\Delta w - E_2^{\perp}\frac{\Delta h}{2} - E_1^{\perp}\frac{\Delta h}{2} + E_1^{\parallel}\,\Delta w = 0$$

$$E_1^{\parallel}\,\Delta w = E_2^{\parallel}\,\Delta w$$

$$\boxed{E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}}$$



Condiciones de Borde para $\mathbf{D}^{\perp}$

- Aplicaremos un volumen cerrado en la interfaz.
- Vamos a utilizar la primera ecuación de Maxwell.

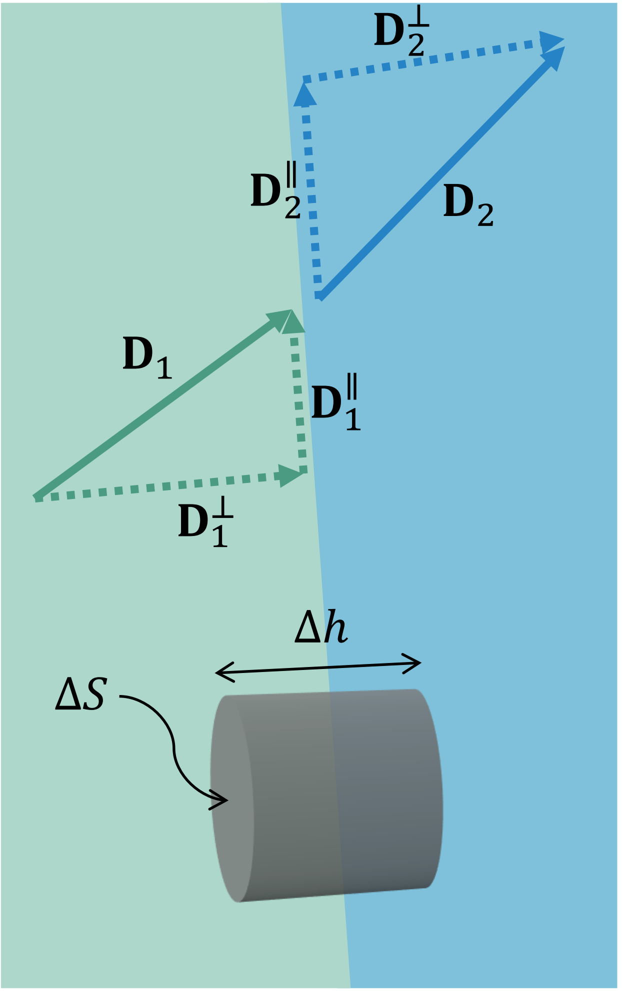
$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV}$$

- Luego:

$$-D_1^{\perp} \Delta S + D_2^{\perp} \Delta S = \rho_s \Delta S$$

$$-D_1^{\perp} + D_2^{\perp} = \rho_s$$

$$\boxed{D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \rho_s}$$



Condiciones de Borde Eléctricas

Analicemos los resultados anteriores:

$$\boxed{E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_1} D_1^{\parallel} = \frac{1}{\varepsilon_2} D_2^{\parallel}}$$

- La componente tangencial de $\mathbf{E}$ es <u>continua</u> en la frontera.
- Sin embargo, la componente tangencial de $\mathbf{D}$ es <u>discontinua</u>.
- $\mathbf{D}$ solo será continua cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (cuando no cambia el medio).

Condiciones de Borde Eléctricas

Analicemos los resultados anteriores:

$$\boxed{\varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \rho_s \qquad \Longleftrightarrow \qquad D_2^{\perp} - D_1^{\perp} = \rho_s}$$

Si $\rho_s = 0$:

- La componente normal de $\mathbf{D}$ es <u>continua</u> en la frontera.
- Sin embargo, la componente normal de $\mathbf{E}$ es <u>discontinua</u>.
- $\mathbf{E}$ solo será continua cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (cuando no cambia el medio).

Condiciones de Borde para $\mathbf{H}^{\parallel}$

- Aplicaremos un lazo cerrado en la interfaz.
- Vamos a utilizar la tercera ecuación de Maxwell.

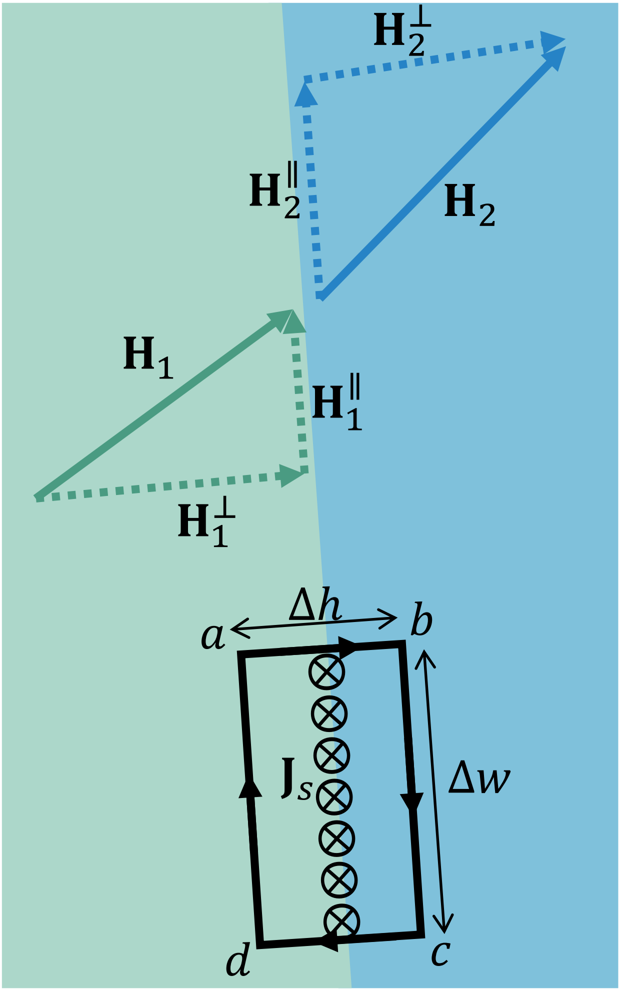
$$\boxed{\oint_L \mathbf{H} d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}$$

- Luego:

$$H_1^{\perp}\frac{\Delta h}{2} + H_2^{\perp}\frac{\Delta h}{2} - H_2^{\parallel}\Delta w - H_2^{\perp}\frac{\Delta h}{2} - H_1^{\perp}\frac{\Delta h}{2} + H_1^{\parallel}\Delta w = J_s \Delta w$$

$$-H_2^{\parallel}\Delta w + H_1^{\parallel}\Delta w = J_s \Delta w$$

$$\boxed{H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = J_s}$$



Condiciones de Borde para $\mathbf{H}^{\perp}$

- Aplicaremos un volumen cerrado en la interfaz.
- Vamos a utilizar la cuarta ecuación de Maxwell.

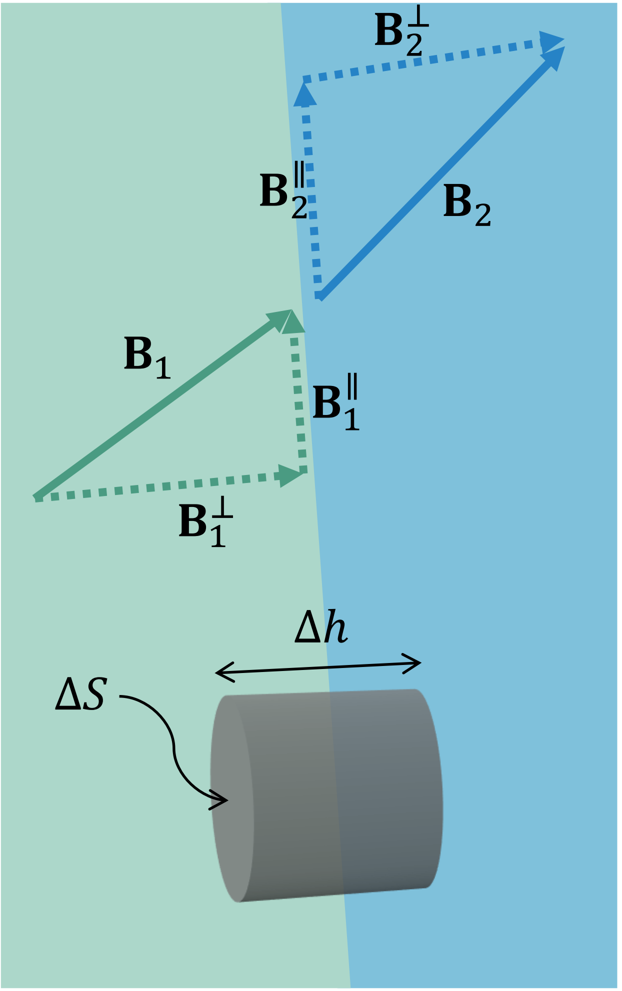
$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0}$$

- Luego:

$$-B_1^{\perp} \Delta S + B_2^{\perp} \Delta S = 0$$

$$-B_1^{\perp} + B_2^{\perp} = 0$$

$$\boxed{B_1^{\perp} = B_2^{\perp}}$$



Condiciones de Borde Magnéticas

Analicemos los resultados anteriores:

$$\boxed{\mu_1 H_1^{\perp} = \mu_2 H_2^{\perp} \qquad \Longleftrightarrow \qquad B_1^{\perp} = B_2^{\perp}}$$

- La componente normal de $\mathbf{B}$ es <u>continua</u> en la frontera.
- Sin embargo, la componente normal de $\mathbf{H}$ es <u>discontinua</u>.
- $\mathbf{H}$ solo será continua cuando $\mu_1 = \mu_2$ (cuando no cambia el medio).

Condiciones de Borde Magnéticas

Analicemos los resultados anteriores:

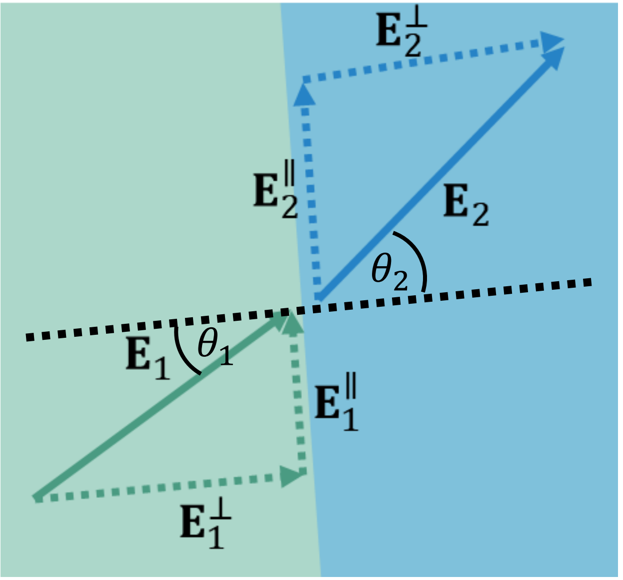
$$\boxed{H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = J_s \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel} = J_s}$$

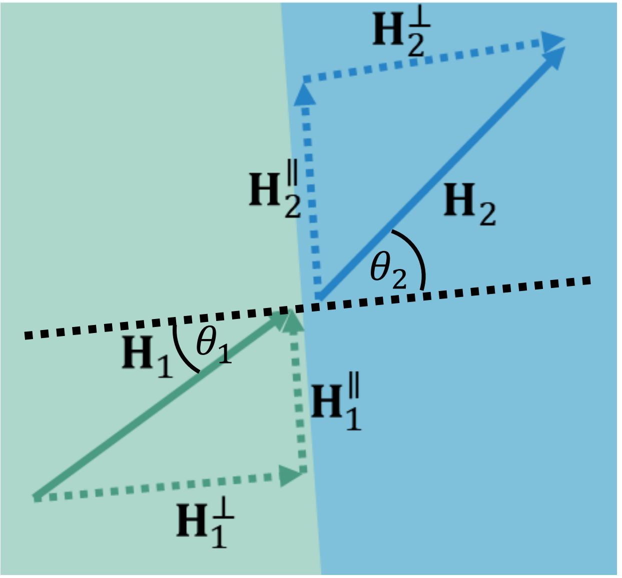
Si $J_s = 0$:

- La componente tangencial de $\mathbf{H}$ es <u>continua</u> en la frontera.
- Sin embargo, la componente tangencial de $\mathbf{B}$ es <u>discontinua</u>.
- $\mathbf{B}$ solo será continua cuando $\mu_1 = \mu_2$ (cuando no cambia el medio).

Refracción

- Nuestro análisis solo se centró en las magnitudes de los vectores.
- No hemos estudiado los ángulos al cambiar de interfaz.
- Por simplicidad, asumiremos $\rho_s = 0$ y $J_s = 0$.





Refracción

- Basta con reescribir los vectores normales y tangenciales como:

$$\boxed{\mathbf{E}^{\perp} = E\cos\theta} \quad \boxed{\mathbf{H}^{\perp} = H\cos\theta} \qquad \boxed{\mathbf{E}^{\parallel} = E\sin\theta} \quad \boxed{\mathbf{H}^{\parallel} = H\sin\theta}$$

- Y aplicar las condiciones de borde

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel} \quad \Longrightarrow \quad E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\varepsilon_1 E_1^{\parallel} = \varepsilon_2 E_2^{\parallel} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

$$\mu_1 H_1^{\perp} = \mu_2 H_2^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 H_1 \cos\theta_1 = \mu_2 H_2 \cos\theta_2$$

$$H_2^{\parallel} = H_1^{\parallel} \quad \Longrightarrow \quad H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2$$

Refracción

- Dividiendo entre sí las condiciones de borde eléctricas y magnéticas, respectivamente:

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\tan\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_2}\tan\theta_2 \qquad \frac{1}{\mu_1}\tan\theta_1 = \frac{1}{\mu_2}\tan\theta_2$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = \frac{\mu_0\mu_{r1}}{\mu_0\mu_{r2}}$$

$$\boxed{\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}}$$

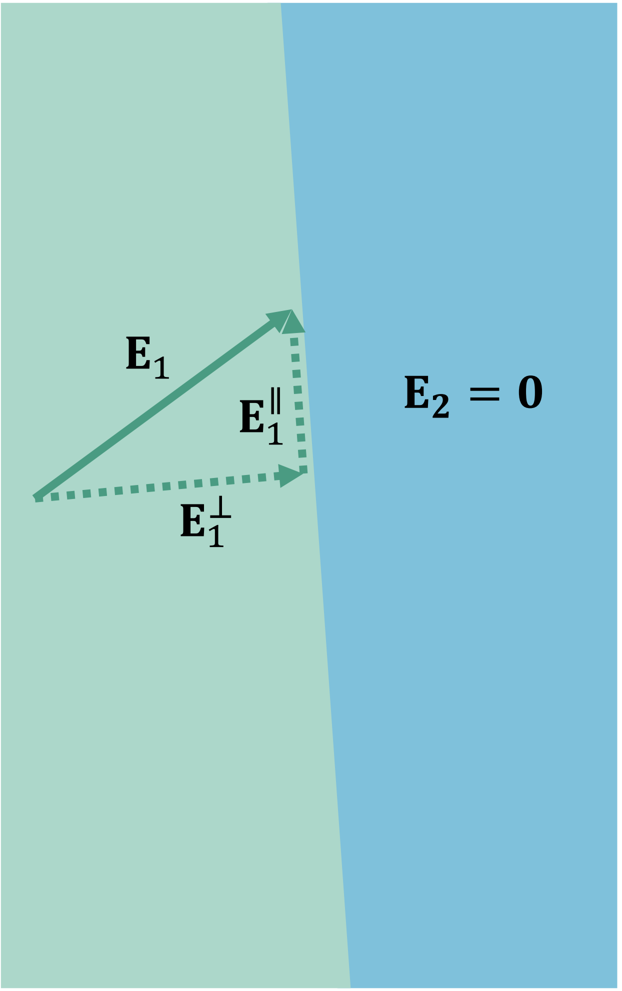
Caso Particular: Medio Conductor

- Consideremos que el primer medio es un dieléctrico, mientras que el segundo medio es un conductor aislado.
- Anteriormente, vimos que dentro de un conductor aislado no existe campo eléctrico:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$$

- Aplicando condiciones de borde eléctricas:

$$E_1^{\parallel} = 0 \qquad D_1^{\perp} = -\rho_s \qquad E_2^{\parallel} = 0 \qquad D_2^{\perp} = 0$$



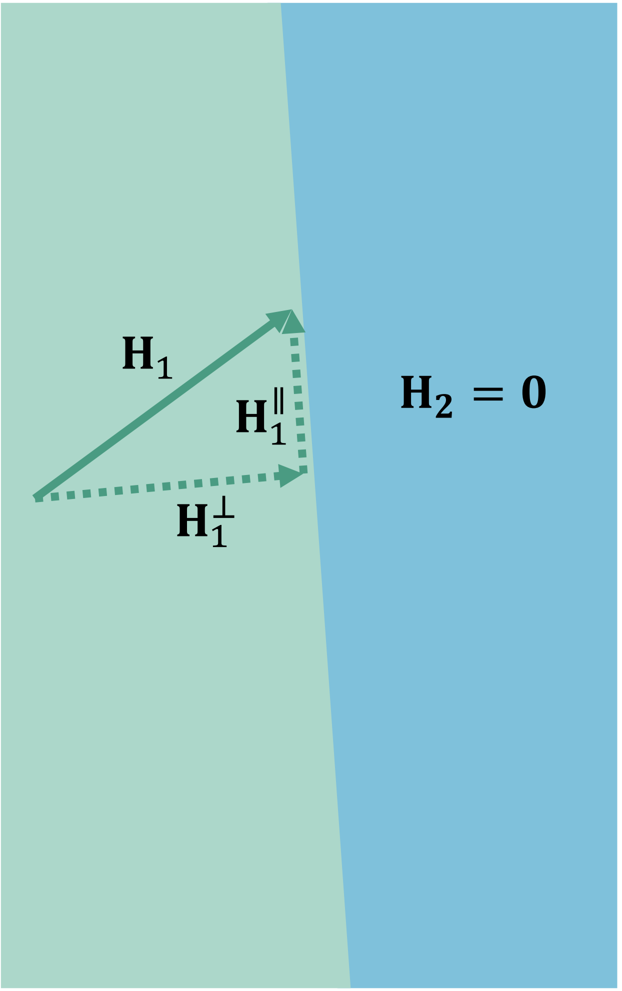
Caso Particular: Medio Conductor

- Por otro lado, vimos que un buen conductor excluye el campo magnético.

$$\mathbf{H_2} = \mathbf{0}$$

- Aplicando condiciones de borde Magnéticas:

$$H_1^{\parallel} = J_s \qquad B_1^{\perp} = 0 \qquad H_2^{\parallel} = 0 \qquad B_2^{\perp} = 0$$



Ecuación de Poisson y Ecuación de Laplace

Motivación

- Hasta ahora, los problemas que hemos resuelto han sido en base a una distribución de fuentes conocida o un potencial conocido.
- En la mayoría de los casos reales, ninguno de estos datos es conocido.
- Nos limitaremos a conocer la información en la frontera del sistema, y resolver problemas solo en base a esa información.

Ecuación de Poisson y Ecuación de Laplace

- De la primera ecuación de Maxwell y de la relación campo-potencial tenemos que:

$$\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad\qquad \mathbf{E} = -\mathbf{\nabla} V$$

- Reemplazando y asumiendo que el medio es homogéneo:

$$\boxed{\mathbf{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$ *Ecuación de Poisson*

- Si además $\rho = 0$:

$$\boxed{\mathbf{\nabla}^2 V = 0}$$ *Ecuación de Laplace*

Ecuación de Poisson y Ecuación de Laplace

- Análogamente, para magnetismo: $\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{J}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

- Reemplazando y asumiendo homogeneidad:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$$\mathbf{0} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}}$$

Ecuación de Poisson

- Si además $\mathbf{J} = \mathbf{0}$:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = 0}$$

Ecuación de Laplace

Ecuación de Poisson y Ecuación de Laplace

- Análogamente, para magnetismo: $\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{J}$ $\qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

- Reemplazando y asumiendo homogeneidad:

Para efectos de este curso, nos limitaremos al caso del potencial escalar eléctrico.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$$\mathbf{0} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}}$$ *Ecuación de Poisson*

- Si además $\mathbf{J} = \mathbf{0}$:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = 0}$$ *Ecuación de Laplace*

Ecuación de Poisson y Ecuación de Laplace

- Para los distintos sistemas de coordenadas, el operador laplaciano está dado por:

- Cartesianas $\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f$

- Cilíndricas $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f$

- Esféricas $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} f \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} f \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f$

Teorema de Unicidad

- Supongamos que tenemos dos soluciones a la ecuación de Poisson:

$$\phi_1 \qquad \text{y} \qquad \phi_2$$

- Luego, la solución $\phi = \phi_1 - \phi_2$ satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = \nabla^2\phi_1 - \nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \left(-\frac{\rho}{\varepsilon}\right) = 0$$

Teorema de Unicidad

- Aplicamos la identidad:

$$\nabla \cdot (\phi \, \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi$$

- Por Laplace $\nabla^2 \phi = 0$:

$$\nabla \cdot (\phi \, \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2$$

- Integramos y aplicamos divergencia:

$$\int_v (\nabla \phi)^2 \, \mathrm{d}v = \int_{\mathrm{v}} \nabla \cdot (\phi \, \nabla \phi) dv = \int_S (\phi \, \nabla \phi) \, dS$$

Teorema de Unicidad

- Si nos damos alguna condición de borde, como $\phi = 0$:

$$\int_v (\nabla\phi)^2 \, \mathrm{d}v = \int_S (\phi \, \nabla\phi) \, dS = 0$$

- Dado que $\int_v (\nabla\phi)^2 \, \mathrm{d}v$ es la integral de un valor positivo. No es posible que de 0 por anulación de términos. Luego, $\nabla\phi$ será 0 para todos los puntos dentro de la región.
- Como el gradiente $\nabla\phi$ es 0 en toda la región, y $\phi = 0$ en el borde. $\phi = 0$ en toda la región.
- De este modo $\phi = 0$, y por tanto $\phi_1 = \phi_2$. **LA SOLUCIÓN ES ÚNICA.**

Teorema de Unicidad

- Este teorema nos dice que, dada una determinada condición de borde, la solución que satisface la ecuación de Poisson o Laplace es única.

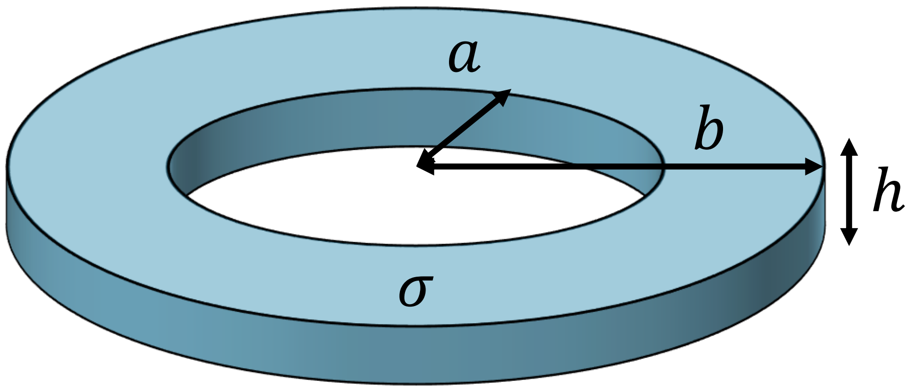
Resolución de las Ecs. de Poisson y Laplace

En general, el procedimiento para resolver estos problemas será:

1. Resolver la ecuación diferencial.
2. Aplicar las condiciones de borde.
3. Determinar el potencial V.
4. Determinar el campo $\mathbf{E} = -\nabla V$ y la corriente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.
5. Obtener cualquier otra variable eléctrica mediante las relaciones vistas en clase.

Ejemplo 1: Resistencia en un anillo

- Considere un cuarto de disco de radio R, grosor h y conductividad σ. Encuentre la resistividad desde el extremo en el origen hasta la cara curva exterior.



Ejemplo 1: Resistencia en un anillo

Paso 1: Resolvemos la Ecuación Diferencial

Como No hay cargas al interior del conductor $(\rho = 0)$. Aplicamos Laplace.

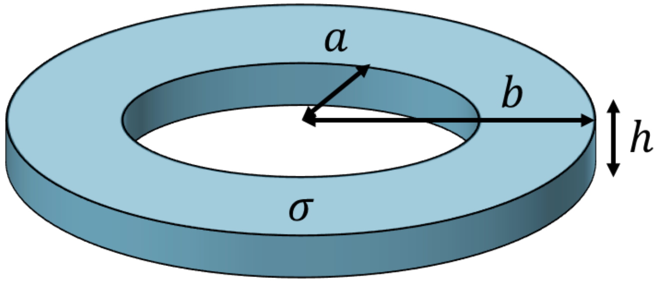
$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0$$

Integramos:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho}$$

Volvemos a integrar:

$$V = A \ln\rho + B$$



Ejemplo 1: Resistencia en un anillo

<u>Paso 2:</u> Aplicamos condiciones de borde

Definimos las condiciones de borde para el disco.

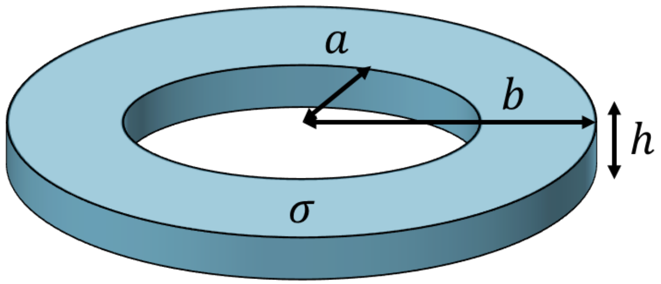
$$V(\rho = a) = 0 \qquad\qquad V(\rho = b) = V_0$$

Las aplicamos:

$$V(\rho = a) = 0 = A \ln a + B \quad \Longrightarrow \quad B = -A \ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 = A \ln b + B$$

$$V_0 = A \ln \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{\mathrm{V}_0}{\ln \frac{a}{b}}$$



Ejemplo 1: Resistencia en un anillo

Paso 3: Determinamos el potencial

$$V = A\ln\rho + B$$

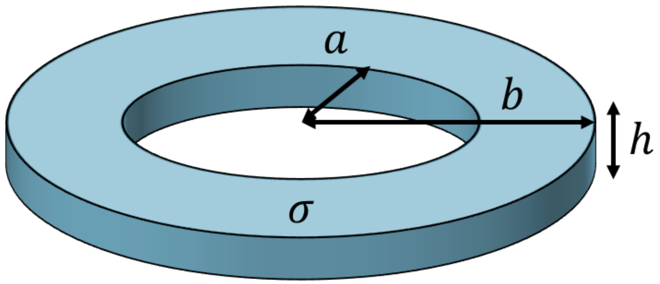
Del análisis de condiciones de borde:

$$B = -A\ln a \qquad A = \frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}}$$

Luego:

$$V = A\ln\rho - A\ln a = A\ln\frac{\rho}{a}$$

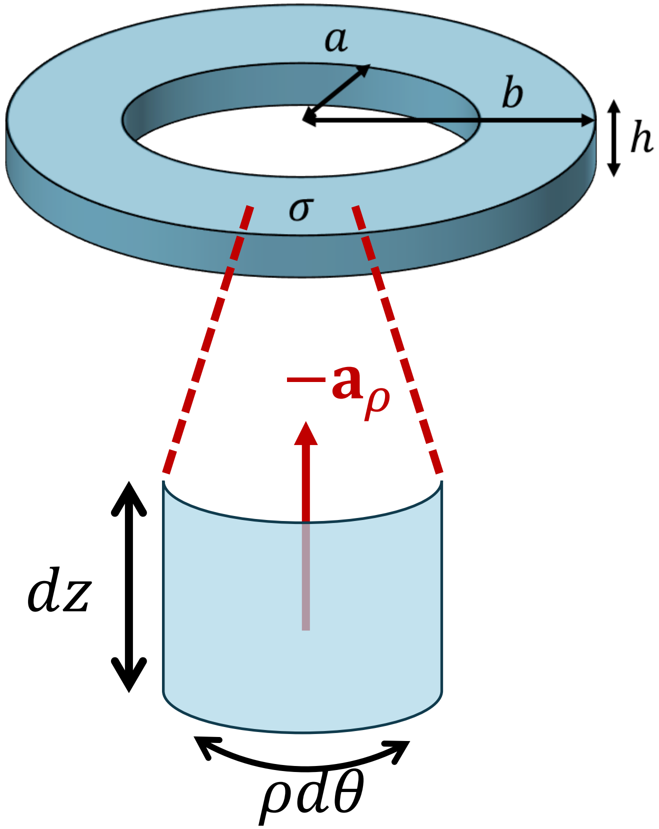
$$V = \frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}}\ln\frac{\rho}{a}$$



Ejemplo 1: Resistencia en un anillo

<u>Paso 4:</u> Determinamos Campo y Corriente

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}}(\ln\rho - \ln a)\right)\mathbf{a}_\rho = -\frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

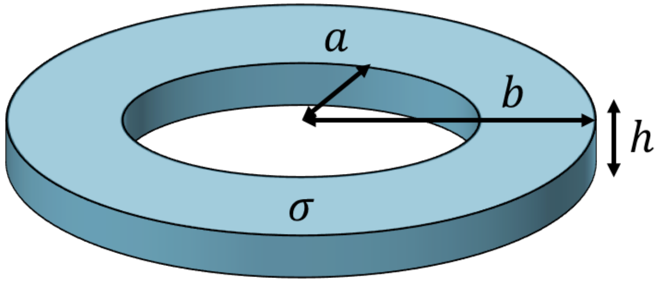


$$\mathbf{J} = -\sigma\frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}}\frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho \qquad d\mathbf{S} = -\rho d\theta dz\,\mathbf{a}_\rho$$

$$I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \sigma\frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}}\frac{1}{\rho}\rho d\theta dz = \frac{V_0\sigma}{\ln\frac{a}{b}}\int_S d\theta dz = \frac{V_0\sigma}{\ln\frac{a}{b}}2\pi h$$

Ejemplo 1: Resistencia en un anillo

<u>Paso 5:</u> Determinamos Resistencia

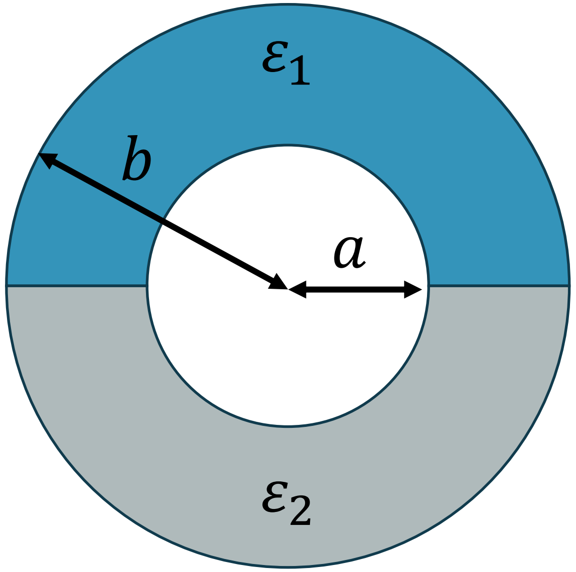


$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{V_0 - 0}{\frac{V_0 \sigma}{\ln \frac{a}{b}} 2\pi h}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi h \sigma} \ln \frac{a}{b}}$$

Ejemplo 2: Capacitor Esférico

- Considere un capacitor esférico con hueco, compuesto de 2 mitades dieléctricas, cuya sección transversal es la de la Figura. Determine la capacitancia.



Ejemplo 2: Capacitor Esférico

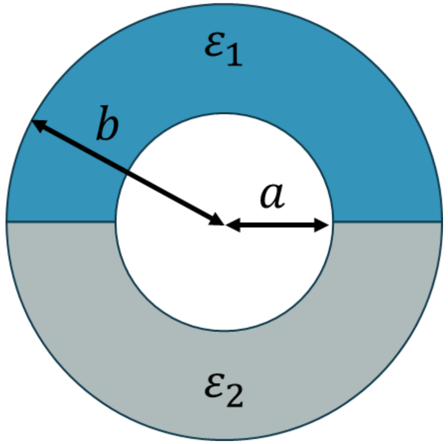
<u>Paso 1:</u> Resolvemos la Ecuación Diferencial

Como No hay cargas libres al interior del capacitor $(\rho = 0)$. Aplicamos Laplace.

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0$$

Integramos:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho^2}$$



Volvemos a integrar:

$$V = -\frac{A}{\rho} + B$$

Ejemplo 2: Capacitor Esférico

Paso 2: Aplicamos condiciones de borde

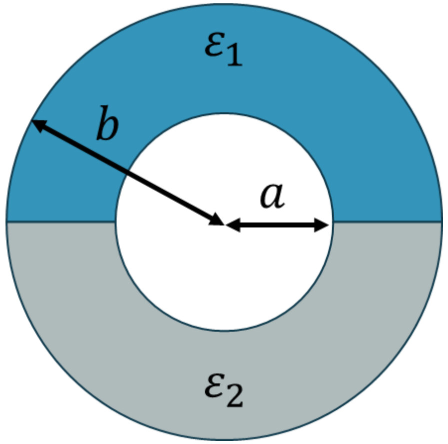
Definimos las condiciones de borde para el capacitor.

$$V(\rho = a) = V_0 \qquad\qquad V(\rho = b) = 0$$

Las aplicamos:

$$V(\rho = b) = 0 = -\frac{A}{b} + B \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{A}{b}$$

$$V(\rho = a) = V_0 = -\frac{A}{a} + B \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{\mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$



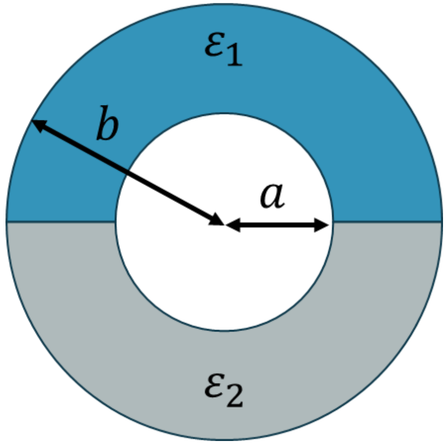
Ejemplo 2: Capacitor Esférico

Paso 3: Determinamos el potencial

$$V = -\frac{A}{\rho} + B$$

Del análisis de condiciones de borde:

$$B = \frac{A}{b} \qquad A = \frac{\mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$



Luego:

$$V = -\frac{A}{\rho} + \frac{A}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\rho}\right)$$

Ejemplo 2: Capacitor Esférico

Paso 4: Determinamos Campo y Carga

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\rho}\right)\right)\mathbf{a}_\rho = -\frac{\mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}\frac{1}{\rho^2}\mathbf{a}_\rho$$

Aplicamos condición de borde entre la placa conductora del capacitor y el medio dieléctrico, luego:

$$\mathbf{D}_{dielectrico}^{\perp} = \varepsilon\mathbf{E}_{dielectrico}^{\perp} = \rho_s$$

Ejemplo 2: Capacitor Esférico

Paso 4: Determinamos Campo y Carga

$$\mathbf{D}^{\perp}_{dielectrico} = \varepsilon \mathbf{E}^{\perp}_{dielectrico} = \rho_s$$

$$\rho_s = \frac{\varepsilon \mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \frac{1}{\rho^2} \mathbf{a}_\rho \qquad d\mathbf{S} = \rho^2 \sin\theta d\theta d\phi \, \mathbf{a}_\rho$$

$$Q = \int_S \rho_s \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\varepsilon \mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{\mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \varepsilon \sin\theta d\theta$$

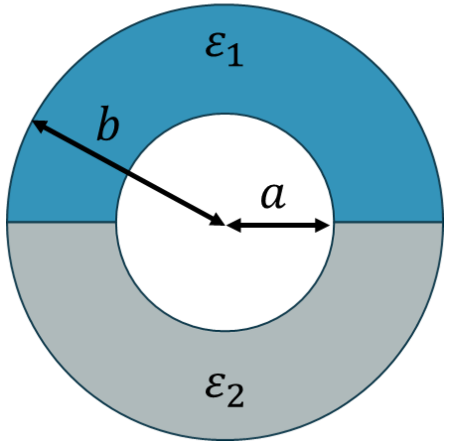
Ejemplo 2: Capacitor Esférico

<u>Paso 4:</u> Determinamos Campo y Carga

Notemos que ε se comporta de manera discontinua a lo largo de ϕ:

$$Q = \frac{2\pi \mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \int_0^{\pi} \varepsilon \sin\theta d\theta = \frac{2\pi \mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \left[\varepsilon_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta + \varepsilon_2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta d\theta \right]$$

$$Q = \frac{2\pi \mathrm{V}_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} [\varepsilon_1 + \varepsilon_2]$$

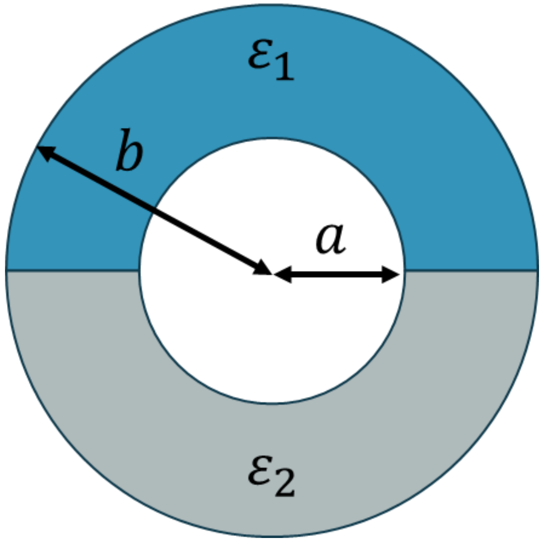


Ejemplo 2: Capacitor Esférico

Paso 5: Determinamos Capacitancia

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\dfrac{2\pi \mathrm{V}_0}{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}[\varepsilon_1 + \varepsilon_2]}{V_0 - 0}$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi}{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}[\varepsilon_1 + \varepsilon_2]}$$



Resumen

- Analizamos las condiciones de borde para los campos eléctrico y magnético, y estudiamos el caso particular de los conductores.
- Analizamos condiciones de borde para determinar potenciales, y nos centramos en el caso del potencial eléctrico.
- Usando Poisson y Laplace, nos importa poco saber la distribución de las cargas, nos basta con conocer cómo se comportan las cosas en la frontera.

Cerremos la clase de hoy

- Ha llegado el momento de cerrar el capítulo de electromagnetismo.
- Veremos qué sucede cuando los campos comienzan a variar en el tiempo.
- Aún tenemos pendiente completar 2 ecuaciones de Maxwell.

Próxima Clase:

Ecuaciones de Maxwell

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). Elements of Electromagnetics. 7th Edition: pp. 421 – 472

Cerremos la clase de hoy

- Necesito que repasen:

Ecuaciones de Maxwell

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \qquad \oint_L \mathbf{H} d\boldsymbol{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \qquad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ecuación de continuidad

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}$$