Clase 13
Ondas en Conductores

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 489 – 498

Javier Silva Orellana

jisilva8@uc.cl

Contexto

- La clase pasada volvimos a limitar nuestro estudio al caso de materiales simples no conductores, y en base a ello dedujimos distintas relaciones de energía.
- Ahora extenderemos el análisis al caso de conductores.

Objetivos de Aprendizaje involucrados:

- **OA-11:** Determinar las expresiones correspondientes a ondas eléctricas, magnéticas y potencia asociada para condiciones de propagación libre en distintos tipos de medios.

Contenidos

- Vector de Poynting en Medios Conductores
- Energía de Ondas EM en Conductores
- Velocidad de fase
- Velocidad de grupo
- Dispersión
- Profundidad Pelicular
- Resistencia Superficial

Recordando: Medios Conductores

- Para un medio conductor, se tienen las siguientes características:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

Recordando: Medios Conductores

- En general, α, β y $|\eta|$ no serán un problema:

$$\boxed{\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\boxed{\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}$$

Recordando: Medios Conductores

- No obstante, θ_η introducirá desfases:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

Vector de Poynting en Medios Conductores

- Al estar en un medio conductor, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ se verán afectados según:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{E_0}}{|\eta|}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0 - \theta_\eta)$$

- Veamos qué ocurre

Vector de Poynting en Medios Conductores

- El vector de Poynting estará dado por: $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\kappa \cdot r} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_0) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_0 - \theta_\eta) \, \mathbf{a}_k$$

- Con un poco de trigonometría:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\kappa \cdot r} \left[\cos\left(\theta_\eta\right) + \cos(2\omega t - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_0 - \theta_\eta)\right] \, \mathbf{a}_k$$

Vector de Poynting en Medios Conductores

- Si integramos sobre un periodo para tener obtener el flujo instantáneo promedio de energía:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\kappa\cdot r} \left[\frac{1}{T} \int \left[\cos(\theta_\eta) + \cos(2\omega t - 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0 - \theta_\eta) \right] dt \right] \mathbf{a}_k$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\kappa\cdot r} \left[\frac{1}{T} \int \cos(\theta_\eta) dt + 0 \right] \mathbf{a}_k$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\kappa\cdot r} \cos(\theta_\eta) \ \mathbf{a}_k$$

Vector de Poynting en Medios Conductores

- Podríamos habernos ahorrado todo este desarrollo definiendo:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}' = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$

- De modo que:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}' = \left(E_0 e^{-\kappa\cdot r} e^{j\omega t} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{j\theta_0}\right)\left(\frac{E_0}{|\eta|} e^{-\kappa\cdot r} e^{-j\omega t} e^{+j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-j\theta_0} e^{j\theta_\eta}\right)\mathbf{a}_k$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}' = \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\kappa\cdot r} e^{j\theta_\eta}\, \mathbf{a}_k$$

Vector de Poynting en Medios Conductores

- Luego:

$$\frac{1}{2}\Re\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\} = \frac{E_0^2}{2|\eta|}e^{-2\kappa\cdot r}\cos(\theta_\eta)\,\mathbf{a}_k$$

$$\frac{1}{2}\Im\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\} = \frac{E_0^2}{2|\eta|}e^{-2\kappa\cdot r}\sin(\theta_\eta)\,\mathbf{a}_k$$

- La definición antes empleada se conoce como **vector de Poynting complejo**:

$$\boxed{\mathcal{P}' = \mathbf{E}\times\mathbf{H}^*}$$

Energía de Ondas en Medios Conductores

- Usando valores RMS, la energía promedio estará dada por:

$$\langle w_E \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\left\langle E_0^2 \right\rangle = \frac{\varepsilon E_0^2}{4} e^{-2\kappa \cdot r} \qquad \langle w_H \rangle = \frac{1}{2}\mu\left\langle H_0^2 \right\rangle = \frac{\mu H_0^2}{4} e^{-2\kappa \cdot r}$$

- El cociente entre ambos será:

$$\frac{\langle w_E \rangle}{\langle w_H \rangle} = \frac{\varepsilon E_0^2}{\mu H_0^2} = \frac{\varepsilon}{\mu}|\eta|^2$$

Energía de Ondas en Medios Conductores

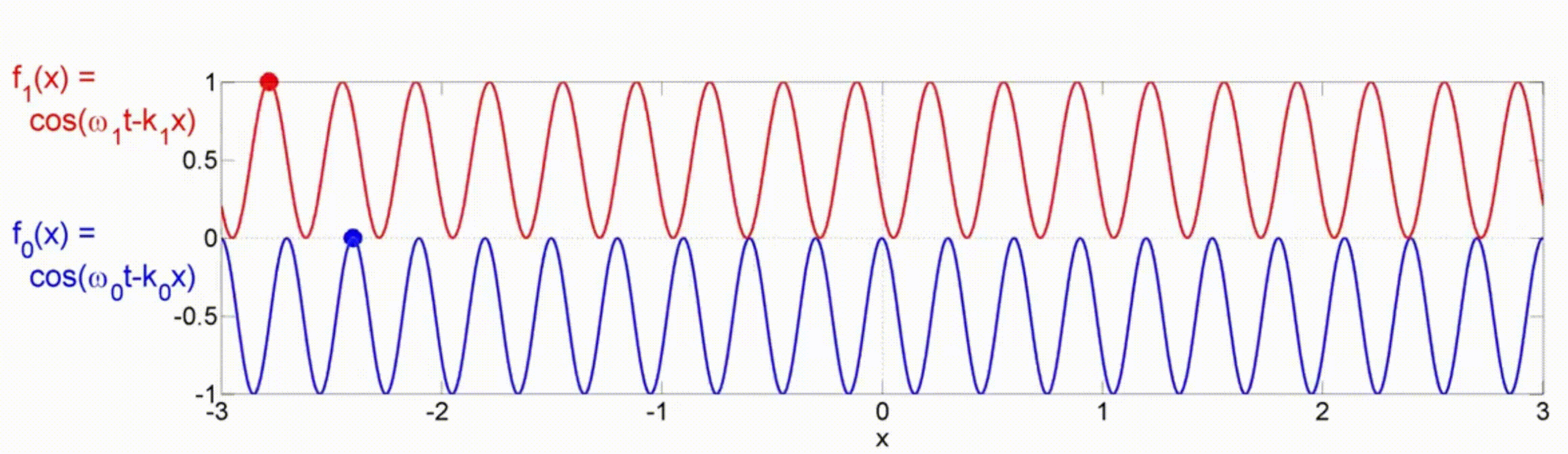
- En un buen conductor, $|\eta| \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$:

$$\frac{\langle w_E \rangle}{\langle w_H \rangle} = \frac{\varepsilon}{\mu}\left(\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\right)^2 = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \ll 1$$

- De modo que la mayor parte de la energía está en el campo magnético.

Velocidad de fase

- La velocidad de fase $\boldsymbol{u}$ se define como la velocidad de un punto que permanece en fase con respecto a la onda. Gráficamente:



Velocidad de fase

- Para el ejemplo anterior, podemos considerar el campo eléctrico como:

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{x}}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta x)$$

- Si el punto está con una fase fija, entonces tenemos que

$$\omega t - \beta x = \text{cte}$$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x) = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{u} = \frac{dx}{dt}\mathbf{a}_x = \frac{\omega}{\beta}\mathbf{a}_x}$$

Velocidad de fase

- Para un caso general, con la onda moviéndose en una dirección arbitraria en un medio conductor:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0}\, e^{-\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}}\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \theta_0)$$

- La magnitud de la velocidad de fase estará dada por

$$\boxed{u = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}}$$

Velocidad de grupo

- Supongamos ahora que tenemos 2 ondas electromagnéticas, tales que:

$$\mathbf{E}_x(x,t) = \mathbf{E_0}\cos(\omega_1 t - [\beta_0 + \Delta\beta]x) + \mathbf{E_0}\cos(\omega_2 t - [\beta_0 - \Delta\beta]x)$$

- Definiremos las siguientes variables de re-parametrización:

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

Velocidad de grupo

- Re-parametrizando:

$$\mathbf{E}_x(x,t) = \mathbf{E_0}\cos([\omega_0 + \Delta\omega]t - [\beta_0 + \Delta\beta]x) + \mathbf{E_0}\cos([\omega_0 - \Delta\omega]t - [\beta_0 - \Delta\beta]x)$$

- Con un poco de trigonometría:

$$\mathbf{E}_x(x,t) = 2\mathbf{E_0}\cos(\omega_0 t - \beta_0 x)\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x)$$

- Asumiremos $\Delta\beta \ll \beta_0$ y $u = \omega/\beta$.

Velocidad de grupo

- Cómo se ve gráficamente esto:

$$\mathbf{E}_x(x,t) = 2\mathbf{E_0}\cos(\omega_0 t - \beta_0 x)\ \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x)$$

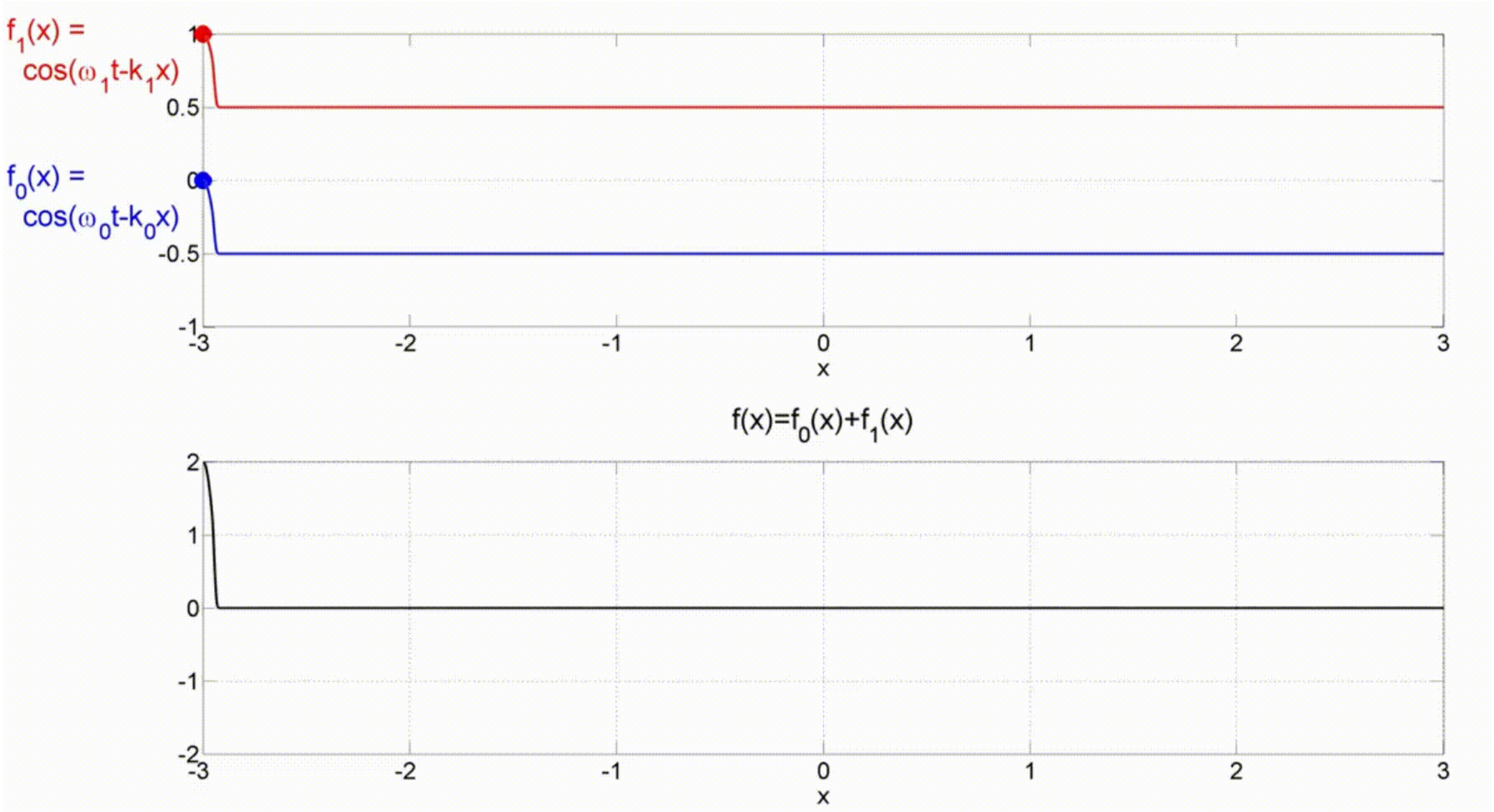
λ corta, $u = \omega_0/\beta_0$ $\quad$ λ larga, $u_g = \Delta\omega/\Delta\beta$

- Denominaremos la **velocidad de grupo** como:

$$\boxed{\boldsymbol{u_g} = \frac{d\omega}{d\beta}\mathbf{a}_x = \nabla_{\mathbf{k}}\omega}$$

Velocidad de grupo

- Cómo se ve gráficamente esto:



Velocidad de grupo

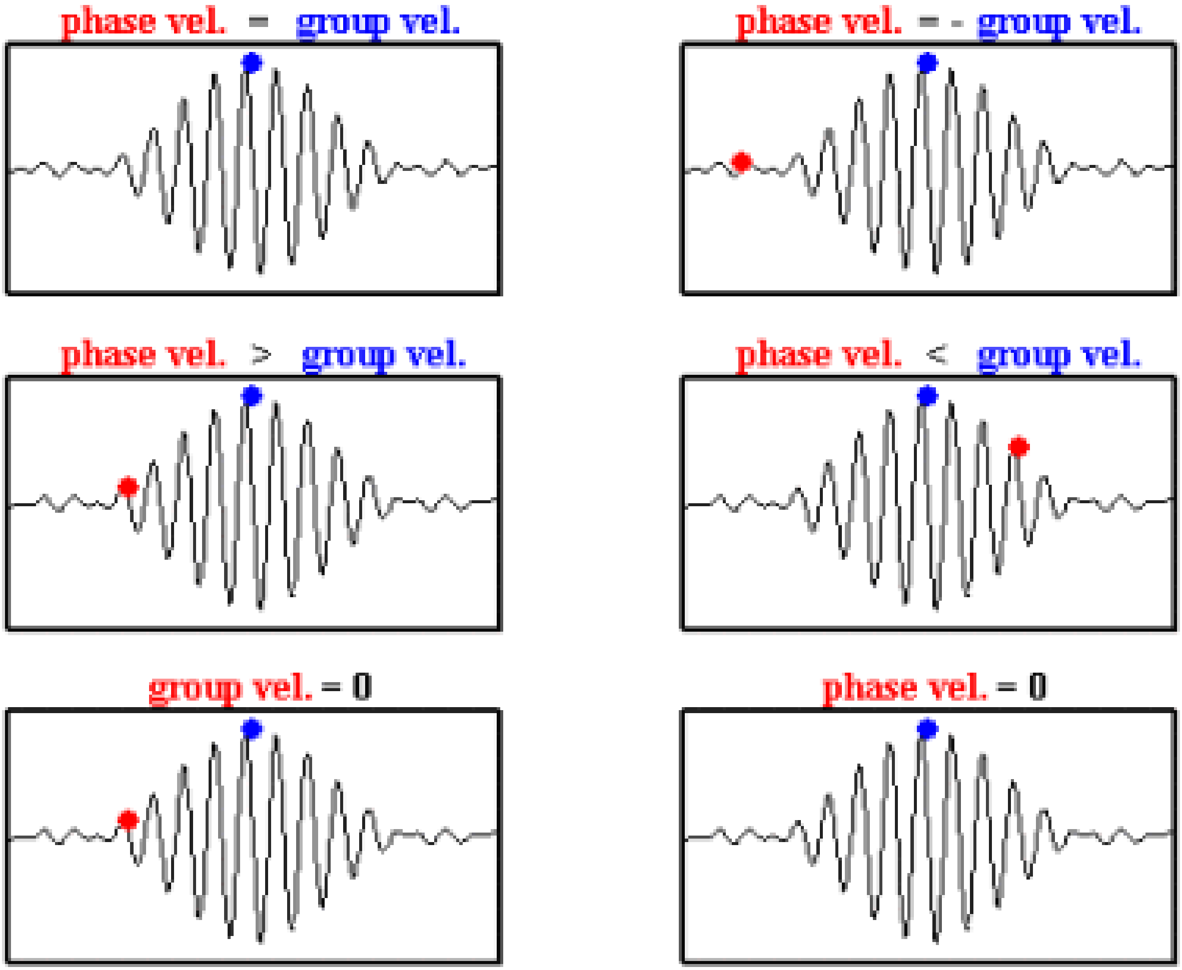
- Evidentemente, podemos establecer una relación entre la velocidad de grupo y la velocidad de fase:

$$u_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{u}\right)} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{u}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{u} + \omega\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{u}\right)}$$

$$u_g = \frac{1}{\frac{1}{u} + \omega\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{u} - \frac{\omega}{u^2}\frac{du}{d\omega}}$$

$$\boxed{u_g = \frac{u}{1 - \beta\frac{du}{d\omega}}}$$

Velocidad de fase vs Velocidad de grupo



Dispersión

- A partir de la expresión:

$$u_g = \frac{u}{1 - \beta \dfrac{du}{d\omega}}$$

- Si la velocidad de fase depende de la frecuencia, diremos que hay **dispersión**. En consecuencia:

$$u \neq u_g$$

Dispersión

- De este modo, dependiendo del valor de $\frac{du}{d\omega}$ tendremos 3 casos:

1. $\frac{du}{d\omega} > 0$ Dispersión normal

2. $\frac{du}{d\omega} < 0$ Dispersión anómala

1. $\frac{du}{d\omega} = 0$ No Dispersión. También llamada “Dispersión Lineal”.

Dispersión

- En el caso de un buen conductor, $\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$:

$$u \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon}{\sigma}} \qquad u_g \approx \frac{2}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon}{\sigma}}$$

(Hay dispersión)

- En el caso de un dieléctrico ideal, $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad u_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

(No hay dispersión)

Recordando: Buenos Conductores

- En el caso de buenos conductores, tenemos que $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$|\eta| \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

$$\theta_\eta \approx \frac{\pi}{4} = 45°$$

Profundidad pelicular

- Anteriormente, vimos que para un material con pérdidas:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

- Por un lado, β nos da información sobre la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

- Por otro lado, α mide la distancia que viaja la onda hasta decaer a e^{-1} con respecto a su valor original.

Profundidad pelicular

- Cuando la onda decae en e^{-1} la distancia recorrida es de:

$$e^{-\alpha z} = e^{-1}$$

$$\alpha z = 1$$

$$z = \frac{1}{\alpha}$$

- Esto se conoce como **profundidad pelicular:**

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha}}$$

Profundidad pelicular

- Para el caso de un buen conductor, la profundidad pelicular estará dada por:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

$$\boxed{\delta \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}$$

Profundidad pelicular

- Empleando la definición de profundidad pelicular, podemos reescribir algunos términos:

$$\gamma = \frac{1}{\delta}(1 + j) \qquad \eta = \frac{1}{\sigma\delta}(1 + j)$$

- Al tratarse de un buen conductor, también tenemos que $\alpha = \beta \approx \frac{1}{\delta}$. Luego:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{z}, t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \mathbf{a}_x$$

Profundidad pelicular

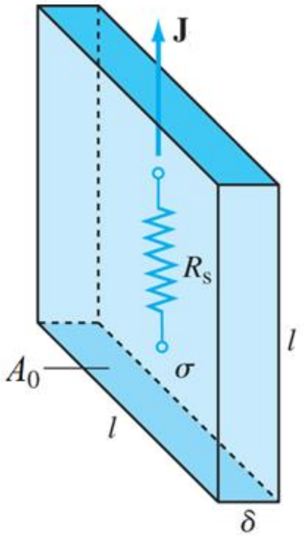
- Analicemos:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{z},t) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\ \mathbf{a}_x$$

- $\frac{z}{\delta}$ se hace más grande conforme aumenta la frecuencia o la distancia.
- A mayor frecuencia o profundidad en el conductor, la señal decae más.
- A mayor frecuencia o profundidad en el conductor, la velocidad de propagación disminuye.
- En otras palabras, a la onda le cuesta cada vez más propagarse en el conductor. Esto se conoce como **efecto pelicular**.

Resistencia pelicular

- Consideremos una delgada capa de superficie del conductor en la región donde impacta la onda.
- Asumamos que este trozo de capa tiene las dimensiones de la figura y una resistencia superficial R_s.



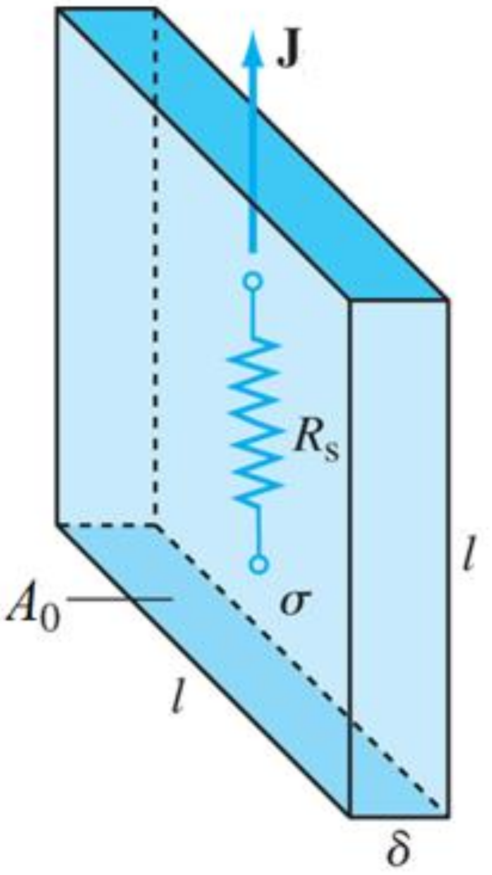
Resistencia pelicular

- Aplicando la definición geométrica de resistencia:

$$R_s = \frac{l}{\sigma A_0} = \frac{l}{\sigma l \delta} = \frac{1}{\sigma \delta}$$

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\sigma}{(2\pi f)\mu}}}$$

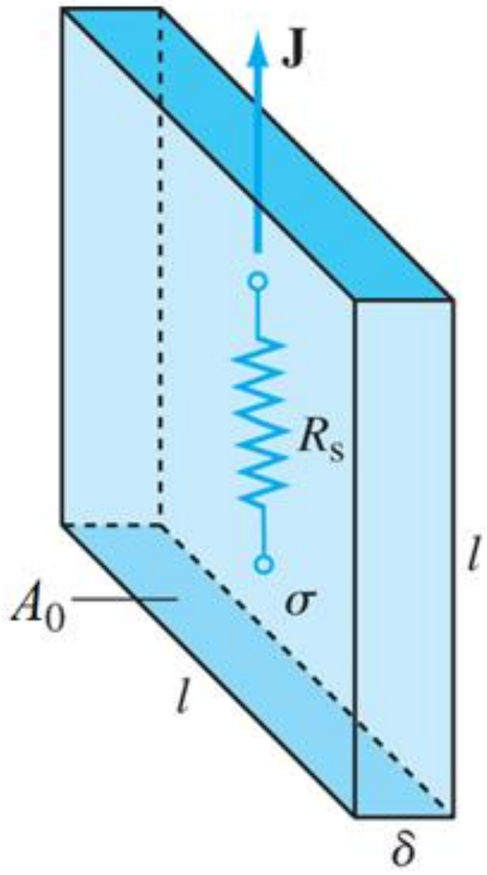
$$\boxed{R_s = \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\sigma}}}$$



Resistencia pelicular

- Aplicando la definición geométrica de resistencia:

$$\boxed{R_s = \frac{1}{\sigma\delta}} \qquad \boxed{R_s = \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\sigma}}}$$



- Esto nos dice que, mientras el área sea cuadrada, la resistencia no dependerá del área.
- Por este motivo, R_s se especifica en [$\Omega/\square$].

Resumen

- Incorporamos los conceptos de vector de Poynting complejo, velocidad de grupo y de fase, y profundidad pelicular.
- Extendimos nuestro análisis aplicando dichos conceptos al caso de conductores.
- A partir de la profundidad pelicular, analizamos el efecto pelicular y definimos la resistencia pelicular.

Cerrando la clase de hoy

- Completamos nuestro análisis en medios. Nos queda estudiar el caso de las interfases.

Próxima Clase:

Incidencia Normal y Reflexión

Bibliografía:

Sadiku, M. (2018). *Elements of Electromagnetics*. 7th Edition: pp. 506 – 516