MATH

# 数学

竞赛班（一试—目标省一）

2020 秋

目录

# CONTENTS


**第 1 讲　等差等比数列**

Part 1　数列的相关概念　2
Part 2　等差数列　4
Part 3　等比数列　7

**第 2 讲　递推数列 1**

Part 1　累加累乘法　14
Part 2　一阶递推数列　17
Part 3　二阶线性递推数列　21

**第 3 讲　递推数列 2**

Part 1　求和公式　28
Part 2　辅助数列　30

**第 4 讲　数学归纳法**

Part 1　数学归纳法　42
Part 2　数学归纳法与数列　46

**第 5 讲　数列综合**

Part 1　数列的函数性质　52
Part 2　数列不等式　53
Part 3　数列的数论性质　55

**第 6 讲　不等式基础与均值不等式**

Part 1　不等式的基本性质与解不等式　62
Part 2　不等式证明基本方法　64
Part 3　均值不等式初步　69

**第 7 讲　柯西不等式基础**

Part 1　柯西不等式基础　76

**第 8 讲　排序及其他不等式基础**

Part 1　排序及其他不等式基础　88

## 第 9 讲　不等式基本技巧

Part 1　整体代换　98
Part 2　三角代换　99
Part 3　增量代换　100
Part 4　常值代换　100
Part 5　正数代换　101
Part 6　正规化与有序化　102
Part 7　调整法　103

## 第 10 讲　函数与不等式

Part 1　不等式的应用　108
Part 2　构造函数证明不等式　110

## 第 11 讲　极限与导数

Part 1　数列的极限　118
Part 2　函数的极限　124
Part 3　夹逼定理　127
Part 4　导数　128

## 第 12 讲　导数的应用

Part 1　导数的四则运算　134
Part 2　复合函数求导　135
Part 3　反函数求导　136
Part 4　隐函数求导　137
Part 5　洛必达法则　138
Part 6　导数与单调性　139
Part 7　导数与最值　140

## 第 13 讲　琴生不等式与积分

Part 1　用导数证明不等式　146
Part 2　凸函数与琴生不等式　147
Part 3　不定积分　151
Part 4　定积分　154
Part 5　换元积分法与分部积分法　157

## 第 14 讲　向量的概念

Part 1　向量的概念　164

## 第 15 讲　向量的应用

Part 1　向量的应用　174

# 数学竞赛重要时间

## 数学竞赛

**2020 年春季**

报名高中数学联赛

报名途径：高中数学老师

**2020 年暑假**

部分同学有机会参加东南数学奥林匹克

报名途径：东南联盟中学

**2020 年 9 月**

新高二高中联赛

目标：获得奖项

指导高二学习规划

**2021 年春季**

报名高中数学联赛

清华、北大飞测

**2021 年暑假**

高校夏令营：清华 、北大

区域竞赛：女子数学奥林匹克

协作体夏令营

东南地区数学竞赛

西部数学邀请赛

陈省身杯数学奥林匹克

北方数学奥林匹克

北方希望之星数学邀请赛

希望联盟夏令营

**2021 年 9 月**

高中联赛

冲刺省一

数学竞赛是否后续发展

**2021 年 10 月**

清北金秋营

**2021 年 11 月**

CMO

**2022 年 4 月**

强基计划招生简章

**2022 年 5 月**

强基计划报名

**2022 年 6 月**

高考

**2022 年 7 月**

强基计划校考

# 第 1 讲

# 等差等比数列


Part 1
数列的相关概念

Part 2
等差数列

Part 3
等比数列

# Part 1 数列的相关概念

## 知识点睛

**数列的定义与基础知识：**

定义：按照一定次序排列的一列数称为数列. 数列中的每一个数都叫做这个数列的项.

数列 $\{a_n\}$ 的一般形式通常记作 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 或者 $a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$，其中 $a_1$ 叫做数列的首项（也有的数列以 $a_0$ 作为首项），最后一项也称为数列的末项，而 $a_n$ 则是关于 $n$ 的一个表达式，称为数列的通项.

数列分为有限（有穷）数列和无限（无穷）数列.

有时也用 $\{a_n\}_{n=1}^{2018}$，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 等等来表示一些数列，例如前者表示数列的首项为 $a_1$，共 2018 项，而后者表示数列的首项为 $a_0$，是无限数列.

一般用 $S_n$ 来表示 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，有关系式：$S_1=a_1$，$S_n=S_{n-1}+a_n$，$a_n=S_n-S_{n-1}$.

数列的本质：定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的函数 $a_n=f(n)$.

如：等比数列 $1,2,4,8,\cdots$ 可以看成以下函数：

$\mathbf{N}^* \to \mathbf{Z}$

$n \xrightarrow{f} 2^{n-1}$

数列由单调性，可分为递增数列、递减数列和摆动数列；

由周期性，可分为周期数列、非周期数列.

## 精讲精练

【例 1】

写出下列数列的一个通项公式：

(1) $5,55,555,5555,\cdots$.

(2) $0,1,0,1,\cdots$.

(3) $1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\cdots$.

(4) $0,-\frac{1}{2},6,-\frac{3}{4},20,-\frac{5}{6},\cdots$.

【例 2】

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，对于 $n=1,2,3,\cdots$，有 $a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+5, a_n\text{为奇数}\\ \dfrac{a_n}{2^k}, a_n\text{为偶数,其中}k\text{为使}a_{n+1}\text{为奇数的正整数}\end{cases}$，当 $a_1=11$ 时，$a_{100}=$________.

【例 3】

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足:$S_n=3^n-2$，试求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足:$S_n+S_m=S_{n+m}$，且 $a_1=1$，那么 $a_{10}=$(　　)

A. 1　　B. 9　　C. 10　　D. 55

【例 4】

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}-a\right)n+1\,(n<6)\\ a^{n-5}\,(n\geqslant 6)\end{cases}$，若对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n>a_{n+1}$，则实数 $a$ 的取值范围是(　　)

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{12}\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(\dfrac{7}{12},1\right)$

【例 5】

数列 $\lg 2018, \lg\left(2018\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}\right), \lg\left(2018\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{3}\right), \cdots, \lg\left(2018\cdot\cos^{n-1}\dfrac{\pi}{3}\right), \cdots$,当其前 $n$ 项和最大时,$n$ 的值是________.

# Part 2 等差数列

## 知识点睛

等差数列:如果对任意的正整数 $n$,都有 $a_{n+1}-a_n=d$,其中 $d$ 为常数,则称 $\{a_n\}$ 为等差数列,其中 $d$ 称为公差.

通项公式:$a_n=a_1+(n-1)d$;

递推公式:$a_{n+1}=a_n+d$;

求和公式:$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\times n=a_1n+\dfrac{n(n-1)}{2}d$; $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$.

等差数列的性质:

设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 为公差为 $d_1$,$d_2$ 的等差数列,$\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$.

① 设 $p$,$q$ 是常数,则 $\{pa_n+qb_n\}$ 为公差为 $pd_1+qd_2$ 的等差数列;

② 设 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$,且 $m+n=p+q$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q$,

特别的,若 $2m=p+q$,则 $a_p+a_q=2a_m$;

③ 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$,则 $a_n,a_{n+m},a_{n+2m},\cdots$ 也为等差数列,公差为 $md_1$;

④ $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 是等差数列,公差为 $n^2d_1$;

⑤ $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列,公差为 $\dfrac{d_1}{2}$.

## 精讲精练

【例 6】

已知等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和分别为 $S_n$，$T_n$，若对于任意的自然数 $n$，都有 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-3}{4n-3}$，则 $\frac{a_3+a_{15}}{2(b_3+b_9)}+\frac{a_3}{b_2+b_{10}}=$(　　)

A. $\frac{19}{41}$　　B. $\frac{17}{37}$　　C. $\frac{7}{15}$　　D. $\frac{20}{41}$

【例 7】

在一个等差数列中，$S_n=m$，$S_m=n$，其中 $m\neq n$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，则 $S_{m+n}=$________.

【例 8】

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，已知 $S_{10}=0,S_{15}=25$，则 $nS_n$ 的最小值为________.

【例 9】

设 $a_1$，$d$ 为实数，首项为 $a_1$，公差为 $d$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，满足 $S_5S_6+15=0$，则 $d$ 的取值范围是________.

【例 10】

数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件为 $\{b_n\}$ 是等差数列.

【例 11】

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列，记 $c_n=\max\{b_1-a_1n,b_2-a_2n,\cdots,b_n-a_nn\}\ (n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 这 $s$ 个数中最大的数.

(1) 若 $a_n=n,b_n=2n-1$，求 $c_1,c_2,c_3$ 的值，并证明 $\{c_n\}$ 是等差数列.

(2) 证明：或者对任意正数 $M$，存在正整数 $m$，当 $n\geqslant m$ 时，$\dfrac{c_n}{n}>M$；或者存在正整数 $m$，使得 $c_m,c_{m+1},c_{m+2},\cdots$ 是等差数列.

# Part 3 等比数列

## 知识点睛

等比数列：如果对任意的正整数 $n$，都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，其中 $q$ 为非零常数，则称 $\{a_n\}$ 为等比数列，其中 $q$ 称为公比.

通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$；

递推公式：$a_{n+1}=a_nq$；

求和公式：$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=\begin{cases}na_1,q=1\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq 1\end{cases}$

等比数列的性质：

设 $\{a_n\}$ 为公比为 $q$ 的等比数列，前 $n$ 项和为 $S_n$.

① 设 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，且 $m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$，

特别的，若 $2m=p+q$，则 $a_pa_q={a_m}^2$；

② 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，则 $a_n,a_{n+m},a_{n+2m},\cdots$ 也为等比数列，公比为 $q^m$；

③ $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 是等比数列，公比为 $q^n$；

④ $q>0$ 时，$\{\log_c a_n\}$ 是等差数列，公差为 $\log_c q$.

## 精讲精练

【例 12】

求数列 $\left\{(2n+1)\cdot\frac{1}{2^n}\right\}$ 的前 $n$ 项和.

【例 13】

在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=\dfrac{1}{2}$，$a_6+a_7=3$，则满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n>a_1a_2\cdots a_n$ 的最大正整数 $n$ 的值为________.

【例 14】

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n=2^n$，$b_n=3n+2$，它们公共项由小到大排列的数列是 $\{c_n\}$.

(1) 写出 $\{c_n\}$ 的前 5 项；

(2) 证明 $\{c_n\}$ 是等比数列.

【例 15】

$n^2\,(n\geqslant 4)$ 个正数排成 $n$ 行 $n$ 列：

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{array}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等．已知 $a_{24}=1$，$a_{42}=\dfrac{1}{8}$，$a_{43}=\dfrac{3}{16}$．求 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$．

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

一列由两个数组成的数组：(1，1)，(1，2)，(2，2)，(1，3)，(2，3)，(3，3)，(1，4)，(2，4)，(3，4)，(4，4)，(1，5)，…，那么第 100 组内的两数之和是________。

**【测试 2】**

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零，且 $a_2$、$a_3$、$a_9$ 构成等比数列，则 $\dfrac{a_4+a_5+a_6}{a_2+a_3+a_4}$ 是（　　）

A. $\dfrac{8}{3}$　　B. $\dfrac{7}{3}$　　C. 3　　D. $\dfrac{5}{3}$

**【测试 3】**

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且满足 $S_{17}>0$，$S_{18}<0$，则 $\dfrac{S_1}{a_1}$，$\dfrac{S_2}{a_2}$，…，$\dfrac{S_{15}}{a_{15}}$ 中最大的项为（　　）

A. $\dfrac{S_7}{a_7}$　　B. $\dfrac{S_8}{a_8}$　　C. $\dfrac{S_9}{a_9}$　　D. $\dfrac{S_{10}}{a_{10}}$

拍摄区

**【测试 4】**

数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项 $a_n,a_{n+1}$ 是方程 $x^2-c_nx+\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ 的两个根，且 $a_1=2$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项之和 $S_{2n}$.

**【测试 5】**

数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 的构造方法如下：首先给出 $a_1=1$，接着复制该项后，再添加其后继数 2，得到 $a_2=1,a_3=2$；然后再复制前面所有项 1,1,2，再添加 2 的后继数 3，得到 $a_4=1,a_5=1,a_6=2$，$a_7=3$；接下来再复制前面所有项 1,1,2,1,1,2,3，添加 3 的后继数 4，得到 $a_8=1,a_9=1,a_{10}=2$，$a_{11}=1,a_{12}=1,a_{13}=2,a_{14}=3,a_{15}=4$. 如此下去.

求 $a_{2018}$ 以及数列前 2018 项的和.

# 第2讲 递推数列 1

Part 1
累加累乘法

Part 2
一阶递推数列

Part 3
二阶线性递推数列

# Part 1 累加累乘法

## 知识点睛

等差等比数列可以由递推公式推出通项公式,类似等差等比数列可以采用累加(累乘)法.

累加法:

$a_{n+1}=a_n+f(n)$.

分析:$a_n=a_{n-1}+f(n-1)$,

$a_{n-1}=a_{n-2}+f(n-2)$,

$\cdots$

$a_2=a_1+f(1)$,

则 $a_n=a_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(i)$.

累乘法:

$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$.

分析:$a_n=a_{n-1}\cdot f(n-1)$,

$a_{n-1}=a_{n-2}\cdot f(n-2)$,

$\cdots$

$a_2=a_1\cdot f(1)$,

则 $a_n=a_1\cdot\prod\limits_{i=1}^{n-1}f(i)$.

## 精讲精练

【例 1】

(1) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$，求 $a_n$.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n(n\in\mathbb{N}^*)$，则 $a_n=$________.

(3) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，对于任意自然数 $n$，都有 $a_{n+1}=a_n+n\cdot 2^n$，则 $a_{15}=$(　　)

A. $14\cdot 2^{15}+2$　　B. $13\cdot 2^{14}+2$

C. $14\cdot 2^{15}+3$　　D. $13\cdot 2^{15}+3$

【例 2】

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $a_n=2^{n-1}a_{n-1}(n\geqslant 2)$，求 $a_n$.

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=3\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则 $a_n=$________.

【例 3】

数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，且对任意的 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 都有：$a_{n+m}=a_n+a_m+nm$，则 $a_{100}=$________

# Part 2 一阶递推数列

## 知识点睛

$a_{n+1}=pa_n+q(p\neq 1,q\neq 0)$.

分析 1：选取参数 $\lambda$，使得 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$.

则 $(p-1)\lambda=q\Rightarrow\lambda=\dfrac{q}{p-1}$.

$$\Rightarrow a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p\left(a_n+\frac{q}{p-1}\right)$$

构造 $b_n=a_n+\dfrac{q}{p-1}$，则 $b_{n+1}=pb_n$，即 $\{b_n\}$ 是以 $p$ 为公比的等比数列.

则 $a_n+\dfrac{q}{p-1}=p^{n-1}\left(a_1+\dfrac{q}{p-1}\right)\Rightarrow a_n=p^{n-1}\left(a_1+\dfrac{q}{p-1}\right)-\dfrac{q}{p-1}$.

分析 2：左右同除 $p^{n+1}$.

令 $b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$，则 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{q}{p^{n+1}}$，使用累加法得：

$$a_n=p^nb_n=p^n\left(\frac{a_1}{p}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{q}{p^{i+1}}\right)$$

分析 3：待定系数法

$a_{n+1}=pa_n+f(n)(p\neq 1)$

分析 1：待定系数 $g(n)$ $(\deg(g(n))=\deg(f(n)))$

使得 $a_{n+1}+g(n+1)=p(a_n+g(n))$

分析 2：两边同时除以 $p^{n+1}$（或 $p^n$），得 $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{f(n)}{p^{n+1}}$.

令 $b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$，则 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{f(n)}{p^{n+1}}$，使用累加法.

分析 3：待定系数法.

## 精讲精练

【例 4】

(1) 已知 $a_1=1, a_{n+1}=4a_n+6(n\geqslant 1)$，求通项公式.

(2) 已知 $a_1=1, a_{n+1}=4a_n+6n-3\,(n\geqslant 1)$，求通项公式.

(3) 已知 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+2n^2-3n+1\,(n\geqslant 1)$，求通项公式.

(4) 设 $a_0=1, a_1=2, a_{n+1}=2a_{n-1}+n, n=1,2,\cdots$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(5) 已知 $a_1=9$,$a_{n+1}=8a_n+10^n(n\geqslant 1)$,求通项公式.

(6) 已知 $a_1=1$,$a_{n+1}=4a_n+(n^2+1)2^n(n\geq 1)$,求通项公式.

(7) 在正项数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=10$,$a_{n+1}=10\sqrt{a_n}$,求此数列的通项公式.

【例 5】

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1}=(n+1)a_n+2$,且 $a_1=2$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 已知 $a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{5n+2}{5n-3}a_n+7(5n+2)$,求通项公式.

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1}=(n+2)a_n+n$,且 $a_1=1$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

# Part 3 二阶线性递推数列

## 知识点睛

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(p,q\neq 0)$

分析：特征方程为 $x^2-px-q=0$.

(1)若方程有两个不同的解 $\alpha,\beta$，则 $a_n=A\cdot\alpha^n+B\cdot\beta^n$.

其中 $A,B$ 由初始项决定（常约定 $a_0$）

即 $\begin{cases}a_0=A+B\\a_1=A\cdot\alpha+B\cdot\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{a_0\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\\B=\dfrac{a_1-a_0\beta}{\alpha-\beta}\end{cases}$.

(2)若方程有两个相同的解 $\alpha$，则 $a_n=(A+Bn)\alpha^n$.

其中 $A,B$ 由初始项决定（常约定 $a_0$）

即 $\begin{cases}a_0=A\\a_1=(A+B)\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=a_0\\B=\dfrac{a_1}{\alpha}-a_0\end{cases}$.

## 精讲精练

【例 6】

(1)在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1,a_2=3,a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，求 $a_n$.

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{4}{3},a_2=\dfrac{13}{9}$，且 $a_{n+1}=\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{4}{9}a_{n-1}(n\geqslant 2)$，求 $a_n$.

(3) 已知数列 $\{x_n\}(n \geqslant 1)$ 满足 $x_{n+2}=x_{n+1}-x_n$,且 $x_1=1$. 若该数列前 2018 项之和为 2018,则该数列前 2019 项之和为多少?

【例 7】

数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=0$,$a_2=2$,$a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=2^n$,求 $a_n$.

【例 8】

设数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$满足 $a_0=a_1=11$,$a_{m+n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})-(m-n)^2$,$m,n \geqslant 0$,求 $a_{45}$.

【例 9】

已知 $x_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n]$，那么 $[x_{2014}]$ 的个位数字是________.

【例 10】

若实数 $a,b,x$ 和 $y$ 满足方程组

$$\begin{cases} ax+by=3 \\ ax^2+by^2=7 \\ ax^3+by^3=16 \\ ax^4+by^4=42 \end{cases}$$

，求 $ax^5+by^5$ 的值.

【例 11】

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中，$a_1=1,b_1=\frac{5}{2}$，且 $a_{n+1}=3a_n-2b_n,b_{n+1}=5a_n-4b_n$. 求 $a_n,b_n$.

【例 12】

已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_1=2,b_1=1$ ,且 $\begin{cases} a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+\dfrac{1}{4}b_{n-1}+1 \\ b_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}+\dfrac{3}{4}b_{n-1}+1 \end{cases}$ $(n\geqslant 2)$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 $n$ 项和公式 $S_n$.

【例 13】

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_0=1,b_0=0.\begin{cases} a_{n+1}=7a_n+6b_n-3 \\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4 \end{cases}$ ,证明:$\{a_n\}$ 中的项都是完全平方数.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

已知对数列 $\{a_n\}$，有 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}-a_n=2-2(-1)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $S_{2017}$ 的值为（　　）

A. $2016\times1010-1$　　B. $1009\times2017$

C. $2017\times1010-1$　　D. $1009\times2016$

**【测试 2】**

（1）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_n=2\cdot5^{n-1}a_{n-1}(n\geqslant2)$，则 $a_n=$________.

（2）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_n+a_{n+1}+n^2=0$，则 $a_{31}=$________.

拍摄区

【测试 3】

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，$3a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$，求数列的通项公式 $a_n$.

【测试 4】

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{2}{9}$，$a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{2}{3^{n+1}}(n\geqslant 2)$，求 $a_n$.

【测试 5】

已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $\begin{cases} a_{n+1}=-a_n-2b_n \\ b_{n+1}=6a_n+6b_n \end{cases}$，又 $a_1=2$，$b_1=4$. 求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

# 第3讲 递推数列 2

Part 1
求和公式

Part 2
辅助数列

# Part 1 求和公式

## 精讲精练

【例 1】

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $a_1=2$，$n\cdot a_{n+1}=S_n+n(n+1)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，并求其通项公式；

【例 2】

设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$n\in\mathbb{N}^*$. 已知 $a_1=1$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{5}{4}$，且当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}$.

(1) 求 $a_4$ 的值；

(2) 证明：$\left\{a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\right\}$ 为等比数列；

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【例 3】

已知 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，其前 $n$ 项和 $S_n$ 与 $a_n$ 满足 $a_n=\dfrac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geqslant 2)$ .

(1) 求证：$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 为等差数列；

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【例 4】

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n>0$，且对于任意正整数 $n$ 有 $S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，求通项 $a_n$.

# Part 2 辅助数列

## 知识点睛

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{pa_n+q}$.

分析:两边取倒数.

则 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{q}{a_n}+p$,取 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$,则 $b_{n+1}=qb_n+p$ 转化为一阶线性递推数列求解.

$a_n=\dfrac{pa_{n-1}+q}{ra_{n-1}+s}$.

分析:不动点法,令 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$,

若方程有两个解 $x_1,x_2$,则 $\left\{\dfrac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right\}$ 是等比数列;

若方程有两个相同的解 $x_0$,则 $\left\{\dfrac{1}{a_n-x_0}\right\}$ 是等差数列.

对于一阶递推数列,递推公式视为 $a_{n+1}=f(a_n)$,则 $a_n=f^{(n-1)}(a_1)$,因此可以使用函数迭代的方式例如桥函数来求得.

对于 $a_{n+1}=f(a_n)$,求其不动点 $x_0$ 使 $x_0=f(x_0)$,则可通过选取 $h(x_0)=0$ 的桥函数 $h(x)$ 使得 $f(x)=h^{(-1)}(g(h(x)))$,其中 $g(x)$ 的不动点为 $h(x_0)=0$,易于迭代,故 $f^{(n)}(x)=h^{(-1)}(g^{(n)}(h(x)))$.

## 精讲精练

【例 5】

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，求数列 $\{a_n\}$ 通项公式.

【例 6】

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=7, a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{2a_n+5}$，求数列的通项公式 $a_n$.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=4, a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+4}$，求数列的通项公式 $a_n$.

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3, 9a_{n+1}a_n+8a_{n+1}-2a_n+1=0$，求数列的通项公式 $a_n$.

(4) 已知 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+2}{2a_n}$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【例 7】

正项数列 $\{a_n\}$ 中,$a_{n+1}^2=100a_n, a_1=1$,求 $a_n$.

【例 8】

已知 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n^2+12a_n+10$,求通项公式.

【例 9】

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{4}{3}$,$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求证:$a_{n+1}>a_n$.

(2) 设 $m=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2013}}$,求不超过 $m$ 的最大整数.

【例 10】

已知数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{4}{a_n}\right)$,证明 $n\geqslant 2$ 时,$a_n>2+4\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$.

【例 11】

给定数列 $\{x_n\}$,$x_1=1,x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}x_n+1}{\sqrt{3}-x_n}$,则 $x_{2018}-x_{2000}=$________.

【例 12】

已知 $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{2a_n^4+6a_n^2+3}$,求通项公式.

【例 13】

设数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足:$a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{16}\left(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}\right), n=1,2,\cdots$ 求通项公式.

【例 14】

设非零数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足:$a_1,a_2,\dfrac{a_1^2+a_2^2+b}{a_1a_2}$ 都是整数,且 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}^2+b}{a_n},n=1,2,\cdots$ 其中 $b$ 是某个给定的整数. 求证:数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数.

【例 15】

设正数数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$满足 $a_0=a_1=1$,且 $\sqrt{a_n\cdot a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{-2}}=2a_{n-1},n=2,3,\cdots$ 求该数列的通项公式.

【例 16】

已知正数数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=1, x_2=3, \sqrt{x_nx_{n+1}+x_nx_{n+2}}=3\sqrt{x_nx_{n+1}+x_{n+1}^2}+2\sqrt{x_nx_{n+1}}$，求 $\{x_n\}$ 的通项公式. 并问 $x_n$ 中 3 的幂次是几.

【例 17】

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $(n+1){a_{n+1}}^2-n{a_n}^2+a_{n+1}a_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，判断数列的单调性.

【例 18】

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_{n+1}a_n+\lambda a_{n+1}+\mu a_n^2=0(n\in\mathbb{N}^*)$

(1) 若 $\lambda=0$，$\mu=-2$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\lambda=\dfrac{1}{k_0}(k_0\in\mathbb{N}^*,k_0\geqslant 2)$，$\mu=-1$，证明：$2+\dfrac{1}{3k_0+1}<a_{k_0+1}<2+\dfrac{1}{2k_0+1}$

【例 19】

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2t-3(t\in\mathbb{R}$，且 $t\neq\pm1)$，$a_{n+1}=\dfrac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}(n\in\mathbb{N}^*)$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

设 $\{a_n\}$ 为等比数列，$T_n=na_1+(n-1)\cdot a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n$，已知 $T_1=1$，$T_2=4$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比；

（2）求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式.

**【测试 2】**

已知: 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\dfrac{n}{3}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

（2）设 $b_n=\dfrac{n}{a_n}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$

拍摄区

【测试 3】

在数列 $\{x_n\}$ 中，$x_1=3$，$x_2=2$，$x_n=\dfrac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}(n\geqslant 3, n\in\mathbf{N})$，求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

【测试 4】

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=2$，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1}(n\geqslant 1)$，则 $a_n=$________.

【测试 5】

设 $\{a_n\}$ 为首项 $a_1=4$ 的单调递增数列，且满足 $a_{n+1}^2+a_n^2+16=8(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}a_n$，则 $a_n=$________

第 4 讲

# 数学归纳法

Part 1
数学归纳法

Part 2
数学归纳法与数列

# Part 1 数学归纳法

## 知识点睛

### 1、第一数学归纳法

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 $n$ 有关的命题,若:

(1) $P(n_0)(n_0 \in \mathbf{N})$ 成立

(2) 假设 $P(k)(k \geqslant n_0)$ 成立,可推出 $P(k+1)$ 成立,则 $P(n)$ 对一切自然数 $n \geqslant n_0, n \in \mathbf{N}$ 时成立.

### 2、第二类数学归纳法

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 $n$ 有关的命题,若:

(1) $P(n_0)(n_0 \in \mathbf{N})$ 成立

(2) 假设 $P(n)$ 在 $n_0 \leqslant n \leqslant k$ 时成立,由此可得 $P(k+1)$ 成立,则 $P(n)$ 对一切自然数 $n \geqslant n_0$ 都成立

### 3、反向归纳法 (倒推归纳法)

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 $n$ 有关的命题,若:

(1) $P(n)$ 对无限多个自然数 $n$ 都成立

(2) 假设 $P(k+1)$ 成立,可推出 $P(k)$ 也成立.

### 4、跳跃数学归纳法

设 $P(n)$ 表示一个与自然数 $n$ 有关的命题,若:

(1) $P(1), P(2), \cdots.. P(l)$ 成立,

(2) 假设 $P(k)$ 成立,可以推出 $P(k+l)$ 成立,

则对一切自然数 $n$ 都成立.

### 5、螺旋归纳法

螺旋归纳法实质上是一种交叉过渡的归纳方法,其原理如下:

设 $P(n), Q(n)$ 是两串与自然数 $n$ 有关的命题,若

(1) $P(1)$ 成立

(2) 由 $P(k)$ 成立,可得 $Q(k)$ 成立,由 $Q(k)$ 成立,可得 $P(k+1)$ 也成立,则对所有自然数,$P(k), Q(k)$ 都成立.

## 精讲精练

【例 1】

证明：$1^4+2^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$.

【例 2】

设 $n$ 为正整数，证明：

$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$.

【例 3】

证明：在 $n \geqslant 3$ 时，$2^n$ 可以表示成 $7x^2+y^2$，其中 $x, y$ 均为奇数.

【例 4】

证明：任意等腰三角形可以分成 $n(n \geqslant 3)$ 个等腰三角形.

【例 5】

证明：对所有的正整数 $n$ 有 $\sqrt{1^2+\sqrt{2^2+\sqrt{3^2+\cdots+\sqrt{n^2}}}}<2$

【例 6】

数列 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$F_1=1$，$F_2=1$，证明：$F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}$.

# Part 2 数学归纳法与数列

## 精讲精练

【例 7】

设 $a_0=1, a_1=2$，且 $n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}, n=1,2,3,\cdots$，求 $\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{50}}{a_{51}}$.

【例 8】

已知对任意正整数 $n, a_n>0$，且 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$.

证明：$a_n=n$.

【例 9】

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}a_n-2n^2(a_{n+1}-a_n)+1=0$，求 $a_n$.

【例 10】

$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}^2+1}{a_n}$，$n=1,2,\cdots$，求证：对任意正整数 $n$，$a_n$ 都是整数.

【例 11】

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1, a_1=5$ 及 $a_{n+2}=\dfrac{2a_{n+1}^2-3a_{n+1}-9}{2a_n}$，证明：所有的 $a_n$ 都是整数.

【例 12】

设正数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 满足 $a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1}, n=1,2,3,\cdots$，求证：对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $a_n < \dfrac{1}{n}$.

【例 13】

自然数数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足关系式 $x_n+\sqrt{2} y_n=\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2^n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. 求证：$y_n-1$ 为完全平方数.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

【测试 1】

已知 $x^2-3x+1=0$，对于 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$x^{2^n}+x^{-2^n}$ 的末位数字是 7.

【测试 2】

用数学归纳法证明：$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$（$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$）.

【测试 3】

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，且当 $n>3$ 时，$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}-2a_{n-3}$，试证：对大于 3 的自然数 $n$ 恒有 $a_n>3\cdot 2^{n-2}$.

拍摄区

【测试 4】

已知数列 $\{x_n\}$ 满足，$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 猜想数列 $\{x_{2n}\}$ 的单调性，并证明你的结论.

(2) 用数学归纳法证明：$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

【测试 5】

设 $a_1=1$，$a_2=-1$，$a_n=-a_{n-1}-2a_{n-2}\,(n\geqslant 3)$，求证：当 $n\geqslant 2$ 时，$2^{n+1}-7a_{n-1}^2$ 是一个完全平方数.

# 第5讲 数列综合


Part 1
数列的函数性质

Part 2
数列不等式

Part 3
数列的数论性质

# Part 1 数列的函数性质

## 精讲精练

【例 1】

使不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<a-2007\frac{1}{3}$ 对一切正整数 $n$ 都成立的最小正整数 $a$ 的值为________.

【例 2】

证明:方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 $r$,且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$,使得 $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.

# Part 2 数列不等式

## 精讲精练

【例 3】

设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}$，求证：当正整数 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}<a_n$.

【例 4】

设 $x_1,x_2,x_3,\cdots$是递减的正数列且对任意自然数 $n$ 都有 $x_1+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\cdots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1$.

求证：对任意自然数 $n$ 都有 $x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\cdots+\frac{x_n}{n}<3$.

【例 5】

设 $1<x_1<2$，对于 $n=1,2,3,\cdots$，定义 $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$，求证：对于 $n\geqslant 3$，有 $\left|x_n-\sqrt{2}\right|<2^{-n}$.

【例 6】

设 $a>2$,给定数列 $\{x_n\}$,其中 $x_1=a$,$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}$. 求证:

(1) $x_n>2$ 且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$;

(2) 如果 $a\leqslant 3$,那么 $x_n<2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$;

(3) 如果 $a>3$,那么当 $n\geqslant\dfrac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$ 时,必有 $x_{n+1}<3$.

【例 7】

已知数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1}$.

证明:$a_1+a_2+\cdots+a_n>\dfrac{3n-3}{2}$.

# Part 3 数列的数论性质

## 精讲精练

【例 8】

已知 $v_0=0$，$v_1=1$，$v_{n+1}=8v_n-v_{n-1}\,(n=1,2,3,\cdots)$. 试问：在数列 $\{V_n\}$ 中是否有能被 15 整除的项? 这样的项有多少? 证明你的结论.

【例 9】

已知数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1,a_2=2$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-3a_n$ ( $a_{n+1}\cdot a_n$ 为偶数 )；$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ ( $a_{n+1}\cdot a_n$ 为奇数 ). 试证：对一切 $n\in\mathbf{N}^*,a_n\neq 0$.

【例 10】

在正整数集上定义函数 $f(n)$ 如下：

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, \text{当}n\text{为偶数时}\\ n+3, \text{当}n\text{为奇数时}\end{cases}$$

(1) 证明对任何正整数 $m$，数列 $a_0=m, a_1=f(m), \cdots, a_n=f(a_{n-1}), \cdots$ 中总有一项为 1 或 3.

(2) 在所有正整数中，哪些 $m$ 使上述数列必然出现 3，哪些 $m$ 使上述数列必然出现 1.

【例 11】

数列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足 $a_1=a_2=1, a_n=\dfrac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$，对于任意 $n\geqslant 3$. 证明：数列中的所有数都是整数.

【例 12】

整数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_2=7$，$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}$，$n\geqslant 2$. 求证：对所有 $n>1$，$a_n$ 是奇数.

【例 13】

设 $a_n$ 是下述自然数 $N$ 的个数：$N$ 的各位数字之和为 $n$ 且每位数字只能取 1、3 或 4. 求证：$a_{2n}$ 是完全平方数. 这里，$n=1,2,\cdots$.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

设 $n$ 为正整数，数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：$a_n^3+\frac{a_n}{n}=1$，$b_1=\frac{1}{2}$，$b_{n+1}=\frac{b_n^2}{(n+1)^2}+b_n$.

(1) 证明：$\frac{n}{n+1}<a_n<1$.

(2) 试比较 $a_n$ 与 $b_n$ 的大小.

**【测试 2】**

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=1$，$a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$. 求证：$a_n>\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

拍摄区

【测试 3】

设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_0=5,x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}\,(n=0,1,\cdots)$. 求证:$45<x_{1000}<45.1$.

【测试 4】

设 $\{a_n\}$ 是具有下列性质的实数列,即 $1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$①,数列 $\{b_n\}$ 定义为 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{a_{k-1}}{a_k}\right)\dfrac{1}{\sqrt{a_k}}$,$n=1,2,3,\cdots$②,证明:

(1) 对所有的 $n=1,2,3,\cdots$,有 $0\leqslant b_n<2$.

(2) 对满足 $0\leqslant c<2$ 的任意实数 $c$,总存在着一个满足 ① 的数列 $\{a_n\}$ 使得由 ② 导出的数列 $\{b_n\}$ 中有无穷多个下标 $n$,使 $b_n>c$.

第6讲

# 不等式基础与均值不等式

Part 1
不等式的基本性质与解不等式

Part 2
不等式证明基本方法

Part 3
均值不等式初步

# Part 1 不等式的基本性质与解不等式

## 知识点睛

### 1. 不等式的基本性质

① 三分律：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，都有确定的序关系，即 $a>b$；$a=b$；$a<b$，三者中有且仅有一个成立.

② 对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$.

③ 传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

④ 可加性：$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$.

⑤ 加法法则：$a>c,b>d\Rightarrow a+b>c+d$；$a>c,b<d\Rightarrow a-b>c-d$.

⑥ 可乘性：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

⑦ 乘法法则：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

⑧ 乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

⑨ 倒数法则：$a>b,ab>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

⑩ 开方法则：$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}_+,n>1)$.

## 精讲精练

【例 1】

(1) 若 $-1<a<2,-2<b<1$，求 $a-b$ 的取值范围.

(2) 已知 $-1\leqslant a+b\leqslant 1$；$1\leqslant a-b\leqslant 3$，求：$3a-b$ 的取值范围.

【例 2】

解下列不等式：

（1）$4^x+4^{-x}+5>2^{x+2}+2^{2-x}$；

（2）$x^{3-3\log_2 x-(\log_2 x)^2}-\frac{1}{8}x^2>0$.

（3）$2\log_a(x-1)>\log_a[1+a(x-2)](a>1)$；

（4）$1+2^x<3^x$.

# Part 2 不等式证明基本方法

## 知识点睛

**1.** 可以使用以下两种方法比较两式的大小：

① 作差：$a-b>0\Rightarrow a>b$；

② 作商：$\frac{a}{b}>1, b>0\Rightarrow a>b$.

**2.** ① $b>a>m>0$，则 $\frac{a}{b+m}<\frac{a}{b}<\frac{a}{b-m}$；

② $b>a>m>0$，则 $\frac{a-m}{b-m}<\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

**3.** 绝对值的不等式：

若 $a>0$，则 $|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$；若 $a>0$，则 $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$.

$a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow |a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

## 精讲精练

【例 3】

比较下列各式的大小：

(1) 已知 $a,b$ 为正实数，$A=\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}$，$B=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，则 $A$________$B$；

(2) 设 $a>0$，且 $a\neq1$，当 $0<x<1$，则 $|\log_a(1-x)|$________$|\log_a(1+x)|$；

(3) 设 $A=\sqrt{2017}-\sqrt{2015}$，$B=\frac{1}{\sqrt{2016}}$，则 $A$________$B$.

【例 4】

设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,证明,对任意不相等的实数 $a,b$,都有 $|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

【例 5】

设 $a,b,c$ 为正实数,证明:$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}$.

【例 6】

设三角形的三个内角为 $A,B,C$，$x,y,z$ 是实数，证明：$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2xz\cos B+2xy\cos C$.

【例 7】

设 $a,b,c,d,e,f$ 都是自然数，且 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}>\dfrac{e}{f}$，$af-be=1$. 求证：$d\geqslant b+f$.

【例 8】

(1) 证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<\frac{7}{4}$

(2) $\left[\sum\limits_{k=1}^{120}\frac{1}{\sqrt{k}}\right]=$________.

(3) 证明 $2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3\,(n\in\mathbf{N}^{*})$

【例 9】

(1) $a,b,c$ 为非负实数,且 $a<b+c$,证明 $\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$;

(2) 已知 $a,b,c$ 是三角形的三边长,求证 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$.

【例 10】

已知 $n$ 是正整数,证明 $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{3n}{2n+1}$.

# Part 3 均值不等式初步

## 知识点睛

### 1. 均值不等式（$AM-GM$ 不等式）

假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n$ 个非负实数，则有 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ .

推论 1：若 $a,b>0\Rightarrow a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

推论 2：若 $a,b,c>0\Rightarrow a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

推论 3：假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n$ 个非负实数，则有

$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqslant na_1a_2\cdots a_n$. 等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ .

说明：① 均值不等式具有“和积互化”的放缩功能.

② 均值不等式的几何解释：半径不小于半弦.

### 2. 均值不等式的变形

由于 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，用 $\dfrac{1}{a_i}$ 代替 $a_i$，则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=H_n.$$

对于任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有 $n\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2\geqslant 0$. 故得到

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}=Q_n.$$

于是

$$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n.$$

## 精讲精练

【例 11】

(1) 设 $a,b,c$ 为正实数,证明:$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}\geqslant 2$.

(2) 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为正实数,求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^k$.

【例 12】

已知 $\lg a<0,\lg b<0,\lg c<0$ 且 $\lg(a+b+c)=0$,则 $\lg\left(a^2+b^2+c^2+18abc\right)$ 的最大值为________.

【例 13】

已知 $x>y>0, xy=1$，则 $\dfrac{3x^3+125y^3}{x-y}$ 的最小值为________.

【例 14】

已知 $x,y,z$ 是满足 $x^2+y^2+z^2=17+\dfrac{14}{9}xy$ 的实数，则 $p=xy+yz+zx$ 的最大值为________.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

求证：$\dfrac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$ .

**【测试 2】**

设实数 $xyz$ 满足 $xy+yz+zx+1=0$，求证：$x^2+5y^2+8z^2\geqslant4$.

拍摄区

**【测试 3】**

设 $S_n=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}$，求 $4S_{2018}$ 的整数部分.

**【测试 4】**

设正实数 $a$、$b$ 满足 $a+b=1$. 则 $\frac{8}{a}+\frac{27}{b^2}$ 的最小值为________.

第 7 讲

# 柯西不等式基础

Part 1
柯西不等式基础

# Part 1 柯西不等式基础

## 知识点睛

### 1. 柯西不等式

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为实数,则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$,等号成立当且仅当存在实数 $\lambda$ 和 $\mu$,使得 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \lambda a_i=\mu b_i$ . 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均不为零时,成立条件可改写为 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

### 2. 柯西不等式的推论

推论 1:设 $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等.

推论 2:$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数,则 $n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2$,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等.

变形 1:设 $b_1,b_2,\cdots,b_n>0$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}$,当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等.

变形 2:$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为正实数,有 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}\right)^2$,当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等.

变形 3:$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为正实数,则 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}$,当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时取等.

## 精讲精练

【例 1】

(1) 已知 $x+2y+3z=12$，则 $x^2+2y^2+3z^2$ 的最小值为________.

(2) 设实数 $a,b,c,d$ 满足条件：$a+b+c+d=3$，$a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$，求 $a$ 的取值范围.

(3) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，且满足：$x^2+y^2+z^2=1$，$x+2y+3z=\sqrt{14}$，求证 $x+y+z=\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

【例 2】

(1) 已知 $a+b=1$，求 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}$ 的最大值.

(2) 已知 $x^2+y^2+z^2=4$,试求 $x-2y+2z$ 的最小值及相应的 $x,y,z$ 的值.

【例 3】

设 $a,b,c\geqslant 0$,$a+b+c\leqslant 3$,求证:$\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2}\leqslant\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}$.

【例 4】

已知 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=1$,证明:$\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\geqslant\dfrac{27}{4}$.

【例 5】

已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证 $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

【例 6】

已知 $a,b,c,d>0$，求证：$\dfrac{a-b}{b+c}+\dfrac{b-c}{c+d}+\dfrac{c-d}{d+a}+\dfrac{d-a}{a+b}\geqslant 0$.

【例 7】

设 $x,y,z$ 为正实数且 $xyz=1$,证明:$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}$.

【例 8】

设 $a,b,c$ 为正实数,且满足 $abc=1$. 试证:$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.

【例 9】

设 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$，证明：$\sum\frac{x^{3}}{z^{3}+x^{2}y}\geqslant\frac{3}{2}$.

【例 10】

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$，求证：$\frac{1}{x_1(1+x_1)}+\frac{1}{x_2(1+x_2)}+\cdots+\frac{1}{x_n(1+x_n)}\geqslant\frac{n}{2}$.

【例 11】

设 $a,b,c$ 是满足 $abc=1$ 的正实数，求 $P=\frac{a^3+8}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+8}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$ 的最小值.

【例 12】

求函数 $f(x)=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ 的最值.

【例 13】

设 $a,b,c,d$ 为实数,满足 $a^2+b^2+c^2-d^2+4=0$. 则 $3a+2b+c-4|d|$ 的最大值等于________.

【例 14】

已知三角形的三个内角为 $A,B,C$(单位为弧度),证明 $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\geqslant\frac{27}{\pi^2}$.

【例 15】

若 $x,y$ 为正实数,$n$ 为大于 1 的正整数,满足 $x^n+y^n=1$. 则 $x+4y$ 的最大值为________.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

【测试 1】

求 $\dfrac{a}{\sin\theta}+\dfrac{b}{\cos\theta}\left(a、b>0,\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 的最小值.

【测试 2】

设 $x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，

证明：$\dfrac{x_1}{1+x_2+x_3+\cdots+x_n}+\dfrac{x_2}{1+x_1+x_3+\cdots+x_n}+\cdots+\dfrac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}\geqslant\dfrac{n}{2n-1}$.

拍摄区

【测试 3】

设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$，$ab+bc+cd+da=1$，求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

【测试 4】

正实数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=1$. 求证：

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leqslant 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

# 第8讲

# 排序及其他不等式基础

## Part 1
## 排序及其他不等式基础

# Part 1 排序及其他不等式基础

## 知识点睛

**排序不等式**

若两组实数 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 和 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则对于 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的任意排列 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_n}$，有：

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leqslant a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n} \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

这称为倒序和 $\leqslant$ 乱序和 $\leqslant$ 顺序和.

切比雪夫（Chebyshev）不等式：

不等式：设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则有：

$n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \leqslant n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. 这是排序不等式的直接推论.

## 精讲精练

【例 1】

设 $a_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \cdots, n$，证明：$\dfrac{a_1^2}{a_2} + \dfrac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{a_1} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

【例 2】

设 $a,b,c$ 构成三角形三边,证明:

(1) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

(3) $\frac{c}{a+b-c}+\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}\geqslant 3$.

【例 3】

(1) $x,y,z>0$,证明:$\dfrac{z^2-x^2}{x+y}+\dfrac{x^2-y^2}{y+z}+\dfrac{y^2-z^2}{z+x}\geqslant 0$.

(2) $\triangle ABC$ 三边长为 $a,b,c$,周长为 $s$,$k\in\mathbb{N}^*$,证明:$\sum\dfrac{b+c-a}{a^kA}\geqslant\dfrac{3^{k+1}}{\pi s^{k-1}}$.

【例 4】

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的正整数,求证:$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\leqslant a_1+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}$.

【例 5】

$a,b,c>0$,求证:$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

【例 6】

设 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e, a+b+c+d+e=1$,证明:$ad+dc+cb+be+ea \leqslant \frac{1}{5}$.

【例 7】

(1) 设 $a,b,c>0$,求证:$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

(2) 设 $a,b,c>0$,求证:$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geqslant\dfrac{a+b+c}{2}$.

(3) 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$,记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$,求证:

$$\frac{a_1^3}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^3}{a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\geqslant\frac{S}{n-1}.$$

【例 8】

$x,y,z,\lambda>0,k\geqslant 1$,且 $x+y+z=3$,求证:.

$$\frac{x^k}{(\lambda+y)(\lambda+z)}+\frac{y^k}{(\lambda+x)(\lambda+z)}+\frac{z^k}{(\lambda+x)(\lambda+y)}\geqslant\frac{3}{(\lambda+1)^2}.$$

【例 9】

(1) $x,y,z\geqslant 0,x+y+z=1$,证明:$\sum\limits_{x,y,z}\frac{x^2}{x+2}\geqslant\frac{1}{7}$.

(2) $x$、$y$、$z\geqslant 0,x+y+z=1$,证明:$\sum\limits_{x,y,z}\frac{x^3}{x^2+y+z}\geqslant\frac{1}{7}$.

(3) $x,y,z\geqslant 0,x+y+z=1,k$ 为正整数,证明:$\sum\limits_{x,y,z}\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}\geqslant\frac{1}{7}$.

【例 10】

已知 $a,b,c>0,abc=1$,求证:$\sum\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leqslant 1$.

【例 11】

$a,b,c>0,a+b+c=1$,证明:$\frac{a^7+b^7}{b^5+c^5}+\frac{b^7+c^7}{c^5+a^5}+\frac{c^7+a^7}{a^5+b^5}\geqslant\frac{1}{3}$.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

【测试 1】

已知 $x_i>0, k, t>0$，求证：

(1) $x_1^{k+t}+x_2^{k+t}+\cdots+x_n^{k+t}\geq x_1^k x_2^t+x_2^k x_3^t+\cdots+x_{n-1}^k x_n^t+x_n^k x_1^t$.

(2) $x_1^{k-t}+x_2^{k-t}+\cdots+x_n^{k-t}\leq \dfrac{x_1^k}{x_2^t}+\dfrac{x_2^k}{x_3^t}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^k}{x_n^t}+\dfrac{x_n^k}{x_1^t}$.

【测试 2】

在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\dfrac{\pi}{3}\leq \dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\dfrac{\pi}{2}$.

**【测试 3】**

设 $h_a$、$h_b$、$h_c$、$\Delta$ 表示 $\triangle ABC$ 三边 $a,b,c$ 上的高和面积，

求证：对 $n\in\mathbf{R}^+$ 有 $(ah_b)^n+(bh_c)^n+(ch_a)^n\geqslant 3\cdot 2^n\Delta^n$.

**【测试 4】**

$x_1<x_2<\ldots<x_n\,(n\geq 3)$，证明：$\dfrac{n(n-1)}{2}\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\leq\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\sum\limits_{j=2}^{n}(j-1)x_j$.

# 第9讲

# 不等式基本技巧

Part 1
整体代换

Part 2
三角代换

Part 3
增量代换

Part 4
常值代换

Part 5
正数代换

Part 6
正规化与有序化

Part 7
调整法

# Part 1 整体代换

## 精讲精练

【例 1】

已知 $a,b,c>0$，且满足 $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1$，求证：$abc\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【例 2】

设 $x,y,z\in(0,1)$，且 $\frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{1-y}+\frac{z^2}{1-z}\leqslant\frac{3}{2}$，求证：$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\leqslant 6$

# Part 2 三角代换

## 精讲精练

【例 3】

已知实数 $x$、$y$ 满足 $x^2+y^2-4x-6y+9=0$，求证：$19\leqslant x^2+y^2+12x+6y\leqslant 99$.

【例 4】

如果 $x,y,z>1$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，证明：$\sqrt{x+y+z}\geqslant\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

## Part 3 增量代换

### 精讲精练

【例 5】

设 $a>1,b>1$,求证:$\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\geqslant 8$.

## Part 4 常值代换

### 精讲精练

【例 6】

已知 $m,n$ 是正整数,且 $1<m<n$ ,求证:$(1+m)^n>(1+n)^m$ .

【例 7】

对每个大于 1 的整数 $n$，定义：$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

证明：$n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n<n-(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

## Part 5 正数代换

### 精讲精练

【例 8】

设 $a,b,c$ 为一个三角形的三边长，证明：$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

# Part 6 正规化与有序化

## 精讲精练

【例 9】

已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$，证明：$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4 \leqslant 6$

【例 10】

证明 Schur 不等式：若 $x,y,z$ 为非负实数，则 $x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)$.

# Part 7 调整法

## 精讲精练

【例 11】

若 $x,y,z$ 是正实数，求函数 $\dfrac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}$ 的最大值.

【例 12】

已知 $x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2$ 满足 $y_2\geqslant y_1\geqslant x_4\geqslant x_3\geqslant x_2\geqslant x_1\geqslant 2$，$x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant y_1+y_2$，证明：$x_1x_2x_3x_4\geqslant y_1y_2$.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

【测试 1】

$a,b,c$ 为正实数，证明：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$.

【测试 2】

设 $a,b,c$ 是正实数，求证：$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+(a+b+c)^2\geqslant 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$.

拍摄区

【测试 3】

设 $a>b>c$,求证:$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)>0$.

【测试 4】

$a,b,c,d$ 是正实数,并且满足条件:$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{d^2}{1+d^2}=1$. 求证:$abcd\leqslant\frac{1}{9}$.

【测试 5】

若 $a,b,c$ 为非负实数且 $a+b+c=1$,试求 $S=ab+bc+ca-3abc$ 的最大值.

# 第10讲

# 函数与不等式

Part 1
不等式的应用

Part 2
构造函数证明不等式

# Part 1 不等式的应用

## 精讲精练

【例 1】

方程 $\left(x^{2006}+1\right)\left(1+x^{2}+x^{4}+\cdots+x^{2004}\right)=2006x^{2005}$ 的实数解的个数为________.

【例 2】

若实数 $a,b,c$ 满足 $2^{a}+4^{b}=2^{c}$，$4^{a}+2^{b}=4^{c}$，求 $c$ 的最小值.

【例 3】

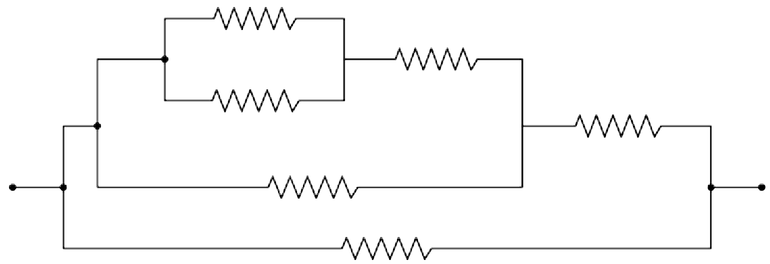
设正系数一元二次方程 $ax^{2}+bx+c=0$ 有实根，求证：$\min(a,b,c)\leqslant\frac{a+b+c}{4}$.

【例 4】

设 $n \geqslant 2$ 为整数，$x_i \in [0,2]\ (i=1,2,\cdots,n)$，记二次函数 $f(x)=nx^2-2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)x+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ 的最小值为 $M$，求 $M$ 的最大值.

【例 5】

用电阻值分别为 $a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$、$a_6$ $(a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6)$ 电阻组装成一个如图的组件，在组装中应如何选取电阻，才能使该组件总电阻值最小？证明你的结论.



# Part 2 构造函数证明不等式

## 精讲精练

【例 6】

已知 $a$、$b$、$c\in\mathbb{R}_+$，且 $x>0$. 比较 $a^x+b^x+c^x$ 与 $(a+b+c)^x$ 的大小.

【例 7】

求证：$\dfrac{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}{1+|x_1+x_2+\cdots+x_n|}\leqslant\dfrac{|x_1|}{1+|x_1|}+\dfrac{|x_2|}{1+|x_2|}+\cdots+\dfrac{|x_n|}{1+|x_n|}$.

【例 8】

(1) 设 $|a|<1, |b|<1, |c|<1$. 求证:$ab+bc+ca+1>0$.

(2) 已知 $|a|<1, |b|<1, |c|<1$,求证:$a+b+c<abc+2$.

【例 9】

(1) 若 $x, y, z$ 满足 $x+y+z=1$ 且为非负实数,证明:$0 \leqslant xy+yz+zx-2xyz \leqslant \dfrac{7}{27}$.

(2) 设 $a,b,c$ 是三角形的三条边长. 如果 $a+b+c=1$,

证明:$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

(3) 已知正数 $a,b,c,A,B,C$ 满足条件 $a+A=b+B=c+C=k$.

证明:$aB+bC+cA<k^2$.

(4) 已知 $\triangle ABC$,设 $I$ 是它的内心,$\angle A,\angle B,\angle C$ 的内角平分线分别交其对边于 $A',B',C'$.

求证:$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}$.

【例 10】

设长方体的棱长为 $x$、$y$、$z(x<y<z)$，$p$ 是长方体各棱长之和，$S$ 是表面积，$d$ 是对角线长.

求证：$x<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{S}{2}}\right)$ 且 $z>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{S}{2}}\right)$.

【例 11】

对任何正整数 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3$

求证：$(a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)^2\geqslant 4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)$.

【例 12】

设 $a$、$b$、$c$ 为直角三角形的三边长,其中 $c$ 为斜边. 求使得 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geqslant k$ 成立的 $k$ 的最大值.

【例 13】

已知实数 $a$、$b$、$c$、$d$ 满足:对任意的实数 $x$ 均有 $a\cos x+b\cos 2x+c\cos 3x+d\cos 4x \leqslant 1$,求 $a+b-c+d$ 的最大值及此时实数 $a$、$b$、$c$、$d$ 的值.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

设 $f(x)=\lg\left[\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}\right]$，其中 $a$ 是实数，$n$ 是任意给定的自然数且 $n\geqslant 2$.

当 $a\in(0,1]$ 且 $x\neq 0$ 时，求证：$2f(x)<f(2x)$.

**【测试 2】**

设 $a$、$b$、$c$ 为正实数．证明：$\sum\frac{(b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\leqslant 2$.

拍摄区

【测试 3】

若 $x,y,z\in(0,1)$，则 $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

【测试 4】

求所有的实数 $k$，使得不等式 $a^3+b^3+c^3+d^3+1\geqslant k(a+b+c+d)$ 对任意 $a,b,c,d\in[-1\ \ +\infty)$ 都成立.

# 第11讲

# 极限与导数

Part 1 数列的极限

Part 2 函数的极限

Part 3 夹逼定理

Part 4 导数

# Part 1 数列的极限

## 知识点睛

**数列极限定义:**

若实数数列 $\{x_n\}$ 和实数 $x$ 满足, 对任意给定的正数 $\varepsilon$, 总存在正整数 $N$, 使得当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-x|<\varepsilon$ 成立, 则称 $x$ 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n$ 趋向于无穷大时的极限 (也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x$ 或者趋向于 $x$), 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. 或者称为, 当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x$ 成立.

**数列极限的唯一性**: 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_1$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_2$, 则 $x_1=x_2$.

**数列极限的四则运算**:

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, 则有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=x\pm y$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=xy$

(3) 若 $y_n$ 都不为 0 且 $y\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{x}{y}$

## 精讲精练

【例 1】

根据定义求以下数列的极限:

(1) $x_n=\dfrac{1}{n}$.

(2) $x_n=(-1)^n$.

(3) $x_n = \dfrac{1+2\cdot(-1)^n}{n}$.

(4) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$.

(5) $x_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$.

【例 2】

求下列数列的极限：

(1) $x_n=\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}+\cos\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$.

(2) $x_n=\dfrac{ne^{-n}}{2n+1}$.

(3) $x_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}$.

【例 3】

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

【例 4】

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ 有极限.

【例 5】

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(3) 求证：$0<e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<\dfrac{3}{n}(n=1,2,\cdots)$

(4) 求证：$\left(\dfrac{n}{e}\right)^{n}<n!<e\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n}$.

(5) 求证：$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

(6) 求证：$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n$ 收敛

(7) 求 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$

# Part 2 函数的极限

## 知识点睛

函数极限定义:

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义 (在 $x=x_0$ 处不一定有定义), 实数 $A$ 满足对任意给定的正数 $\varepsilon$, 总存在依赖于 $\varepsilon$ 的正数 $\delta$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 或者称为 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to A$ 成立.

函数极限的唯一性: 若有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$, 则 $A=B$.

函数极限的四则运算:

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$

(3) 若 $B\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

## 精讲精练

【例 6】

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

【例 7】

根据定义求以下函数在 $x$ 趋向于 1 时的极限：

(1) $f(x)=x$.

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

(3) $f(x)=\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}$.

(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+2}}$.

【例 8】

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$.

(3) 已知 $f(a)=g(a)=0$，求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(4) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

# Part 3 夹逼定理

## 知识点睛

夹逼定理:

(1) 若三个数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. 则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

(2) 若三个函数 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义, 满足 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$. 则函数 $f(x)$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

## 精讲精练

【例 9】

求数列 $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$ 的极限.

【例 10】

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

# Part 4 导数

## 知识点睛

导数的定义:

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处和 $x=x_0$ 附近有定义, 且极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 称极限值为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数, 记为 $f'(x_0)$.

由定义不难推出, 过函数图象上一点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

## 精讲精练

【例 11】

求下列函数的导函数.

(1) $f(x)=C$($C$ 为常数).

(2) $f(x)=x$.

(3) $f(x)=x^2$.

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

(5) $f(x)=\sqrt{x}$.

## 知识点睛

常见函数的导数:

(1) $(C)'=0$, 其中 $C$ 为常数

(2) $(x^{a})'=ax^{a-1}$, 其中 $a$ 为非零常数

(3) $(a^{x})'=a^{x}\ln a$, 其中 $a$ 为正常数, 特别地 $(e^{x})'=e^{x}$

(4) $(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, 其中 $a$ 为正常数, 特别地 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(5) $(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x$

## 精讲精练

【例 12】

求下列函数的导数.

(1) $y=x^{2018}$.

(2) $y=\ln x$.

(3) $y=2^{x}$.

(4) $y=\sqrt[3]{x}$.

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{4}}}$.

(6) $y=\mathrm{e}^{-x}$.

(7) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

求下列的数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

**【测试 2】**

设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{2013}\left(\cos\dfrac{k!\pi}{2013}\right)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 等于________.

拍摄区

【测试 3】

$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+2)\log_2(n+2)-2(n+1)\log_2(n+1)+n\log_2 n]=$________.

【测试 4】

求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

【测试 5】

求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

# 第12讲

# 导数的应用

Part 1
导数的四则运算

Part 2
复合函数求导

Part 3
反函数求导

Part 4
隐函数求导

Part 5
洛必达法则

Part 6
导数与单调性

Part 7
导数与最值

# Part 1 导数的四则运算

## 知识点睛

导数的四则运算:

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)+v'(x)$

(2) $[Cu(x)]'=Cu'(x)$

(3) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

## 精讲精练

【例 1】

求下列函数的导数.

① $y=5x^{-1002}$;

② $y=x^4-3x^2-5x+6$;

③ $y=x^2\ln x$;

④ $y=x\cos x-\sin x$;

⑤ $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

⑥ $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

# Part 2 复合函数求导

## 知识点睛

**复合函数的求导法则**

对于可导函数 $y=f(u),u=u(x)$，我们有 $[f(u(x))]'=f'(u(x))\cdot u'(x)$.

推广：$[f(g(h(x)))]'=f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$.

## 精讲精练

【例 2】

求下列函数的导数：

(1) $f(x)=x^2+2x+1$

(2) $f(x)=x\ln x$

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+2x+1}$，则 $[100f'(\pi)]=$________.

(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+2x+1}$

(5) $f(x)=e^{x^2}$.

(6) $f(x)=\sin e^{x^2+x}$.

(7) $f(x)=x^x$.

# Part 3 反函数求导

## 知识点睛

反函数求导法则:

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数. 若 $x=g(y)$ 在区间 $(a,b)$ 上单调连续, 在 $y=y_0\in(a,b)$ 处可导且 $g'(y_0)\neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0=g(y_0)$ 处可导, 且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{g'(f(x_0))}$.

## 精讲精练

【例 3】

求下列函数的导数:

(1) $f(x)=\arcsin x$.

(2) $f(x)=\arccos x$.

(3) $f(x)=\arctan x$.

# Part 4 隐函数求导

## 知识点睛

隐函数是由隐式方程所隐含定义的函数，比如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $x^2+y^2-1=0$ 确定的函数。而可以直接用含自变量的算式表示的函数称为显函数，也就是通常所说的函数，如 $y=\cos(x)$。

隐函数的求导：针对 1 元隐函数，可以把 $y$ 看作 $x$ 的函数，利用链式法则在隐函数等式两边分别对 $x$ 求导，再通过移项求得 $\dfrac{dy}{dx}$ 的值。

## 精讲精练

【例 4】

求下列隐函数的导函数 ${y'}_x$：

(1) $x^2+2xy-y^2=2x$. 当 $x=2$ 与 $y=4$ 及当 $x=2$ 与 $y=0$ 时，$y'$ 等于什么？

(2) $y^2=2px$(抛物线).

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(椭圆).

# Part 5 洛必达法则

## 知识点睛

洛必达法则:

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ ($a$ 为实数或 $\infty$),$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处和 $x=a$ 附近可导,且在 $x=a$ 处和 $x=a$ 附近有 $g'(x)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在的充分条件为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 且此时 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

## 精讲精练

【例 5】

求以下函数在 $x$ 趋向于 0 时的极限：

(1) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(2) $f(x)=\dfrac{\ln\cos x}{x(x+2)}$.

(3) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

(4) $f(x)=\dfrac{\ln\tan 3x}{\ln\tan 5x}$.

(5) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$.

(6) $f(x)=x\ln x$.

# Part 6 导数与单调性

## 知识点睛

导数与函数单调性的关系:

若在区间 $(a,b)$ 上有 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$), 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调递增 (减). 若在区间 $(a,b)$ 上有 $f'(x)\geq 0$(或 $f'(x)\leq 0$), 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调不减 (增). 对闭区间也有性质成立.

## 精讲精练

【例 6】

求下列函数的单调区间：

(1) $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$.

(2) $f(x)=x+\sin x$.

(3) $f(x)=x\ln x$.

(4) $f(x)=\sin\sin x$.

(5) $f(x)=\cos^3 x+\sin^3 x$.

# Part 7 导数与最值

## 知识点睛

导数与最值的关系:

在某区间上处处可导的函数只有可能在两种点处取到该区间上的最值 (若最值存在)

(1) 导数等于 0 的点

(2) 定义域的端点和间断点

## 精讲精练

【例 7】

求下列函数在区间上的最大值和最小值:

(1) $f(x)=(x-3)(x+1)^2, x\in[-2,2]$.

(2) $f(x)=(2x-x^2)^2, x\in[-1,4]$.

(3) $f(x)=xe^x, x\in\mathbf{R}$.

(4) $f(x)=\sin 2x-x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

【例 8】

已知当 $x\geqslant 0$ 时，$1-\mathrm{e}^{-x}\leqslant\frac{x}{ax+1}$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

求下列函数的导数.

(1) $y=(2x^2+3)(3x-1)$.

(2) $y=\dfrac{\sin x}{x-1}$.

(3) $y=\ln\sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x-1}}$.

**【测试 2】**

求导数：$y=\arcsin(\sin x)$.

拍摄区

**【测试 3】**

设可导函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}_+$，证明 $f'(x)=f(x)\cdot(\ln f(x))'$.

**【测试 4】**

求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$ 和 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

拍摄区

【测试 5】

讨论函数 $f(x)=x^3-8x^2+13x-6$ 的单调性.

【测试 6】

一个动点从 $(0,5)$ 出发，以每秒 $\sqrt{3}$ 单位的速度运动到了 $(x,3)$，然后以每秒 1 单位的速度运动到了 $(3\sqrt{3},0)$. 求 $x$ 的值使得所需的时间最短.

第13讲

# 琴生不等式与积分

Part 1
用导数证明不等式

Part 2
凸函数与琴生不等式

Part 3
不定积分

Part 4
定积分

Part 5
换元积分法与分部积分法

# Part 1 用导数证明不等式

## 知识点睛

用导数证明不等式:

对于不等式 $f(x) \leqslant g(x)$, 令 $h(x)=g(x)-f(x)$, 即转化为证明 $h(x) \geqslant 0$,

这等价于证明 $h(x)_{\min} \geqslant 0$, 可以运用导数求出 $h(x)$ 的最小值来证明这一点.

或者,也可以利用导数研究 $h(x)$ 在各个区间上的单调性来证明这一点.

## 精讲精练

【例 1】

用导数证明下列不等式:

(1) $\ln(1+x) \leq x$.

(2) $(1+a)^b > (1+b)^a$, $1 \leq a < b$ 且 $a,b \in \mathbb{N}^*$.

(3) 证明 $e^x \geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$, $(x \geqslant 0)$.

# Part 2 凸函数与琴生不等式

## 知识点睛

**函数的凹凸性**:

设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，且对于该区间内的任意两个不等实数 $x_1,x_2$ 以及任意 $t\in(0,1)$，有 $f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$. 则称 $f(x)$ 为该区间上的凸函数（或下凸函数）.

反过来，设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，且对于该区间内的任意两个不等实数 $x_1,x_2$ 以及任意 $t\in(0,1)$，有 $f(tx_1+(1-t)x_2)\geqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$. 则称 $f(x)$ 为该区间上的凹函数（或上凸函数）.

凸函数的几何意义为: 函数曲线在其任意一条切线的上方.

若 $f(x)$ 在该区间上有二阶导数存在，则 $f(x)$ 为该区间上的凸函数的充要条件是在该区间上恒有 $f''(x)\geqslant 0$.

## 精讲精练

【例 2】

判断下列函数的凹凸性：

(1) $f(x)=x^{\mu}\,(x>0)$.

(2) $f(x)=a^{x}\,(a>0)$.

(3) $f(x)=\ln x$;

$f(x)=x\ln x$.

(4) $f(x)=\sin x\,(0\leq x\leq\pi)$.

(5) $f(x)=\arctan x$.

## 知识点睛

**琴生不等式(**Jensen**)不等式**:

设 $f(x)$ 为区间 $I$ 上的凸函数, 则对 $\forall x_i \in I, \forall \lambda_i > 0$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 有如下不等式成立:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

若 $f(x)$ 为严格凸函数 (即将凸函数定义中的小于等于号改成小于号), 则等号成立条件为 $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

## 精讲精练

【例 3】

证明下列不等式.

(1) 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 有 $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a + e^b}{2}$.

(2) 对任何 $a, b \in \mathbb{R}$, 有 $2\arctan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b$.

【例 4】

证明几何平均数不大于算术平均数，也就是说，若 $x_1,\cdots,x_n\geq 0$，$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

【例 5】

已知 $0<\alpha<\beta$, 证明对任意正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 有 $\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\left(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

【例 6】

证明对任意 $2n$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 以及满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数 $p,q$ 而言，有不等式

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 成立.

## 知识点睛

**三角不等式**

在 $\triangle ABC$ 中

$$0<\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$$

故

$$0<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}$$

$$0<\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$0<\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

$$0<\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{3}{8}$$

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}(\text{若 } A,B,C<\frac{\pi}{2})$$

$$\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\sqrt{3}(\text{若 } A,B,C<\frac{\pi}{2})$$

$\triangle ABC$ 中一些三角函数对称式的值域

$\triangle ABC$中一些三角函数对称式的值域

| $x$ | $\prod x$ | $\sum x$ | $\sum x^2$ |
|---|---|---|---|
| $\sin A$ | $\left(0,\frac{3}{8}\sqrt{3}\right]$ | $\left(0,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right]$ | $\left(0,\frac{9}{4}\right]$ |
| $\sin\frac{A}{2}$ | $\left(0,\frac{1}{8}\right]$ | $\left(1,\frac{3}{2}\right]$ | $\left[\frac{3}{4},1\right)$ |
| $\cos A$ | $\left(-1,\frac{1}{8}\right]$ | $\left(1,\frac{3}{2}\right]$ | $\left[\frac{3}{4},3\right)$ |
| $\cos\frac{A}{2}$ | $\left(0,\frac{3}{8}\sqrt{3}\right]$ | $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right]$ | $\left(2,\frac{9}{4}\right]$ |

## 精讲精练

【例 7】

在 $\triangle ABC$ 中，证明 $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 和 $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$.

# Part 3 不定积分

## 知识点睛

**原函数的定义**：

对于定义在区间 $I$ 上的函数 $f(x)$，若存在函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$ 对 $\forall x\in I$ 成立，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个原函数.

设 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为 $f(x)$ 在 $I$ 上的两个原函数，于是对 $\forall x\in I$，有 $[G(x)-F(x)]'=0$，从而 $G(x)-F(x)=C$，其中 $C\in R$ 为常数. 因此我们可以用 $F(x)+C$ 来表示 $f(x)$ 在 $I$ 上原函数的全体.

**不定积分的定义**：

称函数 $f(x)$(在 $I$ 上) 的全体原函数为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)dx=F(x)+C$.

**常见函数的不定积分**：

(1)$\int \mu dx=\mu x+C$

(2)$\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\mu\neq-1$

(3)$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

(4)$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$，特别地，$\int e^{x}dx=e^{x}+C$

(5)$\int\sin xdx=-\cos x+C$

(6)$\int\cos dx=\sin x+C$

(7)$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+C$

(8) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

**不定积分的基本性质:**

(1) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

**常用积分公式**

$\int a\,\mathrm{d}x = ax + C$,其中 $C$ 为常数;

$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$,其中 $a$ 是常数 $a \neq -1$;

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$,其中 $a > 0$,$a \neq 1$;

$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$;

$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$

$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$;

$\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$;

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$;

$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;

$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$;

$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$;

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$;

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$;

## 精讲精练

【例 8】

求下列函数的不定积分：

(1) $f(x)=(x+1)^2$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$；

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$；

(4) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(5) $f(x)=\sin x\cdot\cos x$；

(6) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$；

# Part 4 定积分

## 知识点睛

**定积分的定义:**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ 将 $[a,b]$ 分为 $n$ 段, 并记 $\lambda=\max\{x_i-x_{i-1}\}$. 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i$, 作和式 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

当 $\lambda\to 0$ 时, 若 $S_n$ 的极限存在 (与 $x_i$ 和 $\xi_i$ 的选取无关), 称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 简称为可积, 记作 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

此外, 补充定义 $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

**定积分的几何意义:**

$\int_a^b f(x)\,dx$ 表示了曲线 $f(x)$ 和直线 $x=a,x=b$ 以及 $x$ 轴围成的曲边梯形的面积, 其中 $x$ 轴下方的面积视作负数.

**微积分基本定理 (牛顿-莱布尼茨公式):**

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$. 则 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

## 精讲精练

【例 9】

用定义计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；

(2) $\int_1^2 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

【例 10】

计算下列定积分：

(1) $\int_{1}^{2}(3x^{2}+x)\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{0}^{2}(\mathrm{e}^{x}-x)\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-1}^{1}|x^{3}|\,\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-2\pi}^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

【例 11】

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除了有限个点之外处处相等，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

【例 12】

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明 $\left(\int_a^b fg\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2\mathrm{d}x\int_a^b g^2\mathrm{d}x$.

# Part 5 换元积分法与分部积分法

## 知识点睛

**第一类换元积分法**:

$\int f\circ g(x)\cdot g'(x)dx=\int f\circ g(x)dg(x)=\int f(t)dt=F(t)+C=F(g(x))+C$, 其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

**第二类换元积分法**:

$\int f(x)dx=\int f\circ g(t)dg(t)=\int f\circ g(t)\cdot g'(t)dt$

**分部积分法**:

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$

## 精讲精练

【例 13】

求下列函数的不定积分：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$；

(2) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$；

(3) $f(x)=\tan x$；

(4) $f(x)=\sec x$；

(5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

【例 14】

求下列函数的不定积分：

(1) $f(x)=\ln x$.

(2) $f(x)=x\cos x$；

(3) $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$；

(4) $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

证明 $2x<\sin x+\tan x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**【测试 2】**

已知函数 $f(x)=a^x, g(x)=\log_a x$，其中 $a>1$.

(1) 求函数 $h(x)=f(x)-x\ln a$ 的单调区间.

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处的切线平行，证明 $x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$.

(3) 证明当 $a\geqslant e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 $l$，使 $l$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

拍摄区

【测试 3】

已知 $0<x_i<\pi(i=1,2,\cdots,n)$，求证：$\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}\sin x_i}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}\leq\left(\dfrac{\sin\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}}\right)^n$.

【测试 4】

求下列函数的不定积分:

(1) $f(x)=4x^2+2x+1+\dfrac{1}{2x}$

(2) $f(x)=e^{-x+1}$

(3) $f(x)=\cos^2 x$

拍摄区

【测试 5】

求下列函数的定积分：

(1) $\int_0^5 \left(x^3+x^2+x+1\right)\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x$

【测试 6】

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\mathrm{d}x$.

# 第14讲

# 向量的概念

Part 1
向量的概念

# Part 1 向量的概念

## 知识点睛

既有大小又有方向的量,称为向量. 画图时用有向线段来表示.

向量的符号用两个大写字母上面加箭头,或一个小写字母上面加箭头表示,例如 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$.

有些书中用黑体表示向量,如$\boldsymbol{a}$.

$|\vec{a}|$ 表示向量 $\vec{a}$ 的模,向量的模的含义就是这条线段的长度。模为零的向量称为零向量,规定零向量的方向是任意的。零向量和零不同,模为 1 的向量称为单位向量。

方向相同或相反的向量称为平行向量(或共线向量),规定零向量与任意一个非零向量平行。

定理 1 向量的运算,加法满足平行四边形法则,减法满足三角形法则。加法满足交换律和结合律。

定理 2 非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共线的充要条件是存在实数 $\lambda\neq 0$,使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

定理 3 平面向量的基本定理:若平面内的向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线,则对同一平面内的任意向量 $\vec{c}$,存在唯一一对实数 $(x,y)$,使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$,其中 $\vec{a},\vec{b}$ 称为一组基底。

向量的坐标:在直角坐标系中,取与 $x$ 轴,$y$ 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i},\vec{j}$ 作为基底。任取一个向量 $c$,由定理 3 可知存在唯一一组实数 $(x,y)$,使得 $\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}$,则 $(x,y)$ 叫做 $c$ 的坐标。

向量的数量积:若非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\theta$,记做 $\theta=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$.

则 $\vec{a},\vec{b}$ 的数量积记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$,也称内积或者点乘,其中 $\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ 叫做 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影(注:投影可能为负值)。

定理 4 平面向量的坐标运算:若 $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$,

1. 加减法:$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$,
2. 实数乘向量:$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$,
3. 点乘:$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$,
4. 点乘的分配律:$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$,
5. 夹角:如果 $\vec{a},\vec{b}$ 是非零向量,则 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$,
6. 平行与垂直:$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$, $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

若点 P 是直线 $P_1P_2$ 上异于 $P_1,P_2$ 的一点，则存在唯一实数 λ，使 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，λ 叫 P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比.

若 O 为平面内任意一点，则 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}$。

由此可得：若 $P_1,P,P_2$ 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x,y),(x_2,y_2)$，则 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

对任意平面向量 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，有：$\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|,\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\leq|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$.

## 精讲精练

【例 1】

已知正六边形 $ABCDEF$，在下列表达式中：$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC},2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC},\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED},2\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{FA}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 相等的有________.

【例 2】

给定 $\triangle ABC$，求证：$G$ 是 $\triangle ABC$ 重心 $\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

【例 3】

设 $O$ 是正 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，求证 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

【例 4】

以下命题中正确的是________.

① $\vec{a}=\vec{b}$ 等价于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 且 $\vec{a}//\vec{b}$；

② $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}$；

③ 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则 $\vec{b}=\vec{c}$；

④ 若 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，则 $x\vec{a}+y\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}\Leftrightarrow x=m,y=n$；

⑤ 若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{CD}=\vec{b}$，且 $\vec{a},\vec{b}$ 共线，则 $A,B,C,D$ 四点共线；

⑥ $\vec{a}=(8,1)$ 在 $\vec{b}=(-3,4)$ 上的投影为 $-4$.

【例 5】

已知 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，$\overrightarrow{MN}=\vec{a}+k\vec{b},\overrightarrow{MP}=l\vec{a}+\vec{b}$，下列哪些结论正确？①$kl=1\Rightarrow M,N,P$ 共线；②$kl=1\Leftarrow M,N,P$ 共线.

【例 6】

(1) 给定非零向量 $\vec{a},\vec{b}$. 求证：$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

(2) 设 $s,t$ 为非零实数，$\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量，若 $|s\vec{a}+t\vec{b}|=|t\vec{a}-s\vec{b}|$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为________.

【例 7】

已知 $\overrightarrow{OP}=(\cos x,\sin x),\overrightarrow{OQ}=(1+\sin x,1+\cos x),0\leqslant x\leqslant \pi$，则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的取值范围是________.

【例 8】

已知集合 $M=\{(1,2)+\lambda(3,4)|\lambda\in\mathbf{R}\},N=\{(-2,-2)+\lambda(4,5)|\lambda\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$________.

【例 9】

已知 $\vec{a}=\vec{y}-\vec{x},\vec{b}=2\vec{x}-\vec{y},|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $|\vec{x}|+|\vec{y}|=$________.

【例 10】

已知 $\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(\lambda,1)$，若 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为锐角，则 $\lambda$ 的取值范围是________.

【例 11】

已知平面上三个向量 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ 均为单位向量，且两两的夹角均为 $120°$，若 $|k\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}|>1$，其中 $k$ 是实数，则 $k$ 的取值范围是________.

【例 12】

设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,\left|\vec{b}\right|=2$，且 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $60°$. 若向量 $7\vec{a}+2t\vec{b}$ 与向量 $t\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为钝角，则实数 $t$ 的取值范围是________.

【例 13】

(1) 将向量 $\vec{a}=(3,1)$ 绕原点按逆时针方向旋转 $90°$ 得到向量 $\vec{b}$，则 $\vec{b}$ 的坐标为________. 将向量 $\vec{a}=(3,1)$ 绕原点按逆时针方向旋转 $45°$ 得到向量 $\vec{c}$，则 $\vec{c}$ 的坐标为________.

(2) 非零向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，若点 $A$ 关于 $\overrightarrow{OB}$ 所在直线对称的点为 $C$，则 $\overrightarrow{OC}=$________.

【例 14】

已知 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 不共线,点 $C$ 分 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 2,$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则 $x-y=$________.

【例 15】

在 $\triangle ABC$ 中,$M$ 是 $AC$ 中点,$N$ 是 $AB$ 的三等分点,且 $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NA}$,设 $BM$ 与 $CN$ 交于 $D$,若 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BM}$,则 $\lambda=$________.

【例 16】

设 $O$ 点在 $\triangle ABC$ 内部,且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$,则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 的面积比为________.

【例 17】

在四边形 $ABCD$ 中，如果 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

【例 18】

在凸四边形 $ABCD$ 中，$P$ 和 $Q$ 分别为对角线 $BD$ 和 $AC$ 的中点. 求证：$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2$.

## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

在直角坐标系内，$O$ 为原点，点 $A(1,0),B(0,2)$，实数 $p,q$ 满足 $p^{-1}+q^{-1}=1$，点 $C$，$D$ 分别在 $x$ 轴，$y$ 轴上，且 $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}=q\overrightarrow{OB}$. 当 $p,q$ 变化时，直线 $CD$ 恒过一个定点，这个定点的坐标为________.

**【测试 2】**

在 $\triangle ABC$ 中，$O$ 为中线 $AM$ 上的一个动点，若 $AM=2$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值为________.

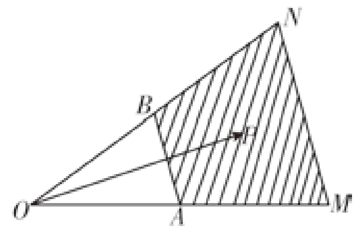
拍摄区

【测试 3】

设平面向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 满足 $\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=3, \left|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right|=4$,则 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ 的最小值为________.

【测试 4】

如图,在 $\triangle OMN$ 中,$A,B$ 分别是 $OM,ON$ 的中点,若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in\mathbf{R})$,且点 $P$ 落在四边形 $ABNM$ 内(含边界),则 $\dfrac{y+1}{x+y+2}$ 的取值范围是(　　)




A. $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$　　D. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]$

第15讲

# 向量的应用

Part 1
向量的应用

# Part 1 向量的应用

## 知识点睛

向量同时具有大小和方向两个要素，既有良好的运算性质，又有较强的几何直观性，是数与形的高度统一，因而便于与其他模块综合.

在平面几何中，很多问题有相应良好的向量性质：

1) $A,P,B$ 共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$

2) $G$ 为 $\triangle ABC$ 重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$

3) $I$ 为 $\triangle ABC$ 内心 $\Leftrightarrow \sin A\cdot\overrightarrow{IA}+\sin B\cdot\overrightarrow{IB}+\sin C\cdot\overrightarrow{IC}=0$

3) $H$ 为 $\triangle ABC$ 垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$

4) $O,G,H$ 为 $\triangle ABC$ 外心、重心、垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

几何图形可视点为基本元素，若取定固定点，则任意点可由向量表示，因此可以使用向量方法证明几何问题。向量方法较之几何综合法有简化书写、便于运算的优点，克服了需要添加辅助线的特点，显得明快、简便、易于入手；同时不依赖于坐标系，运算上更为简洁.

线段等长：

1) $AB=CD \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2$

推论：$AB>CD \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2>\overrightarrow{CD}^2$

2) $AB=CD \Leftarrow \overrightarrow{AB}=\pm\overrightarrow{CD}$

3) $AB=AC \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$

角度等角：

1) $\angle ABC=\angle DEF \Leftrightarrow \left\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}\right\rangle \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{ED}||\overrightarrow{EF}|}$

推论：$\angle ABC>\angle DEF \Leftrightarrow \left\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right\rangle>\left\langle\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}\right\rangle \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}<\dfrac{\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{ED}||\overrightarrow{EF}|}$

2) $\angle ABC=\angle ACB \Leftrightarrow AB=AC \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$

线段等比：

1) $AB:CD=a:b \Leftarrow \overrightarrow{AB}=\frac{a}{b}\overrightarrow{CD}$

2) $AB:BC=a:b \Leftarrow \overrightarrow{OB}=\dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{OC}+\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{OA}$

线段垂直：

$$AB \perp CD \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \neq 0 \\ \overrightarrow{CD} \neq 0 \end{cases}$$

线段平行：

$$AB // CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$$

点共线：

$$A,B,C \text{ 共线} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = 0 \\ O,A,B,C \text{不共线} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OC} + (1-\lambda)\overrightarrow{OA}$$

## 精讲精练

【例 1】

已知 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 2$，当 $\triangle AOB$ 面积最大时，$\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为________.

【例 2】

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. 求 $\sin C$ 的最大值.

【例 3】

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中,$B$ 是 $EF$ 的中点,$AB=EF=1$,$BC=6$,$CA=\sqrt{33}$,若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$,则 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值等于________.

【例 4】

$O$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点,$A,B,C$ 为 $\triangle ABC$ 的角,若 $\sin A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$,则点 $O$ 为 $\triangle ABC$ 的(　　)

A. 垂心　　B. 内心　　C. 外心　　D. 重心

【例 5】

已知点 $O,N,P$ 在 $\triangle ABC$ 所在平面内,且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$,$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$,则点 $O,N,P$ 依次是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A. 重心、外心、垂心

B. 重心、外心、内心

C. 外心、重心、垂心

D. 外心、重心、内心

【例 6】

证明:三角形的外心、重心、垂心在一条直线上(常称为欧拉线),且垂心与重心的距离是外心与重心距离的 2 倍.

【例 7】

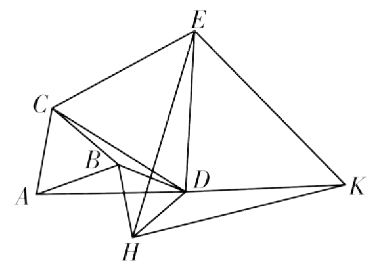
已知 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线为 $AD,BE,CF$. 若向量 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$,求证:$\triangle ABC$ 为正三角形.

【例 8】

设 $I$ 为 $\triangle ABC$ 内心,角 $A,B,C$ 所对边长分别为 $a,b,c$,$O$ 为平面内任意一点,记 $\overrightarrow{OA}=\vec{x}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{y}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{z}$,则 $\overrightarrow{OI}=$________.(用 $a,b,c,\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ 表示)

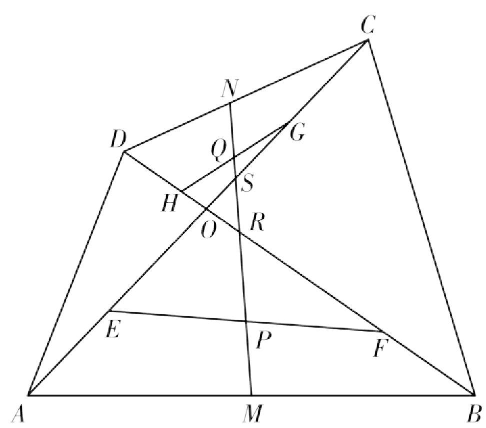
【例 9】

如图，位于同一平面内的正 $\triangle ABC$、正 $\triangle CDE$ 和 $\triangle EHK$(顶点依逆时针方向排列) 两两有公共点 $C$ 和 $E$，且 $D$ 是 $AK$ 的中点. 求证：$\triangle BHD$ 也是正三角形.



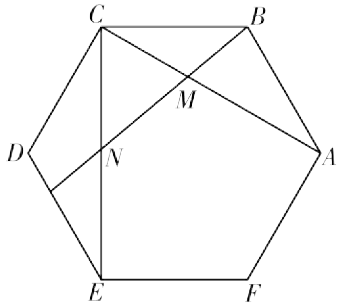

【例 10】

在凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 $AC$ 和 $BD$ 上各取两点 $E$、$G$ 和 $F$、$H$，使得 $AE=CG=\frac{1}{4}AC$，$BF=HD=\frac{1}{4}BD$，$AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$，设 $AB$、$CD$、$EF$、$GH$ 的中点分别为 $M$、$N$、$P$、$Q$，$MN$ 交 $AC$、$BD$ 于 $S$、$R$，求证：$M$、$N$、$P$、$Q$ 四点共线.



【例 11】

如图，过正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 $B$ 作直线，分别交 $AC$，$CE$ 于 $M$，$N$，且使 $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=r$，求 $r$ 的值.

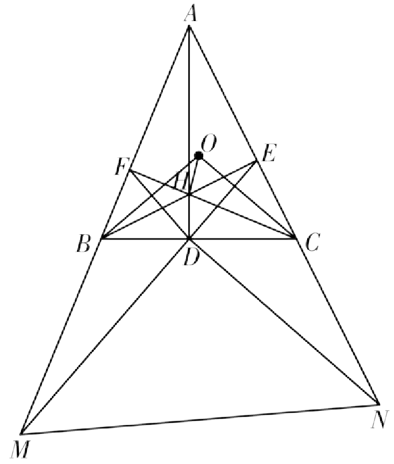



【例 12】

如图，$\triangle ABC$ 中，$O$ 为外心，三条高 $AD$，$BE$，$CF$ 交于点 $H$，直线 $ED$ 和 $AB$ 交于点 $M$，$FD$ 和 $AC$ 交于点 $N$. 求证：

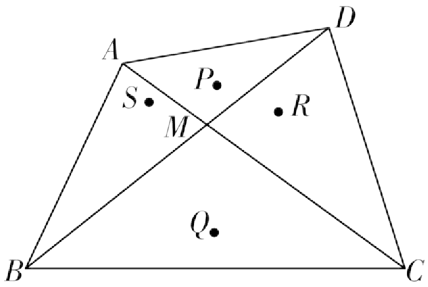
(1) $OB\perp DF$，$OC\perp DE$.

(2) $OH\perp MN$.



【例 13】

凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 $M$，点 $P,Q$ 分别是 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMB$ 的重心，$R,S$ 分别是 $\triangle DMC$ 和 $\triangle MAB$ 的垂心. 求证：$PQ\perp RS$.



## 随堂测

【温馨提示】请将解题过程写在拍摄区。

### 拍摄区

建议用时：40 分钟

你的用时：________

**【测试 1】**

已知 $\triangle ABC$，若对任意 $t\in\mathbb{R}$，$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\geqslant\left|\overrightarrow{AC}\right|$，则 $\triangle ABC$ 一定为（　　）

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

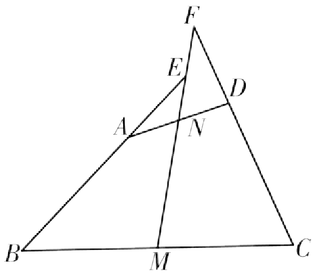
C. 直角三角形　　D. 答案不确定

**【测试 2】**

设 $M$、$N$ 分别为四边形 $ABCD$ 的边 $BC$、$AD$ 的中点，直线 $AB$、$CD$ 分别与直线 $MN$ 交于 $E$、$F$．证明：

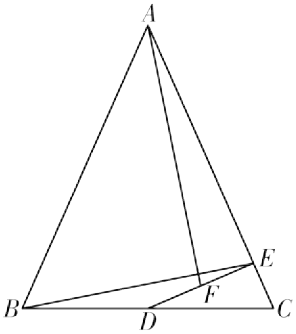
（1）若 $AB=CD$，则 $\angle BEM=\angle MFC$；

（2）若 $\angle BEM=\angle MFC$，则 $AB=CD$.



【测试 3】

如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$D$ 是 $BC$ 的中点，$DE\perp AC$ 于 $E$，$F$ 是 $DE$ 中点，求证：$AF\perp BE$.



【测试 4】

$A$、$B$ 为两条直线 $AX$、$BY$ 上的定点，$P$、$R$ 为射线 $AX$ 上两点，$Q$、$S$ 为射线 $BY$ 上的两点，且 $AP:BQ=AR:BS=a:b$ 为定比. $M$、$N$、$T$ 分别为 $AB$、$PQ$、$RS$ 上的点，且 $AM:MB=PN:NQ=RT:TS=e:f$ 为另一定比. 问 $M$、$N$、$T$ 三点的位置关系如何？证明你的结论！