Notes of Fourier Research

调和分析笔记

Jinhua Wu

Contents

Chapter 1

Fourier 级数和 Fourier 积分

什么是调和分析？

$$\Delta u = 0 \quad \text{调和方程}$$

方法：Fourier 变换、Fourier 级数。

1.1 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

什么时候可以满足?

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx}$$

这里需要注意的是，我们可以对 cos 与 sin 进行变换，以 $\{e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 为 Basis，即

$$\begin{aligned}\cos 2\pi kx &= \frac{e^{2\pi kx} + e^{-2\pi kx}}{2} \\ \sin 2\pi kx &= \frac{e^{2\pi kx} - e^{-2\pi kx}}{2i}\end{aligned}$$

对 f 的要求：f 在 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期。若右边级数一致收敛，则 用了 $\int_0^1 e^{2\pi i(k-j)x}dx = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$

$$\int_0^1 f(x)e^{-2\pi jx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^1 e^{i2\pi(k-j)x}dx$$

$$\text{where } \int_0^1 f(x)e^{-i2\pi jx}dx = c_j$$

记

$$c_j = \hat{f}(j)$$

$$\text{where } \hat{f}(j) \triangleq \int_0^1 f(x)e^{-2\pi jx}dx$$

这里研究的都是 Lesbegue 可积，不同于数学分析中的 Riemann

$f \in L^1([0,1])$，f 定义在 $\mathbb{R}$ 上，以 1 为周期，且 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。这里简记为 $f \in L^1(\mathbb{T})$ [1]，其中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，且 f 的周期为 1，$f \in L^1[0,1)$。若换成 L^p 亦如此。

这里 $\mathbb{T}$ 可以被看作是实数 $\mathbb{R}$ 模 1 的商集。在这个定义下，$\mathbb{T}$ 的元素可以通过对实数取模运算（即 x mod 1）来表示，因此它形成了一个加法群，即在单位圆上通过加法操作可以得到新的元素。

$\mathbb{T}$ 被称为一维环面 (one-dimensional torus)，表示它是一种拓扑空间，可以被看作是单位圆的几何表示。即：

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

或者可以表示为：

$$\mathbb{T} = \{e^{2\pi ix} \mid x \in [0,1)\}$$

这意味着我们可以通过在复平面上绘制单位圆来理解 $\mathbb{T}$，其中每个点的相位角与区间 $[0,1)$ 中的实数 x 一一对应。这个拓扑解释帮助我们理解 $\mathbb{T}$ 的连续性和周期性。作为环面，它不仅有群结构，还可以定义各种拓扑和几何性质，例如我们可以在 $\mathbb{T}$ 上定义距离、度量等。

1.2 Fourier 级数的点态收敛

n 项对称和：

$$S_N f(x) \triangleq \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$$

当然，我们也可以以最初的形式来书写，即

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)$$

[1] $f \in C(\mathbb{T})$，指 $f \in \mathbb{R}$，周期为 1，f 在 $\mathbb{R}$ 上连续

问：当 f 满足什么条件的时候，$S_N f(x)$ 的极限存在？

$$
\begin{aligned}
S_N f(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt \cdot e^{2\pi ikx} \\
&= \int_0^1 f(t) \overbrace{\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ik(x-t)}}^{D_N(x-t)\text{，称为 Dirichlet 核}} dt \\
&= \int_0^1 \underbrace{f(t)D_N(x-t)}_{\text{周期为 }1} dt = \int_0^1 f * D_N dt \\
\text{where } D_N(t) &= \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikt}
\end{aligned}
$$

这里我们可以看出求和与积分交换是基于 Lebesgue 逐项积分定理，见实变函数 P43：

Theorem 1.2.1. 设 $\{f_k\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数列，记

$$
f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in E)
$$

则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ 可逐项积分，即

$$
\int_E f(x)dx \triangleq \int_E \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_k(x)dx
$$

Proof. 这里的证明是自然的，我们令

$$
S_n(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} f_k(x)
$$

即 $\{S_n(x)\}$ 为单调递增列，因而由 Levi 即得。 □

其中

$$
\begin{aligned}
D_N(t) &= \frac{e^{-2\pi iNt}\left(1-\left(e^{2\pi it}\right)^{2N+1}\right)}{1-e^{2\pi it}} \\
&= \frac{e^{-2\pi iNt}(1-e^{2\pi it(2N+1)})}{1-e^{2\pi it}} \\
&= \frac{e^{-2\pi iNt}-e^{2\pi it(N+1)}}{1-e^{2\pi it}}\cdot\frac{e^{-\pi it}}{e^{-\pi it}} \\
&= \frac{e^{-2\pi it\left(N+\frac{1}{2}\right)}-e^{2\pi it\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{e^{-\pi it}-e^{\pi it}} \\
&= \frac{2i\sin\left(2\pi t\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{-2i\sin\pi t} \\
&= \frac{\sin(2\pi t(N+\frac{1}{2})}{\sin\pi t}
\end{aligned}
$$

而考虑 $t=0$ 之后得到

$$
D_N(t)\triangleq\begin{cases}\frac{\sin(2\pi t(N+\frac{1}{2}))}{\sin\pi t} & t\neq 0\\ 2N+1 & t=0\end{cases}
$$

$D_N(t)$ 的性质

1 $D_N(t+1)=D_N(t)$;

2 $\int_0^1 D_N(t)dt=1$;

3 $|D_N(t)|\leqslant\frac{1}{\sin\pi\delta}$，$\delta\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{2}$，$\delta>0$;

4 $D_N(-t)=D_N(t)$

由于 $f\in L^1(\mathbb{T})$，所以这里我们仅需取周期为 1 的一个区间即可。

$$
\begin{aligned}
D_Nf(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)D_N(x-t)dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t)f(x-t)dt
\end{aligned}
$$

Theorem 1.2.2 (Dini 判别法)**.** $f\in L^1(\mathbb{T})$，$x\in[0,1]$，若 $\exists\delta>0$，满足

$$
\int_{|t|<\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{|t|}dt<\infty
$$

则 $S_Nf(x)\to f(x)$，当 $N\to+\infty$。

Proof.

$$
\begin{aligned}
S_N f(x) - f(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) D_N(t) dt - f(x) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt \\
&= \int_{|t|<\delta} \left(\frac{f(x-t)-f(x)}{t} \frac{t}{\sin(\pi t)} \right) \underbrace{\sin \pi(t)(2N+1)}_{\to 0} dt + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} [f(x-t)-f(x)] \frac{\sin(\pi t(2N+1))}{\sin(\pi t)} dt \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

□

Remark 1.2.1. 1. 更进一步的，若满足 Hölder 条件，即

$$
|f(x+t) - f(x)| < t^\alpha, \quad \alpha > 0 \tag{1.1}
$$

则显然满足 Dini 条件。若将 (1.1) 的右侧改为 $\frac{1}{(\ln t)^p}$，其中 $p > 1$，亦满足 Dini 条件。

2. f 在 x 连续，不能推出 Dini 条件。

Theorem 1.2.3 (Dirichlet-Jordan 判别法). $f \in L(\mathbb{T})$，若 $\exists \delta > 0$，s.t.

$$
f \in \mathrm{BV}([x-\delta,\ x+\delta]) \quad \text{有界变差函数}
$$

则 $S_N f(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$，当 $N \to \infty$。

Proof. 1 先设 f 在 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上单调，则

$$
\begin{aligned}
S_N f(x_0) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x_0 - t) D_N(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 - t) D_N(t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(\overbrace{x_0 - t}^{=s}) D_N(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x_0 - t) + f(x_0 + t) \right) D_N(t) dt
\end{aligned}
$$

断言：若 $g(t)$ 在 $[0, \delta]$ 单调，则

$$
\lim_{N \to \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) D_N(t) dt = \frac{1}{2} g(0+)
$$

Proof. 先设 g 在 $[0,\delta]$ 上单调递增，则

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)dt-\frac{1}{2}g(0+) &= \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)D_N(t)-\int_0^{\frac{1}{2}} g(0+)D_N(t)dt\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}(g(t)-g(0+))D_N(t)dt\\
&=\int_0^{\delta}(g(t)-g(0+))D_N(t)dt+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(g(t)-g(0+))}{\sin\pi t}\chi_{[\delta,\frac{1}{2}]}(t)\right]\sin\pi t(2N+1)dt\\
&=\int_0^{\delta}\left(g(t)-\overset{\geqslant 0}{g(0+)}\right)\underbrace{\frac{\sin\pi t(2N+1)}{\sin\pi t}}_{\in C[0,\delta]}dt\\
&\quad+\int_{\delta}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(g(t)-\overset{\to 0}{g(0+)})}{\sin\pi t}\chi_{[\delta,\frac{1}{2}]}(t)\right]\sin\pi t(2N+1)dt\\
&\triangleq I+II
\end{aligned}
$$

$$
I\xRightarrow[\text{积分第二中值定理}]{}\left(\overset{<\varepsilon}{g(\delta)-g(0)}\right)\overbrace{\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin\pi t(2N+1)}{\sin\pi t}dt}^{\leqslant C\text{，不依赖于 }N}
$$

其中

$$
\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin\pi t(2N+1)}{\sin\pi t}dt=\int_{\xi}^{\delta}\sin(\pi t(2N+1))\left(\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin(\pi t(2N+1))}{\pi t(2N+1)}dt(2N+1)
$$

$$
\frac{1}{\pi}\left|\int_a^b\frac{\sin u}{u}du\right|\leqslant\frac{6}{\pi}
$$

$$
\left|\frac{1}{\pi t}-\frac{1}{\sin\pi t}\right|=\frac{|\sin(\pi t)-\pi t|}{|(\pi t)-\sin(\pi t)|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}(\pi t)^2}{(\pi t)\sin(\pi t)}\leqslant\frac{\pi}{4}
$$

而若 $g(t)$ 单调下降，则考虑 $-g(t)$ 是单调上升的，从而对单调函数均可满足。 □

若断言成立，则

$$
\lim_{N\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}f(x_0-t)D_N(t)dt=\frac{1}{2}f(x_0-)
$$

$$
\lim_{N\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}f(x_0+t)D_N(t)dt=\frac{1}{2}f(x_0+)
$$

2 由于 $f \in \mathrm{BV}[x_0-\delta, x_0+\delta]$，则

$$f = f_1 - f_2$$

where f_i 单调上升

从而

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) &= S_N(f_1-f_2)(x_0) = S_N(f_1)(x_0) - S_N(f_2)(x_0) \\ &= \frac{1}{2}(f_1(x_0+0)+f_1(x_0-0)) - \frac{1}{2}(f_2(x_0+0)+f_2(x_0-0)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)) \end{aligned}$$

□

Remark 1.2.2. $f \in \mathrm{BV}[a,b]$，当且仅当 $f = f_1 - f_2$，其中 f_1, f_2 均为单调上升函数。

Remark 1.2.3. f 是否收敛仅与 f 在这一点附近的邻域内的性质有关，见下述定理。

Theorem 1.2.4 (Riemann 局部化)**.** 若 $f \in L^1(\mathbb{T}$，$f(t)=0$，$t \in [x-\delta, x+\delta]$，则

$$S_N f(x) \to 0, \quad \text{when } N \to \infty$$

Proof.

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) D_N(t)\,dt \\ &= \int_{|t|>\delta} f(x-t)\frac{\sin(\pi t(2N+1))}{\sin(\pi t)}dt + \overbrace{\int_{|t|\leqslant\delta} f(x-t)\frac{\sin(\pi t(2N+1))}{\sin(\pi t)}dt}^{=0} \\ &= \int_{|t|>\delta} \frac{f(x-t)}{\sin(\pi t)}\left(\frac{e^{i\pi t(2N+1)} - e^{2\pi t(2N+1)}}{2i}\right)dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{|t|>\delta} e^{i\pi t}\frac{f(x-t)}{\sin(\pi t)}\, e^{i2\pi t}dt - \frac{1}{2i}\int_{|t|>\delta} e^{i\pi t}\frac{f(x-t)}{\sin(\pi t)}\, e^{-i2\pi t}dt \\ &\to 0 - 0 = 0 \qquad \leqslant \frac{|f(x-t)|}{\sin\pi\delta} \end{aligned}$$

□

Theorem 1.2.5 (Riemann-Lesbegue 引理)**.** $f \in L^1(\mathbb{T})$，则

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$$

可推广为

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \hat{f}(\lambda) = 0$$

Proof. 当 $f \in L^1([-1,2])$ 时，

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt \tag{1.2}$$

$$= -\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}e^{-\pi i}dt$$

$$= -\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ik\overbrace{\left(t+\frac{1}{2k}\right)}^{=s}}dt$$

$$= -\int_0^1 f\left(s-\frac{1}{2k}\right)e^{-2\pi iks}ds \tag{1.3}$$

因此

$$|\hat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \left|f(t)-f\left(t-\frac{1}{2k}\right)\right| \to 0, \quad \text{when } |k|\to+\infty \tag{1.4}$$

[2] □

Homework 10th Sep

Example 1.2.1. 证明，$\exists C > 0$

$$\sup_{0\leqslant a<b}\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t}dt\right| \leqslant C$$

Proof. 分为两步，第一步说明 $a=0$ 的情况成立，即

$$\int_0^b \frac{\sin t}{t}dt \to \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}, \quad \text{when } b\to\infty$$

[2]这里是将 (1.2) 与 (1.3) 相加除以 2 即得 (1.4)

下面说明

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt\right| \leqslant \left|\left|\int_0^b \frac{\sin t}{t} dt\right| - \left|\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt\right|\right| \leqslant 2M$$

即可。 □

Example 1.2.2. 举例说明 Dini 判别法，Jordan 判别法的条件互不包含。

Proof. 前者利用 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$，而后者利用跳跃分段函数即可。 □

1.3 连续函数的 Fourier 级数

Theorem 1.3.1 (Du Bios-Reymond). $\exists f \in C(\mathbb{T})$，s.t. f 的 Fourier 级数在某一点发散。

Proof. 我们利用共鸣定理[3]，$\mathscr{X} = C(\mathbb{T})$，$\mathscr{Y} = \mathbb{C}$，$\|f\|_{C(T)} = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$，定义算子

$$T_N f \triangleq S_N f(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) D_N(t) dt$$

$$T_N : \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \text{ 线性}$$

$$\frac{|\sin(\pi t(2N+1))|}{|\sin \pi t|} \leqslant \begin{cases} (2N+2) & B(0,\delta) \\ \frac{1}{\sin \pi\delta} & \text{远} \end{cases}$$

$$\|T_N f\| = |S_N f(0)| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)||D_N(t)|dt \leqslant \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)|dt\right) \|f\|_{\mathscr{X}}$$

从而 $T_N \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$。断言：

$$\|T_N\| \overset{1}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)|dt \overset{2}{=} \frac{4}{\pi^2}\log N + O(1)$$

若断言得证，则由共鸣定理，

$$\exists f_0 \in C(\mathbb{T}) \quad s.t. \ \sup_N \|T_N f_0\| = +\infty$$

1

$$\|T_N\| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)|dt$$

[3] 共鸣定理：$\mathscr{X}$ 为 Banach 空间，$\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间，$\forall \alpha \in \Gamma$，$T_\alpha \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，若满足 $\forall f \in \mathscr{X}$，$\sup\limits_{\alpha\in\Lambda} \|T_\alpha f\| < \infty$，则 $\exists M > 0$ 使得 $\|T_\alpha f\| \leqslant M\|f\|$。

Proof.

$$(i)\ \|T_N\| \leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)| dt$$

$$(ii)\ \forall \epsilon > 0,\ \|T_N\| \geqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)| dt - \varepsilon$$

即找 $\tilde{f}$，s.t. $\tilde{f} \in C(\mathbb{T})$，且

$$\|\tilde{f}\|_{C(\mathbb{T})} = 1, \quad \text{and} \quad |T_N \tilde{f}| \geqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)| dt - \varepsilon$$

而

$$\begin{aligned} T_N \tilde{f} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t) \tilde{f}(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t) \operatorname{sgn}(D_N(t)) dt + \underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t) \left(\tilde{f}(t) - \overset{\leqslant 2}{\operatorname{sgn}(D_N(t))}\right) dt}_{<\varepsilon} \end{aligned}$$

而由于

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \frac{\sin(\pi t(2N+1)}{\sin \pi t}, \\ |t| &\leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

而对于 $\operatorname{sgn}(D_N(t))$ 来说，不连续的点均在取值为 0 的地方，即

$$\begin{aligned} \pi t(2N+1) &= k\pi \\ t &= \frac{k}{2N+1} \quad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

□

Proof.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |D_N(t)|dt &= 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{|\sin(\pi t(2N+1))|}{|\sin(\pi t)|}\frac{1}{2N+1}d(2N+1)t + \overset{O(1)}{\boxed{2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{|\sin \pi t|}-\frac{1}{|\pi t|}\right)dt}} \\
&= 2\int_{0}^{N+\frac{1}{2}} \frac{|\sin \pi u|}{\pi u}du + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\int_{k}^{k+1}\frac{|\sin \pi u|}{u}du + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{0}^{1}\frac{|\sin \pi t|}{t+k}dt + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\sin(\pi t)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{t+k}dt + O(1) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\sin(\pi t)\sum_{k=1}^{N}(\ln N + O(1))dt + O(1) \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2}\ln N + O(1)
\end{aligned}
$$

□

□

Remark 1.3.1. 更进一步，$\exists \tilde{f} \in C(\mathbb{T})$，s.t. f 的 Fourier 级数在一个点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 上发散。

1.4 Fourier 级数按 L^p 收敛

Q1 $f \in L^p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$，$\|S_N f - f\|_p \to \infty$，当 $N \to \infty$;

Q2 $f \in L^p(\mathbb{T})$，$\lim\limits_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$，a.e. $x \in \mathbb{T}$。

考虑若 $f \in C(\mathbb{T})$，那么是否有 $S_N f(x) \to f(x)$，a.e. $x \in \mathbb{T}$? 1926，Kolmorgorov $\exists f \in L^1(\mathbb{T})$，$S_N f(x)$ 发散，$\forall x \in \mathbb{T}$。1965，Carleson，$f \in L^2(\mathbb{T})$，则 $S_N f(x) \to f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{T}$。1967，Hunt，$f \in L^p(\mathbb{T})$，$1 < p < \infty$。

1917，Lusin 猜想，$f \in L^2(\mathbb{T}^n)$，则 $S_N f \to f$，a.e. $x \in \mathbb{T}^n$?

Lemma 1.4.1. $1 \leqslant p < \infty$，则 $\|S_N f - f\|_p \to 0$，当且仅当 $\exists C_p > 0$，s.t. $\|S_N f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$，这里 C_p 是不依赖于 N 与 f 的常数。

Proof. 先证明 $\Longrightarrow$，用共鸣定理（Banach-Steinhous），$\mathscr{X} = \mathscr{Y} = L^p(\mathbb{T})$，$S_N f = D_N * f$。且 $S_N : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 为线性有界算子，则

$$\|S_N f\|_p \leqslant L_N \|f\|_p$$
$$\text{where } L_N = \|D_N\|_p = \int_{-1/2}^{1/2} |D_N(t)| dt = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1)$$

从而 $S_N f \stackrel{L^p}{\to} I f$，$\forall f \in L^p$。

再证明 $\Longleftarrow$，

1 三角多项式：

$$\left\{ \sum_{k=N_1}^{N_2} C_k e^{2\pi i k x} \ : \ N_1, N_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

三角多项式在 L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ 中稠密，从而 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \varphi$ 在三角多项式中，$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$;

2 $\forall \varphi \in$ 三角多项式，

$$\| \overset{\to \varphi}{S_N(\varphi)} - \varphi\|_p \to 0, \quad \text{when } N \to \infty$$

3 由于 $\|S_N f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$，则

$$\|S_N f - f\|_p \leqslant \|S_N f - S_N \varphi\|_p + \|S_N \varphi - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \to 0$$

$\square$

当 $1 < p < \infty$ 时 (下述条件不满足 $p = 1$)

$$S_N f = \frac{i}{2}\left(M_{-N} H M_N - M_N H M_{-N}\right) f$$

其中 $M_a f = e^{2\pi i x \cdot a} f(x)$，$H$ 为 Hilbert 变换，$\|H(f)\| \leqslant C_p \|f\|_p$，$1 < p < \infty$(Chap 2-3)，从而

$$\|S_N f\|_p \leqslant \tilde{C}_p \|H M_M f\|_p \leqslant \tilde{C}_p C_p \|M_N f\| \leqslant \tilde{C}_p C_p \|f\|_p$$

$p = 2$ 时，

$$\begin{aligned}
\|S_N f\|_2 &= \left|\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}\right|_2 \\
&= \left(\sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

1.5 两种 Fourier 级数的求和法

1 算数平均求和 (C_1 求和)

2 Abel 求和

1.5.1 算数求和

Definition 1.5.1 (算数平均求和).

$$\begin{aligned}\sigma_N f(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f(x)\\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left[\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x-t)\right]}_{\text{Fejer 核}} f(t)dt\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}F_N(t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t)\\ &= \frac{2\sin(\pi t)}{N+1}\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}\sin(\pi t(2k+1))}{2\sin(\pi t)\sin(\pi t)}\\ &= \frac{(-1)}{N+1}\frac{\sum\limits_{k=0}^{N}[\cos(2\pi t(k+1))-\cos(2\pi tk)]}{2\sin^2(\pi t)}\\ &= \frac{1-\cos(2\pi t(N+1))}{(N+1)2\sin^2(\pi t)}\\ &= \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2(\pi t(N+1))}{\sin^2(\pi t)}\end{aligned}$$

1.5.2 Fejer 核的性质

1 $F_N(t) \geqslant 0$;

2 $\int\limits_0^1 F_N(t)dt = 1$;

3 $F_N(t+1) = F_N(t)$;

4 当 $\delta > 0$ 时，

$$\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{2}} F_N(t)dt \leqslant \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{2}} \frac{1}{(N+1)\sin^2\pi\delta}dt \to 0 \quad \text{when } N\to\infty$$

> **Theorem 1.5.1.** 1 $f \in L^p(\mathbb{T})$，$1 \leqslant p < \infty$，$\|\sigma_N f - f\|_p \to 0$，当 $N \to \infty$；
>
> 2 $f \in C(\mathbb{T})$，$\|\sigma_N f - f\|_\infty \to 0$，当 $N \to \infty$。

Proof.

$$
\begin{aligned}
\|\sigma_N f(x) - f(x)\|_p &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)F_N(t)dt - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)F_N(t)dt \right|_p \\
&= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x-t) - f(x)]F_N(t)dt \right| \\
&\leqslant \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|f(x-t) - f(x)\|_{L^p(dx)} |F_N(t)| dt \\
&= \int_{|t|<\delta} \underbrace{\|f(x-t) - f(x)\|_p}_{<\varepsilon} F_N(t)dt + \int_{|t|>\delta} \|f(x-t) - f(x)\|_p F_N(t)dt \\
&< \varepsilon \cdot 1 + 2\|f\|_p \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} F_N(t)dt \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

□

Corollary 1.5.1. 三角多项式在 L^p 中稠密。

Corollary 1.5.2. $f \in L^p(\mathbb{T})$，$\hat{f}(k) = 0$，$\forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，则 $f(x) = 0$，a.e. $x \in \mathbb{T}$。

1.5.3 Abel 求和

我们仅仅知道 $|\hat{f}(k)| \to 0$，当 $|k| \to \infty$，但求和是否收敛是未知的。

$$U_f(r,\theta) \triangleq \overbrace{\sum_{k=-N}^{N} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{2\pi i k\theta}}^{\leqslant \sum r^{|k|}\|f\|_1\text{，即加入 } r^{|k|} \text{ 项后一致收敛}} = P_r * f(\theta), \quad 0 \leqslant r < 1, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$$

$$U_f(r,\theta) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{2\pi i k(\theta - t)}}^{\text{Poisson Kernel } P_r(\theta - t)} f(t)dt$$

其中 Poisson Kernel

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi i k t} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi i k t} + \sum_{k=-\infty}^{0} r^{|k|}e^{2\pi i k t} \overset{l=-k}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(re^{2\pi i k t}\right)^k + \sum_{l=1}^{\infty}\left(re^{-2\pi i t}\right)^l$$
$$= \frac{1}{1-re^{2\pi i t}} + \frac{re^{-2\pi i t}}{1-re^{-2\pi i t}} = \frac{1-re^{-2\pi i t}+re^{-2\pi i t}-r^2}{(1-re^{2\pi i t})(1-re^{-2\pi i t})} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi t)}, \quad |r|<1$$

其中 $|t| \leqslant \frac{1}{2}$，即 Poisson Kernel 是定义在圆盘上的。并且，由此可见 Poisson Kernel 与 Fejer Kernel 有相同的性质。

1.5.4 Possion 核的性质

1 $P_r(t) \geqslant 0$;

2 $\int_0^1 P_r(t)dt = 1$;

3 $P_r(t+1) = P_r(t)$;

4 当 $\delta > 0$ 时，

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} P_r(t)dt \leqslant \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi\delta)} \to 0 \quad \text{when } r \to 1^-$$

Theorem 1.5.2. 1 $f \in L^p(\mathbb{T})$，$1 \leqslant p < \infty$，$\|P_r f - f\|_p \to 0$，当 $r \to 1^-$；

2 $f \in C(\mathbb{T})$，$\|P_r f - f\|_C \to 0$，当 $r \to 1^-$。即

$$\max\ |f(\theta) - P_r * f(\theta)| \to 0, \quad \text{when } r \to 1^-$$

Corollary 1.5.3. $f \in L^1(\mathbb{T})$，$\hat{f}(k) = 0$，则 $f = 0$，a.e. $x \in \mathbb{T}$。

Theorem 1.5.3. 若 $f \in L^p(\mathbb{T})$，$1 \leqslant p < \infty$，则 $U(r,\theta)$ 满足

即证调和

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & |x| < 1 \\ u(x) = f, & |x| = 1 \quad L^p\text{范数下} \end{cases}$$

Proof. 即我们需要证明 U 是解析函数的实部，从而 $U(r,\theta)$ 是调和函数。

$$U(r,\theta) = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) r^k e^{2\pi i k\theta} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \hat{f}(k) r^{-k} e^{2\pi i k\theta}$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{-\infty} \hat{f}(k) r^{-k} e^{2\pi i k\theta} &= \sum_{l=1}^{\infty} \hat{f}(-l) r^l e^{-2\pi i l\theta} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\hat{f}(l)}\, \overline{r^l e^{2\pi i l\theta}} \\ &= \overline{\sum_{l=1}^{\infty} \hat{f}(l) r^l e^{2\pi i l\theta}} \end{aligned}$$

上式利用了

$$\hat{f}(-l) = \int_0^1 f(-x) e^{2\pi i l x} dx = \overline{\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i l x} dx} = \overline{\hat{f}(l)}$$

因此，

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \hat{f}(0) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) (r e^{2\pi i\theta})^k \\ &= \mathrm{Re}\left[\hat{f}(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k) z^k \right], \quad \text{where } z = r e^{2\pi i\theta} \end{aligned}$$

□

1.6 L^1 函数的 Fourier 变换

$$f(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Definition 1.6.1. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则定义

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Proposition 1.6.1. 1 线性性质：

$$(\widehat{af + bg}) = a\hat{f} + b\hat{g}, \quad a, b \in \mathbb{R}^n;$$

2

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1};$$

3 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$，即连续且 $\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0^a$。

4

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)$$

5

$$(\widehat{\tau_a g})(\xi) = \widehat{h}(\xi) e^{2\pi i a \xi}$$

其中，$\tau_a g(x) \triangleq g(x+a)$。

6 设 O 为 $\mathbb{R}^n$ 重的正交变换，则

$$\widehat{g(O, \cdot)} = \widehat{g}(O \cdot \xi)$$

7 g 为径向函数 $\Longleftrightarrow g(y) = g_0(|y|)$，$\forall y \in \mathbb{R}^n$。

$\forall\lambda>0$，$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，

$$\widehat{\left(\frac{1}{\lambda^n}f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right)}=\hat{f}(\lambda\xi)$$
$$\widehat{(f(\lambda\cdot)}(\xi)=\frac{1}{\lambda^n}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

8 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则[b]

$$\left(\widehat{\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}}\right)=2\pi i\xi_k\hat{f}(\xi)$$
$$\Longleftrightarrow\quad \hat{f}(\xi)=\frac{1}{2\pi i\xi_k}\left(\widehat{\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}}\right)$$

9 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，

$$(2\pi\widehat{ix_k f(x)})=-\frac{\partial\hat{f}(\xi)}{\partial\xi_k},\quad\forall k=1,2,\cdots,n$$

[a]即 Riemann-Lesbegue 引理

[b]Homework 24th Sep, Prove $n=1$

Proof. 4.

By Fubini Thorem.

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(x)dxe^{-2\pi iy\xi}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)e^{-2\pi y\xi}dyg(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)e^{-2\pi(y-x)\xi}dye^{-2\pi ix\xi}g(x)dx \\
&= \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

5.

$$(g\widehat{(x)e^{2\pi iax}})(\xi) = \widehat{g}(\xi - a)$$

6.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(\overbrace{O\cdot x}^{y})e^{2\pi ix\xi}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i\overbrace{O^T y\xi}^{=(O^Ty)\cdot\xi=(O^Ty)^T\xi=y^TO\xi}}|\det(O^T)|dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi iy(O\xi)}|\det(O^T)|dt \\
&= \widehat{g}(O\cdot\xi)
\end{aligned}$$

□

1.6.1 Fourier 级数与 Fourier 变换的对比

Fourier 级数：$f\in L^p(\mathbb{T})$，$p>1\Rightarrow f\in L^1(\mathbb{T})$

Proof.

$$\int_0^1 |f(t)|\cdot|1|dt \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_0^1 1^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Fourier 变换：$f\in L^p(\mathbb{R}^n)\not\Rightarrow\ f\in L^1(\mathbb{R}^n)$

Question 当 $f\in L^P(\mathbb{R}^n)$，$\hat{f}$ 如何定义？

1.7 Schwarz 类与缓增分布

Definition 1.7.1. Schwarz 类（速降函数类）记为 $\mathcal{S}$，

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |D^\alpha f(x)| \leqslant \frac{C_{\alpha,N}}{|x|^N} \Longleftrightarrow \boldsymbol{p}_{\alpha,\beta} < +\infty$$

$$\boldsymbol{p}_{\alpha,\beta}(f) \triangleq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)|$$

Example 1.7.1. $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，$C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$

注：$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$

$$\|f\| \triangleq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\boldsymbol{p}_k(f)}{1+\boldsymbol{p}_k(f)}$$

为准范数（不满足齐次性）。即 $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 为 F 空间。

Definition 1.7.2. $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ 有 $\boldsymbol{p}_{\alpha,\beta}(f_k) \to 0$，当 $k \to \infty$。

注：$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{稠密}}{\subseteq} L^p(\mathbb{R}^n)$，$1 \leqslant p < \infty$。

Theorem 1.7.1. 1 Fourier Transform $\mathscr{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，且该映射连续;

2 乘法公式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

3 反演公式 $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Proof. 1 $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，往证：$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。$\forall \alpha, \beta$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_{\alpha,\beta}(\hat{f}) &= \sup_\xi |\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi)| = C_{\alpha,\beta}[\widehat{\xi^\beta (x^d f)}] \\ &\leqslant C_{\alpha,\beta}\|D^\beta(x^\alpha f)\|_{L^1} \leqslant \sum_{|j,k|\leqslant m} \tilde{C}_{\alpha,\beta}\|x^j D^k f\| \leqslant \sum_{|j,k|\leqslant n} \boldsymbol{p}_{j+k+1,k}(f) \left|\frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\right| < \infty\end{aligned}$$

即考虑

$$f_l \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \overset{?}{\Rightarrow} \widehat{(f_l)} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$$

2

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi iux}g(x)dudx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u)f(u)du$$

3

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f(\lambda\cdot)}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda\xi)\hat{g}(\xi)d\xi$$
$$RHS = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda^n}\hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)g(x)dx \stackrel{\frac{x}{\lambda}=u}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(\lambda u)du$$

令 $\lambda \to 0$，则

$$\text{LHS} = g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(u)du = f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)d\xi$$

Lemma 1.7.1.

$$\widehat{e^{-\pi|x|^2}} = e^{-\pi|\xi|^2}$$

[a]

[a]Homework 24th Sep

令 $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$，从而 $g(0) = 1$，且 $\int g(x)dx = 1$，因此

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(u)du$$

在证明了特殊情形，即 $x = 0$ 后，我们进行平移，考虑

$$f(x) = \tau_x f$$

从而

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_x f(u)}du = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(u)e^{2\pi ixu}du$$

$\square$

Example 1.7.2. $f_k \stackrel{\mathcal{S}}{\to} f \iff \forall\alpha,\beta \in (\mathbb{Z}^+)^n$，$\boldsymbol{p}_{\alpha,\beta}(f_k - f) \to 0$，当 $k \to \infty$ 时。

Remark 1.7.1. 由 Theorem 1.7.1，若 $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$，则 $\hat{f}_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{f}$。

Definition 1.7.3. 缓增分布 $\mathcal{S}'$，指的是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上全体线性连续泛函。

$$T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \text{线性}$$

且连续，若 $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$，则 $T(\varphi_k) \to 0$，当 $k \to \infty$[a]。

[a] 这里无需处处收敛，由于其线性性质，由泛函分析中的定理即可得到其等价于收敛于 0 处一点

Example 1.7.3. $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$。则

$$T_f(\varphi) \triangleq \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Proof. 验证其连续与线性，其中线性是显然的。

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &\leqslant \|f\|_p \|\varphi\|_p' \leqslant \|f\| \cdot \left\| \frac{\boldsymbol{p}_{0,n+1}(\varphi)}{(1+|x|)^{n+1}} \right\|_{p'} \\ &\leqslant C_p' \boldsymbol{p}_{0,n+1}(\varphi_k) \|f\|_p \to 0 \quad \text{when } k \to +\infty \end{aligned}$$

因此

$$\|Tf\|_{\mathscr{X}} \leqslant C\|f\|_{\mathscr{X}} \Rightarrow \text{连续}$$

□

Remark 1.7.2.

$$e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Proposition 1.7.1. 任意多项式

$$a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{S}'$$

Proposition 1.7.2. 狄拉克函数

$$\delta(\varphi) \triangleq \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\|\delta(\varphi)\| \leqslant \|\varphi(0)\| \leqslant \boldsymbol{p}_{0,0}(\varphi)$$

且不存在 $f \in L^1_{\text{Loc}}$，s.t. $f(x) = \delta(x)$，a.e. 即

即局部可积

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \neq \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Proposition 1.7.3. $T_k, T \in \mathcal{S}'$，称 $T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$，当 $k \to \infty$，指

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad T_k(\varphi) \to T(\varphi), \quad \text{when } k \to \infty$$

Definition 1.7.4. 若 $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，则定义

$$\widehat{T}(\varphi) \triangleq T(\widehat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

当 $T \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\hat{T} = \int_{\mathbb{R}^n} T(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

Proof. $\forall \varphi \in \mathcal{S}$，则

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \widehat{T}(\varphi) = T(\varphi) \\
\text{RHS} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} T(x)e^{-2\pi i x\xi}dx\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)e^{-2piix\xi}d\xi T(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)T(x)dx
\end{aligned}$$

□

Theorem 1.7.2. 1 $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，线性连续；

2 $\mathcal{F}^{-1}$ 存在连续，且

$$\mathcal{F}^{-1} = F \cdot F \cdot F$$

Proof. 1 $\forall T \in S'$，往证 $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$。事实上，$\forall \varphi_k \in \mathcal{S}$，且 $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$

$$\widehat{\varphi_k} \to 0$$

$$\widehat{T}(\varphi_k) = T(\widehat{\varphi_k}) \to T(0) = 0$$

连续性：$T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$，当 $k \to \infty$，往证 $\widehat{T_k} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{T}$。事实上，$\forall \varphi \in \mathcal{S}$，

$$\widehat{T_k}(\varphi) = T_k(\widehat{\varphi}) \to T(\widehat{\varphi}) \to \widehat{T}(\varphi)$$

2

$$\mathcal{F}^{(4)}(T)(\varphi) = \mathcal{F}^{(3)}(T)(\widehat{\varphi}) \overset{\forall T \in \mathcal{S}'}{=} T\left(\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{\varphi}}}}\right) = T(\varphi)$$

即

$$\mathcal{F}^{(4)} = \mathbf{I}, \quad \mathcal{F}^{(3)} \cdot \mathcal{F} = \mathbf{I}$$

□

Proposition 1.7.4.

$$\widehat{\delta} = 1$$

Proof. 即验证 $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$$
$$1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \varphi dx$$

也可以用类似的方法证明

$$\widehat{1} = \delta$$

□

1.8 L^p 函数的 Fourier 变换，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$

1 $L^p \subseteq \mathcal{S}'$，$1 \leqslant p \leqslant +\infty$；故而有

$$f \in L^p, \quad \widehat{f} \in \mathcal{S}' \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}} = f$$

2 $p = 2$

(1) $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，且 $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$，即等距的 (**Blancherel Theorem**)；

(2)

$$\widehat{f}(\xi) \overset{L^2}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leqslant R} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

即

$$\left\| \lim_{R\to\infty} f(x)\chi_{\mathrm{B}(0,R)}(x) e^{-2\pi i x\xi} dx - \widehat{f} \right\|_2 \to 0, \quad \text{when } R \to \infty$$

(3)

$$f(x) \overset{L^2}{=} \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|\leqslant R} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi$$

Proof. (1) 由于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，$\mathcal{S} \overset{稠密}{\subseteq} L^2(\mathbb{R}^n)$，故而 $\exists \varphi_k \in \mathcal{S}$，且 $\|\varphi_k - f\|_2 \to 0$，当 $k \to \infty$，而 $\{\widehat{\varphi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中为 Cauchy 列，即

$$\|\widehat{\varphi_{k+j}} - \widehat{\varphi_k}\| = \|\widehat{\varphi_{k+j} - \varphi_k}\| \overset{\text{Lemma 1}}{=} \|\varphi_{k+j} - \varphi_k\|_2 \to 0 \quad \text{when } k \to \infty$$

故而 $\exists C(f) \in L^2$，s.t. $c(f) \overset{L^2}{=} \lim_{k\to\infty} \widehat{\varphi_k}$，断言

$$c(f) = \widehat{f}$$

事实上，$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，

$$c(f)(\psi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi_k}(\xi)\psi(\xi) d\xi = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\xi)\widehat{\psi(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\psi}(x) dx$$
$$\text{RHS} = \hat{f}(\psi) = f(\psi) = \text{LHS}$$

Lemma 1.8.1. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\|\varphi\|_2 = \|\widehat{\varphi}\|_2$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{\varphi}\|_2 &= \int \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}}(\xi)d\xi = \int \varphi(x)\widehat{\overline{\widehat{\varphi}}}(x)dx \\
&= \int \varphi(x)\overline{(\widehat{\varphi})^{\vee}}(x)dx \\
&= \int \varphi(x)\overline{\varphi}(x)dx = \|\varphi\|_2^2
\end{aligned}
$$

当 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，由于 $\varphi_k \in \mathcal{S}$，

$$\|\varphi_k\|_2 = \|\widehat{\varphi}\|_2$$

令 $k \to \infty$ 即得

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

□

(2)

$$f\xi_{\mathrm{B}(0,R)} \xrightarrow{L^2} f, \quad \text{when } R \to +\infty$$

则

$$\mathcal{F}(f\xi_{\mathrm{B}(0,R)}) \xrightarrow{L^2} \widehat{f}$$

(3)

$$\widehat{f}\xi_{\mathrm{B}(0,R)} \xrightarrow{L^2} \widehat{f}$$

则

$$\mathcal{F}\left(\widehat{f}\xi_{\mathrm{B}(0,R)}\right)(-x) \xrightarrow{L^2} \widehat{\widehat{f}}(-x) = f$$

□

已知

(1)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}: & L^1 \to L^\infty \\ & \|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}: & L^2 \to L^2 \\ & \|\widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2\end{aligned}$$

Theorem 1.8.1 (Hausdorff-Young). $f \in L^p(\mathbb{R})$，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$$

其中 $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$。

Proof.

$$\mathcal{F}: L^1 + L^2 \to L^\infty + L^2, \text{线性算子}$$

即

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_{L^\infty} &\leqslant \|f\|_1 \\ \|\widehat{f}\|_2 &= \|f\|_2\end{aligned}$$

由 Riesz-Thorin Interpolation，$\forall 1 < p < 2$，

$$\|\widehat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 1.8.2 (Riesz-Thorin Interpolation). $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$，若：$T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L_{q_0} + L_{q_1}$ 为线性算子，则

$$\|Tf\|_{q_0} \leqslant A_0 \|f\|_{p_0} \quad \forall f \in L^{p_0}$$
$$\|Tf\|_{q_1} \leqslant A_1 \|f\|_{q_1} \quad \forall f \in L^{p_1}$$

则 $\forall p_0 < p < p_1$，有

$$\|Tf\|_q \leqslant A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_p$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$
$$0 < \theta < 1$$

Remark 1.8.1.

$$f \in L^{p_0} + L^{p_1} \iff f = f_0 + f_1$$
$$f_0 \in L_{p_0}, \quad f_1 \in L^{p_1}$$

即这两点之间的所有点的有界性都是成立。

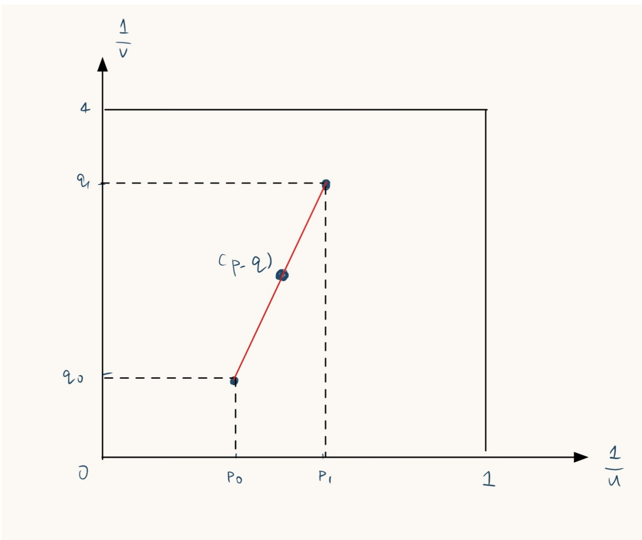

Figure 1.1: 即对于两点连线之上的任意一点都是有界的

且 $\forall f \in L^p$，$p_0 < p < p_1$，则 $f = f_0 + f_1$，其中 $f_0 \in L^{p_0}$，$f_1 \in L^{p_1}$。即

$$f(x) = f(x)\chi_{|f(x)|>1}(x) + f(x)\chi_{|f(x)|\leqslant 1}$$

且

$$\int |f_0(x)|^{p_0} dx = \int_{\{x:|f(x)|>1\}} |f(x)|^{p_0} \cdot 1^{p-p_0} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} dx = \|f\|_p^p < +\infty$$

Theorem 1.8.3 (Young Inequation)**.** 对于 $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$，则有

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

其中

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Proof. 固定 p，$q = 1$，则

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$$

我们利用广义的 Minkowski Inequation，

$$\begin{aligned} \left\| \int f(x-y)g(y)dy \right\|_p &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y)\|_p |g(y)| dy \\ &= \|f\|_p \|g\|_1 \end{aligned}$$

$q = p'$ 时，

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

即

$$\begin{aligned} \left\| \int f(x-y)g(y)dy \right\|_\infty &\leqslant \left\| \int |f(x-y)||g(y)|dy \right\| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_p \|g\|_{p'} \end{aligned}$$

而由上述两个点我们可以发现

$$\|Tg\|_p \leqslant A_0\|g\|_1$$
$$\|Tg\|_\infty \leqslant A_1\|g\|_{p'}$$

由 Riesz-Thorin Interpolation，$\forall 1 < q < p'$，有

$$\|Tg\|_r \leqslant A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}\|g\|_q$$

其中

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p'}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty}$$

化简可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} &= \frac{p}{r} + \frac{1}{p'} - \frac{p}{rp'} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{p'} \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{q} - (1 - \frac{1}{p}) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\end{aligned}$$

□

1.9 Fourier 积分与求和

考虑

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B(0,R)}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi \overset{?}{=} f(x)$$

Definition 1.9.1. $n=1$，定义

$$\begin{aligned} S_Rf(x) &= \int_{-R}^{R}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi, \quad S_R(f)\xrightarrow[L^p]{a.e.} f \\ &= f * D_R \end{aligned}$$

其中

$$D_R(x)=\frac{\sin(2\pi Rx)}{\pi x}$$

Proof.

$$\begin{aligned} S_Rf(x) &= \int_{-R}^{R}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi iy\xi}dy e^{2\pi ix\xi}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\underbrace{\int_{-R}^{R}e^{-2\pi i(y-x)\xi}d\xi}_{D_R(y-x)}\,dy \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R}e^{-2\pi iu\xi}d\xi &= 2\int_0^R\cos(2\pi u\xi)d\xi \\ &= \frac{2\sin(2\pi u\xi)}{2\pi u}\bigg|_0^R = \frac{\sin(2\pi uR)}{\pi u} \end{aligned}$$

而

$$\int_{\mathbb{R}}|D_R(x)|dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{|\sin(2\pi Rx)|}{|2R\pi x|}d(2Rx) = 2\int_0^{+\infty}\frac{|\sin u|}{|u|}du = +\infty$$

因而非绝对收敛，即 $D_R\notin L^1$，但 $D_R\in L^q$，$\forall q>1$。

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(2\pi Rx)}{\pi x}\right|^q dx = \int_{|x|<1}(2R)dx + \int_{|x|\geqslant 1}\frac{1}{|\pi x|^q}dx < +\infty$$

$\square$

Theorem 1.9.1. 当 $n=1$，$1<p<\infty$[a]，

$$\|S_R f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$$

$f \in L^p$，$1<p<+\infty$，

$$S_R f(x) \to f(x) \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}$$

[a] Chap3，复杂

1.9.1 求和法

算术平均求和法

定义：

$$\begin{aligned}\sigma_R f(x) &\triangleq \frac{1}{R}\int_0^R S_t f(x)dt \\ &= f * F_R(x)\end{aligned}$$

其中

$$F_R(x) = \left[\frac{\sin(\pi R x)}{\pi x}\right]^2 \frac{1}{R}$$

称为 Fejer 核。

Proof.

$$\begin{aligned}\sigma_R f(x) &= \frac{1}{R}\int_0^R \int_{\mathbb{R}} f(x-y)D_t(y)dydt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \boxed{\frac{1}{R}\int_0^R D_t(y)dt}\, f(x-y)dy\end{aligned}$$

$\triangleq F_R(y)$

从而

$$\begin{aligned}F_R(y) &\triangleq \frac{1}{R}\int_0^R \frac{\sin(2\pi t y)}{\pi y}dt \\ &= -\frac{1}{R}\frac{\cos(2\pi t y)}{2\pi y \cdot \pi y} \\ &= \frac{1-\cos(2\pi R y)}{2R(\pi y)^2} \qquad = \frac{\sin^2(\pi R y)}{R(\pi y)^2}\end{aligned}$$

且

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} F_R(x)dx &= \int \frac{\sin^2(\pi Rx)}{(R\pi x)^2} d(xR) \\
&= \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin^2(\pi u)}{(\pi u)^2} d(\pi u) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = 1
\end{aligned}
$$

□

1 $F_R \in L^1$，

$$\int_{\mathbb{R}} |F_R(x)| dx = 1$$

2 $F_R(x) \geqslant 0$，当 $f \in L^p$，

$$\lim_{R \to +\infty} \|F_R * f - f\|_p = 0$$

当 $f \in C_0$，

$$\lim_{R \to +\infty} \|F_R * f - f\|_\infty = 0$$

Abel 求和

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \overset{?}{=} f(x)$$

在 L^p 意义下，或是 a.e. 意义下。

Poisson 积分

$$u(x,t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = f * P_t$$

Gauss 积分

$$w(x,t) \triangleq \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = f * W_t$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2|\xi|^2} \int f(y) e^{-2\pi i y\xi} dy e^{2\pi i x\xi} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2|\xi|^2} e^{-2\pi i \xi(y-x)} d\xi}_{= W_t(x-y)} f(y) dy
\end{aligned}
$$

已知

$$
\widehat{e^{-\pi|x|^2}} = e^{-\pi|\xi|^2}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
W_t(u) &= (\widehat{e^{-\pi t^2|\xi|^2}})(-u) \\
&= \frac{1}{t^n} e^{-\pi|\frac{-u}{t}|^2} = \frac{1}{t^n} e^{-\pi \frac{u^2}{t^2}}
\end{aligned}
$$

$\square$

1 $W_t(u) \in L^1$，$\int W_t(u)du = 1$，

$$
\begin{aligned}
W_t(u) &= (e^{-\pi u^2})_t \quad \psi_t(u) \triangleq \frac{1}{t^n}\psi(\frac{u}{t}) \\
P_t(u) &= \left(c_n \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right)
\end{aligned}
$$

恒等逼近

$$
\phi \in L^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1
$$

定义

$$
\phi_t(x) \triangleq \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right), \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
$$

Theorem 1.9.2. 1 $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，

$$
\|f * \phi_t - f\|_p \to 0, \quad t \to 0 \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty
$$

2 $\forall f \in C_0(\mathbb{R}^n)$，(减弱为 $f \in UC^a \cap L^\infty$ 亦满足)

$$
\|f * \phi_t - f\|_\infty \to 0, \quad \text{when } t \to 0
$$

[a]一致连续

Proof.

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_t(x) - f(x)\cdot 1\|_p &= \left\| \int f(x-y)\phi_t(y)dy - \int f(x)\phi_t(y)dy \right\| \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\phi_t(y)dy \right\| \\
&\overset{\texttt{Minkowski}}{\leqslant} \int_{|y|<\delta} + \int_{|y|\geqslant\delta} \\
&< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(y)|dy + 2\|f\|_p \int_{|y|\geqslant\delta} |\phi_t(y)|dy \\
&< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(y)|dy + 2\|f\|_p \int_{|y|\geqslant\delta} \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{y}{t}\right) dy < \varepsilon'
\end{aligned}$$

□

Chapter 2

Hardy-Littlewood 极大算子

2.1 恒等逼近

$\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$，$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$，$\forall t > 0$，定义：

$$\phi_t(x) \triangleq \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$$

Corollary 2.1.1. 1.

$$\|f * F_{\frac{1}{R}} - f\|_p \to 0$$

其中 F 为 Fejer Kernel

$$F_{\frac{1}{R}} \triangleq \frac{\sin^2(\pi Rx)}{(\pi x)^2 R} = \left(\frac{\sin^2(\pi u)}{(\pi u)^2}\right)_{\frac{1}{R}}$$

2.

$$\|f * P_t - f\|_p \to 0$$

其中 P 为 Poisson Kernel

$$P_t = \left(c_n \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)_t$$

3.

$$\|f * W_t - f\|_p \to 0$$

其中 W 为 Gauss Kernel

$$W_t = \left(e^{-\pi^2|x|^2}\right)_t$$

Corollary 2.1.2.

$$\phi_t \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta, \quad \text{when } t \to 0$$

即 $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，$\int \phi_t(x)\psi(x)dx \to \psi(0)$，当 $t \to 0$。

Question 当 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$1 \leqslant p < \infty$，

$$\left.\begin{matrix} f * F_{\frac{1}{R}} \\ f * W_t \\ f * P_t \end{matrix}\right\} \xrightarrow[?]{a.e.} f(x)$$

上述问题等价于 $\lim\limits_{R\to\infty} f * F_{\frac{1}{R}}$ 存在 a.e.

2.2 点态收敛与极大算子的有界性

Definition 2.2.1 (次线性算子)**.** 若 T 为次线性算子，当且仅当:

1. $|T(f+g)(x)| \leqslant |Tf(x)| + |Tg(x)|$;
2. $|T(cf)(x)| = |c| \cdot |Tf(x)|$，$\forall c \in \mathbb{C}$。

Definition 2.2.2 (强 p, q 型)**.** T 称为强 p, q 型算子，当且仅当 $\|Tf\|_q \leqslant C_{p,q}\|f\|_p$，$\forall f \in L^p$，$0 < p, q < \infty$。

Definition 2.2.3 (弱 p, q 型)**.** T 称为弱 p, q 型算子，当且仅当 $|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$，$\forall f \in L^p$，$0 < p, q < \infty$。

Corollary 2.2.1. 强 p, q 显然可以推出弱 p, q 型:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_{p,q}\|f\|_p$$

Proof. 考虑左侧放缩

$$\text{LHS} \geqslant \left(\int_{\{x:|Tf(x)|>\lambda\}} |Tf(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \left(\int_{\{x:|Tf(x)|>\lambda\}} \lambda^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \lambda \cdot |\{x : |Tf(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{q}}$$

因此有

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{C_{p,q}\|f\|_p}{\lambda}$$

即得 □

Corollary 2.2.2. 将空间改为测度空间依然满足，即 $(\mathscr{X}, \mu)$，其中 μ 为测度，满足

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. $0 \leqslant \mu(E) \leqslant +\infty$;
3. $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

Theorem 2.2.1. $\forall t \in I$，T_t 为 $L^p(\mathscr{X}, \mu) \to L^q(\mathscr{Y}, \nu)$ 的一个可测函数空间，T_t 为线性算子，定义极大算子

$$T^*(f)(x) \triangleq \sup_{t \in I} |T_t(f)(x)|$$

若 T^* 为弱 p, q 型，设 $t_0 \in \overline{I}$，则

$$\mathcal{F} \triangleq \{f \in L^p(\mathscr{X}, \mu) : \lim_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x),\ a.e.\ x \in \mathscr{X}\}$$

为 $L^p(\mathscr{X}, \mu)$ 的闭集。

Proof. 设 $f_n \in \mathcal{F}$，且 $f_n \xrightarrow{L^p} f$，往证 $f \in \mathcal{F}$[1]，即意味着该集合的聚点都在集合内，即为闭集。

而 $f \in L^p$，显然。因此我们往证

$$\lim_{t \to t_0} |T_t f(x) - f(x)| = 0 \quad a.e.$$

即

$$\mu\left\{\overline{\lim_{t \to t_0}} |T_t f(x) - f(x)| > 0\right\} = 0$$

即 $\forall \lambda > 0$，

$$\mu\left\{x \in \mathscr{X} :\ \overline{\lim_{t \to t_0}} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\right\} = 0$$

[1] 为了证明 $\forall f \in L^p$，

$$\lim_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x)\ a.e.$$

只需

1. $\forall f \in C_0^\infty$;
2. $\sup\limits_{t>0} |T_t f(x)|$ 为弱 p, q 型。

而

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-f(x)| &= \overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-T_tf_n(x)+T_tf_n(x)-f_n(x)+f_n(x)-f(x)| \\ &\leqslant \overline{\lim_{t\to t_0}}|T_t(f-f_n)(x)|+\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf_n(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|\end{aligned}$$

故而

$$\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-f(x)|>\lambda\right\}\subseteq\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}|T_t(f-f_n)|+\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf_n-f_n|+|f_n-f|>\lambda\right\}$$

即

$$\text{LHS}=\mu\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-f(x)|>\lambda\right\}\leqslant\mu\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}|T_t(f-f_n)|+\overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf_n-f_n|+|f_n-f|>\lambda\right\}$$

记 $E_n=\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}T_tf_n(x)\neq f_n(x)\right\}$，$E\triangleq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，$\mu(E)=0$。
从而

$$\begin{aligned}\text{LHS}&\leqslant\mu\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}|T_tf(x)-T_tf_n(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}+\mu\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}|f_n(x)-f(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\\ &\leqslant\left(\frac{c\|f-f_n\|_p}{\frac{\lambda}{2}}\right)^q+\left(\frac{c\|f-f_n\|_p}{\frac{\lambda}{2}}\right)^p\to 0\end{aligned}$$

□

Theorem 2.2.2. 条件同 theorem 2.2.1，则

$$\widetilde{\mathcal{F}}\triangleq\left\{f\in L^p(\mathscr{X},\mu)\ \lim_{t\to 0}T_tf(x)\ a.e.\ \text{存在}\right\}$$

$\widetilde{\mathcal{F}}$ 在 $L^p(\mathscr{X},\mu)$ 中为闭集。

Proof. 设 $f_n\in\widetilde{\mathcal{F}}$，$f_n\to f$，往证 $f\in\widetilde{\mathcal{F}}$。只需证明 $\forall\lambda>0$，

$$\mu\left\{x\in\mathscr{X}:\ \overline{\lim_{t\to t_0}}T_tf(x)-\underline{\lim_{t\to t_0}}T_tf(x)>\lambda\right\}=0$$

即上下极限之差几乎处处为 0，当然这里不需要加绝对值，则充要条件即为 $\lim\limits_{t\to t_0}T_tf(x)$ 几乎处处存在。由于其为线性算子，则这个条件就等价于在 0 处极限几乎处处存在，这个充要性是在泛函分析中提及的。记 $\Omega(f)(x)\triangleq\overline{\lim_{t\to t_0}}T_tf(x)-\underline{\lim_{t\to t_0}}T_tf(x)$，则显而易见的有

$$\Omega(f)(x)\leqslant 2T^*(f)(x)$$

并且有

1. $\Omega(f) \geqslant 0$;

2. $\Omega(f+g) \leqslant \Omega(f) + \Omega(g)$[2];

$$\begin{aligned}\mu\{x \in \mathscr{X} : \Omega(f)(x) > \lambda\} &\leqslant \mu\{x \in \mathscr{X} : \Omega(f-f_n) + \Omega(f_n) > \lambda\} \\ &\leqslant \mu\{x \in \mathscr{X} : \Omega(f-f_n) > \frac{\lambda}{2}\} + \mu\{x \in \mathscr{X} : \Omega(f_n) > \frac{\lambda}{2}\} \\ &\leqslant \mu\{x \in \mathscr{X} : 2T^*(f-f_n)(x) > \frac{\lambda}{2}\} + (\to 0) \leqslant \left(\frac{c\|f-f_n\|_p}{\frac{\lambda}{4}}\right)^q + (\to 0) \to 0\end{aligned}$$

□

2

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to t_0}}\, T_t(f+g)(x) - \underline{\lim_{t\to t_0}}\, T_t(f+g)(x) &= \overline{\lim_{t\to t_0}}\,(T_tf + T_tg) - \underline{\lim_{t\to t_0}}\,(T_tf+T_tg) \\ &\left[\leqslant \overline{\lim_{t\to t_0}}\, T_tf + \overline{\lim_{t\to t_0}}\, T_tg\right] - \left[\underline{\lim_{t\to t_0}}\, T_tf + \underline{\lim_{t\to t_0}}\, T_tg\right] \\ &= \Omega(f) + \Omega(g)\end{aligned}$$

2.3 Marcinkiewicz 内插定理

Lemma 2.3.1. $\forall\ 0 < p < \infty$，

$$\|f\|_p^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\Big|\{x \in \mathbb{R}^n:\ |f(x)| > \lambda\}\Big|d\lambda$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{x:|f(x)|>\lambda}(x)dxd\lambda \\
&\overset{\texttt{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1}d\lambda dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\lambda^p\Big|_0^{|f(x)|}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx = \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.3.2. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$0 < p_0 < p < p_1 \leqslant \infty$，则

$$f = f_0 + f_1 \quad f_0 \in L^{p_0}, \quad f_1 \in L^{p_1}$$

Proof. 令

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= f(x)\chi_{\{|f(x)|>1\}}(x) \\
f_1(x) &= f(x)\chi_{\{|f(x)|\leqslant 1\}}(x)
\end{aligned}$$

而后交换次序即可得到 $f_i \in L^{p_i}$，$i = 0, 1$。 □

Theorem 2.3.1 (Marcinkiewicz interpolation)**.** $\forall 1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$，$T$ 为 $L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{p_0} + L^{p_1}$ 为次线性算子，

1. T 是弱 (p_0, p_0) 型：

$$|\{x \in \mathbb{R}^n:\ |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \left(\frac{c_0\|f\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0}$$

2. T 是弱 (p_1, p_1) 型：

$$|\{x \in \mathbb{R}^n:\ |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \left(\frac{c_1\|f\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1}$$

则 $\forall p_0 < p < p_1$，有 T 是强 (p,p) 型，即

$$\|Tf\|_p \leqslant 2p^{\frac{1}{p}} c_0^{1-\theta} c_1^{\theta} \left(\frac{1}{p-p_0} + \frac{1}{p_1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \text{where } 0<\theta<1$$

可推广至下三角。

Proof. 先证明 $p_1 < \infty$ 的情形，$f \in L^p$

$$\|Tf\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{x:\ |Tf(x)| > \lambda\}| d\lambda$$

令

$$\begin{aligned} f_0^\lambda(x) &= f(x)\chi_{\{x:|f(x)|>\alpha\lambda\}} \\ f_1^\lambda(x) &= f(x)\chi_{\{x:|f(x)|\leqslant\alpha\lambda\}} \end{aligned}$$

其中 $\alpha > 0$ 待定，则

$$\mu|\underbrace{\{x:\ |Tf(x)| > \lambda\}}_{E}| \overset{\text{次线性}}{\leqslant} \mu\{x: |Tf_0^\lambda| + |Tf_1^\lambda| > \lambda\}$$
$$\mu|\underbrace{\left\{x: |Tf_0^\lambda| > \frac{\lambda}{2}\right\}}_{E_1}| + \mu|\underbrace{\left\{x: |Tf_1^\lambda| > \frac{\lambda}{2}\right\}}_{E_2}|$$

这是由于 $E \subseteq E_1 \cup E_2$。故而

$$\|Tf\|_p^p \leqslant \underbrace{p\int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\frac{c_0\|f\|_{p_0}}{\frac{\lambda}{2}} \right)^{p_0} d\lambda}_{I_0} + \underbrace{p\int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\frac{c_1\|f\|_{p_1}}{\frac{\lambda}{2}} \right)^{p_1} d\lambda}_{I_1}$$

而

$$\begin{aligned} I_0 &= pc_0^{p_0} 2^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} \int_{\mathbb{R}^n} |f_0^\lambda(x)|^{p_0} dx d\lambda \\ &= p(2c_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} \int_{\{|f(x)|>\alpha\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx d\lambda \\ &\overset{\texttt{Tonelli}}{=} p(2c_0)^{p_0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\frac{|f(x)|}{\alpha}} \lambda^{p-1-p_0} |f(x)|^{p_0} d\lambda dx \\ &= p(2c_0)^{p_0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{p-p_0}}{p-p_0} \bigg|_0^{\frac{|f(x)|}{\alpha}} |f(x)|^{p_0} dx \\ &= \underbrace{p(2c_0)^{p_0} \frac{1}{p-p_0} \frac{1}{\alpha^{p-p_0}}}_{C(p)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \end{aligned}$$

第二部分

$$
\begin{aligned}
I_1 &= p(2c_1)^{p_1}\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f_1^\lambda(x)|^{p_1}dxd\lambda \\
&= p(2c_1)^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}\int_{\{|f(x)|\leqslant\alpha\lambda\}}|f(x)|^{p_1}dxd\lambda \\
&\overset{\texttt{Tonelli}}{=} p(2c_0)^{p_0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\frac{|f(x)|}{\alpha}}^{\infty}\lambda^{p-1-p_1}|f(x)|^{p_1}d\lambda dx \\
&= p(2c_1)^{p_1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\lambda^{p-p_1}}{p-p_1}\Big|_{\frac{|f(x)|}{\alpha}}^{\infty}|f(x)|^{p_1}dx \\
&= p(2c_1)^{p_1}\frac{1}{p_1-p}\frac{1}{\alpha^{p-p_1}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p}dx
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leqslant p(2c_0)^{p_0}\frac{1}{\alpha^{p-p_0}}\frac{1}{p-p_0}\|f\|_p + p(2c_1)^{p_1}\frac{1}{\alpha^{p-p_1}}\frac{1}{p_1-p}\|f\|_p^p \\
&= p\|f\|_p^p\left[\frac{(2c_0)^{p_0}}{\alpha^{p-p_0}}\frac{1}{p-p_0}+\frac{(2c_1)^{p_1}}{\alpha^{p-p_1}}\frac{1}{p_1-p}\right]
\end{aligned}
$$

我们要选择 α，使得

$$
\frac{(2c_0)^{p_0}}{\alpha^{p-p_0}} = \frac{(2c_1)^{p_1}}{\alpha^{p-p_1}} \triangleq M
$$

即就是

$$
\alpha \triangleq \left[\frac{(2c_0)^{p_0}}{(2c_1)^{p_1}}\right]^{\frac{1}{p_1-p_0}}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{(2c_0)^{p_0}}{\alpha^{p-p_0}} &= (2c_0)^{p_0}\left[\frac{(2c_1)^{p_1}}{(2c_0)^{p_0}}\right]^{\frac{p-p_0}{p_1-p_0}} \\
&= (2c_0)^{p_0\left(1-\frac{p-p_0}{p_1-p_0}\right)}(2c_1)^{p_1\frac{p-p_0}{p_1-p_0}}
\end{aligned}
$$

而

$$
p_0\frac{p_1-p}{p_1-p_0} = p_0\frac{1-\frac{p}{p_1}}{1-\frac{p_0}{p_1}} = \left[\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}\right]p
$$

而

$$
\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}
$$

则上式

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1}{p_0} + \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right)\theta \Rightarrow \\ \theta &= \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}} \\ 1-\theta &= \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}}\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p &\leqslant p^{\frac{1}{p}}\|f\|_p \left[(2c_0)^{p\theta}(2c_1)^{p(1-\theta}\left(\frac{1}{p-p_0} + \frac{1}{p_1-p}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant 2p^{\frac{1}{p}} c_0^{1-\theta} c_1^{\theta}\left(\frac{1}{p-p_0} + \frac{1}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \text{where } 0<\theta<1\end{aligned}$$

而对于无穷时候的情况

$$\|Tf\|_\infty \leqslant c_1\|f\|_\infty$$

□

Exercise 2.3.1 (Homework 15th Oct)**.** 证明更一般的 Marcinkiewicz 内插定理：

Theorem 2.3.2 (Normal Marcinkiewicz Interpolation)**.** 若满足

1. T 是弱 (p_0, q_0) 型，$q_0 \geqslant p_0$；
2. T 是弱 (p_1, q_1) 型，$q_1 \geqslant p_1$，且 $q_0 \neq q_1$；

则 T 是强 (p, q) 型，$p_0 < p < p_1$，$q_0 < q < q_1$，且

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \\ &\text{where } 0<\theta<1\end{aligned}$$

Proof. □

Question 当 $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$，$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$，问：

$$\begin{aligned}&f \in L^p,\ 1 \leqslant p < \infty \\ &\lim_{t\to 0}\varphi_t * f(x) \overset{?}{=} f(x),\ a.e.\end{aligned}$$

归结于：

1. 当 $f \in C_0^\infty$，已证明。

2.

$$\sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)|$$

是否为弱 (p, q) 型？

2.4 Hardy-Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}(f)$

Definition 2.4.1 (Hardy-Littlewood 极大算子). $f \in L^1_{\text{Loc}}(\mathbb{R}^n)$，定义

$$\mathcal{M}f(x) \triangleq \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy$$

其中 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的球。

也可以以方体定义：

$$\mathcal{M}^{\text{Cube}}f(x) \triangleq \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy$$

其中 Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中平行于坐标面的方体。

同理，定义

$$\widetilde{\mathcal{M}}f(x) \triangleq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

也可以定义

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{Cube}}f(x) \triangleq \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f(y)|dy$$

其中 $Q(x,r)$ 表示以 x 为心，r 为边长的平行于坐标面的方体。

Remark 2.4.1. 自然的，我们可以发现，

$$C_2(n)\mathcal{M}^{\text{Cube}}f(x) \leqslant \mathcal{M}f(x) \leqslant C_1(n)\mathcal{M}^{\text{Cube}}f(x)$$

这里局部 L^1 与 L^1 不同，例如

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^1(\mathbb{R})$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1_{\text{Loc}}(\mathbb{R})$$

而 x^3+5x^2+6 也同上有这样的情况。

Remark 2.4.2. 自然的我们也可以发现

$$\widetilde{\mathcal{M}}f(x) \leqslant \mathcal{M}f(x) \leqslant 2^n\widetilde{\mathcal{M}}f(x)$$

Proof. $\forall x \in \mathbb{R}^n$，$\forall x \in B$，$r(B) = r$，则有

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy \leqslant \frac{1}{|B|}\int_{B(x,2r)} |f(y)|dy = \frac{|B(x,2r)|}{|B|}\frac{1}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)} |f(y)|dy \leqslant 2^n\widetilde{\mathcal{M}}f(x)$$

□

Proposition 2.4.1 (一个平凡的性质). $\mathcal{M}$ 是强 (∞,∞) 型的，更精确地，

$$\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

Proof.

$$\mathcal{M}f(x) \triangleq \sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy \leqslant \sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty$$

由于 ∞-范数的定义为：设 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是一个测度空间, μ 对于 Ω 是 σ-有限的，$u(x)$ 是 Ω 上的可测函数。如果 $u(x)$ 与 Ω 上的一个有界函数几乎处处相等，则称 $u(x)$ 是 Ω 上的一个本性有界可测函数。Ω 上的一切本性有界可测函数（把 a.e. 相等的两个函数视为同一个向量）的全体记作 $L^\infty(\Omega,\mu)$，在其上规定：

$$\|u\| = \inf_{\substack{\mu(E_0)=0\\ E_0\subset\Omega}}\left(\sup_{x\in\Omega\setminus E_0}|u(x)|\right)$$

此式右端有时也记作 $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$ 或 $\operatorname*{l.u.b}_{x\in\Omega}|u(x)|$。 □

Proposition 2.4.2. $\mathcal{M}f$ 不是强 $(1,1)$ 的。更确切地，若 $f\in L^1$，且 $f\neq 0$（不是几乎处处为 0），则 $\|\mathcal{M}f\|_1 = +\infty$。

Proof. $f\neq 0$，故而 $\exists R>0$，$\exists\varepsilon_0>0$，s.t.

$$\int_{B(0,R)} |f(x)|dx \geqslant \varepsilon_0$$

则 $\forall x\in\mathbb{R}^n$，$|x|>R$，则 $B(0,R)\subseteq B(x,2|x|)$。我们记

$$⨍ |f(y)|dy \triangleq \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{M}f(x) &\triangleq \sup_{x\in B} ⨍_B |f(y)|dy \geqslant \frac{1}{|B(x,2|x|)|}\epsilon_0\\ &= \frac{\varepsilon_0}{c_n(2|x|)^n} = c'\frac{1}{|x|^n}\end{aligned}$$

因此当 $x \to 0$ 时，$\mathcal{M}f$ 将会发散，即

$$\|\mathcal{M}f\|_1 = +\infty$$

□

Theorem 2.4.1. $\mathcal{M}f$ 是弱 $(1,1)$ 的，即 $\exists c>0$，$\forall\lambda>0$，有

$$\Big|\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x)>\lambda\}}_{E_\lambda}\Big| \leqslant \frac{5^n}{\lambda}\|f\|_1$$

Proof. 若我们先承认 Vitali 引理 (2.4.2)，$\forall x\in E_\lambda$，则

$$\mathcal{M}f(x)>\lambda$$

即

$$\sup_{x\in B} \fint_B |f(y)|dy > \lambda$$

则 $\exists B^x$，s.t. $x\in B^x$，且

$$\frac{1}{|B^x|}\int_{B^x}|f(y)|dy > \lambda$$

即

$$|B^x| < \frac{1}{\lambda}\int_{B^x}|f(y)|dy$$

从而

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x\in E_\lambda} B^x$$

故而

$$|B^x| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy = \frac{\|f\|_1}{\lambda}$$

故而 $r(B^{\alpha}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_1}{c_n\lambda}\right)^{1/n}$，$\forall x \in E_\lambda$，因此由 Vitali 引理，存在 $\{x_j\}_{x_j \in E_\lambda}$，s.t.

$$\begin{aligned}
&B^{x_j} \cap B^{x_{j'}} = \varnothing, \quad j \neq j' \\
&|E_\lambda| \leqslant 5^n \sum_{j=1}^{\infty} |B^{x_j}| \leqslant 5^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{B^{x_j}} |f(y)|dy \\
&\quad = \frac{5^n}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B^{x_j}} |f(y)|dy = \frac{5^n}{\lambda} \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^{x_j}} |f(y)|dy \\
&\quad \leqslant \frac{5^n}{\lambda} \int_{E_\lambda} |f(y)|dy \leqslant \frac{5^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.4.2 (Vitali 引理)**.** $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为一族 $\mathbb{R}^n$ 中的球，$\exists M > 0$，s.t.，$|r(B_\alpha)| \leqslant M$，$\forall \alpha \in \Lambda$。$E \subset \mathbb{R}^n$，$E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$，则存在 $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ 中的一个**互不相交**的子球列 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$，有

$$|E| \leqslant 5^n \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|$$

Proof. 取 B_1，s.t.

$$r(B_1) > \frac{1}{2} \sup\{r(B_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$$

再选取 B_2，s.t.

$$r(B_2) > \frac{1}{2} \sup\{r(B_\alpha : \ B_\alpha \cap B_1 = \varnothing, \ \alpha \in \Lambda\}$$

以此类推，可以选取 B_k，s.t.

$$r(B_k) > \frac{1}{2} \sup\left\{r(B_k) : \ B_\alpha \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} B_j\right) = \varnothing, \ \alpha \in \Lambda\right\}$$

情形分为两种，

1. 第一种：若选到某一步 B_m，中止。则 $\forall B_\alpha$，有 B_α 与某个 $B_j (1 \leqslant j \leqslant m)$ 相交。则

$$\begin{aligned}
E \subset \bigcup_{j=1}^{m} (5B_j) \Rightarrow \\
|E| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |5B_j| = 5^n \sum_{j=1}^{m} |B_j|
\end{aligned}$$

且

$$B_\alpha \cap B_{j_0} \neq \varnothing \quad 1 \leqslant j_0 \leqslant m$$

则

$$r(B_{j_0}) \geqslant \frac{1}{2} r(B_\alpha)$$

2. 情形二：一直选下去，$B_1, \cdots, B_k, \cdots$

(2a) 若

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j| = +\infty$$

显然。

(2b) 若

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j| < +\infty$$

则

$$E_\alpha \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} 5B_j$$

$\forall x_0 \in E_\alpha$，则 $\exists B_{\alpha_0}$，s.t.

$$x_0 \in B_{\alpha_0}$$

而 B_{α_0} 一定与 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 中某球相交，我们只需要找到第一个球然后就可以控制该球。

□

Theorem 2.4.3 (Besicovitch 引理)**.** $E \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha$，则存在一个子列 $\{Q_j\}$，s.t.

(1)

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

(2)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{Q_j}(x) \leqslant c(n)$$

Corollary 2.4.1. 1. $\mathcal{M}_{\texttt{Rectangle}}$ 是强 (p,p) 的 $(p>1)$，但不是弱 $(1,1)$。

2. 维数无关的常数

Theorem 2.4.4.

改进为 $c(p)$

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leqslant c(p,n)\,\|f\|_p$$

$\forall 1<p<+\infty$，即为强 (p,p) 的。

Proof. 由 Marcinkiewikz 内插可得。 □

Theorem 2.4.5 (Lesbegue 微分定理)**.** $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} f(y)dy = f(x), \qquad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n$$

Remark 2.4.3. $n=1$ 时，定理变为

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(y)dy = f(x) \Longleftrightarrow \left(\int_0^x f(y)dy\right)' = f(x),\ a.e.$$

Proof. 1° 当 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$ 时，有

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} f(y)dy = f(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

2°

$$\sup_{r>0}\left|⨍_{B(x,r)} f(y)dy\right| \leqslant \widetilde{\mathcal{M}}(f)(x)$$

而 $\widetilde{\mathcal{M}}(f)(x)$ 是弱 $(1,1)$ 的;

3° 由之前闭集的定理即得。

□

Remark 2.4.4 (应用 1)**.** 1° $f\in L^1$ 可减弱为 $f\in L^1_{\mathrm{Loc}}$。而研究 $f\circ\chi_{B(x_0,N)}\in L^1$ 即可;

2° 结果可加强，

$$\lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy = 0$$

仿照先前的证明方法即可。使上式成立的点称为 f 的 **Lesbegue 点**;

$3°$

$$\lim_{j\to\infty} ⨍_{B_j} |f(y)-f(x)|dy = 0, \quad a.e.\ x$$

即

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots, \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \{x\} \quad \lim_{j\to\infty} r(B_j) = 0$$

Corollary 2.4.2. $f \in L^1_{\mathrm{Loc}}$，则

$$|f(x)| \leqslant \mathcal{M}f(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

Proof.

$$|f(x)| = \lim_{r\to 0}\left| ⨍_{B(x,r)} f(y)dy\right| \leqslant \sup_{r>0} ⨍_{B(x,r)} |f(y)|dy \triangleq \mathcal{M}f(x) \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

□

应用 2：恒等逼近的 a.e. 收敛问题

Remark 2.4.5. $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$，$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$，$\forall t > 0$，定义

$$\phi_t(x) \triangleq \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$$

而显然我们有

$$\phi_t \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$$

即

$$\phi_t * f(x) \to f(x) \quad \text{when } t \to 0$$

而当 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，其中 $1 \leqslant p < \infty$，则上述依然成立，即

$$\phi_t * f \xrightarrow{L^p} f, \quad \text{when } t \to 0$$

Lemma 2.4.1. $\phi \in L^1$，$\phi(x) \geqslant 0$，径向（即 $\phi(x) = \widetilde{\phi}(|x|)$，其中 $\widetilde{\phi}(|x|)$ 为一元函数），$\widetilde{\phi}(r)$ 在

$[0,\infty)$ 上单调递减，则

$$\sup_{t>0}|\phi_t * f(x)| \leqslant \|\phi\|_1 \cdot \mathcal{M}f(x)$$

Proof. 1° 当

$$\phi(x) = \sum_{i=j}^{m} a_j \chi_{B(0,r_j}(x) \quad r_j \geqslant 0 \quad r_1 < r_2, < \cdots < r_m$$

则

$$\begin{aligned}
\phi_t * f(x) &= \left(\sum_{i=j}^{m} a_j \frac{1}{t^n} \chi_{B(0,r_j} \left(\frac{\cdot}{t}\right)\right) * f(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} [a_j \cdot |B(0,r_j)|] \left[\frac{1}{|B(0,r_j)|} \chi_{B(0,r_j)} * f(x)\right] \\
&\leqslant \|\phi\|_1 \cdot \frac{1}{|B(0,r_j)|} \int_{B(0,r_j)} f(x-y)dy \leqslant \|\phi\|_1 \cdot \mathcal{M}f(x)
\end{aligned}$$

2° 当 ϕ 为一般情形，

$$\phi(x) = \lim_{m\to\infty} \phi^{(m)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\phi^{(m)}$ 为 1° 重的函数，且 $\phi^{(m)}(x)$ 关于 m 单调递增，由 1°，

$$\phi_t * |f|(x) = \left\|\phi^{(m)} * |f(x)|\right\| \leqslant \|\phi^{(m)}\|_1 \mathcal{M}f(x) = \|\phi_t\|_1 \mathcal{M}f(x) = \|\phi\|_1 \mathcal{M}f(x)$$

而考虑

$$\begin{aligned}
\|\phi_t * f(x)\| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t(x-y)| \cdot |f(y)|dy \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^n} \int \left|\widetilde{\phi}\left(\left|\frac{x-y}{t}\right|\right)\right| \cdot |f(y)|dy \\
&\leqslant c_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2^k t)^n}{t^n} \widetilde{\phi}(2^{k-1}) \int |f(y)|dy \leqslant c(n)\|\phi\|_1 \mathcal{M}f(x)
\end{aligned}$$

□

Corollary 2.4.3. 若 ϕ 满足 $|\phi(x)| \leqslant \psi(x)$，且 $\psi(x)$ 非负，径向，单调递减，可积，则 $\sup\limits_{t>0}|\phi_t * f(x)|$ 是强 (p,p)，弱 $(1,1)$，$1 < p \leqslant \infty$。

Proof.

$$\|\phi_t * f\| \leqslant \psi * |f|(x)$$

即

$$\sup_{t>0} \|\phi_t * f\| \leqslant \sup_{t>0} \|\psi_t * f\| \leqslant \|\psi\|_1 \mathcal{M}f(x)$$

□

Theorem 2.4.6. 若 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$，$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$，且 $|\phi(x)| \leqslant \psi(x)$，$\psi(x)$ 为径向单调递减函数，且可积，则 $\forall f \in L^p$，$1 \leqslant p < \infty$，有

$$\phi_t * f(x) \to f(x) \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

Proof. 1° 当 $f \in C_C(\mathbb{R}^n)$，成立；

2° $\sup\limits_{t>0} |\phi_t * f(x)|$，是强 (p,p)，弱 $(1,1)$ 的；

3° 由闭集上的证明即得。

□

算数平均

$$\frac{1}{R}\int_0^R S_t f(x)dt \triangleq \frac{1}{R}\int_0^R \int_{|\xi|<t} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi dt = F_R * f$$

其中

$$F_R(x) = \frac{R^2 \sin^2 \pi R x}{R(\pi R x)^2} = R\frac{\sin^2(\pi R x)}{(\pi R x)^2} = (F_1)_{\frac{1}{R}}$$

而

$$F_1 = \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$$

考虑

$$\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} \leqslant \begin{cases} 1 & |\pi x| < 1 \\ \frac{1}{(\pi x)^2} & |\pi x| \geqslant 1 \end{cases} \triangleq \psi(x)$$

Poisson 求和 其中

$$\begin{aligned} P_t(x) &= c_n \frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{c_n}{t^{-n}} \left(1 + \left(\frac{|x|}{t}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} = (P_1)_t \end{aligned}$$

其中

$$P_1 = c_n \left(1+|u|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

这里的 $(\cdot)_t$ 均为恒等逼近的展缩。

而

$$\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} f(x-y)dy = \int f(x-y)\frac{1}{|B(0,r)|}\chi_{B(0,r)}(y)dy = f * \left[\frac{1}{|B(0,r)|}\chi_{B(0,r)}(y)\right]$$

Remark 2.4.6. $f \in L^1$，$f \neq 0$，a.e.，则 $\mathcal{M}f \notin L^1$。

Proof.

$$\mathcal{M}f(x) \geqslant \frac{1}{|x|^n} \quad \text{when } |x| >> 1$$

□

Theorem 2.4.7. 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的有界集，则

$$\int \mathcal{M}f(x)dx \leqslant 2|E| + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx$$

其中

$$\log^+(u) \triangleq \max\{0, \log(u)\}$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\int_E \mathcal{M}f(x)dx &= \int_0^{+\infty} \Big|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x)\chi_E(x) > \lambda\}\Big| d\lambda \\
&= 2\int_0^{\infty} \underbrace{\Big|\{x \in E : \mathcal{M}f(x) > 2t\}\Big|}_{\leqslant |E|} dt \\
&= 2\left[\int_0^1 + \int_1^{\infty}\right] \\
&\leqslant 2|E| + \int_1^{\infty} \Big|\{x \in E : \mathcal{M}f(x) > 2t\}\Big| dt
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\mathrm{II} = \int_0^1 \Big|\{x \in E : \mathcal{M}f(x) > 2t\}\Big| dt
$$

分解为

$$
f = f_1^t + f_2^t, \quad f_1^t = f(x)\chi_{\{|f|>t\}}(x), \quad f_2^t = f(x)\chi_{\{|f|<t\}}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &\leqslant \int_1^{\infty} \Big|\{x \in E : \mathcal{M}f_1^t > t\}\Big| dt + \underbrace{\int_1^{\infty} \Big|\{x \in E : \mathcal{M}f_2^t > t\}\Big| dt}_{=\varnothing} \\
&\overset{weak\ (1,1)}{\leqslant} \int_0^{\infty} \frac{c(n)\|f_1^t\|_1}{t} dt
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\|f_1^t\|_1 dt &= \int_1^{\infty} \frac{1}{t} \int_{\{|f(x)|>t\}} f(x)dxdt \\
&\overset{\texttt{Tonelli}}{=} \int_{\{|f(x)|>1\}} |f(x)| \int_1^{|f(x)|} \frac{1}{t} dtdx \\
&= \int_{|f(x)|>1} |f(x)| \log |f(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx
\end{aligned}
$$

□

标准的二进方体

边长为 1 的方体，记作 $\mathfrak{D}_0$；而后一分为四得到边长为 $\frac{1}{2}$ 的方体，记作 $\mathfrak{D}_1$；不断分得到边长为 2^{-k} 的方体记作 $\mathfrak{D}_k$。用 $\mathfrak{D}$ 表示二进方体组成的集合，即

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{D}_k$$

Proposition 2.4.3. 若 $Q_j \cap Q_k \neq \varnothing$，且 $Q_j, Q_k \in \mathfrak{D}$，则 $Q_j \subset Q_k$ 或 $Q_k \subset Q_j$。