曲线系方程教程

两个解释

一、曲线系的定义

具有一系列性质相似的曲线（注意：曲线包括了直线的）的集合，并且可以通过参数进行调整。

举个例子

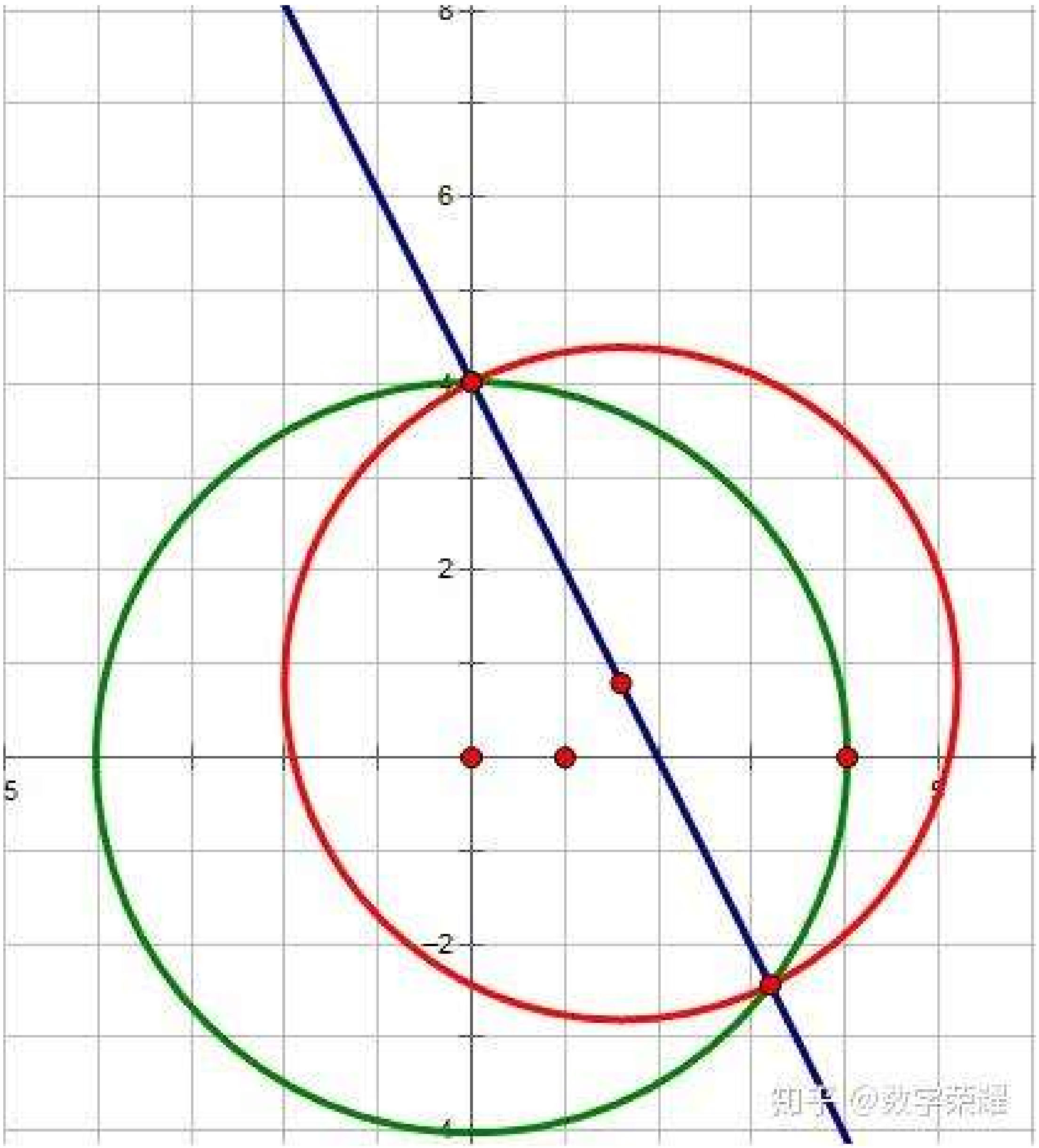


图1-1

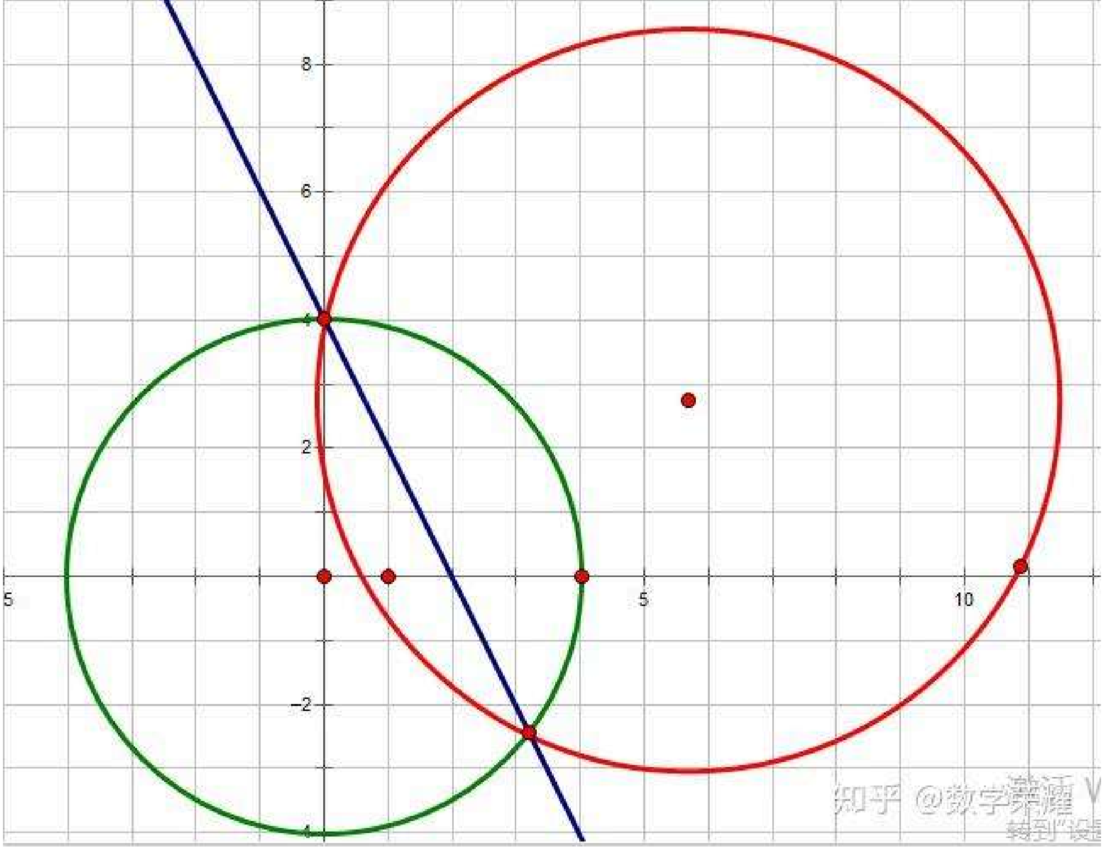


图1-2

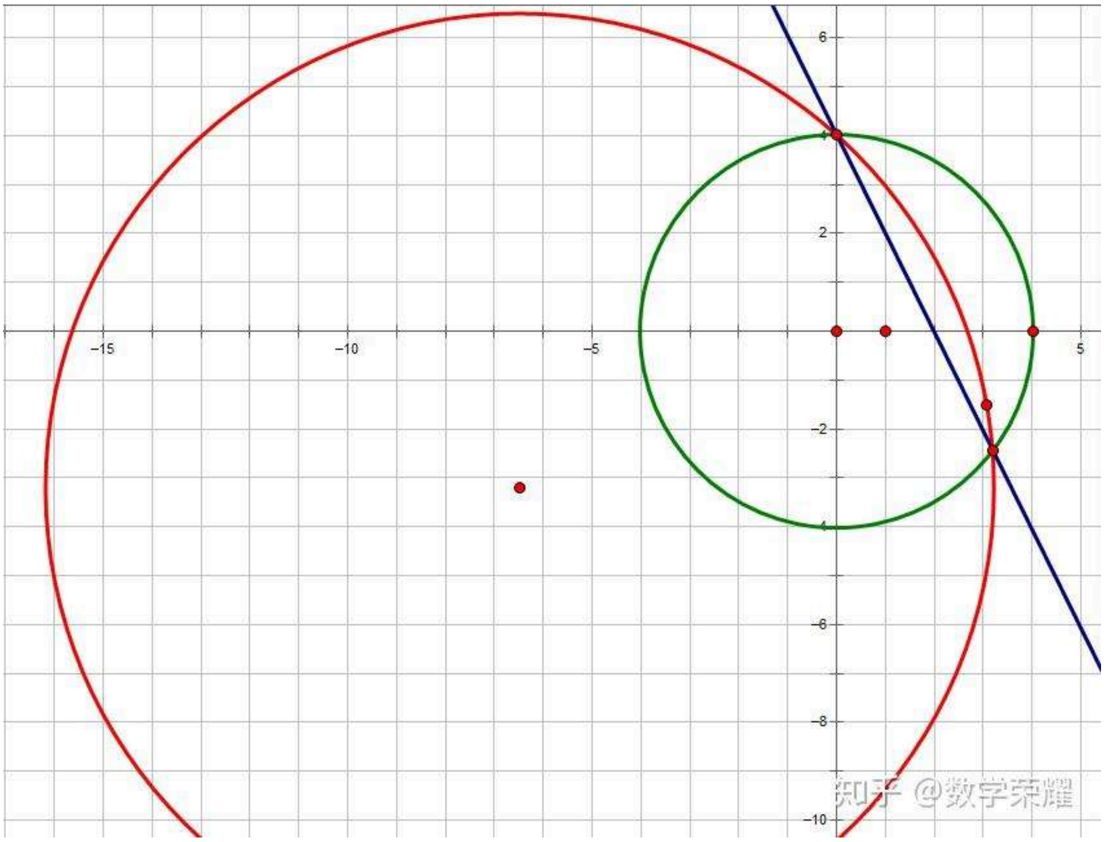


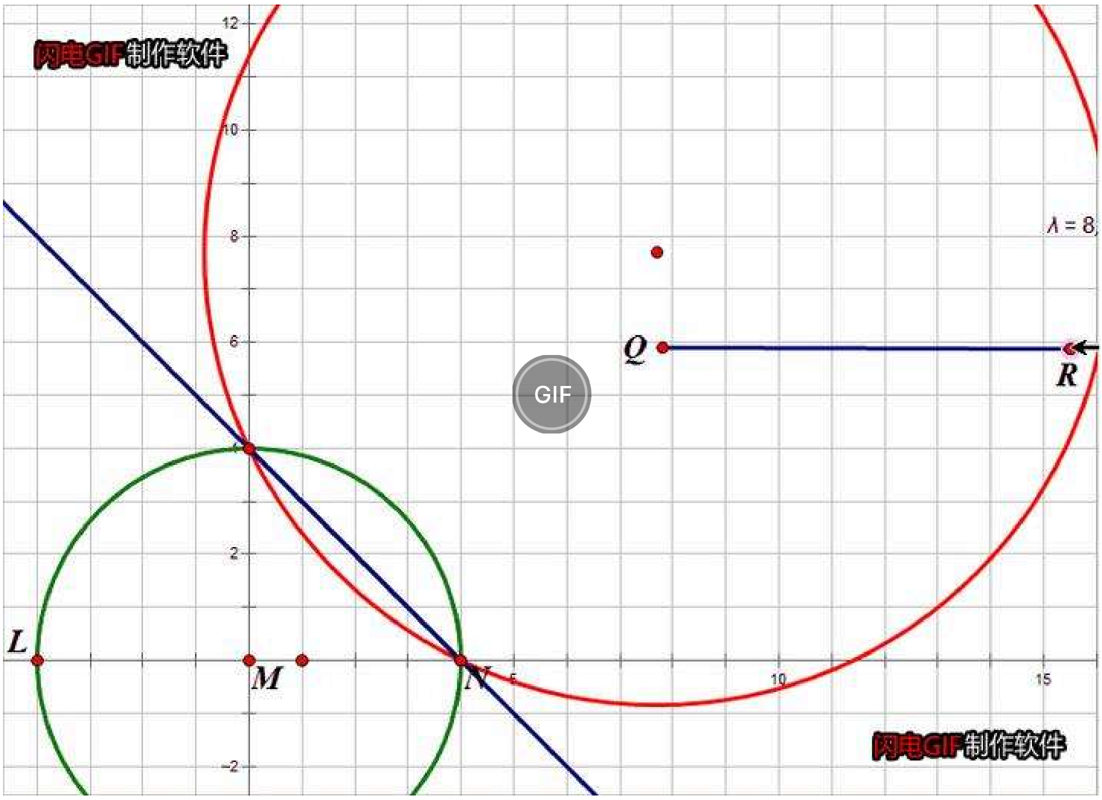
图1-3

观察图1-1、1-2、1-3可以看出红色的圆都是过绿色的圆和蓝色直线的交点这就是他们“共同的性质”。所有这样的圆构成的集合就是一个曲线系。

哪些题适用于曲线系（这里以二次曲线为例）？

一般曲线系适用于四条直线交点都在同一个圆锥曲线⁺上（注意如果是定点问题可以看作四个点其中两个合成了一个点，最终只有三个点，下文有对定点定值问题的详解）而且知道他们之间的斜率

关系，通过已知的直线特征和已知的曲线，推算出最后一个曲线的特点。大家可以通过例题来加深理解。



二、曲线系所含的数学思想

你可以这么想，上述三个圆都和定圆定直线有关，所以可以大胆使用参数控制红色那个圆。一般的，我习惯把参数写成λ。（其他的也可以）

1、整体处理思想

把所需曲线写成定曲线有关的式子，整体写上，加入参数调整

2、参数变换思想

加入参数，使共同性质不变，得参数变成调整其他性质的工具。

3、从共性中找特性

共性就是共同性质，特性比如过一个点，圆心所在直线，通过特殊条件解出参数带回原式。（在下文会有结论）

再举例子

有这么一个圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 和直线 $y=x-1$

先把他们化作一般式 $x^2-y^2-4x+3=0$ 和 $y-x+1=0$

那么它的曲线系就是 $x^2-y^2-4x+3+\lambda(y-x+1)=0$

再根据他的特性来求解。（λ是参数）

三、直线系与圆系

（可以跳过不看，很简单） 以下λ均为参数

3-1、过直线l1 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和直线l2 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系：

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ (直线系不包括l2)

3-2、过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 和直线 $Ax+By+C=0$ 的圆系方程：

$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda（Ax+By+C）=0$

3-3、过圆C1 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和圆C2 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的公共交点的圆的圆系方程：

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda（x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2）=0$

其中圆线系不包括C2，λ=-1为公共弦方程

3-4、与直线 $Ax+By+C=0$ 相切于点（或圆） $M(x_0,y_0)$ 的圆系方程是：

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(Ax+By+C)=0$

3-5与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 相切于点（或圆） $M(x_0,y_0)$ 的圆系方程是：

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(x^2+y^2+Dx+Ey+F)=0$

（λ≠-1，不包括圆本身）

例题1、（既然有现成的那允许作者偷点懒）

例题：求过圆 $C_1:x^2+y^2+6x-4=0$，圆 $C_2:x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点，且圆心在直线 $x-y-4=0$ 上的圆的方程。

思路 1：先求两圆连心线所在直线的方程 $x+y+3=0$，从而得圆心 $\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$；再求公共弦长 $d=5\sqrt{2}$，最后求出 $r^2=\frac{89}{2}$，从而求出圆的方程。

思路 2：设所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x-4+\lambda\left(x^2+y^2+6y-28\right)=0$，则此圆的圆心为 $\left(-\frac{3}{\lambda+1},-\frac{3\lambda}{\lambda+1}\right)$ 在直线 $x-y-4=0$ 上，求出 $\lambda=-7$，从而求出圆的方程。

点评：思路 1 是求圆方程的常规方法，用到了连心线方程，弦心距、弦长、半径之间的关系，每一步学生都比较熟悉，容易理解，但运算量较大；思路 2 利用了圆系方程，很不常规，但过程比较简洁，容易计算，但前提是需要学生掌握圆系方程。

思路2就是我们所说的曲线系

例题2、（2010课标）过点A(4,1)的圆C与直线x-y-1 = 0相切于点B(2,1)，则圆C的方程为________

【标答】(x - 3)2 + y2 = 2

解：设圆的方程为（x-a）2+（y-b）2=r2，

则(4-a)2+(1-b)2=r2，(2-a)2+(1-b)2=r2，(b-1) /(a-2) =-1，

解得a=3，b=0，r=" 2"，故所求圆的方程为（x-3）2+y2=2．

故答案为：（x-3）2+y2=2．

【曲线系法】设曲线系为 $(x-2)^2+(y-1)^2+\lambda(x-y-1)=0$

代入A（4，1）得λ=-2故圆为 $(x-3)^2+y^2=2$

例题3、

（本题12分）求过两圆 $O_1: x^2+y^2-6x=0$ 与 $O_2: x^2+y^2=4$ 的交点，

(Ⅰ)且过M $(2,-2)$ 的圆 C_1 的方程；

(Ⅱ)且圆心在直线 $x+y-1=0$ 上的圆 C_2 的方程。

【圆系方程解法】1、设圆系方程为 $x^2+y^2-6x+\lambda(x^2+y^2-4)=0$

把（2，-2）代入可得 λ=1代入原式可得：

圆C1方程为 $x^2+y^2-3x-2=0$

2、设圆系方程为 $x^2+y^2-6x+\lambda(x^2+y^2-4)=0$

化简可得：$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-6x-4\lambda=0$

调整系数 $x^2+y^2-\frac{6}{(1+\lambda)}x-\frac{4\lambda}{(1+\lambda)}=0$

圆心为（$\frac{3}{1+\lambda}$，0）代入 $x+y-1=0$

λ=2，将λ带回原式得：$x^2+y^2-2x-\frac{8}{3}=0$

圆的方程为 $x^2+y^2-2x-\frac{8}{3}=0$

以上高一内容只是引入，下面是高二的圆锥曲线。

四、二次曲线系

圆、椭圆、双曲线、抛物线被称为“二次曲线”，两条相交直线被视为二次曲线的退化形式，二次曲线系的一般形式为

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

具有某一共同性质的二次曲线，并有这样形式的曲线系叫做二次曲线系。

以下是几个套路模版

这里要注意一下，λ这个参数加在前后都无所谓，一般来说加在一次计算更加简便

1、（常用）若四边形四边的方程为

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

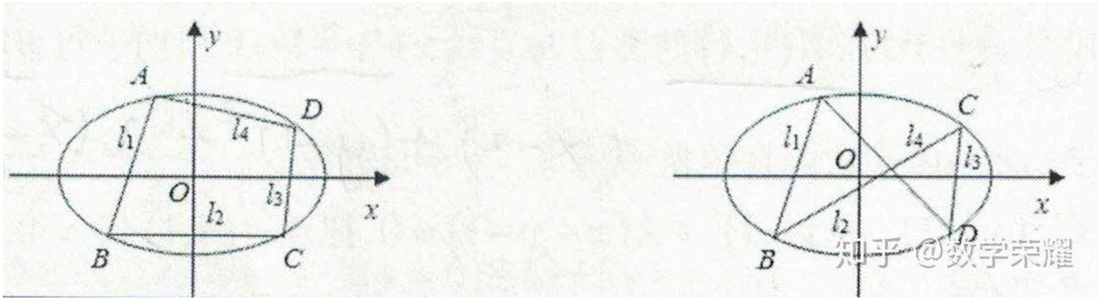
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

$$A_4x+B_4y+C_4=0$$

则经过四边形四个顶点的二次曲线系为：

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4)=0$$



注意必须 l_1l_3 和l_2l_4 是两组对边

2、2条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$ 与二次曲线 $F(x,y)$ 交点曲线系

$$F(x,y)+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

3、过两个二次曲线 $F_1(x,y)$ $F_2(x,y)$ 的二次曲线系

$$F_1(x,y)+\lambda F_2(x,y)=0$$

例题

1、

18.（16 分）（2010•江苏）在平面直角坐标系 xoy 中，如图，已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右顶点为 A、B，右焦点为 F．设过点 T（t，m）的直线 TA、TB 与椭圆分别交于点 M（x_1，y_1）、N（x_2，y_2），其中 m＞0，y_1＞0，y_2＜0．

（1）设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$，求点 P 的轨迹；

（2）设 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{3}$，求点 T 的坐标；

（3）设 t=9，求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点（其坐标与 m 无关）

曲线系解法 直线 $AT: mx-12y+3m=0$,直线 $BT: mx-6y-3m=0$,因过直线 TA、TB 与椭圆的交点的曲线系为: $5x^2+9y^2-45+\lambda(mx-12y+3m)(mx-6y-3m)=0$

即 $(5+\lambda m^2)x^2-18\lambda mxy+(9+72\lambda)y^2+18\lambda my-9\lambda m^2-45=0$,

该曲线系退化为直线 $AB: y=0$ 与直线 MN 的方程，故 $5+\lambda m^2=0$

得到 $\lambda=-\frac{5}{m^2}$，曲线系: $y\left[\frac{90}{m}x+9\left(1-\frac{40}{m^2}\right)y-\frac{90}{m}\right]=0$，

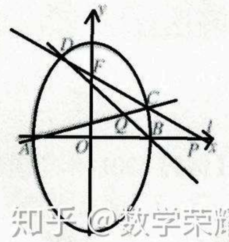
直线 $MN: \frac{90}{m}x+9\left(1-\frac{40}{m^2}\right)y-\frac{90}{m}=0$ 过定点 $(1,0)$.

2、

(2011 四川 理)椭圆有两顶点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$,过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交与 C、D 两点,并与 x 轴交于点 P.直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

(I)当 $|CD|=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 时,求直线 l 的方程;

(II)当点 P 异于 A、B 两点时,求证: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.



第一问略

设$Q(m,n)$,则直线$AC:nx-(m+1)y+n=0$,直线$BD:nx-(m-1)y-n=0$,因过直线AC、BD与椭圆的交点的曲线系为:

$$2x^2+y^2-2+\lambda\left[nx-(m+1)y+n\right]\left[nx-(m-1)y-n\right]=0$$

化简得$(2+\lambda n^2)x^2-2\lambda mnxy+\left[1+\lambda(m^2-1)\right]y^2+2\lambda ny-\lambda n^2-2=0$,

该曲线系退化为直线$AB:y=0$与直线CD的方程

可得$2+\lambda n^2=0$,计算得$\lambda=-\dfrac{2}{n^2}$,

故曲线系:$y\left\{\dfrac{4m}{n}x+\left[1-\dfrac{2}{n^2}(m^2-1)\right]y-\dfrac{4}{n}\right\}=0$,

直线$CD:\dfrac{4m}{n}x+\left[1-\dfrac{2}{n^2}(m^2-1)\right]y-\dfrac{4}{n}=0$,

得到$P\left(\dfrac{1}{m},0\right)$,故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{m}\cdot m=1$.

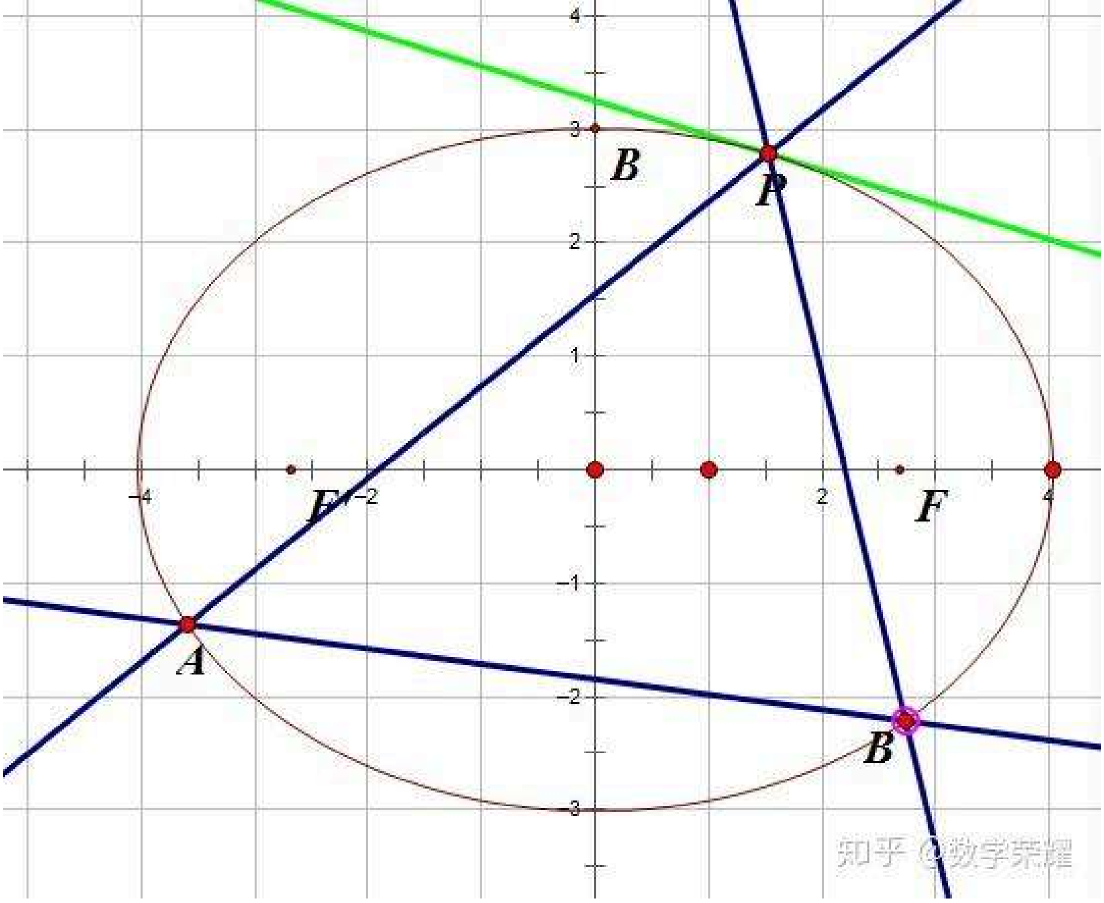
-----------------------------↓↓↓↓↓↓↓↓↓高中比较常考的↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓---------------

定点定值问题

解释一下:这里为什么可以用曲线系解出来?

首先三个点都在次曲线上，注意到P点是定点，那么P对应的切线（图中绿线）和AB为一组对边，PA、PB为一组对边，就可以列出曲线系一般方程

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4)=0$$



就是说一个椭圆上有一个定点P，作两个斜率相乘（或相加）为定值的直线PA、PB,求AB过的定点。

正面代入解答计算有点大。（当然只要你愿意也可以，不是特别复杂，熟练后一般十分钟可以做出来）

如果我们用曲线系的方法......

这个椭圆（二次曲线）可以看作是图中的四个直线构成的二次曲线系

注意，P是定点，那么它可以看作是两个点无限接近汇聚成了一个点。

此时的直线就是该点所在的切线。

这里讲一下切线的求法（基本操作）

若 $P_0(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，则过 P_0 的椭圆的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

再用这个上面的方法来解

1、（常用）若四边形四边的方程为

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

$$A_4x+B_4y+C_4=0$$

则经过四边形四个顶点的二次曲线系为：

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4)=0$$

例1

(2017 全国 1 理 20)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，四点 $P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A、B 两点，若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1，证明：l 过定点.

第一问略　　椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）利用曲线系：设直线 P_2A 的方程为 $y=ax+1$，直线 P_2B 的方程为 $y=(-1-a)x+1$，直线 AB 的方程为 $y=kx+b$，过点 P_2 的椭圆的切线为 $y=1$，则经过这四条直线交点二次曲线系方程为：$(y-ax-1)(y+(a+1)x-1)+\lambda(y-kx-b)(y-1)=0$

展开可得：

$$(1+\lambda)y^2-a(a+1)x^2+(1-k\lambda)xy-(2+\lambda(b+1))y-(a+1+k\lambda)x+1+b\lambda=0$$

因为椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 过这些交点，比较系数可得：$\begin{cases}1-k\lambda=0\\2+\lambda(b+1)=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{k}\\b=-1-2k\end{cases}$ 所以直线 $l:y=kx-1-2k=k(x-2)-1$，即直线 l 恒过定点 $(2,-1)$.

【例题详解】（这题化简方法比较巧妙，不要求掌握）例2、已知椭圆C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$设直线l与椭圆圆C交于A、B两点，点Q坐标（0，2）若直线QA、QB斜率之和为3，求证：直线l必过定点，并求出定点坐标。

解：设AB为Ax+By+C=0 设QA、QB分别为 $y=k_1x+2$

$y=k_2x+2$

（此处AB的对边可看做是直线QQ（两点重合，可看作为y-2=0））

由椭圆的圆系方程性质可知

$$(y-2)(Ax+By+C)-\lambda(k_1x-y+2)(k_2x-y+2)=4x^2+9y^2-36=0$$

即 $(y-2)(Ax+By+C)=\lambda(k_1x-y+2)(k_2x-y+2)+4x^2+9y^2-36$①

观察两边，欲约去（y-2）则对 $4x^2+9y^2-36$ 化简

$4x^2+9$（$y-2+2)^2-36$ 配凑出（y-2）化简

$4x^2+9[(y-2)^2+4(y-2)+4]-36$

则①式可化简为

$(y-2)(Ax+By+C)=(4+\lambda k_1k_2)x^2+(\lambda+9)(y-2)^2-(k_1+k_2)\lambda x(y-2)$
$+36(y-2)$②

等式左边没有 x^2 ，所以右边 $4+\lambda k_1k_2=0$

即 $\lambda=-\frac{4}{k_1k_2}$ 时②式为

$(y-2)(Ax+By+C)=(\lambda+9)(y-2)^2-(k_1+k_2)\lambda x(y-2)+36(y-2)$③

两边消去y-2，且因为 $k_1+k_2=3$ ③式等于

$(Ax+By+C)=(\lambda+9)(y-2)-3\lambda x+36$ 问题转化为含参直线必过定点

继续化简得 λ（$-3x+y-2$）$+9y+18=0$④

使得 $\lambda=-\frac{4}{k_1k_2}$ 无论怎么变化，都使④式成立

则有 $-3x+y-2=0$⑤ 且 $9y+18=0$⑥

联立⑤⑥解得 $x=-\frac{4}{3}$ $y=-2$

故该定点为（$-\frac{4}{3}$，-2）

例3

2015 年陕西　如图,椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$,

且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.(I)求椭圆 E 的方程;

(II)经过点 $(1,1)$ 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P，Q(均异于点 A),

证明:直线 AP 与 AQ 的斜率之和为2

【解析】(I)由 $b=1,e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a^2=2b^2=2\Rightarrow$ 椭圆 $E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$;

(II)设直线 $AP:k_1x-y-1=0$, $AQ:k_2x-y-1=0$, $PQ:kx-y+1-k=0$,椭圆 E 在点 A 处的切线: $y+1=0$,

则过 A, P, Q 三点的曲线系 $G:(k_1x-y-1)(k_2x-y-1)+\lambda(y+1)(kx-y+1-k)=0$,

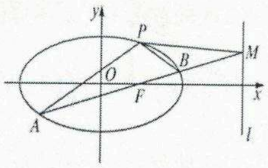
即 $k_1k_2x^2+(\lambda k-k_1-k_2)xy+(1-\lambda)y^2+(\lambda k-k_1-k_2)x+(2-\lambda k)y+1+\lambda(1-k)=0$,

由曲线系 G 为椭圆 $E:x^2+2y^2-2=0$，对比系数可得:

$\lambda k-k_1-k_2=0, 2-\lambda k=0\Rightarrow k_1+k_2=\lambda k=2$.

例4

(2013江西理)如图,椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$离心率$e=\dfrac{1}{2}$,直线$l$的方程为$x=4$.(I)求椭圆$C$的方程;



(II) AB是经过右焦点F的任一弦(不经过点P),设直线AB与直线l相交于点M,记PA,PB,PM的斜率分别为k_1,k_2,k_3.问:是否存在常数λ,使得$k_1+k_2=\lambda k_3$?若存在,求λ的值;若不存在,说明理由.

【解析】(I)由$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 3a^2=4b^2$;又由$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\Rightarrow a^2=4$,$b^2=3\Rightarrow$椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$;

(II) 由 $F(1,0)$,设直线$AB:kx-y-k=0$,$PA:k_1x-y+m=0\left(m=\dfrac{3}{2}-k_1\right)$,

$PB:k_2x-y+n=0\left(n=\dfrac{3}{2}-k_2\right)$,椭圆$C$在$P$处的切线:$x+2y-4=0$,则

$M(4,3k)\Rightarrow k_3=k-\dfrac{1}{2}$;由过$A$,$B$,$P$三点的二次曲线系

$G:(k_1x-y+m)(k_2x-y+n)+\mu(x+2y-4)(kx-y-k)=0$

化简得$(k_1k_2+\mu k)x^2+(2k\mu-\mu-k_1-k_2)xy+(1-2\mu)y^2+(k_1n+k_2m-5\mu k)x$

$-(m+n+2k\mu-4\mu)y+mn+4\mu k=0$,

由椭圆$C:3x^2+4y^2-12=0$对比系数可得,

$2k\mu-\mu-k_1-k_2=0$,$k_1n+k_2m-5\mu k=0$,$m+n+2k\mu-4\mu=0$

解得$k_1+k_2=2k-1$,故存在$\lambda=2$.

五、曲线系方程的局限性

1、无解强行变有解

众所周知

$x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+y^2=1$ 没有交点

如果

强行用曲线系求公共直线(实际不存在)能解出解来

设圆系方程并化简可得

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-6x+8-\lambda=0$$

令λ=-1发现x=2/3

圆心连线的中垂线(又叫**根轴**⁺)。于是曲线系就无中生有你就错了。

本题无解

2、漏掉其他的解

你设了 $F_1(x,y)+\lambda F_2(x,y)=0$ 但是不包括 $F_2(x,y)$ 他自身

可能 $F_2(x,y)$ 也是一个解然而你在设的时候就已经忽略了。

还有如果有无数解的情况下用曲线系只能求出几个。

3、计算爆炸

有时直接计算还比曲线系方程快，如果你曲线系方程不熟，那就只能直接韦达定理✦计算。

一般曲线系更简单，但作者觉得啊，一般的题

普通方法=90%无脑爆算+10%思考

曲线系=60%无脑爆算+40%思考

先看看普通的方法计算怎么样，简单就用普通方法，难的话可以尝试曲线系。

(高考全国卷的难度不是特别大，其实看这个可以当做是拓展)

后记

重点是参数变换思想和整体代入思想，曲线系要求的思维能力可能是高三上学期的学生水平。

有时可以大大简化计算，但有时可以把做题者绕晕，得不偿失。

建议：高一高二同学可以学一下思想，多练练曲线系的方法，还是有帮助的。

高三的同学已经有直接代入快速计算✦的能力，建议按普通方法。

以上是作者汇总的方法，可能有很多错误、缺漏之处，还望各位不喜勿喷，有问题大胆提出。

感谢您的阅读。

（后期更新）稍作改动

先感谢前来学习的你，也感谢大佬们提出的批评和指正

很多人说看不懂曲线的进化和退化✦，这里是作者疏忽没有详细解释，稍稍解释一下吧。

（以下出现于例题的答案中）

解释一、曲线的进化和退化

曲线进化：一次曲线合成二次曲线的过程称为“进化”

$(A_1x+B_1y+C_1)=0$、$(A_2x+B_2y+C_2)=0$、$(A_3x+B_3y+C_3)=0$、$(A_4x+B_4y+C_4)=0$

四条直线合在一起”进化“为二次曲线

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4)=0$$

反之，

曲线退化：二次曲线分解成一次曲线的过程称为“退化”

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_3x+B_3y+C_3)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)(A_4x+B_4y+C_4)=0$$

二次曲线”退化“分解为四条一次曲线

$(A_1x+B_1y+C_1)=0$、$(A_2x+B_2y+C_2)=0$、$(A_3x+B_3y+C_3)=0$、$(A_4x+B_4y+C_4)=0$

解释二、对比系数

曲线系化简之后得到

$\square x^2+\square y^2+\square xy+\square x+\square y+\square=0$ (口里是系数)

（这里以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 为例）把二次曲线化为这样

$3x^2+4y^2-12=0$

把这两个系数进行对比

$\square x^2+\square y^2+\square xy+\square x+\square y+\square=0$

$3x^2+4y^2-12=0$

发现上下式子中都有 x^2、y^2 和常数项这三项，要使得上下两个式子相等的话，上式中的 xy、x、y 这三项都要和下面那三项对应，然而下面式子中没有这三项（系数为0），所以只要使 xy、x、y 这三项的系数为0即可。列出三个系数等于0的方程解出参数λ即可。

值得注意的是，不可以直接把 x^2、y^2 和常数项这三项系数直接等同，因为他们都是等于0的，可能系数成倍数的关系。