Notes of Functional Analysis

泛函分析复习

Jinhua Wu

Contents

Chapter 1

度量空间

1.1 压缩映射原理

3 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是度量空间，映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 满足 $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$，并且已知 T 有不动点，求证此不动点唯一。

Proof. 这里我们假设其存在 x,y 两个不动点，则

$$\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$$

可见上式满足当且仅当 $x=y$，故而不动点唯一。 □

4 设 T 是度量空间上的压缩映射，求证：T 是连续的。

Proof. 考虑 $\forall x_0\in\mathscr{X}$，而 $x_n\in\mathscr{X}$ 且 $x_n\to x_0$，我们要证明 $Tx_n\to Tx_0$，而这是显然的，由于

$$|Tx_n-Tx_0|\leqslant\alpha\rho(x_n,x_0)\to 0\quad(\alpha\in(0,1))$$

□

5 设 T 是压缩映射，求证：T^n $(n\in\mathbb{N})$ 也是压缩映射，且逆命题不一定成立。

Proof. 考虑由于 T 为压缩映射，则存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $\forall x,y\in\mathscr{X}$，$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$。而 $\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha^n\rho(x,y)$，而 $\alpha\in(0,1)$，从而 T^n 也为压缩映射。但若 $\alpha^n\in(0,1)$ 不一定能推知 T 压缩映射。考虑 $T:x\mapsto\frac{1}{2}(-x)$，显然不为压缩映射，但 $T^2:x\mapsto\frac{1}{4}x^2$ 为压缩映射。 □

6 设 M 是 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 中的有界闭集，映射 $T:M\to M$ 满足 $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$，求证：T 在 M 中有唯一的不动点。

Proof. 先证明存在，定义 $f(x)=\rho(x,Tx)$，则

$$\rho(x,Tx)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,Ty)+\rho(Ty,Tx)\leqslant 2\rho(x,y)+\rho(y,Ty)\quad(\forall x,y\in\mathscr{X})$$

而 f 在 M 上是连续的，因此 $\exists x_0\in M$ 使得

$$\rho(x_0,Tx_0)=\min_{x\in M}\rho(x,Tx)=m$$

若 $x_0 \neq Tx_0$，则

$$m \leqslant f(Tx_0) = \rho(Tx_0, T^2x_0) < \rho(x_0, Tx_0) = m$$

矛盾，故而 x_0 为 T 的一个不动点。

而唯一性由第三题给出。 □

1.2 完备化

2 在一个度量空间 $(\mathscr{X}, \rho)$ 上，求证：基本列是收敛列，当且仅当其中存在一串收敛子列。

Proof. 这是很显然的，先说明必要性，若为收敛列，去掉第一个元素后依旧收敛。下面说明必要性，若 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，记 x_{n_k} 收敛于 x_0，而

我们总可以控制使得两项分别为 $\varepsilon/2$

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$$

因此 $x_n \to x_0$，即为收敛列。 □

5 在完备的度量空间 $(\mathscr{X}, \rho)$ 中给定点列 $\{x_n\}$，如果 $\forall \varepsilon > 0$，存在基本列 $\{y_n\}$ 使得

$$\rho(x_n, y_n) < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N})$$

求证：$\{x_n\}$ 收敛。

Proof. 在完备空间中 y_n 是收敛的，考虑其收敛于 y_0，则

$$\rho(x_n, y_0) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_0) \to 0$$

因此 $\{x_n\}$ 不仅收敛，还收敛于 y_0。 □

1.3 列紧集

6 设 $E = \{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$，求证：$E$ 在 $C[0, \pi]$ 中不是列紧的。

Proof. 等价于说明 E 不是完全有界集。我们只需要找到一个 ε，而后证明不存在这样的有穷 ε 网。我们也可以用 Arzelà-Ascoli 来说明，首先其肯定是完全有界的，但 $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{3}$，考虑 $t_1 = \frac{\pi}{2n}$，$t_2 = \frac{\pi}{n}$，则

$$|\sin nt_1 - \sin nt_2| = 1 > \varepsilon_0$$

因此并非是等度连续的。 □

9 设 (M, ρ) 是一个紧度量空间，又 $E \subset C(M)$，E 中的函数一致有界且满足下列 Hölder 条件

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant C\rho(t_1, t_2)^\alpha \quad (\forall x \in E, \forall t_1, t_2 \in M)$$

Proof. 显然利用 Arzelà-Ascoli，只需说明等度连续即可，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)^{1/\alpha}$，当 $\rho(t_1,t_2)<\delta$ 时

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\frac{\varepsilon}{2C}\leqslant\varepsilon$$

因此等度连续的，从而满足 Arzelà-Ascoli，因此 E 是列紧的。 □

1.4 赋范线性空间

2 设 $C(0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 的全体。对 $\forall x\in C[0,1]$，令 $\|x\|=\sup\limits_{0<t\leqslant1}|x(t)|$，求证

(1) $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 上的范数

Proof. 我们需要验证其满足三条性质，首先对于第一条而言显然有 $\|x\|\geqslant0$，且 $\|x\|=0\Leftrightarrow\sup\limits_{0<t\leqslant1}|x(t)|=0$，即说明 $x(t)=0$，$\forall 0<t\leqslant1$，因而正定性满足。

对于三角不等式而言，

$$\|x+y\|=\sup_{0<t\leqslant1}|x(t)+y(t)|\leqslant\sup_{0<t\leqslant1}|x(t)|+\sup_{0<t\leqslant1}|y(t)|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

齐次性显然。故而为范数 □

(2) l^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间等距同构。

Proof. 我们要考虑把连续的函数离散化，考虑子集

$$M\triangleq\{x\in C(0,1]\mid x\text{在}\left(\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}\text{分段为直线段}\right)\}$$

则 M 与 l^∞ 等距同构。即 $x\in M$ 由 $\left\{x\left(\frac{1}{i}\right)\right\}_{i=1}^\infty$ 唯一确定，且

$$\|x\|=\sup_i\left|x\left(\frac{1}{i}\right)\right|$$

□

7 设 $\mathscr{X}^*$ 是 B^* 空间，求证：$\mathscr{X}$ 是 B 空间，必须且仅须对 $\forall\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

Proof. 必要性：若 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，则由于范数求和收敛，可以推出

$$\left\|\sum_{k=0}^{p}x_{m+k}\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{p}\|x_{m+k}\|\to0\quad(\forall p\in\mathbb{N}^+,\ n\to\infty)$$

因此 $\{x_m\}$ 为基本列，从而求和收敛。

充分性：若条件成立，则由上文可知 $\{x_n\}$ 基本列收敛，而由于 $\{x_n\}$ 的任意性，则 $\mathscr{X}^*$ 为 B 空间。 □

1.5 凸集与不动点

1.6 内积空间

4 设 M,N 是内积空间中的两个子集，求证：

$$M \subset N \Rightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$$

Proof. $\forall x \in M$，我们可以知道 $x \in N$，而 $\forall y \in N^{\perp}$，则 $\forall x \in N$，均有 $\langle x, y\rangle = 0$。那么我们缩小范围，$\forall x \in M$，上面的内积也显然为 0，因此成立。 □

5 设 M 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 的子集，求证：

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{span}M}$$

Proof. 我们要证两边，$\forall x \in (M^{\perp})^{\perp}$，则 $\forall y \in M^{\perp}$，则 $\langle x, y\rangle = 0$。若 $x \notin \overline{\mathrm{span}M}$，但 $\langle x, y\rangle = 0$，则我们发现 $M^{\perp} \cup M = \mathscr{X} \backslash \mathrm{span}x$，矛盾。
而 $\forall x \in \overline{\mathrm{span}M}$，显然 $\langle x, y\rangle = M^{\perp}$。因此 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$，因此二者等价。 □

9 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 的两个正交规范集，满足条件：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1$$

求证：二者中一个完备蕴含另一个完备。

Proof. 若 $\{e_n\}$ 完备，假设 $\{f_n\}$ 不完备，则 $\exists u \in \mathscr{X}$，$u \neq 0$，且 $(u, f_n) = 0$，$\forall n \in \mathbb{N}$。那么会有

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n - f_n)|^2 \\
&\leqslant \|u\| \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 \\
&< \|u\|^2
\end{aligned}$$

而这是显然矛盾的，故而 $\{f_n\}$ 完备。 □

10 设 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间，$\{e_n\}$ 和 $\{f_n\}$ 分别是 $\mathscr{X}_0$ 和 $\mathscr{X}_0^{\perp}$ 的正交规范基，求证：$\{e_n\} \cup \{f_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的正交规范基。

Proof. 考虑规范性显然，正交性

$$\langle e_n, f_m\rangle = 0$$

是由于一个为另一个的正交补得到的，而二者分别正交，故而并起来之后也是正交的。故而为正交规范基。 □

12 设 $\mathscr{X}$ 是内积空间，$\{e_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的正交规范基，证明

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)}\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

Proof.

$$\begin{aligned}\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |(y, e_n)|^2 \\ &\geqslant \left| \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)} \right|\end{aligned}$$

□

Chapter 2

线性算子和线性泛函

2.1 线性算子的概念

定义与例子

线性算子 两个线性空间 $\mathscr{X},\ \mathscr{Y}$，$D$ 为 $\mathscr{X}$ 的一个线性子空间，$T:\ D\to\mathscr{Y}$ 是一种映射，D 称为 T 的定义域，也记作 $D(T)$，$R(T)=\{Tx\mid\forall\,x\in D\}$ 称为 T 的值域。如果 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$，则称 T 为一个线性算子。

(1) 设 $\mathscr{X}=\mathscr{Y}=C^\infty(\overline{\Omega})$，设微分多项式 $P(\partial_x)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\partial_x^\alpha\ (a_\alpha(x)\in C^\infty(\overline{\Omega}))$，如果 $T:\ u(x)\to P(\partial_x)u(x)\ (\forall u\in\mathscr{X})$，那么 T 是一个从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的线性算子。这里即为对 $u(x)$ 进行了小于等于 m 阶导数且以 $a_\alpha(x)$ 相乘后累加，而微分是一个线性算子，故而 T 是线性算子。若 $\mathscr{X}=\mathscr{Y}=L^2(\Omega)$，$D(T)=C^m(\overline{\Omega})$，则也是线性的。

线性泛函 取值于实数（或复数）的线性算子称为实（复）线性泛函，记作 $f(x)$ 或 $\langle f,\ x\rangle$，即线性函数。

(1) 设 $\mathscr{X}=C(\overline{\Omega})$，若规定 $f(x):=\int_\Omega x(\xi)\ d\xi$，则 f 是一个线性泛函，但是 $x(\xi)\to\int_\Omega x^2(\xi)\ d\xi$ 却不是线性泛函。确切的说，虽然这个映射映出的是一个实数，但是该算子不是线性的。

(2) 设 $\mathscr{X}=C^\infty(\Omega)$，若对某个指标 α 及 $\xi_0\in\Omega$ 规定 $f(u)=\partial^\alpha u(\xi_0)$，则 f 是 $C^\infty(\Omega)$ 上的一个线性泛函。线性易证，而由于求 α 阶 Partial 后取 ξ_0 一点的值，故而为实数。

连续性 设 $\mathscr{X},\ \mathscr{Y}$ 是 F^* 空间，$D(T)\subset\mathscr{X}$，称线性泛函 $T:\ D(T)\to\mathscr{Y}$ 是连续的，如果 $x_n\in D(T)$，$x_n\to x_0\Longrightarrow Tx_n\to Tx_0$。即收敛列的映射也是收敛的。

有界的 设 $\mathscr{X},\ \mathscr{Y}$ 都是 B^* 空间，称线性算子 $T:\ \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是有界的，如果有常数 $M\geqslant 0$，使得 $\|Tx\|_{\mathscr{Y}}\leqslant M\|x\|_{\mathscr{X}}\ (\forall\,x\in\mathscr{X})$。

有界线性算子的全体 用 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ 表示一切由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的有界线性算子的全体，并规定 $\|T\|=\sup\limits_{x\in\mathscr{X}\setminus\theta}\|Tx\|/\|x\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$ 为 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ 的范数，特别用 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 表示 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{X})$，用 $\mathscr{X}^*$ 表示 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathbb{K})$，即 $\mathscr{X}$ 上的有界线性泛函全体。

命题与定理等

1 对于线性算子 T，为了它在 $D(T)$ 内处处连续，必须且仅须它在 $x=\theta$ 处连续。

Proof. 若 T 在 θ 连续，则 $\forall\ x_n,\ x_0\in D(T)$，若 $x_n\to x_0$，则 $x_n-x_0\to\theta$，则有 $Tx_n-Tx_0=T(x_n-x_0)\to T\theta=0$，故而显然。 $\square$

2 设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 都是 B^* 空间，为了线性算子 T 连续，当且仅当 T 有界。

Proof. 充分性：若 T 有界，则存在常数 $M \geqslant 0$ ，考虑 $\forall\, x_n,\ x_0 \in D(T)$ 且 $x_n \to x_0$ ，则 $Tx_n - Tx_0 = T(x_n - x_0) \leqslant M(x_n - x_0) \to 0$ ，故而 T 连续。下面证明必要性。

必要性：若 T 连续，则我们考虑另一种方式来证明，由于其连续，则 $\forall\, \|x\|_{\mathscr{X}} \leqslant \delta$，$\|Tx\|_{\mathscr{Y}} \leqslant \varepsilon$ ，那么我们考虑 $\|x_0\| \leqslant \delta$ ，取 $y \in D(T)$ ，考虑 $x = \frac{y}{\|y\|x_0}\delta$ ，则 $\|Tx\|_{\mathscr{Y}} = \frac{\delta}{\|y\|x_0}\|Ty\|_{\mathscr{Y}} < \varepsilon$ ，故而有 $\|Ty\|_{\mathscr{Y}} < \varepsilon\frac{x_0}{\delta}\|y\| \leqslant M\|y\|$ ，故而其有界。我们亦可考虑利用反证法，原理同上。 □

3 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，$\mathscr{Y}$ 是 B 空间，若在 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ 上规定线性运算：$(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x$, $(\forall\, x \in \mathscr{X})$ ，其中 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{K}$，$T_1,\ T_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ ，则 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ 按 $\|T\|$ 构成一个 Banach 空间。

Proof. 我们要证明其为 B^* 空间，只需要证明 $\|T\|$ 满足三件事：即正定性、三角不等式与齐次性。正定性由定义可知，若 $\|T\| = 0$,则 $Tx = \theta\ (\forall\, x \in \mathscr{X})$ ，当且仅当 $T = \theta$ 。下面证明三角不等式，即 $\|T_1 + T_2\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(T_1+T_2)x\| \leqslant \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \|T_2 x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$ 。而后我们证明齐次性，即 $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$ ，考虑其定义：$\|\alpha T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\alpha T x\| = |\alpha| \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha|\|Tx\|$ 。故而其为范数，从而构成一个 B^* 空间。而后我们需要证明完备性，即基本列都是收敛列。那么我们考虑一列基本列 $\{T_n\}$ ，则 $\forall\, \varepsilon > 0$ ，$\exists\, N = N(\varepsilon) > 0$ ，$\forall\, x \in \mathscr{X}$ ，有 $\|T_{n+p}x - T_n x\| < \varepsilon\|x\|\ (\forall\, n \geqslant N)$ ，故而 $T_n x \to y$ ，记此 $y = Tx$ ，我们要证明 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ ，由于 T 为线性的，我们要证明其有界性，而事实上 $\exists\, n \in \mathbb{N}$ ，使得 $\|Tx\| = \|y\| \leqslant \|T_n x\| + 1 \leqslant (\|T_n\| + 1)\|x\|\ (\forall\, x \in \mathscr{X},\ \|x\| = 1)$。故而 $\|T\| \leqslant \|T_n\| + 1$，从而为完备的。 □

4 设 T 为有穷维 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的线性映射，则 T 必然是连续的。

Proof. 由于 T 为有穷维的，故而可以用矩阵表示出来 t_{ij} ，而由于同一维度空间等价，记 $\mathscr{X} = \mathbb{K}^n$ ，而 $\mathscr{Y} = \mathbb{K}^m$ ，故而我们有 $\|Tx\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}x_j\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|t_{ij}|^2\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|t_{ij}|^2\right)^{1/2}\|x\|$ ，故而 $\|T\|$ 有界，从而连续。 □

5 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 上的正交投影算子。设 M 是 $\mathscr{X}$ 的一个闭线性子空间，由正交分解定理，$\forall\, x \in \mathscr{X}$ ，存在唯一的分解 $x = y + z$ ，其中 $y \in M,\ z \in M^{\perp}$ ，对应 $x \to y$ 称为由 $\mathscr{X}$ 到 M 的正交投影算子，记作 P_M 。在不强调子空间 M 时，我们简记为 P ，我们来证明 P 是一个连续线性算子，且如果 $M \neq \{\theta\}$ ，则 $\|P\| = 1$ 。

Proof. 先证明线性，对于 $x_i = Px_i + z_i$ ，$i = 1,\ 2$ ，其中 $z_i \in M^{\perp}$ ，这时 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 z_2$ ，而由于 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in M,\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in M^{\perp}$ ，故而 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ ，故而 $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 + \alpha_2 P x_2$ ，故而为线性。下面证明连续，由于 $\|Px\|^2 = \|x\|^2 - \|z\|^2 \leqslant \|x\|^2$ ，故而 $\|Px\| \leqslant \|x\|$ ，即 $\|P\| \leqslant 1$ 。而若 $M \neq \{\theta\}$ 时，任取 $x \in M\backslash\{\theta\}$ ，便有 $\|Px\| = \|x\|$ ，从而 $\|P\| = 1$ 。 □

习题 (本节各题中, $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 均指 Banach 空间)

1 求证: $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 的充要条件是 T 为线性算子, 并将 $\mathscr{X}$ 中的有界集映为 $\mathscr{Y}$ 中的有界集.

Proof. 即我们要说明的是有界 + 线性能否等价为有界映射 + 线性，这是很好说明的，即说明存在常数 $M \geqslant 0$ ，使得

$$\|Tx\|_{\mathscr{Y}} \leqslant M\|x\|_{\mathscr{X}}$$

先证明充分性，若 T 将有界集映射为有界集，则 $\|x\|_{\mathscr{X}}$ 有界，且 $\|Tx\|_{\mathscr{Y}}$ 有界，故而令 $M \leqslant \frac{\|Tx\|_{\mathscr{Y}}}{\|x\|_{\mathscr{X}}}$ 即可。

再说明必要性，若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\, \mathscr{Y})$ ，则存在常数 $M \geqslant 0$ ，使得上式成立，故而对于 $\mathscr{X}$ 中任意有界集 D ，$\|x\|_{\mathscr{X}} < \infty$ ，从而映射后的集合 $\|Tx\|_{\mathscr{Y}} < \infty$ ，故而映射为有界集。 □

2 设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 求证:

(1) $\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$

Proof. 由定义我们知道 $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ 。故而题中 $RHS \geqslant LHS$ ，我们需要证明 $LHS \geqslant RHS$ 。$\|A\| = \sup\limits_{x\in\mathscr{X}\setminus\{\theta\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \sup\limits_{x\in\mathscr{X}\setminus\{\theta\},\|x\|\leqslant 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$ 。故而得证。 □

(2) $\|A\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\|$.

Proof. 即我们现在需要说明 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\|$ 。考虑 $LHS \geqslant RHS$ ，故而仅证 $LHS \leqslant RHS$ ，考虑 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x_0\|=1} \|A(x_0-\varepsilon)\| \geqslant \sup\limits_{\|x_0\|=0} (\|Ax_0\| - \|A\varepsilon\|)$ ，令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $RHS \geqslant LHS$ ，故而二者相等。 □

3 设 $f \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathbb{R})$, 求证:

(1) $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} f(x)$

Proof. 我们知道 $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|fx\|$ ，而 $\sup\limits_{\|x\|=1} \|fx\| \geqslant \sup\limits_{\|x\|=1} f(x)$ ，同理我们要证反方向，而 $\sup\limits_{\|x\|=1} \|fx\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$ ，记 $f(x)$ 在 $\|x\| = 1$ 时的上界为 a ，而我们可以证明这个上界与 $|f(x)|$ 的相等。如若不然 $\sup |f(x)| = b > a$ ，则 $\sup |f(x)| = \sup -f(-x)$ ，但是对于线性算子而言，此二者相等，故得证。 □

(2) $\sup\limits_{\|x\|<\delta} f(x) = \delta\|f\| \quad (\forall \delta > 0)$.

Proof. 而我们由这几道题，可以得出 $\sup\limits_{\|x\|<1} f(x) = \|f\|$ ，考虑 $\|y\| < \delta$ ，则存在对应的 $\|x\| = 1$ ，使得 $y = \frac{x\delta}{\|x\|}$ ，则有 $\sup\limits_{\|y\|<\delta} f(y) = \frac{\delta}{\|x\|} \sup\limits_{\|x\|=1} f(x) = \delta\|f\|$ 。 □

4 设 $y(t) \in C[0,1]$, 定义 $C[0,1]$ 上的泛函

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t \quad (\forall x \in C[0,1])$$

求 $\|f\|$.

Proof.

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \int_0^1 x(t)y(t)dt$$

而 $\|x(t)\|=1$ 意味着 $\max\ |x(t)|=1$ ，故而我们有：

$$\|f\| \leqslant \sup_{\|x\|=1}\int_0^1 \max|x(t)|y(t)dt=\int_0^1 y(t)dt$$

而后我们考虑对于 $x(t)$ ，总存在 $\varepsilon>0$ ，使得 $x(t)>1-\varepsilon$ 。故而有

$$\|f\| \geqslant \sup_{\|x\|=1}\int_0^1 y(t)(1-\varepsilon)dt \geqslant \int_0^1 y(t)dt, \quad \varepsilon \to 0$$

故而我们得到 $\|f\|=\int_0^1 y(t)dt$ 。 □

5 设 f 是 $\mathscr{X}$ 上的非零有界线性泛函, 令

$$d=\inf\{\|x\| \mid f(x)=1, x\in\mathscr{X}\}$$

求证: $\|f\|=1/d.$

Proof. 考虑定义，$\|f(x)\| \leqslant \|f\|\|x\|$ ，而由于 $f(x)=1$ ，则 $\|f\|=\frac{1}{\|x\|} \geqslant \frac{1}{d}$ 。下面证明反方向，考虑对于 $\varepsilon>0$ ，总存在 $\exists\, x_0 \neq 0$ ，使得 $\|f(x_0)\|/\|x_0\| \geqslant \|f\|-\varepsilon$ ，而由于 $f\left(\frac{x_0}{\|f(x_0)\|}\right)=1$ ，故而 $\left|\frac{x_0}{f(x_0)}\right| \geqslant d$ ，故而 $\|f\|-\varepsilon \leqslant \frac{1}{d}$ ，令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\|f\| \leqslant \frac{1}{d}$ ，即有 $\|f\|=\frac{1}{d}$ 。 □

6 设 $f \in \mathscr{X}^*$, 求证: $\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in\mathscr{X}$, 使得 $f(x_0)=\|f\|$ ，且 $\|x_0\|<1+\varepsilon.$

Proof. 由于 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ ，故而 $\forall\ \eta>0$ ，$\exists\ x_1$ ，使得 $\|f\|-\eta<\frac{\|f(x_1)\|}{\|x_1\|}$ 。故而我们有 $\frac{\|x_1\|}{\|f(x_1)\|}\|f\|<\frac{\|f\|}{\|f\|-\eta}$ ，取 $\eta=\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\|$ 即得 $\frac{\|x_1\|}{\|f(x_1)\|}\|f\|<1+\varepsilon$ ，令 $x_0=\frac{x_1}{f(x_1)}\|f\|$ ，则 $f(x_0)=\|f\|$ 且 $\|x_0\|=\frac{\|x_1\|}{\|f(x_1)\|}\|f\|<1+\varepsilon$ 。 □

7 设 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是线性的, 令

$$N(T) \triangleq \{x\in\mathscr{X} \mid Tx=\theta\}.$$

(1) 若 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 求证: $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间. 题中, $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 均指 Banach 空间)

Proof. 首先证明线性，$\forall\ \alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbb{K}$ ，$\forall\ x_1,\ x_2\in N(T)$ ，则 $Tx_1=Tx_2=\theta$ ，则 $T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2=\theta$ ，故而 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\in N(T)$ ，故而为线性的，考虑闭这一性质。对于 $x_n\to x_0$ ，$x_n\in N(T)$ ，我们需要证明收敛的 x_0 也在 $N(T)$ 中。事实上这是很显然的，首先我们知道 $T\theta=\theta$ 故而在 $N(T)$ 中，那么 $Tx_n-Tx_0=T(x_n-x_0)\to T\theta=\theta$ ，而 $Tx_n=\theta$ ，故而 $Tx_0=\theta$ ，即 $x_0\in N(T)$ ，故而为闭的线性子空间。 □

(2) 问 $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间能否推出 $T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$?

Proof. 不能，我们来举一个反例。令 $X=\{(\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots) \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<\infty\}$ ，考虑 $\|x\|=\sup\|\xi_n\|$ 。定义 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_n|$ ，令 $Tx=x-af(x)$ ，其中 $a=(1,-1,0,0,\cdots,0,\cdots)$ ，则 $f(a)=0$ ，现在我们来观察 $N(T)$ 。$Tx=\theta$ ，则 $x=af(x)$ ，从而 $f(x)=f(a)f(x)=0$ ，即 $N(T)=\{\theta\}$ ，则 $N(T)$ 显然是闭线性子空间，但是 T 无界。 □

(3) 若 f 是线性泛函, 求证:

$$f \in \mathscr{X}^* \Longleftrightarrow N(f) \text{ 是闭线性子空间.}$$

Proof. 必要性由 (1) 已经证明，我们来证明充分性。利用反证法，若 $\forall\, x_n$ ，$\|x_n\|=1$ ，$|f(x_n)| \geqslant n$ ，$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x_1}{f(x_1)}$ ，则有 $y_n = 0$ 进而推出 $y_n \in N(f)$ ，但是 $y_n \to -\frac{x_1}{f(x_1} \notin N(f)$ 与闭空间矛盾。 □

8 设 f 是 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函, 记

$$H_f^\lambda \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid f(x)=\lambda\} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{K})$$

如果 $f \in \mathscr{X}^*$, 并且 $\|f\|=1$, 求证:

(1) $|f(x)| = \inf\left\{\|x-z\| \mid \forall z \in H_f^0\right\} \quad (\forall x \in \mathscr{X})$;

Proof. $\forall\, z \in H_f^0$ ，则 $f(z)=0$ ，即证 $|f(x)| = \|f\|\rho(x, N(f))$ 。$\forall\, \varepsilon > 0$ ，$\exists\, y_\varepsilon \in N(f)$ ，则 $\|x-y_\varepsilon\| < \rho(x,\ N(f)) + \varepsilon$ 。则

$$\|f(x)\| = \|f(x-y_\varepsilon)\| < \|f\|\left(\rho(x,\ N(f))+\varepsilon\right), \quad \|f(x)\| \leqslant \|f\|\rho(x,\ N(f)). \quad \varepsilon \to 0$$

而我们现在来证明反方向，$\forall\, z \in H_f^0$ ，进行如下分解：$\mathscr{X} = \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \oplus N(f)$ 。取 $\lambda = \frac{f(x)}{f(z)}$ ，$y = x - \frac{f(x)}{f(z)}z$ ，则有 $\forall\, x \in \mathscr{X}$ ，$x = \frac{f(x)}{f(z)}z + y$ ，$y \in N(f)$ ，$f(z)(x-y) = f(x)z$ ，则有 $|f(z)|\|x-y\| = |f(x)|\|z\|$ ，即 $\frac{|f(z)|}{\|z\|}\|x-y\| = |f(x)|$ ，则 $\|x-y\| \sup\limits_{z \in N(f)} \frac{f(z)}{\|z\|} \leqslant |f(x)|$ ，即 $\|f\|\rho(x,\ N(f)) \leqslant |f(x)|$ ，即证。 □

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, H_f^\lambda$ 上的任一点 x 到 H_f^0 的距离都等于 $|\lambda|$. 并对 $\mathscr{X} = \mathbb{R}^2, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ 情形解释 (1) 和 (2) 的几何意义.

9 设 $\mathscr{X}$ 是实 B^* 空间, f 是 $\mathscr{X}$ 上的非零实值线性泛函, 求证: 不存在开球 $B(x_0, \delta)$, 使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $B(x_0, \delta)$ 中的极大值或极小值.

Proof. 这里其实是很显然的，如果说存在 $x_0 \in B(x_0, r\delta)$，那么总存在开球上的两点 x, y，使得 $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$，从而

$$f(x_0) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

但由于左侧为极值，故而上式不可能成立。 □

2.2 Riesz 表示定理及其应用

命题与定理

1 设 f 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个连续线性泛函，则必存在唯一的 $y_f \in \mathscr{X}$ ，使得 $f(x) = (x,\ y_f)\ (\forall\, x \in \mathscr{X})$ 。

Proof. 不妨设 f 不是 0 泛函，考察集合 $M \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid f(x) = 0\}$ ，由于 f 是连续线性的，则 M 是一个真闭线性子空间。任取 $x_0 \perp M$ ，则由正交分解定理，设 $\|x_0\| = 1$ ，则存在 α ，使得 $x = \alpha x_0 + y$ ，其中 $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$ ，$y \in M$ ，这是由于当 $y = x - \alpha x_0$ 的时候，$f(y) = f(x - \alpha x_0) = f(x) - \alpha f(x_0) = 0$ 。对 x_0 作内积，我们有 $\alpha = (x,\ x_0)$ ，故而

$f(x) = \alpha f(x_0) = (x,\ \overline{f(x_0)}x_0)$ 。取 $y_f = \overline{f(x_0)}x_0$ 即可[1] 。而后我们再次证明其唯一性如果 $\exists\ y,\ y' \in \mathscr{X}$ 满足 $f(x) = (x,\ y) = (x,\ y')$ ，则 $(x,\ y - y') = 0$ ，由于 x 的任意性，显然 $y = y'$ ，故而唯一性证毕。

而若考虑 $\|f(x)\| \leqslant \|x\| \cdot \|y_f\|$ ，而取 $x = y_f$ 即得 $\|y_f\| \leqslant \|f\|$ ，故而为二者相等。 □

2 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，$a(x,\ y)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一个共轭双线性函数，并且 $\exists\ M > 0$ ，使得 $|a(x,\ y)| \leqslant M\|x\| \cdot \|y\|$ ，则存在唯一的 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ ，使得 $a(x,\ y) = (x,\ Ay)\ (\forall\ x,\ y \in \mathscr{X})$ ，且

$$\|A\| = \sup_{(x,\ y)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X},x\neq\theta,\ y\neq\theta} \frac{|a(x,\ y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Proof. 固定 $y \in \mathscr{X}$ ，$x \to a(x,\ y)$ 是一个连续线性泛函，由 Hilbert 表示定理，$\exists\ z = z(y) \in \mathscr{X}$ ，使得 $a(x,\ y) = (x,\ z)$ 。定义映射 $A:\ y \to z(y)$ ，则有 $a(x,\ y) = (x, Ay) = (x, z)$ ，又由于内积的共轭双线性，故而 A 是线性的，而且 $\|Ay\| = \sup\limits_{x\in\mathscr{X}\setminus\{\theta\}} \frac{|a(x,\ y)|}{\|x\|} \leqslant M\|y\|$ 。 □

习题

1 设 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$ 是 H 上一组有界线性泛函，

$$M \triangleq \bigcap_{k=1}^{n} N(f_k), \quad N(f_k) \triangleq \{x \in H \mid f_k(x) = 0\}$$

$\forall x_0 \in H$ ，记 y_0 为 x_0 在 M 上的正交投影，求证：$\exists y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n \in N(f_k)^{\perp}$ 及 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \in \mathbb{K}$ ，使得

$$y_0 = x_0 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$$

Proof. 由 Riesz 表示定理，$\exists y_k \in H$ ，使得 $f_k(x) = (x, y_k)$ 。$\forall x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} N(f_k)$ ，则 $(x_0, y_k) = 0$ ，这意味着 $y_k \perp M$ 。不妨假设 $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ 的极大无关线性组就是本身，那么由正交分解，$x_0 = y_0 + z_0$ ，$z_0 \in \operatorname{span}\{y_k\}$ ，则 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ，使得

$$y_0 = x_0 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$$

即 M 的正交补 $\{y_k\}$ 的一个线性组合

□

2 设 l 是 H 上的实值有界线性泛函，C 是 H 中的一个闭凸子集，又设

$$f(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - l(v)$$

(1) 求证：$\exists u^* \in H$，使得

$$f(v) = \frac{1}{2}\|u^* - v\|^2 - \frac{1}{2}\|u^*\|^2$$

[1]注意这里内积的定义是共轭的。

Proof. 由于 l 有界则必连续，故而满足 Riesz 表示定理，故而存在唯一的 $u^* \in H$，使得 $l(v) = (v, u^*)$。那么原式变为：

$$
\begin{aligned}
f(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - (v, u^*) \\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|u^*\|^2 - \|u^* - v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\|u^* - v\|^2 - \frac{1}{2}\|u^*\|^2
\end{aligned}
$$

这里由于 l 是实值泛函，则共轭为本身。

□

(2) 求证：$\exists \| u_0 \in C$，使得 $f(u_0) = \inf\limits_{v \in C} f(v)$。

Proof. 由于 $f(v)$ 只有第一项是与 v 有关的，故而必然存在 $u_0 \in C$，使得

$$
\inf_{v \in C} \|u^* - v\|^2 = \|u^* - u_0\|^2
$$

故而 $\inf\limits_{v \in C} f(v) = f(u_0)$。 □

3 设 H 的元素是定义在集合 S 上的复值函数，又若 $\forall\, x \in S$，由

$$
J_x(f) = f(x) \quad (\forall f \in H)
$$

定义的映射 $J_x : H \to \mathbb{C}$ 是 H 上的连续线性泛函。求证，存在 $S \times S$ 上复值函数 $K(x, y)$，满足条件：

(1) 对任意固定的 $y \in S$，作为 x 的函数有 $K(x, y) \in H$；

(2) $f(y) = (f, K(\cdot, y))$，$\forall f \in H$，$\forall y \in S$。

Proof. 我们自然的会想到利用 Riesz 表示定理，即存在唯一的 $K_y \in H$，使得 $J_x(f) = (f, K_y) = f(x)$。这里 K_y 依赖于 y，我们记 $k(x, y) = (ky, kx)$，则固定 $y \in S$，$K(x, y) = k_y(x) \in H$，而同理 $f(y) = (f, k_y)k_y = (f, K(\cdot, y))$。 □

4 求证：$H^2(D)$ 的再生核为

$$
K(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}, \quad z, w \in D
$$

Proof. 首先这里要求的是需要满足上一个题目的要求 (1)(2)，且 $H2(D)$ 表示在 D 内满足

$$
\iint_D |u(z)|^2 dxdy < \infty
$$

的解析函数全体组成的函数。这里透露出两个信息，首先这里的函数是有界的，且解析函数显然连续。显然是一个连续线性泛函。 □

5 设 L, M 是 H 上的闭线性子空间，求证

(1) $L \perp M \Leftrightarrow \; P_L P_M = 0$

Proof. $\forall x \in H$，则 $x = l + m$，其中 $l \in L$，$m \in L^{\perp}$，由条件知，x 对 M 的投影分量在 m 中，即 $x = l + m' + m_0$，其中 $m_0 \in M$ 且 $m', l \in M^{\perp}$，则

$$
P_L P_M x = P_L m = 0, \quad \forall x \in H
$$

□

(2) $L = M^{\perp} \Leftrightarrow P_L + P_M = I$

Proof. 则对于上述分解，$P_L x = l \in M^{\perp}$，故而

$$(P_L + P_M)x = l + m = x$$

故而为恒同映射。 □

(3) 若 $P_L P_M = P_{L\cap M}$，则我们考虑 $x = l + m$，从而

$$P_{L\cap M}(l+m) = P_L m$$

从而我们换个方向

$$P_{L\cap M} x = P_{M\cap L} x = P_M P_L x$$

从而是等价的，反方向：考虑 $\forall y \in H$，有

$$P_L P_M x (\in M) = P_M P_L x \in L$$

从而 $P_L P_M x \in L \cap M$，下面我们验证 $P_L P_M \supset P_{L\cap M}$。只需要验证

$$(x - P_L P_M x) \perp (L \cap M) \quad (\forall x \in \mathscr{H})$$

事实上，

$$(x - P_L P_M x, y) = (x, y) - (x, P_M P_L y) = (x, y) - (x, y) = 0 \quad (\forall y \in L \cap M)$$

2.3 纲与开映射定理

定义与例子

1 设 $(\mathscr{X},\ \rho)$ 是一个度量空间，集合 $E \subset \mathscr{X}$ ，称 E 是疏的，如果 $\overline{E}$ 的内点是空的。

2 在度量空间 $(\mathscr{X},\ \rho)$ 中，集合 E 称为**第一纲集**，如果 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ ，其中 E_n 是疏集。不是第一纲集的称为**第二纲集**。

(1) 在 $\mathbb{R}^n$ 上，有穷点集是疏集。Cantor 集是疏集。

(2) 在 $\mathbb{R}$ 上，有理点集是第一纲集，更一般的，可数点集总是第一纲集。

3 设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 都是 B 空间，$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ ，算子 T 称为单射，如果 T 是 1-1 的，算子 T 称为满射，如果 $T(\mathscr{X}) = \mathscr{Y}$ 。

4 设 T 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 的线性算子，$D(T)$ 是定义域，称 T 是闭的是指由 $x_n \in D(T)$, $x_n \to x$ ，以及 $Tx_n \to y$ ，有 $x \in D(T)$ 且 $Tx = y$ 。

命题与定理

1 设 $(\mathscr{X},\ \rho)$ 是一个度量空间，为了 $E \subset \mathscr{X}$ 是疏集，i.f.f $\forall$ 球 $B(x_0,\ r_0)$ ，存在 $B(x_1,\ r_1) \subset B(x_0,\ r_0)$ ，使得 $\overline{E} \cap \overline{B}(x_1,\ r_1) = \varnothing$ 。

Proof. **必要性**由于 $\overline{E}$ 无内点，所以 $\overline{E}$ 不能包含任意球 $B(x_0,\ r_0)$ ，从而 $\exists\ x_1 \in B(x_0,\ r_0)$ ，使得 $x_1 \notin \overline{E}$ ，又由于 $\overline{E}$ 是闭集，所以 $\exists \varepsilon_1 > 0$，使得 $\overline{B}(x_1,\ \varepsilon) \cap \overline{E} = \varnothing$ 。取 $0 < r_1 < \min(\varepsilon_1,\ r_0 - \rho(x_0,\ x_1))$ ，便有 $B(x_1,\ r_1) \subset B(x_0,\ r_0)$ ，且 $\overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{E} = \varnothing$ 。 □

充分性若 E 不是疏的，即 $\overline{E}$ 有内点，则 $\exists\ B(x_0,\ r_0) \subset \overline{E}$ ，但与我们的条件，即 $\exists\ B(x_1,\ r_1) \subset B(x_0,\ r_0)$ 且这二者不交矛盾。

2 **(Baire)** 完备度量空间 $(\mathscr{X},\ \rho)$ 是第二纲集。

Proof. 那么我们就用反证法假设其为第一纲集，得到 contradiction 即可。即存在疏集 $\{E_n\}$ ，使得 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ ，则对于任意的球 $B(x_0,\ r_0)$ ，均存在 $B(x_1,\ r_1) \subset B(x_0,\ r_0)$ $r_1 < 1$ ，使得 $\overline{B}(x_1,\ r_1) \cap \overline{E}_1 = \varnothing$ 。而后我们在 $B(x_1,\ r_1)$ 中寻找更小的球，满足 $B(x_2,\ r_2) \subset B(x_1,\ r_1)$ $r_2 < \frac{1}{2}$ 且 $\overline{B}(x_2,\ r_2) \cap \left(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2\right) = \varnothing$ ，同理我们可以找到一组集合列来不断逼近之，而 $x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n, \cdots$ 为一基本列，由于 $\rho(x_{n+p} - x_n) \leqslant r_n < \frac{1}{n} \to 0$ 。故而记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 。另一方面，令 $p \to \infty$ 有，$\rho(x,\ x_n) \leqslant r_n$ ，从而 $x \notin \overline{B}(x_n,\ r_n)$ 。故而矛盾。 □

3 在 $C[0,1]$ 中处处不可微的函数集合 E 是非空的，更确切的，E 的余集是第一纲集。

Proof. 取 $\mathscr{X} = C[0,\ 1]$ ，设 A_n 表示 $\mathscr{X}$ 中这样一些元素 f 之集，对于 f ，$\exists\ s \in [0,\ 1]$ ，使得对于适合 $0 \leqslant s + h \leqslant 1$ 与 $|h| \leqslant 1/n$ 的任何 h ，成立

$$\left|\frac{f(s+h) - f(s)}{h}\right| \leqslant n$$

若 f 在某个点 s 处可微，则必有正整数 n ，使得 $f \in A_n$ ，于是 $\mathscr{X} \backslash E \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ，下面我们证明每个 A_n 是疏集。若如此则 E 的余集是第一纲集，而 E 是第二纲集。

首先 A_n 是闭的，事实上若 $f \in \mathscr{X} \backslash A_n$ ，则 $\forall\ s \in [0,\ 1]$ ，$\exists\ h_s$ 使得 $|h_s| \leqslant \frac{1}{n}$ 且 $|f(s+h) - f(s)| > n|h_s|$ ，又由于 f 的连续性，$\exists\ \varepsilon_s > 0$ ，以及 s 的某个适当的邻域 J_s ，使得对 $\forall\ \sigma \in J_s$ ，有 $|f(\sigma + h_s) - f(\sigma)| > n|h_s| + 2\varepsilon_s$ ，由有限覆盖原理，可设 $J_{s_1},\ J_{s_2},\ \cdots,\ J_{s_m}$ 覆盖 $[0,\ 1]$ ，并设 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{s_1}, \cdots,\ \varepsilon_{s_m}\}$ 。若 $g \in \mathscr{X}$ ，适合 $\|g - f\| < \varepsilon$ ，则对 $\forall\ \sigma \in J_{s_k}$ ，有

$$|g(\sigma + h_{s_k}) - g(\sigma)| \geqslant |f(\sigma + h_{s_k}) - f(\sigma)| - 2\varepsilon \geqslant n|h_{s_k}|$$

则 $\mathscr{X} \backslash A_n$ 是开集，从而 A_n 为闭集。再证明 A_n 没有内点。[2]

$\forall\ f \in A_n$ ，$\forall\ \varepsilon > 0$ ，由 Weierstrass 逼近定理，存在多项式 p ，使得 $\|f - p\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ，p 的导数在 $[0,\ 1]$ 上是有界的，因此根据中值定理，$\exists\ M > 0$ ，使得对 $\forall\ s \in [0,\ 1]$ ，以及 $|h| < \frac{1}{n}$ ，使得 $|p(s+h) - p(s)| \leqslant M|h|$ 。设 $g(s) \in C[0,\ 1]$ 是一个分段线性函数，满足 $\|g\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ，并且各条线段的线段斜率的绝对值都大于 $M + n$ ，那么 $p + g \in B(f,\ \varepsilon)$ ，而 $p + g \notin A_n$ ，故而每个 A_n 都是疏集，则 $\mathscr{X}$ 是第二纲集。 □

4 **(Banach)** 设 $\mathscr{X},\ \mathscr{Y}$ 是 B 空间，若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ 既是一个单射也是满射，则 $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y},\ \mathscr{X})$ 。

Proof. 我们先完成下面的**开映射定理**的证明。而后我们来证明 **Banach** 。已知 $U(\theta,\ 1) \subset TB(\theta,\ \frac{1}{\delta})$ ，即 $T^{-1}U(\theta,\ 1) \subset B(\theta,\ \frac{1}{\delta})$ 或 $\|T^{-1}(y)\| < \frac{1}{\delta}$ ，由范数齐次性，$\forall\ y \in \mathscr{Y}$ ，$\forall\ \varepsilon > 0$

[2] 由于 A_n 为闭集，故而内部即为自身，不需要加 bar。

，有

$$\|T^{-1}(y)\| < \frac{(1+\varepsilon)}{\delta}\|y\|$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\|T^{-1}(y)\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|y\|$ ，从而 $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y},\ \mathscr{X})$ 。 □

5 **(开映射定理)** 设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 B 空间，若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$ 是一个满射，则 T 是开映射。

Proof. 我们用 $B(x_0,\ a)$ 和 $U(y_0,\ b)$ 表示 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 中的开球。为了证明 T 是开映射，我们要证明对于任意的开集 W ，$T(W)$ 也是开集，即我们要证明 $\exists\, \delta > 0$ ，使得 $TB(\theta,\ 1) \supset U(\theta,\ \delta)$ 。必要性显然，我们来说明充分性。由于 T 的线性，条件等价于 $TB(x_0,\ r) \supset U(Tx_0,\ r\delta)$ 。而 $\forall\, y_0 \in T(W)$ ，按定义 $\exists\, x_0 \in W$ ，使得 $y_0 = Tx_0$ ，由于 W 是开集，所以 $\exists\, B(x_0,\ r) \subset W$ ，取 $\varepsilon = r\delta$ ，则有 $U(Tx_0,\ \varepsilon) \subset TB(x_0,\ r) \subset T(W)$ ，即 y_0 为 $T(W)$ 的内点，由于任意性，故而 T 为开映射。

而后我们需要证明：$\exists\, \delta > 0$ ，使得 $\overline{TB(\theta,\ 1)} \supset U(\theta,\ 3\delta)$ ，这是因为 $\mathscr{Y} = T\mathscr{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} TB(\theta,\ n)$ ，而 $\mathscr{Y}$ 是完备的，所以至少有一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $TB(\theta,\ n)$ 非疏集。因此 $\exists\, U(y_0,\ r) \subset \overline{TB(\theta,\ n)}$ ，而由于 $TB(\theta,\ n)$ 是一个对称疏集，那么有 $U(-y_0,\ r) \subset \overline{TB(\theta,\ n)}$ ，从而

$$U(\theta,\ r) \subset \frac{1}{2}U(-y_0,\ r) + \frac{1}{2}U(y_0,\ r) \subset \overline{TB(\theta,\ n)}$$

由于 T 的齐次性，取 $\delta = \frac{r}{3n}$ ，则 $\overline{TB(\theta,\ 1)} \supset U(\theta,\ 3\delta)$ 。

而后我们证明：$TB(\theta,\ 1) \supset U(\theta,\ \delta)$ ，$\forall\, y_0 \in U(\theta,\ \delta)$ ，要证明 $\exists\, x_0 \in B(\theta,\ 1)$ ，使得 $Tx_0 = y_0$ 。即求方程 $Tx = y_0$ 在 $B(\theta,\ 1)$ 的一个解。我们利用逐步逼近法即可。对于 $y_0 \in U(\theta,\ \delta)$ ，考虑 $\exists\, x_1 \in B(0,\ \frac{1}{3})$ ，使得 $\|y_0 - Tx_1\| < \frac{\delta}{3}$ 。

而后对 $y = y_0 - Tx_1 \in U(\theta,\ \frac{\delta}{3})$ ，$\exists\, x_2 \in B(\theta,\ \frac{1}{3^2})$ ，使得

$$\|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{3^2}$$

而后我们构建的这一组，令 $x_0 \triangleq \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ，便有 $x_0 \in B(0,\ 1)$ ，而

$$\|y_n\| = \|y_{n-1} - Tx_n\| = \|y_0 - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{3^n} \to 0$$

而由于 T 是连续的，故而 $Tx_0 = y_0$ 。即 $Y(\theta,\ \delta) \subset TB(\theta,\ 1)$ 。 □

6 若 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 B 空间，T 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 的一个闭线性算子，满足 $R(T)$ 是 $\mathscr{Y}$ 中的第二纲集，则 $R(T) = \mathscr{Y}$ 并且 $\forall\, \varepsilon > 0$ ，$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使得 $\forall\, y \in \mathscr{Y}$ ，$\|y\| < \delta$ ，必有 $x \in D(T)$ ，适合 $\|x\| < \varepsilon$ 且 $y = Tx$ 。

Proof. 已知对 $\varepsilon = 1$ ，$\exists\, \delta > 0$ ，使得 $U(\theta,\ \delta) \subset T(B(\theta,\ 1) \cap D(T))$ 。$\forall\, y \in \mathscr{Y}$ ，不妨设 $y \neq \theta$ ，$\forall\, 0 < \delta_1 < \delta$ ，按前式

见开映射定理中 $U(\theta,\ \delta) \subset TB(\theta,\ 1)$

$$\frac{\delta_1 y}{\|y\|} \in U(\theta,\ \delta) \Longrightarrow \frac{\delta_1 y}{\|y\|} \in T(B(\theta,\ 1) \cap D(T))$$

于是 $\exists\, x \in B(\theta,\ 1) \cap D(T)$ ，使得

$$\frac{\delta_1 y}{\|y\|} = Tx \Longrightarrow\ y = T\left(\frac{\|y\|}{\delta_1}x\right) \Longrightarrow\ y \in R(T)$$

即我们这里用了开映射定理中的 (1) - (3) 的部分证明。 $\square$

7 一个连续线性算子总可以延拓到 $\overline{D(T)}$ 上。设 T 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 到 B 空间 $\mathscr{Y}$ 的连续线性算子，那么 T 可以唯一延拓到 $\overline{D(T)}$ 上成为连续线性算子 T_1 使得 $T_1\Big|_{D(T)} = T$，且 $\|T_1\| = \|T\|$。

Proof. 任取 $x \in \overline{D(T)}$，$\exists\, x_n \in D(T)$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，依据假设 T 在 $D(T)$ 上连续，从而有界，即存在 $M > 0$，使得 $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$，于是 $\|Tx_{n+p} - Tx_n\| \leqslant M\|x_{n+p} - x_n\|$，故而 $\{Tx_n\}$ 为 $\mathscr{Y}$ 中的基本列，由于 $\mathscr{Y}$ 为 B 空间，故而完备，则 $\{Tx_n\}$ 可以收敛，故而 $\exists\, y \in \mathscr{Y}$，使得 $Tx_n \to y$。而 y 仅依赖于 x，与 x_n 的选择无关。故而可以定义 $T_1:\ x \to y$，且 T_1 是线性的，且 $T_1\big|_{D(T)} = T$，并且 $\|T_1 x\| \leqslant M\|x\|$。 $\square$

8 **等价范数定理**设线性空间 $\mathscr{X}$ 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$，如果 $\mathscr{X}$ 关于这两个范数都构成 B 空间，而且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强，则两个范数等价。

Proof. 考察恒同映射 $I : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$，把它看成由 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_2) \to (\mathscr{X}, \|\cdot\|_1)$ 的线性算子，由 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强，故而存在 $C > 0$，有 $\|Ix\|_1 \leqslant C\|x\|_2$。故而 I 是连续的，同样它既单又满，故而 I 可逆且 I^{-1} 连续，即存在 $M > 0$，使得 $\|I^{-1}x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$，故而 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价。 $\square$

9 **闭图像定理**设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 B 空间，若 T 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 的闭线性算子，并且 $D(T)$ 是闭的，则 T 是连续的。

Proof. 因为 $D(T)$ 是闭的，所以 $D(T)$ 作为 $\mathscr{X}$ 的线性子空间可看成是 B 空间，在 $D(T)$ 上引入一个新范数

$$\|x\|_G = \|x\| + \|Tx\|$$

现在证明 $(D(T), \|\cdot\|_G)$ 也是 B 空间，事实上从

$$\|x_n - x_m\|_G = \|x_n - x_m\| + \|Tx_n - Tx_m\| \to 0 \quad n,\ m \to \infty$$

可知 $\exists x^* \in \mathscr{X}$ 与 $y^* \in \mathscr{Y}$，使得 $x_n \to x^*$ 且 $Tx_n \to y^*$，由于 T 是闭线性算子，则有 $Tx^* = y^*$。从而 $Tx_n \to Tx^*$，因此 $\|x_n - x^*\|_G \to 0$，而又显然 $\|\cdot\|_G$ 比 $\|\cdot\|$ 强，故而由等价范数定理，这二者等价。存在 $M > 0$ 有

$$\|Tx\| \leqslant \|x\|_G \leqslant M\|x\| \quad \forall\, x \in D(T)$$

由于 $\|\cdot\|_G$ 的定义，显然大于 $\|Tx\|$

即我们的目的说明了 T 是有界算子，故而 T 是连续的。 $\square$

10 **共鸣定理/一致有界定理**设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，$\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，如果 $W \subset \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，使得

$$\sup_{A\in W} \|Ax\| < \infty \quad \forall\, x \in \mathscr{X}$$

意味着 $\|Ax\| \leqslant M_x\|x\|$，而我们需要寻找一个与 x 无关的 M

那么存在常数 M，使得 $\|A\| \leqslant M\ (\forall A \in W)$。

Proof. $\forall x \in \mathscr{X}$ ，定义

$$\|x\|_W = \|x\| + \sup_{A\in W} \|Ax\|$$

显然 $\|\cdot\|_W$ 是 $\mathscr{X}$ 上的范数，且强于 $\|\cdot\|$ 。下面证明 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_W)$ 完备。如果 $\|x_m - x_n\|_G \to 0$ ，则分别为 0。而由于 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，故而 $\exists x \in \mathscr{X}$ ，使得 $\|x_n - x\| \to 0$ 。下面我们说明 Ax 这一部分。由于 $\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists N = N(\varepsilon)$ ，使得 $\sup\limits_{A\in W} \|Ax_m - Ax_n\| < \varepsilon$ ，从而对 $A \in W$ 有 $\|Ax_n - Ax\| \leqslant \varepsilon$ ，于是 $\|x_n - x\| + \sup\limits_{A\in W} \|Ax_n - Ax\| \to 0$ 。从而 $\|\cdot\|_W$ 完备，**同闭图像定理**的证明部分，该范数与 $\|\cdot\|$ 等价，从而存在常数 M 使得

同理 $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$ 可得

$$\sup_{A\in W} \|Ax\| \leqslant \|x\|_W \leqslant M\|x\|$$

故而 $\|A\| \leqslant M$ 。

而从反面来叙述，将有：$\sup\limits_{A\in W} \|A\| = \infty \implies \exists\, x_0 \in \mathscr{X}$ ，使得 $\sup\limits_{A\in W} \|Ax_0\| = \infty$ 。 □

11 **Banach-Steinhaus 定理**设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，$\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，M 是 $\mathscr{X}$ 的某个稠密子集，若 A_n，$A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ，则 $\forall x \in \mathscr{X}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ 的充要条件是：

- $\|A_n\|$ 有界
- $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ 对 $\forall x \in M$ 成立。

Proof. 必要性：由共鸣定理，由于 $A_n \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ ，故而 $\|A_n\|$ 有界。且 $\|A\|$ 有界。而显然对于 $\forall x \in M$ 均成立。

充分性：假定 $\|A_n\| \leqslant C$ ，对 $\forall x \in \mathscr{X}$ 以及 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $y \in M$ 使得

$$\|x - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(\|A\| + C)}$$

这里由稠密性推导的 ε' 网即得

便有

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - Ay\| + \|Ax - Ay\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|A_n y - Ay\|$$

由于刚才的稠密性即得均小于 $\varepsilon/4$

再取 N 足够大，使得 $\|A_n y - Ay\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ，即证。 □

12 **Lax-Milgram 定理**设 $a(x, y)$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个共轭双线性函数，满足

- $\exists M > 0$ ，使得 $|a(x, y)| \leqslant M\|x\| \cdot \|y\|$
- $\exists \delta > 0$ ，使得 $|a(x, x)| \geqslant \delta\|x\|^2$

那么必然存在唯一有连续逆的连续线性算子 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 满足

- $a(x, y) = (x, Ay)$ $(\forall x, y \in \mathscr{X})$
- $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\delta}$

Proof. 由第一个满足的条件，知道存在唯一的算子 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 。现在我们证明以下部分。

(1) A 是单射，若有 $y_1, y_2 \in \mathscr{X}$ ，满足 $Ay_1 = Ay_2$ ，则

$$a(x, y_1) = a(x, y_2)$$

则 $a(x, y_1 - y_2) = 0$ ，若取 $x = y_1 - y_2$ ，则显然 $y_1 = y_2$ 。故而 A 为单射。

(2) A 是满射，先证明 $R(A)$ 是闭的，事实上，$\forall w \in \overline{R}(A)$ ，$\exists v_n \in \mathscr{X}$ 使得

$$w = \lim_{n \to \infty} Av_n$$

则

$$\begin{aligned}\delta \|v_{n+p} - v_n\| &\leqslant |a(v_{n+p} - v_n, v_{n+p} - v_n| \\ &= |(v_{n+p} - v_n, A(v_{n+p} - v_n))| \\ &\leqslant \|v_{n+p} - v_n\| \cdot \|Av_{n+p} - Av_n\|\end{aligned}$$

即得

$$\|v_{n+p} - v_n\| \leqslant \frac{1}{\delta} \|Av_{n+p} - Av_n\| \to 0$$

从而 v_n 是基本列，因此 $\exists v^* \in \mathscr{X}$ ，使得 $v_n \to v^*$ ，并且有连续性得 $w = Av^*$ ，即得 $w \in R(A)$ ，于是 $R(A)$ 是闭集。再证明 $R(A)^{\perp} = \{\theta\}$ 。倘若 $w \in R(A)^{\perp}$ ，则

$$(w, Av) = 0 \quad (\forall v \in \mathscr{X})$$

即 $a(w, v) = 0$ ，特别取 $v = w$ ，即得

$$\delta \|w\|^2 \leqslant |a(w, w)| = 0$$

故而 $w = \theta$ ，则 A 为满射。

(3) 再利用 **Banach 逆算子定理**，$A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ ，因为

$$\delta \|x\|^2 \leqslant |a(x, x)| = |(x, Ax)| \leqslant \|x\| \cdot \|Ax\|$$

所以 $\delta \|x\| \leqslant \|Ax\|$ ，故而 $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\delta}$ 。

□

13 **Lax 等价定理**如果 $\forall x \in \mathscr{X}$ ，$\|Tx - T_n x\| \to 0$ 成立，那么为了 $x_n \to x\ (n \to \infty)$ ，其中 x_n 与 x 分别是 $T_n x_n = y$ 和 $Tx = y$ 的解，必须且仅须 $\exists C > 0$ ，使得 $\|T_n^{-1}\| \leqslant C$ 成立。

Proof. 充分性。由 $\|Tx - T_n x\| \to 0$ 和 $\|T_n^{-1}\| \leqslant C$ 得到，

$$\begin{aligned}\|x_n - x\| &= \|T_n^{-1} y - T_n^{-1} T_n x\| \\ &\leqslant \|T_n^{-1}\| \cdot \|Tx - T_n x\| \\ &\leqslant C \|Tx - T_n x\| \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

必要性。$\forall y \in \mathscr{Y}$ ，令 $x_n = T_n^{-1}y$ ，$x = T^{-1}y$ ，便有 $x_n \to x$ ，因此

$$T_n^{-1}y \to T^{-1}y$$

由共鸣定理，则 $\|T^{-1}\|$ 有界。 □

习题

1 设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭子空间，映射 $\varphi: \to \mathscr{X}/\mathscr{X}_0$ 定义为:

$$\varphi : x \to [x]$$

其中 $[x]$ 表示含 x 的商类，证明 φ 是开映射。

Proof. 这里我们可以发现 φ 是连续线性有界算子，且 φ 显然是满射，所以自然的有 φ 是开映射。 □

2 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间，又设方程 $Ux = y$ 对 $y \in \mathscr{Y}$ 都有解 $x \in \mathscr{X}$，其中 $U \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，并且 $\exists m > 0$ 使得

$$\|Ux\| \geqslant m\|x\| \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

求证：U 有连续逆 U^{-1}，且 $\|U^{-1}\| \leqslant 1/m$。

Proof. 这里要用 Banach 定理说明问题，首先这里显然是满射，且若不为单射，则存在 $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$，使得 $Ux_1 = Ux_2$，则有 $U(x_1 - x_2) = 0$，因此二者相等，故而为单射。因此 $U^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{X})$。而后我们考虑 $\|U\| = \sup\limits_{x \in \mathscr{X}\setminus\{\theta\}} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} \geqslant m$，则

$$\|U^{-1}\| = \inf_{x \in \mathscr{X}\setminus\{\theta\}} \frac{\|x\|}{\|Ux\|} \leqslant \frac{1}{m}$$

□

3 设 H 为 Hilbert 空间，并且 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，且 $\exists m > 0$ 使得

$$|(Ax, x)| \geqslant m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H)$$

求证 $\exists A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$。

Proof. 我们依然用 Banach 说明问题，要说明 A 是单射与满射。首先由上式得到

$$\|A\| \cdot \|x\| \geqslant |(Ax, x)| \geqslant m\|x\|^2$$

则我们可以发现 $\|A\| \geqslant m\|x\|$，但由于 A 有界，则 $\|A\|$ 与 $\|x\|$ 等价，因此为双射。故而显然。 □

4 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，D 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间，并且 $A: D \to \mathscr{Y}$ 是线性映射，求证

(1) 如果 A 连续且 D 是闭的，则 A 是闭算子

Proof. 考虑 D 中的序列 $\{x_n\}$，且 $x_n \to x_0$，且 $Ax_n \to y_0$，我们要说明 $Ax_0 = y_0$。考虑由于 A 连续，则 $|A(x_n) - A(x_0)| \to A(\theta) = 0$，因此 $A(x_0) = y_0$。 □

(2) 如果 A 连续且是闭算子，那么 $\mathscr{Y}$ 完备蕴含 D 闭。

Proof. 由于 A 连续且 $\mathscr{Y}$ 完备，则 A 可以连续的唯一延拓到 $\bar{D}$ 上，且 $\tilde{A}|_D = A$，且 $\|\tilde{A}\| = \|A\|$。下面证明 D 是闭集，$x_n \in D$，且 $x_n \to x_0$，从而 $\tilde{A}x_n = Ax_n \to \tilde{A}x_0$。而因此 $x_0 \in D$，因此为闭集。 □

(3) 如果 A 是单射的闭算子，那么 A^{-1} 也是闭算子。

Proof. 考虑 $y_n \in R(A)$，且 $y_n \to y_0$，则 $y_0 \in R(A)$，且对应的存在 $x_n \in D(A)$ 使得 $y_n = Ax_n$，由于 A 为单射，因此 $x_n = A^{-1}y_n \to x_0 = A^{-1}y_0$。因此 $x_0 \in D(A)$，故而为闭算子。 □

(4) 如果 A 完备，A 为单射的闭算子，$R(A)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密，并且 A^{-1} 连续，则 $R(A) = \mathscr{Y}$

Proof. 由 A 完备，A 为单射的闭算子推知 A^{-1} 也是闭算子。则 $D(A^{-1}) = R(A)$ 是闭的。且由于 $R(A)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密，因此 $R(A) = \mathscr{Y}$。 □

5 用等价范数定理证明：$(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ 不是 B 空间，其中 $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$。

Proof. 若是 B 空间，则由于 $\int_0^1 |f(t)|dt \leqslant \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|$。故而这二者范数等价。那么存在正数 $M > 0$，使得 $M\|f\|_1 \geqslant \|f\|$。且这里显然有 $M > 1$。那么我们考虑

$$f(t) = \begin{cases} 1 - Mt & t \in [0, \frac{1}{M}] \\ 0 & t \in (\frac{1}{M}, 1] \end{cases}$$

则有 $\|f\|_1 = \frac{1}{2M}$ 而 $\|f\| = 1$，矛盾。因此并非 B 空间。 □

6 Gelfand 引理：设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，$p : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ 满足

(1) $p(x) \geqslant 0$ $(\forall x \in \mathscr{X})$；

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$，$\forall \lambda > 0, \forall x \in \mathscr{X}$；

(3) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$，$\forall x_1, x_2 \in \mathscr{X}$；

(4) 当 $x_n \to x$ 时，$\liminf\limits_{n\to\infty} p(x_n) \geqslant p(x)$。

求证：$\exists M > 0$，使得 $p(x) \leqslant M\|x\|$，$\forall x \in \mathscr{X}$。

Proof. 这里我们要证明定义的 p 是完备的 banach 空间，进而可以由等价范数定理得到。我们考虑定义 $\|x\|_1 \triangleq \|x\| + \sup\limits_{\|x\|=1} p(x)$。而 $\sup\limits_{\|x\|=1} p(ax) = |a| \sup\limits_{\|x\|=1} p(x)$。

而后考虑 $\forall x \in \mathscr{X}$，$\|x\| = 1$。

$$p(e^{ia}x) = p(y) \leqslant \sup_{\|y\|=1} p(y) = \sup_{\|x\|=1} p(x)$$
$$p(x) = p(e^{ia} \cdot e^{-ia}x) = p(e^{ia}y) \leqslant \sup_{\|y\|=1} p(e^{ia}y)$$

因此我们得到

$$\sup_{\|x\|=1} p(e^{ia}x) = \sup_{\|x\|=1} p(x)$$

而 $\forall x \neq 0$，$0 \leqslant p(\theta) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} p(\frac{1}{n}x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}p(x_0) = 0$，因此 $p(\theta) = 0$。

下面证明 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_1)$ 完备，这是类似的。故而就可以利用等价范数定理来证明之。 □

7 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间，$A_n \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，又对 $\forall x \in \mathscr{X}$，$\{A_n x\}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中收敛，求证：$\exists A \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，使得

$$A_n x \to Ax \quad (\forall x \in \mathscr{X}) \quad \|A\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$$

Proof. 我们可以看出 $\sup\limits_{A_n \in \mathscr{L}} \|Anx\| < \infty$，而我们可以利用共鸣定理。

$$\|Ax\| = \liminf_{n\to\infty} \|A_n x\| \leqslant M\|x\|$$

因此存在 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，且下面的条件均满足。 □

8 设 $1 < p < \infty$，并且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x = \{\xi_k\} \in l^p$ 保证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$ 收敛，求证 $\{a_k\} \in l^q$，又若 $f : x \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$，求证 f 作为 l^p 上的线性泛函有

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^q\right)^{1/q}$$

Proof. 这里我们可以用 Hölder Ineq

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \xi_k| \leqslant \|a_k\|_q \|\xi_k\|_p < \infty$$

因此 $\{a_k\} \in l^p$。而

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_q = 1} \|f(x)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^q\right)^{1/q}$$

□

9 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对 $\forall x \in \{\xi_k\} \in l^1$，保证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$ 收敛，求证 $\{a_k\} \in l^\infty$。又若 $f : x \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$ 作为 l^1 上的线性泛函，求证

$$\|f\| = \sup_{k \geqslant 1} |\alpha_k|$$

Proof. 这里和之前的显然，只是用广义的 Holder 形式即可。 □

10 用 Gelfand 定理证明共鸣定理

Proof. 考虑 $p(x) = \sup\limits_{A \in W} \|Ax\|$，则 $|p(x)| \leqslant M\|x\|$。因此有 $\|A\| \leqslant M$。 □

11 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间，$A \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是满射的，求证：如果在 $\mathscr{Y}$ 中 $y_n \to y_0$，则 $\exists C > 0$ 与 $x_n \to x_0$，使得 $Ax_n = y_n$，且 $\|x_n\| \leqslant C\|y_n\|$。

Proof. 这里由开映射定理可知 A 是闭映射，故而考虑 $x_n \in \mathscr{X}$，使得 $Ax_n = y_n$。考虑由于 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是有界集，则显然存在这样的 C。 □

12 设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 B 空间，T 是闭线性算子，$D(T) \subset \mathscr{X}$，$R(T) \subset \mathscr{Y}$，$N(T) \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid Tx = \theta\}$。

(1) 求证：$N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间。

Proof. 线性显然，这里不再叙述。闭也是很自然的，我们考虑 $x_n \to x_0$，且 $x_n \in N(T)$，则 $Tx_n = \theta$，而由于 $x_n \to x_0$，则 $T(x_n - x_0) \to T\theta = 0$，因此 $x_0 \in N(T)$。 □

(2) 求证：$N(T) = \{\theta\}$，$R(T)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中闭的充要条件是，$\exists \alpha > 0$，使得

$$\|x\| \leqslant \alpha \|Tx\| \quad (\forall x \in D(T))$$

Proof. 我们先说明必要性，若 $R(T)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中闭，则考虑 $T : D(T) \to R(T)$ 是双射，则由 Banach，$T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$。故而 $T^{-1} \leqslant \alpha$，$\alpha > 0$。则即为 $\|x\| \leqslant \alpha \|Tx\|$。

而后再考虑充分性，若 $\|x\| \leqslant \alpha \|Tx\|$，则 $\|T^{-1}x\| \leqslant \alpha \|x\|$，即 T^{-1} 有界，从而连续线性也满足，故而 $T^{-1} \in \mathscr{L}(R(T), \mathscr{X})$。则对于 $y_n \in R(T)$，$y_n \to y_0$，我们要说明 $y_0 \in R(T)$。由于 $N(T) = \{\theta\}$，则 $|T^{-1}(y_n - y_0)| \to \theta$。而存在 $x_n \in \mathscr{X}$，$x_n \to x_0$。故而 $T^{-1}y_0 \to x_0$。 □

(3) 如果用 $d(x, N(T))$ 表示点 $x \in \mathscr{X}$ 到集合 $N(T)$ 的距离 $\left(\inf\limits_{z \in N(T)} \|z - x\|\right)$。求证 $R(T)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中闭的充要条件是 $\exists \alpha > 0$ 使得

$$d(x, N(T)) \leqslant \alpha \|Tx\|$$

Proof. 首先 θ 显然在 $N(T)$ 中。那么 $\|x\| = d(x, \theta) \geqslant d(x, N(T))$。而由 (2) 知，则必要性成立。下面证明充分性，即我们考虑 $\tilde{T} : \mathscr{X}/N(T) \to \mathscr{Y}$。考虑 $D(\tilde{T}) = \{[x] \in \mathscr{X}/N(T) \mid x \in D(T)\}$，且 $R(\tilde{T}) = R(T)$。证明 $\tilde{T}$ 是闭算子即可。 □

13 设 $a(x, y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函，满足

(1) $\exists M > 0$ 使得 $|a(x, y)| \leqslant M\|x\| \cdot \|y\|$；

(2) $\exists \delta > 0$ 使得 $|a(x, y)| \geqslant \delta \|x\|^2$。

求证：$\forall f \in H^*$，$\exists y_f \in H$，使得

$$a(x, y_f) = f(x) \quad (\forall x \in H)$$

且 y_f 连续的依赖于 f。

Proof. □

2.4 Hahn-Banach 定理

本节主要是利用 Hahn-Banach 定理来完成对连续线性泛函的延拓。

定义与例子

1 在线性空间 $\mathscr{X}$ 中，$\mathscr{X}$ 的线性子空间 M 称为**极大的**，如果对于任何一个以 M 为真子集的线性子空间 M_1 必有 $M_1 = \mathscr{X}$。

2 $\mathscr{X}$ 的极大线性子空间 M 对向量 $x_0 \in \mathscr{X}$ 的平移

$$L \triangleq x_0 + M$$

称为**极大线性流形**，或简称**超平面**。

3 所谓超平面 $L = H_f^r$ **分离**集合 E 与 F，指的是

$$\begin{aligned} \forall x \in E \Longrightarrow \ f(x) \leqslant r(or \geqslant r) \\ \forall x \in F \Longrightarrow \ f(x) \geqslant r(or \leqslant r) \end{aligned}$$

严格分离去掉等号即可。

4 超平面 $L = H_f^r$ 称为凸集 E 在点 x_0 的**承托超平面**，是指 E 在 L 的一侧，且 $\overline{E}$ 与 L 有公共点 x_0，换句话说

$$f(x) \leqslant r = f(x_0) \quad (\forall x \in E)$$

或

$$f(x) \geqslant r = f(x_0) \quad (\forall x \in E)$$

命题与定理

若满足 $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ 与 $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

1 **(实 Hahn-Banach 定理)** 设 $\mathscr{X}$ 是实线性函数，p 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的 次线性泛函，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的实线性子空间，f_0 是 $\mathscr{X}_0$ 上的实线性泛函并满足 $f_0(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in \mathscr{X}_0)$，那么 $\mathscr{X}$ 上必然有一个实线性泛函 f 满足：

(1) $f(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in \mathscr{X})$ 受 p 控制条件

(2) $f(x) = f_0(x)$ $(\forall x \in \mathscr{X}_0)$ 延拓条件

Proof. $\forall y_0 \in \mathscr{X} \backslash \mathscr{X}_0$，记 $\mathscr{X}_1 \triangleq \{x + ay_0 \mid x \in \mathscr{X}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$，首先将 f_0 延拓到 $\mathscr{X}_1$，设延拓后的线性泛函记为 f_1，那么

$$f_1(x + ay_0) = f_0(x) + \alpha f_1(y_0), \quad \forall x \in \mathscr{X}_0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

这里的构造是这段证明的最重要的地方，通过构建 y 的“流形”来完成证明。

可见问题只在于决定 $f_1(y_0)$ 的值。既然要求 f_1 满足受 p 控制条件，所以

这里我们需要分类讨论 ay_0 的系数正负问题。

$$f_1(x + ay_0) \leqslant p(x + ay_0)$$

两边同时除以 $|\alpha|$，推出等价于

$$\begin{aligned} f_1(y_0 - z) \leqslant p(y_0 - z) \\ f_1(-y_0 + y) \leqslant p(-y_0 + y) \end{aligned}$$

或者

$$f_0(y) - p(-y_0 + y) \leqslant f_1(y_0) \leqslant f_0(z) + p(y_0 - z)$$

于是为了能取到适合的 $f_1(y_0)$ 必须且仅须：

$$\sup_{y\in\mathscr{X}_0}\{f_0(y)-p(-y_0+y)\}\leqslant f_1(y_0)\leqslant\inf_{z\in\mathscr{X}_0}\{f_0(z)+p(y_0-z)\}$$

而由于

$$f_0(y)-f_0(z)=f_0(y-z)\leqslant p(y-z)\leqslant p(y-y_0)-p(y_0-z)$$

故而我们取定 $f_1(y_0)$ 为任意中间值，就能得出在 $\mathscr{X}_1$ 上的延拓 f_1。现在我们需要把 f_0 逐步延拓到整个 $\mathscr{X}$ 上，我们利用 **Zorn 引理**[3]，令

$$\mathscr{F}\triangleq\left\{(\mathscr{X}_\Delta,f_\Delta)\;\middle|\;\begin{array}{l}\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}_\Delta\subset\mathscr{X}\\ \forall x\in\mathscr{X}_0\implies f_\Delta(x)=f_0(x)\\ \forall\in\mathscr{X}_\Delta\implies f_\Delta(x)\leqslant p(x)\end{array}\right\}$$

在 $\mathscr{F}$ 引入序关系如下：$(\mathscr{X}_{\Delta_1},f_{\Delta_1})\prec(\mathscr{X}_{\Delta_2},f_{\Delta_2})$，是指

$$\mathscr{X}_{\Delta_1}\subset\mathscr{X}_{\Delta_2},\quad f_{\Delta_1}(x)=f_{\Delta_2}(x),\quad\forall x\in\mathscr{X}_{\Delta_1}$$

于是 $\mathscr{F}$ 成为一个半序集，又设 M 是 $\mathscr{F}$ 中的任一个全序子集，令

$$\mathscr{X}_M\triangleq\bigcup_{(\mathscr{X}_\Delta,f_\Delta)\in M}\{\mathscr{X}_\Delta\}$$

以及

$$f_M(x)=f_\Delta(x),\quad\forall x\in\mathscr{X}_\Delta,\ (\mathscr{X}_\Delta,f_\Delta)\in M$$

由于 M 是全序子集，容易验证 $\mathscr{X}$ 是包含 $\mathscr{X}_0$ 的子空间，且 f_M 在 $\mathscr{X}_M$ 上是唯一确定的，满足 $f_M(x)\leqslant p(x)$，于是 $(\mathscr{X}_M,f_M)\in\mathscr{F}$ 并且是 M 的一个上界。由 Zorn 引理，$\mathscr{F}$ 本身存在极大元，记为 $(\mathscr{X}_A,f_A)$。

最后我们证明 $\mathscr{X}_A=\mathscr{X}$，用反证法，若不然则可以构造出 $(\tilde{\mathscr{X}_A},\tilde{f_A})\in\mathscr{F}$，与极大性矛盾。故而所求的 f 即为 f_A。 $\square$

2 **(复 Hahn-Banach 定理)** 设 $\mathscr{X}$ 是复线性空间，p 是 $\mathscr{X}$ 上的半范数，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间，f_0 是 $\mathscr{X}_0$ 上的线性泛函，并满足 $|f_0(x)|\leqslant p(x)$，$\forall x\in\mathscr{X}_0$。那么 $\mathscr{X}$ 上必然有一个线性泛函 f 满足：

由于复数无法比较大小，故而采用模长

(1) $|f(x)|\leqslant p(x)$ $(\forall x\in\mathscr{X})$

(2) $f(x)=f_0(x)$ $(\forall x\in\mathscr{X}_0)$

Proof. 把 $\mathscr{X}$ 看成实线性空间，相应的把 $\mathscr{X}_0$ 也看成是实线性空间，令：

$$g_0\triangleq\mathrm{Re}f_0(x)\quad(\forall x\in\mathscr{X}_0)$$

那么便有 $g_0(x)\leqslant p(x)$ $(\forall x\in\mathscr{X}_0)$。从而由实 Hahn-Banach 定理，必然有 $\mathscr{X}$ 上的实线性泛

[3] 设 $(P,\preceq)$ 是一个非空的偏序集，如果每一个链（即每一个全序子集）都有一个上界，那么 P 中必存在一个极大元。

函使得

$$
\begin{aligned}
g(x) &= g_0(x) \quad \forall x \in \mathscr{X}_0 \\
g(x) &\leqslant p(x) \quad \forall x \in \mathscr{X}
\end{aligned}
$$

现在令 $f(x) \triangleq g(x) - ig(ix)$ $(\forall x \in \mathscr{X})$。那么我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g_0(x) - ig_0(ix) \\
&= \mathrm{Re} f_0(x) + i \mathrm{Im} f_0(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in \mathscr{X}_0)
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
f(ix) &= g(ix) - ig(-x) \\
&= i[g(x) - ig(ix)] = if(x) \quad (\forall x \in \mathscr{X})
\end{aligned}
$$

从而 f 也是复齐次性的，剩下还要说明在 $\mathscr{X}$ 上，$|f(x)|$ 受 $p(x)$ 控制。若 $f(x) = 0$，这是显然的。若 $f(x) \neq 0$，令

$$
\theta \triangleq \arg f(x),
$$

那么我们就有

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= e^{-i\theta} f(x) = f(e^{-i\theta} x) \\
&= g(e^{-i\theta} x) \leqslant p(e^{-i\theta} x) = p(x)
\end{aligned}
$$

□

集合 A，对于任意复数 $|\lambda| \leqslant 1$，则 $\lambda A \subset A$。

3 为了复线性空间 $\mathscr{X}$ 上至少有一个非零线性泛函，只要 $\mathscr{X}$ 中含有某一个 均衡 吸收 真凸子集。

集合 A，对于任意 $x \in A$，存在正数 α，使得 $x \in \alpha A$。

4 **(Hahn-Banach)** 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间，f_0 是定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的有界线性泛函，则在 $\mathscr{X}$ 上必然有有界线性泛函 f 满足：

(1) $f(x) = f_0(x)$ $(\forall x \in \mathscr{X}_0)$ （延拓条件）

(2) $\|f\| = \|f_0\|_0$ （保范条件）

其中 $\|f_0\|_0$ 表示 f_0 在 $\mathscr{X}_0$ 上的范数。通常称 f 为 f_0 的保范延拓。

Proof. 在 $\mathscr{X}$ 上定义 $p(x) \triangleq \|f_0\|_0 \cdot \|x\|$，那么 $p(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的半范数，从而由上个定理，必然存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $f(x)$ 满足

$$
f(x) = f_0(x) \ (\forall x \in \mathscr{X}_0)
$$

以及

$$
|f(x)| \leqslant p(x) = \|f_0\|_0 \cdot \|x\| \ (\forall x \in \mathscr{X})
$$

而由于 $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$，故而 $\|f\| \leqslant \|f_0\|_0$。而由于在 $\mathscr{X}_0$ 上二者相等。**这里需要详细叙述而非书上一句显然带过。** 这是由于 f_0 所定义的范围在 $\mathscr{X}_0$ 之上，而为 $\mathscr{X}$ 的子集。故而

$$\|f_0\| = \sup_{x \in \mathscr{X}_0,\ \|x\|=1} \|f_0(x)\| = \sup_{x \in \mathscr{X}_0,\ \|x\|=1} \|f(x)\| \leqslant \sup_{x \in \mathscr{X},\ \|x\|=1} \|f(x)\| = \|f\|$$

故而 $\|f_0\|_0 \leqslant \|f\|$。故而二者相等。 □

(1) 每个 B^* 空间必有足够多的连续线性泛函。

Proof. 任意给定 $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $x_0 \triangleq x_1 - x_2 \neq \theta$。令 $\mathscr{X}_0 \triangleq \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$。并在 $\mathscr{X}$ 上定义

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\| \ (\forall \lambda \in \mathbb{C})$$

那么 $f_0(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f_0\|_0 = 1$。
由 **Hahn-Banach** 定理，存在 $\mathscr{X}$ 上的连续线性泛函 f，使得

$$f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|,\ \|f\| = \|f_0\|_0 = 1$$

$\mathscr{X}$ 上的这个非零连续线性泛函 f，可以分辨 x_1, x_2。即

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = f(x_0) \neq 0$$

故而显然有足够多的连续线性泛函。 □

(2) 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，$\forall x_0 \in \mathscr{X} \backslash \{\theta\}$，必然 $\exists f \in \mathscr{H}^*$，使得

$$f(x_0) = \|x_0\|,\ \|f\| = 1$$

Proof. 在 Hilbert 空间中，对任意的连续线性泛函 f，$\exists y \in H$，使得

$$f(x) = (x, y)$$

Riesz 表示定理

若记 $M \triangleq \{x \mid f(x) = 0\}$，那么对 $\forall x_0 \in H$，有

$$f(x_0) = (x_0, y) = (x_0 - P_M x_0, y)$$

其中 $P_M x_0$ 表示 x_0 在 M 上的投影，从而

$$\|f_0\|_0 = \sup_{\|x\|=1} f_0(x) = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

$$|f(x_0)| \leqslant \|x_0 - P_M x_0\| \cdot \|y\| = \|f\| \rho(x_0, M)$$

在一般的 B^* 空间中，$\rho(x_0, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x_0 - y\|$。事实上，$\forall n \in N$ 以及 $\forall x_0 \in \mathscr{X}$，按下确界定义，$\exists x_n \in M$，使得

$$\rho(x_0, M) \leqslant \rho(x_0, x_n) \leqslant \rho(x_0, M) + \frac{1}{n}$$

因此

$$
\begin{aligned}
|f(x_0)| &= |f(x_n - x_0)| \leqslant \|f\|\|x_n - x_0\| \\
&\leqslant \|f\| \left(\rho(x_0, M) + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$ 即得到结果。 □

5 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，M 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间。若 $x_0 \in \mathscr{X}$，且

$$
d \triangleq \rho(x_0, M) > 0
$$

则必然存在 $\exists f \in \mathscr{X}^*$ 适合条件：

(1) $f(x) = 0\ (\forall x \in M)$；

(2) $f(x_0) = d$；

(3) $\|f\| = 1$。

Proof. 考虑 $\mathscr{X}_0 \triangleq \{x = x' + \alpha x_0 \mid x' \in M, \alpha \in \mathbb{K}\}$，$\forall x \in \mathscr{X}_0$。定义 $f_0(x) = \alpha d$。则条件 (1)-(2) 均满足。现在说明第三条。若 $x = x' + \alpha x_0$，则

$$
\begin{aligned}
|f_0(x)| &= |\alpha| d = |\alpha| \rho(x_0, M) \\
&\leqslant |\alpha| \|\frac{x'}{\alpha} + x_0\| \\
&= \|x' + \alpha x_0\| = \|x\|
\end{aligned}
$$

故而 $\|f_0\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f_0(x)| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|x\| = 1$ □

(1) 设 M 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 的一个子集，又设 x_0 是 $\mathscr{X}$ 中的任一个非零元素，那么

$$
x_0 \in \overline{\mathrm{span} M}
$$

的充分必要条件是：对 $\forall f \in \mathscr{X}^*$，

$$
f(x) = 0\ (\forall x \in M) \Longrightarrow f(x_0) = 0
$$

Proof. 必要性是显然的?? 确实
下面证明充分性。如果 $x \notin \overline{\mathrm{span} M}$，那么记

$$
d \triangleq \rho(x_0, \overline{\mathrm{span} M}) > 0
$$

因此，依照上个定理，$\exists f \in \mathscr{X}^*$，使得 $f(x) = 0$，并且 $f(x_0) = d > 0$，但按照充分性假定，$f(x_0) = 0$。故而矛盾。 □

6 M 是极大线性子空间的充要条件是，M 是线性真子空间，并且 $\forall x_0 \in \mathscr{X} \backslash M$，有

$$
\mathscr{X} = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus M
$$

Proof. 必要性是显然的。我们要证明充分性，设 M_1 是以 M 为真子集的线性子空间，那么

$\exists x_0 \in M_1 \backslash M$。于是有 $\lambda x_0 \in M$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ 以及 $M \subset M_1$，从而

$$\mathscr{X} = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus M \subset M_1$$

从而 $\mathscr{X} = M_1$，故而 M 为极大线性子空间。 □

7 为了 L 是线性（B^*）空间 $\mathscr{X}$ 上的一个（闭）超平面，i.f.f. 存在非零（连续）线性泛函 f 以及 $r \in \mathbb{R}$，使得 $L = H_f^r$。

考虑 f 为线性（B^*）空间 $\mathscr{X}$ 上的非零（连续）线性泛函，那么集合

$$H_f^r \triangleq \{x \in \mathscr{X} \mid f(x) = r\}$$

显然 f 是线性的，且 $f(ax+by) = 0$ $(\forall x, y \in H_f^0)$。

一定是一个（闭）超平面，这是由于 H_f^0 显然是 线性子空间 。

而又由于 $\forall x_1 \in \mathscr{X} \backslash H_f^0$，$\forall x \in \mathscr{X}$，有

$$x = \frac{f(x)}{f(x_1)} x_1 + H_f^0$$

从而 H_f^0 还是 极大的 。

由于 f 是非零的，$\exists x_0 \in \mathscr{X}$，使得 $f(x_0) \neq 0$，由于 f 的线性，设 $f(x_0) = r$，则对于任意 $x \in H_f^r$，有

$$f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = 0$$

所以 $x - x_0 \in H_f^0$，即 $H_f^r = x_0 + H_f^0$ 是一个超平面。而由于 f 为连续映射，则 H_f^r 显然为闭的。

而反之，若 L 是（闭）超平面，可设 $L = x_0 + M$，其中 M 是（闭）极大线性子空间，$x_0 \in \mathscr{X} \backslash M$，这时候 $\forall x \in \mathscr{X}$ 可以表示为：

$$x = \lambda x_0 + y, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ y \in M$$

相应的，线性泛函 $f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$，

$$f(x) = f(\lambda x_0 + y) = \lambda$$

显然 f 为 $\mathscr{X}$ 上线性泛函，且满足 $M = H_f^0$ 以及 $f(x_0) = 1$。因此 $L = H_f^1$，且为闭的。

8 **(Hahn-Banach 定理的几何形式)** 设 E 是实 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上以 θ 为内点的真凸子集，又设 $x_0 \notin E$，则必然存在一个超平面 H_f^r 分离 x_0 与 E。

这里可以平移，把任意一点变为 θ，但是无穷维空间不能省略这一条。

Proof. 设 $\mathscr{X}$ 为 B^* 空间，如果 E 是 $\mathscr{X}$ 的以 θ 为内点的真凸子集，则它的 Minkowski 泛函 $p(x)$ 便是一个非零的连续次线性泛函，满足

$$\forall x \in E \Longrightarrow p(x) \leqslant 1$$

如果还存在一点 $x_0 \in \mathscr{X} \backslash E$，则由 $p(x)$ 的定义可以得到 $p(x_0) \geqslant 1$。下面证明存在超平面分离 x_0 和 E。先在一维线性空间 $\mathscr{X}_0 \triangleq \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 上定义 $f_0(\lambda x_0) \triangleq \lambda p(x_0)$。显然 f_0 是

$\mathscr{X}_0$ 上的线性泛函，满足

$$f_0(x) = f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) \leqslant p(\lambda x_0) = p(x) \quad (\forall x \in \mathscr{X}_0)$$

由实形式的 Hahn-Banach 定理，必然存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $f(x)$ 满足

$$f(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0) \geqslant 1$$
$$f(x) \leqslant p(x) \leqslant 1 \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

则 $f(x) \leqslant 1$ $(\forall x \in E)$，故而定义的 f 分离 x_0 与 E。 □

9 **(凸集分离定理)** 设 E_1 和 E_2 是 B^* 空间中两个互不相交的非空凸集，E_1 有内点，那么 $\exists s \in \mathbb{R}$ 以及非零连续线性泛函 f，使得超平面 H_f^s 分离 E_1 和 E_2。也就是说，存在一个非零的连续线性泛函 f，使得

$$f(x) \leqslant s \ (\forall x \in E_1) \quad f(x) \geqslant s \ (\forall x \in E_2)$$

Proof. 考虑两个凸集的分离问题。我们想办法把它转化为一个凸集与其外一点的分离问题，在 B^* 中，若 E_1, E_2 是两个互不相交的凸集，E_1 是有内点的，那么容易推知

$$E \triangleq E_1 + (-1)E_2$$

是一个非空凸集，并且有内点，此外 $\theta \notin E$。倘若不然，则 $\exists x_1 \in E_1$，$x_2 \in E_2$，使得 $x_1 - x_2 = \theta$。从而

$$x_1 = x_2 \in E_1 \cap E_2$$

这与 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 矛盾。由几何形式的 Hahn-Banach 定理，存在闭超平面 H_f^r 分解 E 和 θ，不妨假定

$$f(x) \leqslant r \ (\forall x \in E) \quad f(\theta) \geqslant r$$

从而 $f(x) \leqslant 0$ $(\forall x \in E)$，即有 $f(y - z) \leqslant 0$ $(\forall y \in E_1, \forall x \in E_2)$。再由 f 的线性得到：

这里是分离最重要的一部分，即令 $r = 0$ 寻找 f。

$$f(y) \leqslant f(z) \quad (\forall y \in E_1, \forall z \in E_2)$$

因此 $\exists s \in \mathbb{R}$，使得

$$\sup_{y \in E_1} f(y) \leqslant s \leqslant \inf_{z \in E_2} f(z)$$

于是 H_f^s 分离 E_1 和 E_2，而由 H_f^r 是闭的可知 H_f^s 也是闭的。

而条件可以减弱为 $\mathring{E}_1 \cap E_2 = \varnothing$。由于 E_1 有内点，则 $\mathring{E}_1$ 有内点。 □

10 **(Ascoli 定理)** 设 E 是实 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中的闭凸集，则 $\forall x_0 \in \mathscr{X} \backslash E$，$\exists f \in \mathscr{X}^*$ 以及 $\alpha \in \mathbb{R}$，适合

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \quad (\forall x \in E)$$

Proof. 因为 $x_0 \in \mathscr{X}\backslash E$ 以及 E 是闭集，所以 $\exists\delta > 0$，使得

$$B(x_0, \delta) \subset \mathscr{X}\backslash E$$

而 $B(x_0, E)$ 是有内点的凸集，对 E 和 $B(x_0, \delta)$ 应用凸集分离定理，存在非零连续线性泛函 f，适合

$$\sup_{x\in E} f(x) \leqslant \inf_{y\in B(x_0,\delta)} f(y)$$

进一步可以证明

$$\inf_{y\in B(x_0,\delta)} f(y) < f(x_0)$$

故而我们任取 α 为上个式子的中间值，即得 $f(x) < \alpha < f(x_0)$。 □

11 **(Mazur 定理)** 设 E 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个有内点的闭凸集，F 是 $\mathscr{X}$ 的一个线性流形，又设 $\mathring{E} \cap F = \varnothing$，那么存在一个包含 F 的闭超平面 L，使 E 在 L 的一侧。

Proof. 设 $F = x_0 + \mathscr{X}_0$，其中 $x_0 \in \mathscr{X}$，$\mathscr{X}_0$ 为 $\mathscr{X}$ 的线性子空间。由凸集分离定理，存在 H_f^r 分离 E 与 F，即

$$f(E) \leqslant r, \quad f(x_0 + \mathscr{X}_0) \geqslant r$$

记 $r_0 \triangleq r - f(x_0)$，便有 $f(x) \geqslant r_0\ (\forall x \in \mathscr{X}_0)$。又由于 f 是线性的，及 $\mathscr{X}_0$ 是线性子空间，则有

$$f(x) \equiv 0\ (\forall x \in \mathscr{X}_0)$$

即有 $\mathscr{X}_0 \subset H_f^0$，从而 $F \subset x_0 + H_f^0 = H_f^s$。其中 $s \triangleq f(x_0)$，故而 $f(E) \leqslant s$。 □

12 设 E 是实 B^* 空间中含有内点的闭凸集，那么通过 E 的每个边界点都可以作出 E 的一个承托超平面。

Proof. $\forall x_0 \in E\backslash\mathring{E}$，由 Mazur 定理，令 $F \triangleq \{x_0\}$，即存在 $f \in \mathscr{X}^*\backslash\{\theta\}$，以及 $s \in \mathbb{R}$，使得

$$f(x) \leqslant s = f(x_0)$$

故而 H_f^s 即为 E 在 x_0 的承托超平面。 □

应用

1 **抽象可微函数的中值定理**设 $\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，$f : (a, b) \to \mathscr{Y}$ 叫做数值变数 t 的抽象函数，如果 $t \in (a, b)$，在 $\mathscr{Y}$ 中存在极限

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

那么就定义此极限为 f 在 t 的微商

2 设抽象函数 $f : (a, b) \to \mathscr{Y}$ 在 (a, b) 内可微，那么对 $\forall t_1, t_2 \in (a, b)$，$\exists\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leqslant \|f'(\theta t_2 + (1 - \theta)t_1)\| \cdot |t_2 - t_1|$$

3 设 $f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ 是凸的，称集合

$$\partial f(x_0) \triangleq \{x^* \in \mathscr{X}^* \mid \langle x^*, x - x_0\rangle + f(x_0) \leqslant f(x)\ (\forall x \in \mathscr{X})\}$$

这里 $\mathscr{X}^*$ 指的是有界线性泛函全体。

为函数 f 在 x_0 的**次微分**，$\partial f(x_0)$ 中的任意泛函 x^* 称为 f 在 x_0 点的**次梯度**。

4 若 $f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ 是凸的，并在 $x_0 \in \mathscr{X}$ 连续，则 $\partial f(x_0) \neq \varnothing$。

习题

1 求证

(1) $p(\theta) = 0$

(2) $p(-x) \geqslant -p(x)$

(3) 任意给定 $x_0 \in \mathscr{X}$，在 $\mathscr{X}$ 上必然实线性泛函 f，满足 $f(x_0) = p(x_0)$，以及 $f(x) \leqslant p(x)\ (\forall x \in \mathscr{X})$.

Proof. 考虑次线性泛函的定义，即满足 $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ 以及 $p(ax) = ap(x)$。那么 $p(\theta) = p(\theta\lambda) = \theta p(\lambda) = 0$。且 $p(x-x) = p(x+(-x)) = 0$，且 $0 = p(x+(-x)) \leqslant p(x)+p(-x)$，故而 $p(-x) \geqslant -p(-x)$。现在我们证明最后一步。我们需要构建一个线性子空间 $\mathscr{X}_0$ 以及对应的线性泛函 f_0。我们不如考虑这样的流形 $\mathscr{X}_0 \triangleq \{\alpha x_0\}$，而后在其上定义的线性泛函 $f(x) = \alpha p(x_0)$。

显然为线性泛函

故而我们立刻用 Hahn-Banach 即可得到 (3)。 □

2 设 $\mathscr{X}$ 是由实数列 $x = \{a_n\}$ 全体组成的实线性空间，其元素间相等和线性运算都按坐标定义，并定义

$$p(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n \quad (\forall x = \{\alpha_n\} \in \mathscr{X})$$

证明 $p(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上次线性泛函。

Proof. 我们只需要证明其满足的两个条件。首先对于 $\forall x = \{\alpha_n\}$, $y = \{\beta\} \in \mathscr{X}$，则

$$p(x_1 + x_2) = \varlimsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n + \varlimsup_{n\to\infty} \beta_n = p(x) + p(y)$$

而同理上极限有线性的性质，即 $p(\lambda x) = \lambda p(x)$。故而 p 为 $\mathscr{X}$ 上的次线性泛函。 □

3 设 $\mathscr{X}$ 是复线性空间，p 为 $\mathscr{X}$ 上的半范数，$\forall x_0 \in \mathscr{X}$，$p(x_0) \neq 0$。求证：存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f 满足：

(1) $f(x_0) = 1$;

(2) $|f(x)| \leqslant p(x)/p(x_0)$

Proof. 那我们根据证明中提到的 $p(x)/p(x_0)$，考虑线性子空间 $\mathscr{X} = \{\alpha x_0\}$，线性泛函 $f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$。则 $f(x_0) = 1$。且由 Hahn-Banach 的前置条件中 $|f(x_0)| \leqslant |\alpha p(x_0)| \leqslant |p(x)|$。因此可以使用复 Hahn-Banach，得到定义在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 f。而后考虑 $f_1(x) = \frac{f(x)}{p(x_0)}$，则满足两条，且由于只改变了系数，则依然为线性泛函。 □

4 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，$\{x_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是 $\mathscr{X}$ 中的点列，如果 $\forall f\in\mathscr{X}^*$，数列 $\{f(x_n)\}$ 有界，求证 $\{x_n\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中有界。

Proof. 我们考虑建立如下的映射：

$$\begin{aligned} F_x:\mathscr{X}^* &\to K \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

则有

$$|F_x(f)|=|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|$$

因此 $\|F_x\|\leqslant\|x\|$，而另一方面，考虑 $x\neq 0$ 的时候，由 Hahn-Banach，存在 $\exists\tilde{f}\in\mathscr{X}^*$，使得 $\|\tilde{f}\|=1$，则 $\tilde{f}(x)=\|x\|$。因此 $\|F_x\|\geqslant\|x\|$。从而综上二者相等。

设 $\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，且 $\sup\limits_n f(x_n)<\infty$，则由共鸣定理知

$$\sup_{n\geqslant 1}\|F_{x_n}(f)\|=\sup_{n\geqslant 1}\|x_n\|<\infty$$

□

5 设 $\mathscr{X}_0$ 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 的闭子空间，求证

$$\rho(x,\mathscr{X}_0)=\sup\{|f(x)|\mid f\in\mathscr{X}^*,\ \|f\|=1,\ f(\mathscr{X}_0)=0\}$$

其中 $\rho(x,\mathscr{X}_0)=\inf\limits_{y\in\mathscr{X}_0}\|x-y\|$。

Proof. 我们可以知道 $|f(x)|=\rho(x,N(f))\leqslant\rho(x,\mathscr{X}_0)$。则上式小于 $\rho(x,\mathscr{X}_0)$。而另一方面，当 $x\in\mathscr{X}_0$ 时，$\rho(x,\mathscr{X}_0)=\sup\{|f(x)|\mid f\in\mathscr{X}^*,\ \|f\|=1,\ f(\mathscr{X}_0)=0\}$ 显然成立。而由保范延拓，存在 $f\in\mathscr{X}^*$ 使得 $\|f\|=1$，$f(\mathscr{X}_0)=0$，且 $f(x)=\rho(x,\mathscr{X}_0)$。则二者相等。 □

6 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，给定 $\mathscr{X}$ 中 n 个线性无关的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与数域 $\mathbb{K}$ 中的 n 个数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 以及 $M>0$。求证：为了 $\exists f\in\mathscr{X}^*$ 适合 $f(x_k)=C_k$，以及 $\|f\|\leqslant M$，必须且仅须对任意的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$，有

$$\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k\right|\leqslant M\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right\|$$

Proof. 先证明必要性，若存在这样的 f，则

$$\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k\right|=\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kf(x_k)\right|=f\left(\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right|\right)\leqslant\|f\|\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right\|\leqslant M\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right\|$$

再证明充分性。设 $E=\operatorname{span}\{x_i\}$，考虑 $\forall x=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kx_k$，则定义 $f_0(x)=\sum\limits_{k=1}^n\alpha_kC_k$。特别的 $f_0(x_i)=C_i$。由不等式，

$$|f_0(x)|=\left|\sum_{k=1}^n\alpha_kC_k\right|\leqslant M\left\|\sum_{k=1}^n\alpha_kx_k\right\|\leqslant M\|x\|\Rightarrow\|f_0\|\leqslant M$$

因此由保范的 Hahn-Banach 得到延拓在 $\mathscr{X}^*$ 上的 f。 □

7 给定 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 上 n 个线性无关的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求证：$\exists f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathscr{X}^*$ 使得

$$\langle f_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

Proof. 考虑 $M_i \triangleq \operatorname{span}\{x_i\}$，且记 $d_i = \rho(x_i, M_i)$。对于 M_i，由于 $d_i > 0$，则 $\exists \bar{f}_i \in \mathscr{X}^*$，使得

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(x_i) &= d_i \\ \bar{f}_i(x) &= 0 \quad \forall x \in M_i \\ \|\bar{f}_i\| &= 1 \end{aligned}$$

则我们考虑令 $f_i(x) = \frac{\bar{f}_i(x_i)}{d_i}$，那么 $f_i(x_i) = 1$，且 $f_i(x_j) = 0$，$\forall i \neq j$。 □

2.5 共轭空间、弱收敛、自反空间

定义与例子

1 设 $\mathscr{X}$ 是一个 B^* 空间，$\mathscr{X}$ 上所有连续线性泛函全体 $\mathscr{X}^*$ 按范数 $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$ 构成一个 B 空间，称为 $\mathscr{X}$ 的 **共轭空间**。

(1) $L^p[0,1]$ 的共轭空间 $(1 \leqslant p < \infty)$，设 q 是共轭数，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1, if\ p > 1 \\ q &= \infty\ if\ p = 1 \end{aligned}$$

我们将证明 $L^p[0,1]^* = L^q[0,1]$。我们分三步进行，从示性函数到简单函数再到简单函数列。由 Hölder 不等式得到

$$\left| \int_0^1 f(x) g(x) dx \right| \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

考虑 μ 是 $[0,1]$ 上的 Lesbegue 测度，故而

$$F_g(f) \triangleq \int_0^1 f(x) g(x) d\mu \quad (\forall f \in L^p[0,1])$$

定义了 $L^p[0,1]$ 上的一个连续线性泛函，并且有

$$\|F_g\|_{L^p[0,1]} \leqslant \|g\|_{L^q[0,1]}$$

以下证明映射 $g \to F_q$ 是等距在上的,即对于给定的 $F \in L^P[0,1]^*$,要找一个 $g \in L^q[0,1]$。

$$F(f) = \int_0^1 f(x) g(x) d\mu \quad (\forall f \in L^p[0,1])$$

并且

$$\|g\|_{L^q[0,1]} = \|F\|$$

对任意的可测集 $E \subset [0,1]$，令

$$\nu(E) \triangleq F(\chi_E)$$

其中 χ_E 是 E 的特征函数。而后我们验证 ν 是一个完全可加测度。首先 ν 是有限可加的，设 $\{E_n\} \subset [0,1]$ 满足

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

以及

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$$

则

$$\begin{aligned}
\nu(E_n) = F(\chi_{E_n}) &\leqslant \|F\| \cdot \|\chi_{E_n}\|_{L^p[0,1]} \\
&= \|F\| \left(\int_0^1 |\chi_E|^p d\mu \right)^{1/p} \\
&= \|F\| \mu(E_n)^{1/p} \to 0
\end{aligned}$$

此外 ν 关于 μ 还是绝对连续的，即由 $\mu(E) = 0$ 可以推出 $\nu(E) = 0$。现在应用 Radon-Nikodym 定理，存在可测函数 g，对任意的可测集 E 有

即用示性函数来替换积分区域

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \int_E g d\mu \\
F(\chi_E) = \nu(E) &= \int_0^1 \chi_E(x) g(x) d\mu
\end{aligned}$$

于是对于一切简单函数 f 都有

即存在互不相交的可测集 $\{E_n\}_{i=1}^{\infty}$ 与 $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{K}$，使得 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}(x)$

$$F(f) = \int_0^1 f(x) g(x) d\mu$$

进一步我们要证明 $\|g\|_{L^q[0,1]} \leqslant F$。如果一旦得证，即可推出 $F(f) = \int_0^1 f(x)g(x)d\mu$ 一式子。由于简单函数列在 $L^p[0,1]$ 中是稠密的，所以 $\forall f \in L^p[0,1]$，存在简单函数列 $f_n \to f$，从而有

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f_n)$$

以及

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| g(x) d\mu \right| &\leqslant \left(\int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(x)|^q d\mu \right)^{1/q} \\
&\leqslant \|F\| \cdot \|f - f_n\|_{L^p[0,1]} \to 0
\end{aligned}$$

即这里是我们要证明的地方

亦即

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)g(x)d\mu = \int_0^1 f(x)g(x)d\mu$$

下面我们分情况证明

(1) 对于 $1 < p < \infty$ 而言，$\forall t > 0$，记

$$E_t \triangleq \{x \in [0,1] \mid |g(x)| \leqslant t\}$$

令 $f = \chi_{E_t}|g|^{q-2}g$，便有

$$\int_{E_t} |g|^q d\mu = \int_0^1 f \cdot g d\mu = F(f) \leqslant \|F\| \cdot \|f\|_{L^q[0,1]} = \|F\|(\int_{E_t} |g|^q d\mu)^{1/p}$$

即

$$(\int_{E_t} |g|^q d\mu)^{1/q} \leqslant \|F\|$$

令 $t \to \infty$ 即可。

(2) $p = 1$，这时 $q = \infty$，对于 $\forall \varepsilon > 0$，令

$$A \triangleq \{x \in [0,1] \mid |g(x)| > \|F\| + \varepsilon\}$$

再对于 $\forall t > 0$，按前面的定义 E_t，并令 $f = \chi_{E_t\cap A}\ \mathrm{sign}\ g$，便有

即 f 作用后会去掉 $|g|$ 的绝对值与积分区域

$$\|f\|_{L^1[0,1]} = \mu(E_t \cap A)$$

并且有

$$\mu(E_t \cap A)(\|F\| + \varepsilon) \leqslant \int_{A\cap E_t} |g| d\mu = \int_0^1 f \cdot g d\mu \leqslant \|F\|\mu(E_t \cap A)$$

令 $t \to \infty$ 即得

$$\mu(A)(\|F\| + \varepsilon) \leqslant \|F\|\mu(A)$$

从而推出 $\mu(A) = 0$，从而

$$\|g\|_{L^\infty[0,1]} \leqslant F$$

(2) $C[0,1]$ 的共轭空间，设

$$BV[0,1] \triangleq \left\{ g \,\middle|\, \begin{array}{l} g : [0,1] \to \mathbb{C},\ g(0) = 0 \\ g(t) = g(t = 0)\ (\forall t \in (0,1)) \\ \mathrm{var}(g) < \infty \end{array} \right\}$$

其中 $\mathrm{var}(g) = \sup \sum_{j=0}^{n-1} |g(t_{j+1}) - g(t_j)|$，这里的上确界是对所有的 $[0,1]$ 分割来取的。在 $BV[0,1]$ 上赋以范数 $\|g\| = \mathrm{var}(g)\ (\forall g \in BV[0,1])$，那么 $BV[0,1]$ 是 B 空间。而

$C[0,1]^* = BV[0,1]$。

2 考虑 $\mathscr{X}^*$ 空间的共轭空间，记作 $\mathscr{X}^{**}$，称为 X 的**第二共轭空间**。注意到 $\forall x \in \mathscr{X}$，可以定义

$$X(f) = \langle f, x \rangle \quad (\forall f \in \mathscr{X}^*)$$

不难验证：X 还是 $\mathscr{X}^*$ 上的一个线性泛函，满足

$$|X(f)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$$

从而 X 还是连续的，满足

$$\|X\| \leqslant \|x\|$$

称映射 $T: x \to X$ 是**自然映射**，表明 T 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的连续嵌入。注意到，若 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，$x, y \in \mathscr{X}$，记 $X = Tx$，$Y = Ty$，则有

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y)(f) &= f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha X(f) + \beta Y(f) = (\alpha X + \beta Y)(f) = (\alpha Tx + \beta Ty)(f) \quad (\forall f \in \mathscr{X}^{**}) \end{aligned}$$

因此 T 还是一个线性同构，由 Hahn-Banach 定理，存在 $\exists f \in \mathscr{X}^*$，使得

$$\|f\| = 1, \quad \langle f, x \rangle = \|x\|$$

便得到

$$\|x\| = X(f) \leqslant \|X\| \cdot \|f\| = \|X\|$$

故而 T 是等距的。

3 如果 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的自然映射 T 是满射的，则称 $\mathscr{X}$ 是**自反的**，记作 $\mathscr{X} = \mathscr{X}^{**}$。

4 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，算子 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$。算子 $T^*: \mathscr{Y}^* \to \mathscr{X}^*$ 称为是 T 的**共轭算子**是指：

$$f(Tx) = (T^* f)(x) \quad (\forall f \in \mathscr{Y}^*,\ \forall x \in \mathscr{X})$$

命题与定理

1 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 与它的第二共轭空间 $\mathscr{X}^{**}$ 的一个子空间等距同构。

Proof. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，$T^*$ 是唯一存在的，并且属于 $\mathscr{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$。事实上，对于 $\forall f \in \mathscr{Y}^*$，令

$$g(x) = f(Tx) \quad (\forall x \in \mathscr{X}^*)$$

它是线性的，并且有界

$$|g(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

因此 $g \in \mathscr{X}^*$，对应 $f \to g$ 也是线性的，正是 T^*，按照定义

$$\|T^* f\| = \|g\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\| \quad (\forall f \in \mathscr{Y}^*)$$

故而 $T^* \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^*, \mathscr{X}^*)$，同时 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$。因此唯一性显然。 □

2 映射 $* : T \to T^*$ 是 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 到 $\mathscr{L}(\mathscr{Y}^*, \mathscr{X}^*)$ 的等距同构。

习题

1 求证：$(l^p)^* = l^q$，$1 \leqslant p < \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Proof. 我们要证明是等距同构的。一方面，对 $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$ 而言，由 Hölder Ineq 得到

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x = \{\xi_k\} \in l^p$$

因而 $\|T_y\| \leqslant \|y\|$，从而 l^q 通过映射 $y \to T_y$ 连续的嵌入到 $(l^p)^*$ 中。即所有的 $y \in l^q$ 都可以嵌入进去。

另一方面，对 $T \in (l^p)^*$，令

$$e_k = (\underbrace{0, 0, \cdots, 1}_{k\text{个}}, 0, \cdots)$$

则

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k T(e_k)$$

下面证明 $y_T = \{T(e_k)\} \in l^q$，且 $\|y_T\| \leqslant \|T\|$，从而为等距同构。

若 $1 \leqslant q < \infty$ 时，

$$\|y_T\|_{l^q}^q = \sum_{k=1}^{n} |T(e_k)|^q = \sum_{k=1}^{n} T(e_k) |T(e_k)|^{q-1} e^{-i \arg T(e_k)} \leqslant \|T\| \cdot \|y_T\|_{l^q}^{q/p}$$

而若 $q = \infty$，则

$$\|y_T\|_{l^\infty} = \sup_{n \geqslant 1} |T(e_n)| = \sup_{n \geqslant 1} T(e_n) e^{-i \arg T(e_n)} = \sup_{n \geqslant 1} T(\tilde{x}_n) \leqslant \|T\|$$

□

2 设 C 是收敛数列的全体，赋以范数

$$\|\cdot\|: \ \{\xi_k\} \in C \mapsto \sup_{k \geqslant 1} |\xi_k|$$

求证：$C^* = l^1$

Proof. 注意对于 $\forall x \in C$，$x = \{\xi_k\}$，考虑 $\lim\limits_{k \to \infty} \xi_k = \xi_0$，则

$$x = \xi_0 e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi_0) e_k$$

其中

$$e_0 = (1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots, 1);$$
$$e_k = (\underbrace{0, 0, \cdots, 1}_{k}, 0, \cdots, 0).$$

对于 $\forall f \in C^*$，记

$$f(x) = \xi_0 f(e_0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi_0) f(e_k)$$
$$\tilde{\eta}_0 = f(e_0)$$
$$\tilde{\eta}_k = f(e_k)$$

则有

$$f(x) = \xi_0 \tilde{\eta}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \xi_0) \tilde{\eta}_k$$

而后证明这两个范数相等即可。 □

3 同理

4 求证：有限维 B^* 空间必是自反的。

Proof. 我们要证明从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的映射是满的，即就是自反的。
考虑定义在 $\mathscr{X}$ 上的一组基 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$，而因此存在 $\{f_i\} \subset \mathscr{X}^*$ 使得

$$\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

从而 $\forall f \in \mathscr{X}^*$，

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(e_i) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} f_i f(e_i), x \right\rangle$$

从而有

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i$$

而现在对 $\forall x^{**} \in \mathscr{X}^{**}$，

$$x^{**}(f) = x^{**}\left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x^{**}(f_i) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i x^{**}(f_i), f \right\rangle$$

因此

$$x^{**} = \sum_{i=1}^{n} x^{**}(f_i) e_i$$

因此从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的自然映射是满的，因此是自反的。 □

5 求证：B 空间是自反的，当且仅当它的共轭空间是自反的。

Proof. 设 $\mathscr{X}$ 是自反的，记从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的自然映射 T 是满的。则对于 $\forall x_0^{***} \in \mathscr{X}^{***}$。

$$\langle x_0^{***}, x^{**}\rangle = \langle x_0^{***}, Tx\rangle = \langle T^* x_0^{***}, x\rangle = \langle Tx, T^* x_0^{***}\rangle = \langle x^{**}, T^* x_0^{***}\rangle$$

因此是满射。

对于充分性而言，若 $\mathscr{X}^*$ 自反，则 X^{**} 自反。而又由于 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，作为 $\mathscr{X}$ 的子空间是闭的。由 Pettis 定义知 X 自反。 □

6 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，T 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}^{**}$ 的自然映射，求证：$R(T)$ 是闭的的充要条件是 $\mathscr{X}$ 是完备的。

Proof. 若 $\mathscr{X}$ 是完备的，则 T 是满射的。因此 T 是等距同构。而 $R(T)$ 是闭的当且仅当 $R(T)$ 是完备的，从而 $R(T)$ 完备当且仅当 T 是等距同构。（由于 $\mathscr{X}^{**}$ 是 B 空间） □

7 在 l^1 中定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$$

求证 $T \in \mathscr{L}(l^1)$ 并求 T^*

Proof. 首先我们要说明有界,在 l^1 中的有界指的是求和有限。而由于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^1$，因而

$$\|x\| < \infty$$

且自然的，我们可以发现

$$\|Tx\|_{l^1} = \|x\|_{l^1} < \infty$$

故而其有界且 $\|T\| = 1$，而由命题，显然也是连续的，因此 $T \in \mathscr{L}(l^1)$。下面我们求其对偶空间。而对于 $\forall y \in l^\infty$，则

$$\langle y, Tx\rangle = \langle T^* y, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} y_{k+1} x_k = \langle \tilde{y}, x\rangle$$

故而

$$T^*(y) = T^*(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) = (y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots)$$

□

8 在 l^2 中定义算子

$$T : (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right)$$

求证：$T \in \mathscr{L}(l^2)$ 并求 T^*.

Proof. 考虑 $\forall x \in l^2$，则

$$\|Tx\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{k}\right)^2 \leqslant \|x_k\|_2 < \infty$$

因此 $T \in \mathscr{L}(l^2)$，而后 $\forall y \in l^2$

$$\langle y, Tx\rangle = \langle T * y, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k \cdot y_k}{k}\right)^2 = \langle Ty, x\rangle$$

因此 $T^* = T$。 □

9 设 H 是 Hilbert 空间，$A \in \mathscr{L}(H)$ 并满足

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

求证：

(1) $A^* = A$;

(2) 若 $R(A)$ 在 H 中稠密，则方程 $Ax = y$ 对 $\forall y \in R(A)$ 存在唯一解。

Proof. 由于

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

由内积的性质得 $A = A^*$。下面说明存在唯一解。若存在 x_1, x_2 使得 $Ax_1 = Ax_2 = y$，则

$$0 = \langle Ax_1 - Ax_2, z\rangle = \langle x_1 - x_2, Az\rangle$$

由于 $R(A)$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密。$\exists z_n \in \mathscr{H}$，使得 $Az_n \to x_1 - x_2$，因此 $x_1 = x_2$，故而唯一性成立。 □

10 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，$A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，又设 A^{-1} 存在，且 $A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$，求证：

(1) $(A^*)^{-1}$ 存在，且 $(A^*)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^*, \mathscr{X}^*)$;

Proof. 我们需要证明 A^* 是双射。若 $A^* y = 0$，则

$$\langle A^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle = 0$$

因此 $y = 0$，故而是单射。而后证明满射，$\forall x \in \mathscr{X}^*$，

$$\langle A^*(A^*)^{-1}x^*, x\rangle = \langle (A^*)^{-1}x^*, Ax\rangle = \langle x^*, A^{-1}Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle$$

因此 $A^*(A^*)^{-1} = I$，故而其满射，因此为双射，从而 $(A^*)^{-1}$ 存在。由 Banach 定理知，$(A^*)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^*, \mathscr{X}^*)$。 □

(2) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$。

Proof. 由 $A^*(A^*)^{-1}x^* = x^*$，两边同时作用 $(A^*)^{-1}$，即证 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$。 □

11 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$ 是 B 空间，而 $B \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，$A \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$，求证：$(AB)^* = B^* A^*$。

Proof. 我们考虑

$$\langle B^*A^*z, x\rangle = \langle A^*z, Bx\rangle = \langle z, ABx\rangle = \langle z, (AB)x\rangle = \langle (AB)^*z, x\rangle$$

而由内积的性质，我们可以发现 $(AB)^* = B^*A^*$。 □

12 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B 空间，T 是 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的线性算子，又设对 $\forall g \in \mathscr{Y}^*$，$g(Tx)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的有界线性泛函。求证：T 是连续的。

Proof. 我们先证明 T 是闭算子。对于 $x_n \in \mathscr{X}$，$Tx_n \in \mathscr{Y}$，$x_n \to x_0$，$Tx_n \to y_0$。则 $g(Tx_n) \to g(Tx_0)$，且 $g(Tx_n) \to g(y_0)$，因此 $Tx_0 = y_0$，故而为闭算子。且 $D(T) = \mathscr{X}$，由闭图像定理知 T 是连续的。 □

13 设 $\{x_n\} \subset C[a,b]$，$x \in C[a,b]$，且 $x_n \rightharpoonup x$ $(n \to \infty)$，求证：

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t), \ (\forall t \in [a,b]) \ (\text{点点收敛})$$

Proof. 对任意固定的 t，有

$$x \in C[a,b] \Rightarrow \ x(t) \in \mathbb{R}$$

因此属于 $C[a,b]*$，由弱收敛知 $x_n(t) \to x(t)$。 □

14 已知在 B^* 空间中 $x_n \rightharpoonup x_0$，求证：

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x_0\|$$

Proof. 若 $x_0 = 0$ 则显然。而 $x_0 \neq 0$ 的时候，必然存在 $f \in \mathscr{X}^*$，使得 $f(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f\| = 1$。因此

$$\|x_0\| = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f\left(\varliminf_{n\to\infty} x_n\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f\| \cdot \|x_n\|$$

因此有

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x_0\|$$

□

15 设 H 为 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 H 的正交规范基，求证，在 H 中 $x_n \rightharpoonup x_0$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\|$ 有界

(2) $(x_n, e_k) \to (x_0, e_k)$ $(n \to \infty)$，$k = 1, 2, \cdots$

Proof. 先证明必要性，由共鸣定理知 $\|x_n\|$ 有界，且 $(x_n, e_k) \to (x_0, e_k)$。

再证明充分性，由于 $(x_n, e_k) \to (x_0, e_k)$，且 $\overline{\text{span}\{e_k\}} = \mathscr{X}$，因此我们只需要把 x_n 看作是 $\mathscr{X}^*$ 上的有界线性泛函，则 $f(x_n) = \langle x_n, f\rangle$，再由 Banach-Steinhaus 定理即得弱收敛。 □

16 设 S_n 是 $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 到自身的算子：

$$(S_n u)(x) = \begin{cases} u(x), & |x| \leqslant n \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

其中 $u \in L^p(\mathbb{R})$ 是任意的，求证：$\{S_n\}$ 强收敛于恒同算子，但不一致收敛到 I。

Proof. 考虑 $\forall u \in L^p(\mathbb{R})$，则

$$\|(S_n - I)u\|_{L^p}^p = \int_{|x|>n} |u(x)|^p dx \to 0$$

但

$$\begin{aligned} \|S_n - I\| \geqslant \|u_n\|_p, &\quad \left(u_n = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant n \\ e^{\frac{x-n}{p}}, & |x| > n \end{cases} \right) \\ = 1 & \end{aligned}$$

因此并非一致收敛。 □

17 设 H 是 Hilbert 空间，在 H 中 $x_n \rightharpoonup x_0$ $(h \to \infty)$，而且 $y_n \to y_0$ $(h \to \infty)$，求证：$(x_n, y_n) \mapsto (x_0, y_0)$。

Proof.

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| &\leqslant |(x_n, y_n) - (x_n, y_0)| + |(x_n, y_0) - (x_0, y_0)| \\ &\leqslant \|x_n\| \cdot \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_n\| \cdot \|y_0\| \end{aligned}$$

而由于 $\|x_n\|$ 与 $\|y_0\|$ 均有界，且 $\|y_n - y_0\| \to 0$，$\|x_n - x_n\| \to 0$，因此收敛。 □

18 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的正交规范集，求证：在 H 中 $e_n \rightharpoonup \theta$，但 $e_n \nrightarrow \theta$。

Proof. 这里需要用到 Bessel 不等式，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(e_n, x)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x\| \to \infty$$

但显然 $e_n \nrightarrow \theta$。 □

19 设 H 是 Hilbert 空间，求证：在 H 中 $x_n \to x$ 的充要条件是

(1) $\|x_n\| \to \|x\|$

(2) $x_n \rightharpoonup x$

Proof.

$$\|x_n - x\| = \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \to 0$$

因此 $x_n \to x$。 □

20 求证：在自反的 B 空间中，集合的弱列紧性和有界性是等价的。

Proof. 若集合存在弱列紧性，假设集合 $M \subset \mathscr{X}$ 是无界的。则 $\forall n > 1$，都存在 $x_n \in M$ 使得 $\|x_n\| > n$。从而 $\{x_n\}$ 构造出来之后存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$，而由共鸣定理知 $\|x_{n_i}\|$ 有界，但与前文所述无界矛盾。

若集合有界，则用 2.5.28，即自反空间的单位球是列紧的。而有界可以用球形邻域覆盖，故而列紧。 □

21 求证：B^* 空间中的闭凸集是弱闭的，即若 M 是闭凸集，$\{x_n\} \subset M$，且 $x_n \rightharpoonup x_0$，则 $x_0 \in M$。

Proof. 涉及凸集分离定理，不会。 □

22 22 与 23 同，均涉及凸集分离定理，不会。

Chapter 3

14 个定理总结

3.1 第一章

Theorem 3.1.1 (Banach 压缩映像原理)**.** 对于完备的度量空间 $\mathscr{X}$ 而言，对于到自身的压缩映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，存在唯一的不动点。

Proof. 我们考虑其上的距离为 ρ，先证明存在性。任取 $x_0\in\mathscr{X}$，作压缩映射的序列 $x_1=Tx_0$，而后不断作 $x_2=Tx_1$，有 $x_n=Tx_{n-1}$。在完备的度量空间中，我们要说明这是一个基本列，即可证明其为收敛列。

我们先来考虑

$$|x_{n+1}-x_n|=|Tx_n-Tx_{n-1}|<\alpha|x_n-x_{n-1}|<\cdots<\alpha^n|x_1-x_0|$$

故而我们考虑 $\forall n,p\in\mathbb{N}^+$，

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{p}|x_{n+k}-x_{n+k-1}|\\&<\sum_{k=1}^{p}\alpha^{n+k-1}|x_1-x_0|\\&<\frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha}|x_1-x_0|\to0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

故而这里构造的 $\{x_n\}$ 是一个基本列，从而有收敛列。下面证明唯一，若存在两个不动点 x^*,x^{**}，则

$$|x^*-x^{**}|=|Tx^*-Tx^{**}|<\alpha|x^*-x^{**}|$$

矛盾，故而 $x^*=x^{**}$，因此不动点唯一。 □

Theorem 3.1.2 (Arzelà-Ascoli 定理)**.** 为了 $F\subset C(M)$ 是列紧的，当且仅当 F 是一致有界且等度连续的函数族。

Proof. 先证明必要性，已知 $C(M)$ 是完备的，故而等价于 F 是完全有界的，而完全有界集必然是有界集，因此 F 是一致有界的。下面我们证明其等度连续。考虑完全有界即存在有穷 ε 网，考虑 F 的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网 $N(\varepsilon/3)$，

即存在有穷的 $M = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$。$\forall \varphi \in F$，我们总能找到 $\varphi_i \in M$ 使得 $|\varphi - \varphi_i| < \frac{\varepsilon}{3}$，则对于 $\delta = \delta(\varepsilon)$，当 $\rho(x_1, x_2) \leqslant \delta$ 时我们有

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

故而 F 一致有界且等度连续。

下面证明充分性。如果 F 是一致有界且等度连续的。$\exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{3})$，使得当 $\rho(x_1, x_2) < \delta$ 时，$\forall \varphi \in F$，$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon/3$。而后就此 δ，选取空间 M 上的有穷 δ 网，$N(\delta) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，从而定义映射 $T : F \to \mathbb{R}$:

$$T\varphi \triangleq (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n))$$

记 $\tilde{F} = TF$，则 $\tilde{F}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的有界集。而设 $|\varphi| \leqslant M_1$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{n} M_1$$

故而有界。从而 $\tilde{F}$ 为列紧集，因此 $\tilde{F}$ 有有穷的 $\varepsilon/3$ 网，记为

$$\tilde{N}(\varepsilon/3) = \{T\varphi_1, T\varphi_2, \cdots, T\varphi_m\}$$

故而我们取定 $x_r \in N$，从而

$$|\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_r)| + |\varphi(x_r) - \varphi_i(x_r)| + |\varphi_i(x_r) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$$

故而 F 为完全有界集，即 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m\}$ 也是 ε 网，进而为列紧的。 □

Theorem 3.1.3. 具有相同维数的有穷维赋范空间都是等价同构的。

Proof. 这里我们考虑有穷维赋范空间 $\mathscr{X}$ 上的一组基为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，则对于任意 $x \in \mathscr{X}$ 都可以表示为 $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$。而后我们考虑任意两个范数 $\|\|$ 与 $\|\|_T$，考虑 $\|x\|_T = |Tx|$。而 $\|Tx\|$ 在 $\mathbb{K}^n$ 中的范数为 $\|x\|_T = |Tx| = \|\xi\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$。考察函数 $p(\xi) = \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right|$。首先 p 对 ξ 是一致连续的

$$|p(\xi) - p(\eta)| = p(\xi - \eta) \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) e_i\right| \leqslant |\xi - \eta| \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^2\right)^{1/2}$$

而后根据范数的齐次性

$$|\eta| p(\frac{\eta}{|\eta|}) = p(\eta)$$

而由于 $S^1 = \{\|x\| = 1 \mid \|x\| \in \mathbb{K}^n\}$。且 S^1 是列紧的，故而在上面有最大最小值，从而

$$C_1 \leqslant p(\eta) \leqslant C_2 \quad \eta \in S^1$$

则考虑 $\xi \in \mathscr{X}$，而 $\frac{\xi}{|\xi|} \in S^1$，则

$$
\begin{aligned}
C_1 \leqslant & p(\frac{\xi}{|\xi|}) \leqslant C_2 \\
C_1 \leqslant & \frac{1}{|\xi|} p(\xi) \leqslant C_2 \\
C_1|\xi| \leqslant & p(\xi) \leqslant C_2|\xi|
\end{aligned}
$$

下面证明 $C_1 > 0$，若 $C_1 = 0$ 意味着 $\exists \xi^* \in S_1$，使得 $\xi_1 e_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n e_n = 0$ 则 $\xi^* = 0$ 矛盾，故而 $C_1 > 0$，改写上式

$$C_1\|x\| \leqslant \|x\|_T \leqslant C_2\|x\|$$

□

Theorem 3.1.4. Hilbent 空间中，若 $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是正交规范集，则有 Bessel 不等式，且若其为完备的，则有 Parseval 等式

Proof. Bessel Ineq 即为

$$\|x\| \geqslant \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$$

我们考虑 $\forall x \in \mathscr{X}$，而由于该空间为 Hilbert 空间，我们总能找到 $e_1, e_2, \cdots, e_m \in A$，使得

$$\left| x - \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i \right| = \|x\| - \sum_{i=1}^{m} |(x, e_i)|^2 \geqslant 0$$

而由此可见，对于 $\forall m \in \mathbb{N}$，适合 $|(x, e_\alpha)| > \frac{1}{m}$ 的 $a \in A$ 至多只有有穷个，从而 $(x, e_\alpha) \neq 0$ 的 α 只有可数个，故而我们对 m 取极限即可得到。

$$\sum_{\alpha \in A_f} |(x, e_a)|^2 \leqslant \|x\|$$

而 Parseval Eq 为对于正交完备规范集而言的。

$$\|x\| = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$$

由于 $\mathscr{X}$ 为完备集，从而 $\forall x \in \mathscr{X}$，都有

$$x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_a) e_a$$

故而按照上述方法可以立即得到二者相等。反证法也可以，即若 $LHS - RHS = y$，则 $y \notin \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$，显然与完备集矛盾。 □

3.2 第二章

Theorem 3.2.1 (Riesz 表示定理)**.** 在 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中，对于任意的连续线性泛函 f，必然存在唯一的 $y_f \in \mathscr{X}$ 使得 $f(x) = (x, y_f)$。

Proof. 先证明存在性。我们考虑这样一个集合，考虑 $\exists x_0$ 使得 $f(x_0) \neq 0$ 且 $\|x_0\| = 1$，而后考虑集合 $M \triangleq \{x \mid f(x) = 0\}$。则作如下的分解，考虑 $x = \alpha x_0 + y$，其中 $y \in M$。而两边作用 f 得到 $f(x) = \alpha f(x_0)$。现在我们来探究 α 的取值。两侧对 x_0 作内积得到 $(x, x_0) = \alpha$。这里若 $(y, x_0) \neq 0$，由于 $x_0 \perp M$。故而 $f(x) = (x, x_0)f(x_0) = (x, \overline{f(x_0)}x_0)$。现在我们来探讨唯一性，若存在两个 y, y' 使得 $(x, y) = (x, y') = f(x)$，则 $(x, y - y') = 0$。而后我们取 $x = y - y'$ 即得 $y = y'$。唯一性证明结束，故而 Riesz 表示定理成立。 □

Theorem 3.2.2 (开映射定理)**.** 若 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 都是 B 空间，且 $f \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，而 f 为满射，则 f 为开映射。

Proof. 证明分三步进行。首先考虑在 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 中的开球分别为 $B(x_0, r), U(y_0, r)$。原命题等价于 $U(\theta, \delta) \subset TB(\theta, 1)$。这是由于开映射等价于证明 $TB(x_0, r) \supset U(Tx_0, r\delta)$，而由于其线性性质，即为 $U(\theta, \delta) \subset TB(\theta, 1)$。必要性是显然的，我们来证明充分性，考虑 $\forall y_0 \in T(W)$，按定义有 $\exists x_0 \in W$ 使得 $Tx_0 = y_0$，由于 W 为开集，则存在 $\exists B(x_0, r) \in W$，取 $\varepsilon = r\delta$，使得

$$U(Tx_0, \varepsilon) \subset TB(x_0, r) \subset T(W)$$

故而为内点。

第二步，证明 $U(\theta, 3\delta) = \overline{TB(\theta, 1)}$。这里我们考虑 $\mathscr{Y} = f(\mathscr{X}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} TB(\theta, n)$。由于 f 为满射，必然存在某个 n 使得 $TB(\theta, n)$ 不为疏集，即有内点。而因此 $\exists U(y_0, r) \subset \overline{TB(\theta, n)}$。我们考虑对称凸集的性质

$$U(\theta, r) = \frac{1}{2}(U(y_0, r) + U(-y_0, r)) \subset \overline{TB(\theta, n)}$$

这里我们取 $\delta = \frac{r}{3n}$ 即可得到。

第三步，证明 $U(\theta, \delta) \subset TB(\theta, 1)$。我们可以考虑 $\forall y_0 \in U(\theta, \delta)$，要证明存在 $x_0 \in B(\theta, 1)$ 使得 $y_0 = f(x_0)$，我们利用逐次逼近法。先考虑存在 $x_1 \in B(\theta, \frac{1}{3})$，使得 $\|y_0 - f(x_1)\| \leqslant \frac{1}{3}\delta$。而后我们考虑 $y_1 = y_0 - f(x_2)$，而后构造出 $x_2 \in B(\theta, \frac{1}{3^2}\delta)$ 使得 $\|y_1 - f(x_2)\| \leqslant \frac{1}{3^2}\delta$。而后我们构造出的 $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$，而 $\|y_0 - f(x_0)\| = \|y_1 - f(x_1 + x_2 + \cdots)\| = \frac{1}{3^n}\delta \to 0$，故而 $y_0 = f(x_0)$ 且 $\|x_0\| \leqslant \frac{1}{2}$，因此为内点。 □

Theorem 3.2.3 (闭图像定理)**.** 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B 空间，若 T 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 的闭线性算子，且 $D(T)$ 是闭的，则 T 是连续的。

Proof. 那么我们要证明连续。先在 $D(T)$ 上构造范数，这里 $D(T)$ 由于是闭的也为 B 空间。构造

$$\|x\|_G = \|x\| + \|Tx\| \quad (\forall x \in D(T))$$

现在证明赋范的 $D(T)$ 也是 B 空间，而

$$\|x_m - x_n\|_G = \|x_m - x_n\| + \|T(x_m - x_n)\| \to 0$$

我们要证明其收敛，首先由第一项可知存在 $x^* \in \mathscr{X}$ 使得 $x_m \to x^*$，而同时 $\|T(x_m - x^*)\| \to 0$，因此这里的范数也是完备的，同样收敛于 x^*。而我们也知道 $\|x\|_G$ 比 $\|x\|$ 强。由等价范数定理，我们可知存在 $M > 0$ 使得

$$\|Tx\| \leqslant \|x\|_G \leqslant M\|x\|$$

这里可以发现 $\|T\|$ 也是有界的。由于 $\|T\| \leqslant \|Tx\|/\|x\| \leqslant M$。故而 T 连续。 □

Theorem 3.2.4 (共鸣定理或一致有界定理)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，而 $\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，如果 $W \subset \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，有 $\sup\limits_{A \in W} Ax < \infty$ $(\forall x \in \mathscr{X})$，则存在常数 M 使得，$\|A\| \leqslant M$ $(\forall A \in W)$。

Proof. 我们构建一个范数 $\|x\|_W = \|x\| + \sup\limits_{A \in W} |Ax|$。而显然会有 $\|x\|_W$ 强于 $\|x\|$。现在我们说明构建的赋范线性空间 $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_W)$ 是完备的（即 B 空间）。

考虑

$$\|x_n - x_m\|_W = \|x_n - x_m\| + \sup_{A \in W} |A(x_n - x_m)|$$

而 $\|x\|$ 是完备的，故而存在 $\exists x_0 \in \mathscr{X}$ 使得 $x_n \to x_0$，而因此 $\sup\limits_{A \in W} |Ax_m| = \sup\limits_{A \in W} |Ax_0|$，故而其为完备的。且由于 $\|x\|_W$ 强于 $\|x\|$，故而由等价范数定理，存在常数 $M \geqslant 0$ 使得

$$\sup_{A \in W} |Ax| \leqslant \|x\|_G \leqslant M\|x\|$$

则显然有 $\|A\| \leqslant M$。 □

Theorem 3.2.5 (Banach-Steinhaus 定理)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是 B 空间，$\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，M 是 $\mathscr{X}$ 的某个稠密子集。若 $A_n, A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，则 $\forall x \in \mathscr{X}$ 都有

$$\lim_{n \to \infty} A_n x = Ax$$

的充要条件是：

1 $\|A_n\|$ 有界

2 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x = Ax$ 对 $\forall x \in M$ 成立

Proof. 我们先来证明必要性。由于 $A_n, A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，则 $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |A_n x|$ 有界，且由题设，满足共鸣定理，故而显然 $\|A_n\|$ 有界。而条件 2 是显然的。

而后考虑充分性，我们由条件 2，只需要说明那些 $\mathscr{X} \backslash M$ 的元素。由于 M 为 $\mathscr{X}$ 的某个稠密子集，即 $\bar{M} = \mathscr{X}$。因此 $\forall x \in \mathscr{X} \backslash M$，总存在序列 $\{x_n\} \subset M$，满足 $x_n \to x_0$，且 $A_n x_n \to Ax$。而我们不妨用最朴素的方法

$$|A_n x - Ax| \leqslant |A_n x - A_n x_n| + |A_n x_n - A_n x_n| + |Ax_n - Ax|$$

这里我们可以巧妙的控制 x 与 x_n 中 $n > N$ 的部分，巧妙的达到上式小于 ε，故而成立。 □

Theorem 3.2.6 (实 Hahn-Banach 定理)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是实线性空间，而 p 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的次线性泛函，$\mathscr{X}_0$ 为 $\mathscr{X}$ 的实线性子空间，f_0 是定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的实线性泛函，且满足 $f_0(x) \leqslant p(x)$ $(\forall x \in \mathscr{X}_0)$。那么 $\mathscr{X}$ 上必然存在一个实线性泛函 f 满足

1 $f(x) = f_0(x)$，$\forall x \in \mathscr{X}_0$；

2 $f(x) \leqslant p(x)$，$\forall x \in \mathscr{X}$。

Proof. 这里的证明是一步步构建的，首先先构造一个略大于 $\mathscr{X}_0$ 的子流形。考虑任一 $y_0 \in \mathscr{X} \backslash \mathscr{X}_0$，构造 $\mathscr{X}_1 \triangleq \{x + \alpha y_0 \mid x \in \mathscr{X}_0\}$，我们在其上定义的延拓函数 f_1 为

$$f_1(x + \alpha y_0) = f_0(x) + \alpha f_1(y_0)$$

而后我们这里就需要确定 $f_1(y_0)$ 的值。而要求 f_1 受 p 控制，即我们这里就可以任意取 x 来控制

$$f_1(x + \alpha y_0) \leqslant p(x + \alpha y_0)$$

两侧同时除以 $|\alpha|$，考虑 α 的正负性，则有

$$\begin{aligned} f_1(y_0 - z) &\leqslant p(y_0 - z), \quad \forall z \in \mathscr{X}_0, \\ f_1(-y_0 + y) &\leqslant p(-y_0 + y), \quad \forall y \in \mathscr{X}_0. \end{aligned}$$

或

$$f_0(y) - p(-y_0 + y) \leqslant f_1(y_0) \leqslant f_0(z) + p(y_0 - z)$$

而 $f_1(y)$ 取在两侧的任意值即可。且为了能取到合适的 $f_1(y_0)$ 必须且仅须

$$\sup_{y \in \mathscr{X}_0} \{f_0(y) - p(-y_0 + y)\} \leqslant \inf_{z \in \mathscr{X}_0} \{f_0(z) + p(y_0 - z)\}$$

而这里即

$$f_0(z) - f_0(y) = f_0(z - y) \leqslant p(z - y) = p(z - y_0 + y_0 - y) \leqslant p(z - y_0) + p(y_0 - y)$$

故而必然满足。即我们就确定了线性子流形上的一个延拓的泛函。而后我们需要把 f_0 继续延拓到整个 $\mathscr{X}$ 上去，我们利用 Zorn 引理，令

$$\mathscr{F} \triangleq \left\{ (\mathscr{X}_\Delta, f_\Delta) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}_\Delta \subset \mathscr{X} \\ \forall x \in \mathscr{X}_0 \Rightarrow f_\Delta(x) = f_0(x) \\ \forall x \in \mathscr{X}_\Delta \Rightarrow f_\Delta(x) \leqslant p(x) \end{array} \right\}$$

Zorn 引理规定若每一个全序子集都有上界，则存在极大元。我们在 $\mathscr{F}$ 中引入序关系，若 $(\mathscr{X}_{\Delta_1}, f_{\Delta_1}) \prec (\mathscr{X}_{\Delta_2}, f_{\Delta_2})$，则 $\mathscr{X}_{\Delta_1} \subset \mathscr{X}_{\Delta_2}$，且 $f_{\Delta_1}(x) = f_{\Delta_2}(x)$ $(\forall x \in \mathscr{X}_{\Delta_1})$。

于是 $\mathscr{F}$ 成为一个半序集，又考虑 M 是 $\mathscr{F}$ 中的任一个全序子集，令

$$\mathscr{X}_M \triangleq \bigcup_{(\mathscr{X}_\Delta, f_\Delta) \in M} \{\mathscr{X}_\Delta\}$$

以及

$$f_M(x) = f_\Delta(x), \quad (\forall x \in \mathscr{X}_\Delta,\ (\mathscr{X}_\Delta, f_\Delta) \in M)$$

从而这里规定的 $(\mathscr{X}_M, f_M)$ 为 M 的一个上界，依 Zorn 引理其存在极大元，记为 $(\mathscr{X}_\Lambda, f_\Lambda)$。而后我们来证明 $\mathscr{X}_\Lambda = \mathscr{X}$。用反证法，倘若不然则可以构造出 $(\tilde{\mathscr{X}_\Lambda}, \tilde{f}_\Lambda) \in \mathscr{F}$，从而与极大性矛盾。因此 $\mathscr{X}_\Lambda = \mathscr{X}$ 从而 f_Λ 即为我们所求的 f。 □

Theorem 3.2.7 (复 Hahn-Banach 定理)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是复线性空间，且 p 为定义在 $\mathscr{X}$ 上的半范数，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间，f_0 为定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的线性泛函，并满足 $|f_0(x)| \leqslant p(x),\ \forall x \in \mathscr{X}$。那么 $\mathscr{X}$ 上必然有一个线性泛函 f 满足

1 $f(x) = f_0(x)$，$x \in \mathscr{X}_0$；

2 $|f(x)| \leqslant p(x)$，$x \in \mathscr{X}$。

Proof. 这里的复线性空间，我们的证明仅需将其转换为实线性空间的证明。我们定义 $g_0(x) = \mathrm{Re} f_0(x)$。那么我们就会得到 $g_0(x) \leqslant p(x)$。故而我们可以延拓其至 $\mathscr{X}$ 上，必有实线性泛函 g，使得 $g(x) \leqslant p(x)$，$\forall x \in \mathscr{X}$，且 $g_0(x) = g(x)$，$\forall x \in \mathscr{X}_0$。

而后我们来定义 $f(x) \triangleq g(x) - ig(ix)$。则 $f(x) = g_0(x) - ig_0(ix) = \mathrm{Re} f_0(x) + i\mathrm{Im} f_0(x) = f_0(x)$，且由于 $f(ix) = g(ix) - ig(ix) = i[-ig(ix) + g(x)] = if(x)$，因此 f 是复齐次性的。剩下的我们还要说明在 $\mathscr{X}$ 上，$|f(x)|$ 受到 $p(x)$ 控制，考虑 $f(x) \neq 0$，令

$$\theta \triangleq \arg f(x),$$

故而

$$|f(x)| = e^{-i\theta} f(x) = f(e^{-i\theta}x) = g(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x)$$

因此存在该线性泛函。 □

Theorem 3.2.8 (Hahn-Banach 定理的保范延拓推论)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间，$\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间，而 f_0 是定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的有界线性泛函，则在 $\mathscr{X}$ 上必然存在有界线性泛函 f 满足：

- $f(x) = f_0(x)$，$\forall x \in \mathscr{X}_0$，延拓条件
- $\|f\| = \|f_0\|_0$，保范条件

Proof. 在 $\mathscr{X}$ 上定义 $p(x) \triangleq \|f_0\|_0 \cdot \|x\|$，那么 $p(x)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的半范数，从而必然存在 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函 $f(x)$ 使得

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in \mathscr{X}_0$$

以及

$$|f(x)| \leqslant p(x) \leqslant \|f_0\|_0 \cdot \|x\|$$

从而有 $\|f\| \leqslant \|f_0\|$，且又由 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}_0$ 上恒等于 f_0，则 $\|f\| \geqslant \|f_0\|_0$，从而二者相等。 □

Theorem 3.2.9. 设 $\mathscr{X}$ 是可分的 B^* 空间，那么 $\mathscr{X}^*$ 上的任意有界列 $\{f_n\}$ 必有 $*$ 弱收敛的子列。

Proof. 由于 $\mathscr{X}$ 可分，所以 $\mathscr{X}$ 有可数的稠密子集 $\{x_m\}$，由于 $\{f_n\}$ 有界，所以对每一个固定的 m，数集

$$\{\langle f_n, x_m\rangle \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

是有界的，从而我们用对角线法则抽出子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得对于 $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\{\langle f_{n_k}, x_m\rangle \mid k, m \in \mathbb{N}\}$$

是收敛的。再由 x_m 在 $\mathscr{X}$ 中稠密且 $\{f_n\}$ 有界，对于 $\forall x \in \mathscr{X}$，

$$\{\langle f_{n_k}, x\rangle \mid k \in \mathbb{N}, x \in \mathscr{X}\}$$

是收敛数列，记 $F(x) \triangleq \lim\limits_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x\rangle$，则 F 是线性的，且 $\|F(x)\| \leqslant \sup\limits_{n}\|f_n\| \cdot \|x\|$，从而存在 $f \in \mathscr{X}^*$。使得

$$\langle f, x\rangle = F(x) = \lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x\rangle \quad (\forall x \in \mathscr{X})$$

从而 $f_{n_k} \rightharpoonup f$。 □

Theorem 3.2.10. 设 A 是有界线性算子，则 $\sigma(A) \neq \varnothing$。

Proof. 用反证法，倘若 $\rho(A) = \mathbb{C}$，那么 $R_\lambda(A)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，并且当 $|\lambda| > \|A\|$ 时，有

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}A^n$$

以及

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$$

因此，$\|R_\lambda(A)\|$ 在复平面上是有界的。为了导出矛盾，对 $\forall f \in \mathscr{L}(\mathscr{X})^*)$，考察数值解析函数

$$u_f(\lambda) \triangleq f(R_\lambda(A))$$

因为它在全平面是有界的解析函数，依照 Liouville 定理，$u_f(\lambda)$ 是仅依赖于 f 的常值函数，再由推论 2.4.5，$R_\lambda(A)$ 是与 λ 无关的常值算子，依第一预解公式，这显然是不可能的。 □