因式分解计算 500 题

使用说明：本专题的制作目的是提高学生在因式分解这一部分的计算能力。

共分了十一个模块：

① 提公因式法（60 题）
② 公式法（100 题）
③ 十字相乘法（100 题）
④ 分组分解法（50 题）
⑤ 拆添项法（50 题）
⑥ 换元法（30 题）
⑦ 主元法（20 题）
⑧ 双十字相乘法（30 题）
⑨ 因式定理与试根法（20 题）
⑩ 待定系数法（20 题）
⑪ 轮换式与对称式（20 题）
共 500 题

建议先仔细研究方法总结、易错总结和例题解析，再进行巩固练习.

易错总结：因式分解结果的书写规范

① 若不特别说明，分解因式的结果必须是每个因式在有理数范围内不能再分解为止；
② 结果一定是乘积的形式；
③ 每一个因式都是整式；
④ 没有大括号和中括号；
⑤ 每个因式中不能含有同类项，若有需要合并的同类项，合并后要注意能否再分解；
⑥ 单项式因式写在多项式因式前面；
⑦ 每个因式第一项系数一般不为负数；
⑧ 形式相同的因式写成幂的形式

模块一　提公因式法

方法总结：

公因式：一个多项式中每一项都含有的因式叫做这个多项式的公因式

提取公因式法

如果一个多项式的各项含有公因式，那么可以把该公因式提取出来作为多项式的一个因式，提出公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式，这种分解因式的方法叫做提取公因式法

提取的公因式应是各项系数的最大公因数（系数都是整数时）与各项都含有的相同字母的最低次幂的积

易错总结：

提公因式时，可以将全部的公因式一次提出，也可以分多次提出，但一定要保证最后的结果不能继续分解

例题解析：

分解因式：$6p(p+q)-4q(p+q)$

解：原式$=2(p+q)(3p-2q)$　　　　……【提出公因式$2(p+q)$】

巩固练习：

1．因式分解：a^2-6a

2. 用提公因式法因式分解：m^2+2m

3. 分解因式：$2a^2-6a$

4. 分解因式：$12ab-6b$

5. 分解因式：$16ab^2-48a^2b$

6. 分解因式：$3a^2b+6ab^2$

7. 因式分解：a^2x^2-ax

8. 分解因式：$3p^2-6pq$

9. 分解因式：$12abc-3bc^2$

10. 用提公因式法因式分解：$2a^2b^3+6ab^2$

11. 因式分解：$2a(a-b)-b(b-a)$

12. 分解因式：$a(x-y)-b(y-x)$

13. 因式分解：$3x(a-b)-6y(b-a)$

14. 分解因式：$3m(b-c)-2n(c-b)$

15. 分解因式：$x(x-a)+y(a-x)$

16. 因式分解：$ap-aq+am$

17. 分解因式：$m^2+6mn+9m$

18. 分解因式：$2x^2-4xy+2x$

19. 因式分解：$-4m^3+16m^2-26m$

20. 分解因式：$6x^2-9xy+3x$

21. 分解因式：$-8a^2b-2ab+6b^2$

22. 因式分解：$-14abc-7ab+49ab^2c$

23. 分解因式：$-4x^2y^3+6x^2y-8xy^2$

24. 分解因式：$6x^2y+3x^3y^2+\frac{9}{2}xy^2$

25. 因式分解：$-4x^3y^2+6x^2y^3-12x^2y^2$

26. 分解因式：$-6abc-14a^2b^3+12a^3b$

27. 分解因式：$-26xy^3z^2+13xy^2z^2+52x^5y^2z^4$

28. 因式分解：$2(a-3)^2-a+3$

29. 分解因式：$(a-3)^2-(2a-6)$；

30. 分解因式：$18b(b-a)^2-12(a-b)^3$

31. 因式分解：$10a(x-y)^2+5ax(y-x)$

32. 计算：$(x+y)^2-(x+y)(x-y)$

33. 分解因式：$(m+1)(m-1)+(m-1)$

34. 分解因式：$a-1+a^2(1-a)$

35. 分解因式：$4x(a^2+x^2)-a^2-x^2$

36. 分解因式：$4a(x-2)^2-2b(2-x)^3$

37. 因式分解：$4(a+1)^2-2(a+1)(a-1)$

38. 分解因式：$a(a+b)(a-b)-a(a+b)^2$

39. 分解因式：$(m+n)(x-y)-(m+n)(x+y)$

40. 分解因式：$16m(m-n)^2+56(n-m)^3$

41. 分解因式：$5a^2b(x-y)^3-30ab^2(y-x)^2$

42. 分解因式：$6(m-n)^3+12(n-m)^4$

43. 分解因式：$m(m-n)^5+n(n-m)^5$

44. 分解因式：$a(1-b+b^2)-1+b-b^2$

45. 将下列各式因式分解：

①$5a^3b(a-b)^3-10a^4b^3(b-a)^2$；

②$(b-a)^2+a(a-b)+b(b-a)$；

③$(3a-4b)(7a-8b)+(11a-12b)(8b-7a)$

46. 分解因式：$x(b+c-d)-y(d-b-c)-c-b+d$

46. 分解因式：$(2a+3b)(a-2b)-(3a+2b)(2b-a)$

48. 分解因式：$(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)$

49. 分解因式：$x(x-y)^2(a-b)-(y-x)^2(b-a)$

50. 分解因式：$(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)$

51. 分解因式：$24x^2y^3z^4(a-b)^2-20x^3y^2z^3(a-b)^2+8x^5y^4z^5(a-b)^2$

52. 分解因式：$x^3(x+y-z)(y+z-a)+x^2z(z-x-y)+x^2y(z-x-y)(x-z-a)$

53. 分解因式：$18x^{n+1}-24x^n$

54. 分解因式：$(a-b)^{2n+1}+(b-a)^{2n}\cdot x^2$

55. 分解因式：$-2(y-x)^{2n}+4(x-y)^{2n-1}$

56. 分解因式：$3x^2y^{n+1}-12xy^{2n}z$(n为大于 1 的自然数)

57. 分解因式：$4a^{2n+1}b^m-6a^{n+2}b^{m-1}$($m$、$n$为大于1的自然数)

58. 分解因式：$15a(a-b)^{2n+1}-10ab(b-a)^{2n}$．($n$为正整数)

59. 分解因式：$-4m^nn^{3n}+12m^{3n}n^{2n-2}-2m^{n-1}n^{n+1}$($m$、$n$为大于3的自然数)

60. 分解因式：$(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$(其中$n$是正整数)

模块二　　公式法

公式法共计 100 道题，包含：

25 道平方差公式（第 1-25 题）；
25 道和的完全平方公式（第 26-50 题）；
20 道差的完全平方公式（第 51-70 题）；
8 道立方和公式（第 70-78 题）；
12 道立方差公式（第 78-90 题）；
10 道“完全立方公式/三元完全平方公式/欧拉公式”（第 91-100 题）.

方法总结：

1．因式分解时常先提取公因式，再使用公式法
2.涉及公式：
平方差公式: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

立方和公式: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

立方差公式: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

完全立方公式: $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

三项完全平方公式: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

欧拉公式: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

易错总结：

1.运用公式时，防范公式混淆
2.注意因式分解书写规范，尤其是结果分解要完全，相同因式要写成幂的形式，单项式要写在多项式前面

例题解析：

分解因式：$(1-a)^2-1+2b-b^2$.
解：
原式$=(1-a)^2-(1-b)^2$ ……**【后三项应用“和的完全平方公式”】**
$=(1-a+1-b)(1-a-1+b)$ ……**【应用“平方差公式”】**
$=(2-a-b)(-a+b)$ ……**【分解要完全】**

巩固练习：

1.分解因式：a^2-4b^2

2.分解因式：x^2-9y^2

3.分解下列因式：$9a^2-1$.

4.因式分解$4x^2-9y^2$.

5.因式分解：$25x^2-16y^2$

6.分解因式：$a-4ab^2$.

7.分解因式：$-a^4+16$.

8.因式分解：$1-a^4$

9.因式分解：$4x^2-64$.

10.分解因式：$9-a^2+4ab-4b^2$.

11.把下列各式因式分解：$4(m+n)^2-9(m-n)^2$.

12.因式分解：$(a+1)^2-(b-2)^2$.

13.分解因式：$4n^2-(m+n)^2$.

14.分解因式：$(4x-3y)^2-16y^2$.

15.分解因式：$(3a-2b)^2-(2a+3b)^2$.

16.分解因式：$(m^2+4)^2-16m^2$.

17.分解因式：$m^2-25+9n^2+6mn$.

18.分解因式：$(a-4b)(a+b)+3ab$.

19.分解因式：$16(a+b)^2-9(a-b)^2$.

20.分解因式：$a^2(x-y)^2-b^2(y-x)^2$；

21.因式分解：x^4-16.

22.分解因式：a^4-81.

23.分解因式：$2y^4-32$.

24.分解因式：$(m-n)^{2m+1}-(m-n)^{2m-1}$.

25.分解因式：$(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$.

26.因式分解：$a^2+4ab+4b^2$

27.分解因式：$16a^4+8a^2+1$.

28.分解因式：$-9x^2-24xy-16y^2$.

29.分解因式：$16a^4+24a^2b^2+9b^4$.

30.分解因式：$2x^2+2x+\frac{1}{2}$;

31.分解因式：$\frac{1}{2}x^2+2xy+2y^2$.

32.因式分解：$3a^2+6ab+3b^2$.

33.因式分解：$ax^2+4ax+4a$

34.因式分解：$9a^3+6a^2b+ab^2$.

35.因式分解：$3x^2y^2+12xy+12$.

36.分解因式：$12a^2b+12ab^2+3b^3$.

37.因式分解：$2ax^5+8ax^3+8ax$.

38.$(x-y)^2+10(x-y)+25$.

39.分解因式：$x^2+2x(y-z)+(y-z)^2$.

40.分解因式：$9(a+b)^2+6(a+b)+1$.

41.因式分解：$9(a-b)^2+12(a^2-b^2)+4(a+b)^2$.

42.因式分解：$-(a+1)^2-2(a^2-1)-(a-1)^2$.

43.把下面各式分解因式：$x^2+2x(x-3y)+(x-3y)^2$.

44.分解因式：$(x^2-3)^2+2(x^2-3)(x-3)+(x-3)^2$.

45.因式分解：$(x+y)^2+4(x+y+1)$

46.分解因式：$x^2+2x+1-y^2$.

47.分解因式：$(x^2+2x)^2+2x^2+4x+1$.

48.分解因式：$(x^2+4)^2+8x(x^2+4)+16x^2$.

49.分解因式：$x^2+(1+x)^2+(x+x^2)^2$.

50.因式分解：$4(x-1)^2-4(1-x^2)+(1+x)^2$.

51.因式分解：$a^2-4ab+4b^2$

52.因式分解：$x^2-10xy+25y^2$.

53.对下列各式进行因式分解：$x^2-16ax+64a^2$.

54.分解因式：$a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$；

55.分解因式：$-\frac{1}{4}+a^2-a^4$.

56.分解因式：$9a^2-12ab+4b^2$.

57.因式分解：$9x^2-24xy+16y^2$.

58.因式分解：$16m^4-8m^2n^2+n^4$.

59.将下列各式分解因式：$-ma^2+2mab-mb^2$

60.因式分解：$3ab^3-30a^2b^2+75a^3b$.

61.分解因式：$(a^2+1)^2-4a(a^2+1)+4a^2$.

62.分解因式：$(y-1)^2+6(1-y)+9$.

63.分解因式：$(a+b)^2-6c(a+b)+9c^2$.

64.因式分解：$(x+y)^2-10(x+y)+25$.

65.分解因式：$(a-2b)^2-2a+4b+1$.

66.因式分解：$25(x-y)^2+10(y-x)+1$.

67.因式分解：$-9a^2+6a(a-b)-(a-b)^2$.

68.分解因式：$(m+n)^2-4(m^2-n^2)+4(m-n)^2$.

69.分解因式：$(x^2-x)^2-12(x^2-x)+36$.

70.分解因式：$16(a+b)^2+40(a+b)(a-b)+25(a-b)^2$.

71.分解因式：a^6+b^6.

72.分解因式：$x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$.

73.分解因式：$x^3+y^3+2x^2+4xy+2y^2$.

74.若$a+b=6$，$a^3+b^3=72$，求a^2+b^2的值.

75.分解因式：$a^3+b^3+(a+b)^3$.

76.分解因式：$(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

77.分解因式：$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+a^3+b^3+c^3$.

78.已知$a+b+c=0$，求证$a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=0$.

79.分解因式：$729x^3-8$.

80.分解因式：$9x^5-72x^2y^3$.

81.分解因式：x^6-1.

82.已知$x\neq y$，且$x^3-x=7$，$y^3-y=7$，求x^2+xy+y^2的值.

83.分解因式：$x(x+1)(x-1)+xy(x-y)-y(y+1)(y-1)$.

84.分解因式：$x^6-19x^3y^3-216y^6$.

85.分解因式：a^6-b^6.

86.若$a+b=5$，求a^3+b^3+15ab的值.

87.因式分解：$x^3+x^2+x-y^3-y^2-y$

88.分解因式：$x^3-y^3-3x^2+3x-1$.

89.分解因式：x^3+3x^2+3x+2.

90.分解因式：x^3-9x+8.

91.分解因式：$8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$.

92.分解因式：$x^5+x^4+x^3+x^2+x\quad+1$.

93.分解因式：$x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.

94.分解因式：$a^3+3a^2+3a+b^3+3b^2+3b+2$.

95.分解因式：$512a^9-192a^6+24a^3-1$.

96.分解因式：$4a^2+9b^2+9c^2-18bc-12ca+12ab$.

97.因式分解：$x^2+4y^2+9z^2+4xy-6xz-12yz$.

98.已知$x+y+z=3$，$x^2+y^2+z^2=29$，$x^3+y^3+z^3=45$，求xyz的值.

99.分解因式：$(x-y)^3+(y-x-2)^3+8$.

100.分解因式：$x^3+y^3+3xy-1$.

模块三　　十字相乘法

十字相乘法共计 100 道题，包含：

20 道二次项系数为 1 简单题（第 1-20 题）；
10 道高次项系数为 1（第 21-30 题）；
30 道二次项系数不为 1（第 31-60 题）；
10 道较难题（第 61-70 题）；
20 道主要选用整体法进行十字相乘（第 71-90 题）；
10 道拓展题（第 91-100 题）

方法总结：

1. 对于二次三项式 x^2+px+q， 如果能将常数项 q 分解为两个数 a 、 b 的积，并使得 a 与 b 的和等于一次项系数 p ，那么二次三项式 x^2+px+q 就可以进行因式分解：

$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

在对二次三项式进行因式分解时，可以借助画十字交叉线来分解，这种方法叫做十字相乘法.

对一般的二次三项式 px^2+qx+r 因式分解，同样可以用十字相乘法

2. 十字相乘法口诀：首尾分解，交叉相乘，求和凑中
3. 部分题目，对于重复出现的部分可视作整体

易错总结：

1. 注意验证，确保交叉相乘后的两项相加和原式中的中间项相等
2. 注意因式分解书写规范，尤其是结果分解要完全，相同因式要写成幂的形式，单项式要写在多项式前面

例题分析：

分解因式：$2(x^2-6x+1)^2+5(x^2-6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$

解：

原式$=[2(x^2-6x+1)+(x^2+1)][(x^2-6x+1)+2(x^2+1)]$ ……【整体并十字相乘】

$=(3x^2-12x+3)(3x^2-6x+3)$.……【合并同类项】

$=9(x-1)^2(x^2-4x+1)$ ……【分解完全】

【过程详细解析】

把(x^2-6x+1)和(x^2+1)视作整体，通过十字相乘法因式分解

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & 2 \end{array}$$

⟹原式$=[2(x^2-6x+1)+(x^2+1)][(x^2-6x+1)+2(x^2+1)]$

去括号合并同类项

⟹原式$=(3x^2-12x+3)(3x^2-6x+3)$

$(3x^2-12x+3)=3(x^2-4x+1)$；$(3x^2-6x+3)=3(x^2-2x+1)$

⟹原式$=9(x-1)^2(x^2-4x+1)$

巩固练习：

1. 分解因式：x^2-x-6.

2. 分解因式：x^2+5x-6.

3. 分解因式：x^2-5x-6.

4. 分解因式：x^2-7x+6.

5. 分解因式：x^2+6x+8.

6. 分解因式：x^2+7x-8.

7. 分解因式：$x^2+7xy+10y^2$.

8. 分解因式：$x^2-2x-15$.

9. 因式分解：$x^2-6x-16$.

10. 因式分解：$x^2-4x-21$.

11. 分解因式：$x^2-9x-22$.

12. 分解因式：$x^2-10x-24$.

13. 分解因式：$x^2-10xy-24y^2$.

14. 分解因式：$x^2-11x+24$.

15. 分解因式：$x^2+14x+24$.

16. 分解因式：x^4+7x^2-30.

17. 分解因式：$m^2-5m-36$.

18. 分解因式：x^2+144y^2-25xy.

19. 分解因式：$x^2-4xy-96y^2$.

20. 分解因式：$x^2+4x(3-x)-9$

21. 分解因式：x^4+3x^2-28.

22. 分解因式：x^4+7x^2-30.

23. 分解因式：x^4-7x^2-18.

24. 分解因式：ax^4-14ax^2-32a.

25. 分解因式：$x^4+x^2(a^2+1)+a^2$.

26.分解因式：$x^4-x^2(a^2+1)+a^2$

27.分解因式：$m^4-10m^2n^2+9n^4$.

28.分解因式：$x^4-26x^2y^2+25y^4$.

29.在实数范围内分解因式：a^4-5a^2-14.

30.分解因式：$x^5-x^3y^2-12xy^4$.

31.分解因式：$12x^2+4xy-y^2$.

32.分解因式：$-6x^2+12-x$.

33.分解因式：$6x^2-7x+2$.

34.分解因式：$6x^2-7xy+2y^2$.

35.因式分解：$-6x^2+11x-3$.

36. 分解因式：$2a^2-ab-3b^2$.

37. 分解因式：$3x^2+8xy-3y^2$.

38. 因式分解：$6x^2-5x-4$.

39. 分解因式：$-12x^2-28x+5$；

40. 因式分解： $6x^2-13x+5$.

41. 分解因式：$5x^2-17x+6$.

42. 因式分解：$-2x^2y+8xy-6y=$________.

43. 分解因式：$\frac{1}{3}x^2-xy-6y^2=$________.

44. 分解因式：$-6x^2-11x+7$.

45. 分解因式：$12x^2-19xy+7y^2$.

46. 分解因式：$3x^2+5x-8$.

47. 因式分解：$-x^2-2x+8$；

48. 分解因式：$63x^2+22x-8$.

49. 分解因式：$5x^2+12x-9$.

50. 分解因式：$8x^2-20x+12$.

51. 分解因式：$12x^2-11x-15$.

52. 分解因式：$12x^2-11xy-15y^2$.

53. 分解因式：$27x^2-33x-20$.

54. 分解因式：$6x^2-7x-24$.

55. 分解因式：$32-12x-27x^2$.

56. 分解因式：$5x^2+4xy-28y^2$.

57. 分解因式：$15x^2+28y^2-47xy$.

58. 分解因式：$a^2b^2-5abc-36c^2$.

59. 分解因式：$-x^2+x+56$.

60. 分解因式：$-20xy+64y^2+x^2$.

61. 分解因式：$mnx^2+(m^2+n^2)x+mn$.

62. 分解因式：$(a^2+a)^2-8(a^2+a)+12$.

63. 分解因式：$kx^2+(2k-3)x+k-3$.

64. 分解因式：$(a^2-6)^2-4a(a^2-6)-5a^2$.

65. 分解因式：$(k+1)x^2+(-3k-1)x+2k-2$.

66. 分解因式：$2m^3n + 6m^2n + 4mn$.

67. 分解因式：$3a^5 - 12a^4 + 9a^3$.

68. 分解因式：$mx^2 - (m+n)x + n$.

69. 分解因式：$mx^2 - 3(m-1)x + 2m - 3$.

70. 因式分解：$abcx^2 + (a^2b^2 + c^2)x + abc$.

71. 因式分解：$abx^2 - (a^2 + b^2)x - (a^2 - b^2)$.

72. 分解因式：$x^2 - (6p + 5q)x + 9p^2 + 15pq + 6q^2$.

73. 分解因式：$(x-y)^2 + 5(x-y) - 50$.

74. 分解因式：$(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$.

75. 分解因式：$(x^2 + 4x)^2 - (x^2 + 4x) - 20$.

76. 因式分解：$(a^2-3a)^2-6(a^2-3a)+8$.

77. 因式分解：$(2x-y)^2-4(2x-y)-12$.

78. 分解因式：$(a-2b)^2-8(a-2b)+12$.

79. 分解因式：$5+7(a+1)-6(a+1)^2$.

80. 分解因式：$(x+y)^2-4x-4y-12$.

81. 分解因式：$(x^2-4x)^2-8(x^2-4x)-48$.

82. 分解因式：$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$.

83. 分解因式：$12(x+y)^2+11(x+y)(x-y)+2(x-y)^2$.

84. 分解因式：$(x^2-x)^2-12(x^2-x)+36$.

85. 因式分解：$(m^2-2m)^2-2(m^2-2m)-3$.

86. 分解因式：$2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$.

87. 分解因式：$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$.

88. 分解因式：$(x^2-3)^2+2(x^2-3)(x-3)+(x-3)^2$.

89. 分解因式：$x^2-(p^2+q^2)x-pq(p+q)(p-q)$.

90. 因式分解：$4(x-1)^2-4(1-x^2)+(1+x)^2$.

91. 分解因式：$y(y+1)(x^2+1)+x(2y^2+2y+1)$

92. 分解因式：$(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$.

93. 分解因式：$(a+b)^2(ab-1)+1$.

94. 分解因式：$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2$.

95. 分解因式：$6x^2+xy-2y^2+2x-8y-8$.

96. 分解因式：$4x^3-31x+15$.

97. $x^2+2xy+y^2+x+y-2$.

98. 分解因式：$(2-m)x^2-2x+m$.

99. 分解因式：$x^2+(a+b+c)x+(a+b)c$.

100. 分解因式：$a(6a+11b+4)+b(3b-1)-2$.

模块四　　分组分解法

方法总结：

1．利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法

2．一般地，分组分解大致分为三步：

①将原式的项适当分组；

②对每一组进行处理（“提”或“代”）；

③将经过处理的每一组当作一项，再采用“提”或“代”进行分解

在进行分组分解时，不仅要看到第二步，而且要看到第三步

3．四项多项式常见的分组方法：

①两两分组：一般配合的基本方法是——提取公因式法和平方差公式；

②一三分组：一般配合的基本方法是——完全平方公式和平方差公式

易错总结：

① 分组时要选择分组方法，要保证分组后各组有公因式或能利用公式法、十字相乘法继续分解；

② 最后的结果如果有同类项要合并同类项

例题解析：

分解因式$ax+ay+bx+by$

解：$ax+ay+bx+by$

$=(ax+ay)+(bx+by)$ ……【观察题目，合理分组】

$=a(x+y)+b(x+y)$ ……【每一组进行因式分解】

$=(x+y)(a+b)$ ……【继续分解】

巩固练习：

1．分解因式：$a^2-ab+a-b$

2. 因式分解：$ab-ac+bc-b^2$

3. 分解因式：$am+bm+a+b$；

4. 分解因式：$xy-x-y+1$

5. 分解因式：$x^2+3y-xy-3x$

6. 分解因式：$abx^2+ab+a^2x+b^2x$

7. 分解因式：$5x^3-15x^2-x+3$

8. 分解因式：x^3+9+3x^2+3x

9. 分解因式：$x^4+x^3+x^2+x$

10. 分解因式：$5a^2m-15am+3abm-9bm$

11. 分解因式：$x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1$

12. 因式分解：x^2-y^2-x+y

13. 因式分解：$1-x^2+2xy-y^2$

14. 因式分解：x^2-y^2+2y-1

15. 分解因式：x^2-x-9y^2-3y

16. 分解因式：a^2-b^2-2b-1

17. 计算：$4a^2+4ab+b^2-1$

18. 分解因式：x^2-4+4y^2-4xy

19. 分解因式：$x^2-y^2-z^2-2yz$

20. 分解因式：$49+14x+x^2-y^2$

21. 分解因式：$9m^2-4x^2+4xy-y^2$

22. 分解因式：$x^3+x^2y-xy^2-y^3$

23. 分解因式：x^5-x^4-x+1

24. 分解因式：$a^3+a^3b-a^2b^2-ab^2$

25. 分解因式：$a^2b^3-abc^2d+ab^2cd-c^3d^2$

26. 分解因式：$32ac^2+15cx^2-48ax^2-10c^3$

27. 因式分解：$45am^2-20ax^2+20axy-5ay^2$

28. 分解因式：$x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2+z^4$

29. 分解因式：$ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$

30. 分解因式：$x^5+y^5-(x^4y+xy^4)$

31. 分解因式：$a(1-b)^2-1+2b-b^2$

32. 分解因式：$x(x-1)(x-2)-6$

33. 分解因式：$(x+y)(x-y)+4(y-1)$

34. 分解因式：$1+(b-a^2)x^2-abx^3$

35. 分解因式：$x(x-1)-y(y-1)$

36. 分解因式：$x(x+1)+y(y-1)-2xy$

37. 分解因式：$x(x+z)-y(y+z)$

38. 分解因式：$4a^2 - b^2 + c^2 - 9d^2 + 4ac + 6bd$

39. 因式分解：$m^2 - 4m + 4 - n^2 - 2n - 1$

40. 分解因式：$(a+b)^2 + (a+c)^2 - (c+d)^2 - (b+d)^2$

41. $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$

42. 分解因式：$x^4 + x^3y + xz^3 + yz^3$

43. 分解因式：$ax^3 + x + a + 1$

44. 分解因式：$x^2 + 2x - 15 - ax - 5a$

45. 分解因式：$2m^2-mn+2m+n-n^2$

46. 分解因式：$x^3-2x^2-x+2+x^5-2x^4$

47. 分解因式：$x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

48. 分解因式：$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

49. 分解因式：$x^2+y^2+m^2-2xy+2my-2mx$

50. 分解因式：$x^3+x^2+x-y^3-y^2-y$

模块五　　拆添项法

方法总结：

1. 拆项与添项

在对所给多项式直接分组难以进行因式分解时，常常可以通过拆项或添项，创造出提取公因式或运用乘法公式进行因式分解的条件，使原式的某些项之间能够建立起联系，便于采用分组法进行因式分解．拆项和添项都是代数式的恒等变形．拆添项法常见于次数比较高的式子

拆项：把代数式中的某项拆成两项或几项的代数和，叫做拆项；

添项：在代数式中添上和为零的几项，叫做添项

2. 拆添项法常常与分组分解法相结合，使得分成的每一组都有公因式可提或者可以应用公式；

对于按某一字母降幂排列的三项式，拆开中项是最常见的；

当所给多项式中出现平方时，可以考虑通过拆添项配出完全平方式

易错总结：

① 拆添项的过程中一定要保证与原式相等，进行等量变换；

② 最后的结果要注意观察是否能继续分解，要分解到最后

例题解析：

分解因式：x^4+4

解：x^4+4

$=x^4+4x^2+4-4x^2$　　……【添项：添加$4x^2$凑完全平方，再减去$4x^2$使等式成立】

$=(x^2+2)^2-4x^2$　　……【前 3 项利用完全平方公式进行分解】

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$　　……【平方差公式继续分解】

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$　　……【观察是否能继续分解，得到最后结论】

巩固练习：

1．把多项式x^4+64分解因式

2．分解因式x^4+4y^4

3．分解因式$x^2-2ax-b^2-2ab$

4. 分解因式$x^2-120x+3456$

5. 分解因式：$x^2-140x+4756$

6. 分解因式：$(x-1)(x-3)+1$

7. 在实数范围内分解因式：m^2-6m+4

8. 分解因式：$x^4-7x^2y^2+81y^4$

9. 分解因式：$x^4+14x^2y^2+81y^4$

10. 分解因式：$a^4+a^2b^2+b^4$

11. 分解因式：$x^4+x^2y^2+y^4$

12. 分解因式：x^4-23x^2+1

13. 分解因式：x^4-3x^2+1

14. 在实数范围内因式分解：x^4+16y^4

15. 分解因式：a^4+64b^4

16. 分解因式：a^4+4b^4

17. 分解因式：a^4+a^2+1

18. 因式分解：a^8+a^4+1

19. 分解因式：$a^{16}+a^8+1$

20. 分解因式：y^2+4y-x^2+2x+3

21. 分解因式：$4x^2-4x-y^2+4y-3$

22. 分解因式：$a^2-2ab-3b^2+12b-9$

23. 因式分解：$x^2+y^2-x^2y^2-4xy-1$

24. 分解因式：x^3-3x-2

25. 分解因式：x^3+2x+3

26. 分解因式：$x^3-19x-30$

27. 分解因式：x^3-9x+8

28. 因式分解：x^3-2x^2+1

29. 分解因式：$3x^3+2x-5$

30. 分解因式：x^3+2x^2-5-4x

31. 因式分解：x^3-x^2-5x+6

32. 分解因式：x^3+2x^2-5x-6

33. 分解因式：$4x^3-4x^2-9x-3$

34. 分解因式：$x^3+9x^2+26x+24$

35. 分解因式：x^3+3x^2+3x+2

36. 因式分解：$6x^3-5x^2-12x-4$

37. 分解因式：$a^3+3a^2+3a+b^3+3b^2+3b+2$

38. 分解因式：x^4-2x-3

39. 分解因式：$x^4+x^2-2ax+1-a^2$

40. 分解因式：$x^4+x^3+2x^2+3x-3$

41. 分解因式：$x^4+2x^3-9x^2-2x+8$

42. 分解因式：$x^4-x^3+3x^2-2x+2$

43. 分解因式：$9x^4-3x^3+7x^2-3x-2$

44. 分解因式：$2x^4+3x^3-6x^2-3x+2$

45. 分解因式：a^5+a^4+1

46. 分解因式：x^5+x+1

47. 分解因式：x^5-1

48. 分解因式：x^7+x^5+1

49. 分解因式：$(a-b)^4+(a+b)^4+(a^2-b^2)^2$

50. 分解因式：$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

模块六　　换元法

方法总结：

1.换元法

根据代数式的特征，把其中的某一部分看成一个整体，并用一个新的字母代替，从而使得原代数式的结构简化，这就是换元法

2.换元法的基本步骤

（1）找出原多项式中重复出现的部分；

（2）将重复出现的部分用新的字母（如 t）代替；

（3）把原多项式整理成关于新字母的多项式，并对其进行因式分解；

（4）分解完成后要“还元”，即换回原字母

易错总结：

① 换元之后记得“还元”；

② “还元”后的式子需检验是否可以继续因式分解

例题解析：

对多项式$(x^2-2x)(x^2-2x+2)+1$进行因式分解.

解：设$x^2-2x=y$，则　　　　……【设】

$(x^2-2x)(x^2-2x+2)+1$

$=y(y+2)+1$　　　　……【换元】

$=y^2+2y+1$

$=(y+1)^2$　　　　……【对换元之后的多项式进行因式分解】

$=(x^2-2x+1)^2$　　　　……【还元，观察是否能继续分解】

$=[(x-1)^2]^2$

$=(x-1)^4$　　　　……【分解到最后】

巩固练习：

1. 请你对多项式$(x^2-4x+2)(x^2-4x+6)+4$进行因式分解

2. 请你用换元法对多项式$(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$进行因式分解

3. 分解因式：$(2x-y)^2-4x+2y-3$

4. 分解因式：$(x^2+x+1)(x^2+x+3)-8$

5. 分解因式：$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-6$

6. 分解因式：$(a^2+3a-2)(a^2+3a+4)-16$

7. 分解因式：$(x^2+2x+5)^2+3(x^2+2x+5)+2$

8. 分解因式：$(x^2+4x+8)^2+3(x^2+4x+8)+2$

9. 分解因式：$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

10. 分解因式：$(x^2+5x+2)(x^2+5x+3)-12$

11. 分解因式：$(x^2-x-3)(x^2-x-5)-3$

12. 分解因式：$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$

13. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

14. 分解因式：$(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)-15$

15. 分解因式：$(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)-24$

16. 分解因式：$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

17. 分解因式：$16(6x-1)(2x-1)(3x+1)(x-1)+25$

18. 分解因式：$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$

19. 分解因式：$(x^4-4x^2+1)(x^4+3x^2+1)+10x^4$

20. 分解因式：$(x^2+3x+2)(4x^2+8x+3)-90$

21. 分解因式：$(2a+5)(a^2-9)(2a-7)-91$

22. 分解因式：$(x^2+3x+2)(3+8x+4x^2)-72$

23. 分解因式：$(x^2+6x+8)(x^2+14x+48)+12$

24. 分解因式：$(x+1)(2x+1)(3x-1)(4x-1)+6x^4$

25. 分解因式：$(x+y)^3+2xy(1-x-y)-1$

26. 分解因式：$4(3x^2-x-1)(x^2+2x-3)-(4x^2+x-4)^2$

27. 分解因式：x^6-28x^3+27

28. 分解因式：$(y+1)^4+(y+3)^4-272$

29. 分解因式：$4(a+b-ab)(a+b-1)+(1-ab)^2$

30. 分解因式：$(1-xy)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$

模块七　　主元法

方法总结：

1. 主元法：在对含有多个字母的代数式进行因式分解时，可以选其中一个字母作为主要未知数，其他字母看成是常数，把代数式整理成关于主元的降幂排列的多项式，再尝试用公式法、十字相乘法等方法进行因式分解.
2. 如果题目中选取的主元不容易因式分解，可以尝试变更主元解决

例题分析：

因式分解：$3x^2+4xy-4y^2+8x-8y-3$.

解：

原式$=3x^2+(4y+8)x-(4y^2+8y+3)$ ……**【将x看作主元，将y看作x的系数】**

$=3x^2+(4y+8)x-(2y+1)(2y+3)$ ……**【对关于y的二次三项式十字相乘】**

$=(3x-2y-1)(x+2y+3)$ ……**【整体应用十字相乘法】**

巩固练习：

1. 1. 分解因式：$x^2-6xy+9y^2-z^2$.

2. 分解因式：$abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc$.

3. 因式分解：$x^2+(2y+1)x-(15y^2+19y+6)$.

4. 分解因式： $x^2-(p^2+q^2)x-pq(p+q)(p-q)$.

5. 分解因式：$x^2-y^2-4x-6y-5$.

6. 分解因式： $a^3+(1-b)a^2-2ba+b^2$.

7. 分解因式： $a^2b+a^2c+ac^2-ab^2-b^2c-bc^2$.

8. 分解因式： $a^2b+a^2c+ab^2-ac^2-b^2c-bc^2=$(　　)

A. $(a+c)(b+c)(a-b)$　　B. $(a-c)(b+c)(a+b)$

C. $(a-c)(b-c)(a+b)$　　D. $(a+c)(b-c)(a+b)$

9. 分解因式：$2a^2-b^2-ab+2bc+4ac$.

10. 分解因式：$a^2+2b^2+3c^2+3ab+4ac+5bc$.

11. 分解因式：$x^4+3x^2+2ax+4-a^2$.

12. 将a当作主元，分解因式$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.

13. 分解因式：$1+a+b+c+ab+ac+bc+abc$.

14. 分解因式：$a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-3abc+b^2c+bc^2$.

15. 已知：a、b、c为三角形的三条边，且$a^2+4ac+3c^2-3ab-7bc+2b^2=0$，求证：$2b=a+c$.

16. 分解因式：$a(6a+11b+4)+b(3b-1)-2$.

17. 分解因式：$ax^3+(a^2+1)x^2+(a-1)x-a$.

18. 分解因式：$y(y+1)(x^2+1)+x(2y^2+2y+1)$.

19. 分解因式：$x^3+(2a+1)x^2+(a^2+2a-1)x+a^2-1$.

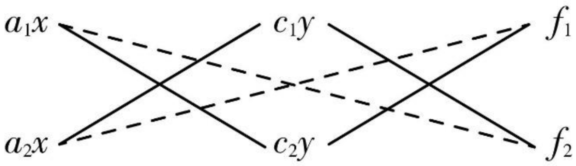
20. 分解因式：$ab(x^2-y^2)-(a^2-b^2)(xy+1)-(a^2+b^2)(x+y)$.

模块八　　双十字相乘法（长十字相乘法）

方法总结：

双十字相乘法（长十字相乘法）

形如 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ 的二元二次式也可以用十字相乘进行因式分解.



将 x^2、y^2 的系数与常数项进行分解，$A=a_1a_2$，$C=c_1c_2$，$F=f_1f_2$；

使得 $a_1c_2+a_2c_1=B$，$c_1f_2+c_2f_1=E$，　$a_1f_2+a_2f_1=D$.

则　$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=(a_1x+c_1y+f_1)(a_2x+c_2y+f_2)$.

易错总结：

验证，即长十字相乘中含有三个十字，一般两个十字即可确定算式中的六项，第三个十字相乘作为检验.

例题分析：

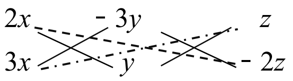
用双十字相乘法分解因式：$6x^2-7xy+7yz-2z^2-3y^2-xz$.

解：

原式 $=6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$ ……**【排序】**

$=(2x-3y+z)(3x+y-2z)$　……**【双十字相乘】**

【双十字相乘过程分析】



$6x^2=2x\cdot 3x$，$-3y^2=-3y\cdot y$，$-2z^2=z\cdot(-2z)$

$2xy+(-3y)\cdot 3x=-7xy$，$(-3y)\cdot(-2z)+yz=7yz$，$2x\cdot(-2z)+3xz=-xz$

巩固练习：

1. 分解因式：$x^2+2xy-3y^2+3x+y+2$.

2. 分解因式：$x^2-3xy-10y^2+x+9y-2$.

3. 分解因式：$6x^2-5xy+y^2+x-y-2$．

4. 分解因式：$3x^2+4xy-4y^2+8x-8y-3$．

5. 分解因式：$2x^2-7xy-22y^2-5x+35y-3$．

6. 对下列式子进行因式分解：$6x^2-13xy+6y^2+5x-10y-4$；

7. 因式分解：$2x^2-3xy+y^2+8x-5y+6$．

8. 分解因式：$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$．

9. 分解因式：$x^2+2xy-15y^2+x-19y-6$．

10. 把$6x^2+xy-2y^2+2x-8y-8$分解因式．

11. 分解因式：$6x^2-5xy-6y^2+2x+23y-20$

12. m为什么数时，$x^2+7xy-18y^2-5x+my-24$可以分解为两个一次因式的积？

13. 分解因式：$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2$.

14. 分解因式：$2x^2-3xy-2y^2-3xz+yz+z^2$.

15. 分解因式：$x^2-6xy+9y^2-5xz+15yz+6z^2$.

16. 分解因式：$x^2+2xy-3y^2+2xz+14yz-8z^2$.

17. 分解因式：$6x^2-5xy-6y^2-2xz-23yz-20z^2$.

18. 分解因式：$mn+n^2+m-n-2$.

19. 分解因式：$x^2-y^2+5x+3y+4$.

20. 分解因式：$x^2-y^2-4x-6y-5$.

21. 分解因式：$7x^4+20x^3+11x^2+40x-6$

22. 因式分解：$x^4-x^3+6x^2-x+15$.

23. 分解因式：$9x^2-16y^2+18x+40y-16$.

24. 分解因式：$2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$.

25. 分解因式：$3x^2-11xy+6y^2-xz-4yz-2z^2$.

26. 分解因式：$a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$.

27. 分解因式：$6x^2-3y^2-2z^2-7xy-xz+7yz$.

28. 已知多项式$x^2-2xy+ky^2+3x-5y+2$能分解成两个一次因式的积，那么k的值为________.

29. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$；

30. $x^2-2y^2-3z^2+xy+7yz+2xz$；

模块九　　因式定理与试根法

方法总结：

余数定理与因式定理

根据长除法，多项式 $f(x)$ 除以多项式 $g(x)$，设商式为 $q(x)$，余式为 $r(x)$，

则 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$.

特别地，当除式 $g(x)$ 为一次式 $(x?a)$ 时，余式 $r(x)$ 为一个数，记作 r，

则 $f(x)=(x-a)q(x)+r$.

余数定理:多项式 $f(x)$ 除以 $(x?a)$ 所得的余数等于 $f(a)$，即 $r=f(a)$.

因式定理:如果 $f(a)=0$，则 $(x-a)$ 为多项式 $f(x)$ 的一个因式；反之，如果多项式 $f(x)$ 有因式 $(x-a)$，则 $f(a)=0$.

试根法

如果 $f(a)=0$，那么就说 a 是多项式 $f(x)$ 的根. 利用因式定理，我们可以根据多项式的根，求出它的一次因式，进而利用长除法或分组分解法进行因式分解.

然而，我们应该如何求出 $f(x)$ 的根呢？

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 为整系数多项式，且有理数 $a=\dfrac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的根，

那么:有理数 $a=\dfrac{p}{q}$ 的分子 p 是常数项 a_0 的因数，分母 q 是首项系数 a_n 的因数.

【注】当多项式的首项系数为1时，$a=\dfrac{p}{q}=p$，即有理根都是整数根.

由此发现，有理根的数目是有限的，我们只需先枚举然后逐个计算检验便可以得到多项式 $f(x)$ 的有理根.

例题分析：

分解因式：$2x^4-15x^3+38x^2-39x+14$

解：设 $f(x)=2x^4-15x^3+38x^2-39x+14$　　……【因式定理与试根法】

原式＝$(x-1)[2x^3-13x^2+25x-14]$　　……【应用长除法】

＝$(x-1)[2x^2(x-1)-11x(x-1)+14(x-1)]$

＝$(x-1)(x-1)(2x^2-11x+14)$

＝$(x-1)(x-1)(2x-7)(x-2)$

【因式定理与试根法过程分析】

$a_0=14, a_n=2$；其中 14 的因数为±1，±2，±7，±14；2 的因数为±1，±2

$\Rightarrow f(x)$ 的有理根只能是$\pm\frac{1}{2}$，±1，±2，$\pm\frac{7}{2}$，±7，±14 中的数$\Rightarrow f(1)=0$

巩固练习：

1. 分解因式：x^3+2x^2-2x-1.

2. 分解因式：x^3-x^2-5x+2.

3. 分解因式：$2x^3-x^2-5x-2$.

4. 分解因式：$f(x)=3x^3+x^2+x-2$.

5. 分解因式：$8x^4+6x^3-19x^2+3x+2$.

6. 分解因式：$f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$.

7. 分解因式：x^3-4x^2+6x-4。

8. 分解因式：$f(x)=x^3+6x^2+11x+6$.

9. 分解因式：$x^3-9x^2+26x-24$.

10. 分解因式：$3x^3-5x^2y+xy^2+y^3$.

11. 分解因式：$6x^3-5x^2y-3xy^2+2y^3$。

12. 分解因式：$x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$.

13. 分解因式：$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$.

14. 分解因式：$(l+m)x^3+(3l+2m-n)x^2+(2l-m-3n)x-2(m+n)$.

15. 试确定a和b的值，使$f(x)=2x^4-3x^3+ax^2+5x+b$被$(x+1)(x-2)$整除.

16. 多项式$x-x^{10}-x^{21}+x^{32}+x^{43}-x^{54}+x^{65}+x^{76}-x^{87}-x^{98}$除以$x-1$所得余式为多少？

17. 多项式$2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$能被x^2+x-2整除，求$\frac{a}{b}$的值.

18. 设$f(x)=x^4+3x^3+8x^2-kx+11$能被$x+3$整除，试求k的值.

19. 解方程：$x^5-3x^4-x^3+11x^2-12x+4=0$

20. 证明：当a、b是不相等的常数时，若关于x的整式$f(x)$能被$x-a$和$x-b$整除，则$f(x)$也能被$(x-a)(x-b)$整除.

模块十　　待定系数法

方法总结：

待定系数法：设某一多项式的全部或部分系数为未知数，利用当两个多项式的值相等时，同类项系数相等的原理确定这些系数，从而得到待求的值

对于整系数的四次多项式，如果我们通过因式定理判断出没有一次因式，那么一般会使用待定系数法来考察它有无整系数的二次因式：

1.设该多项式等于两个含待定系数的二次因式的积；

2.比较等式两边系数，建立方程组；

3.若方程组有整数解，得到对应分解方法；若方程组无整数解，则无二次因式，即无法因式分解

易错总结：

① 设系数的时候注意配合已知的最高次项系数和常数项，尽量少设未知数；

②待定系数法也可以应用于其他场合，如高次的多项式以及轮换式的因式分解

例题解析：

已知x^3-8有一个因式$x-2$，用待定系数法对x^3-8进行因式分解

解：设$x^3-8=(x-2)(x^2+ax+b)$　　……【根据已知设系数】

$\because (x-2)(x^2+ax+b)=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$

$\therefore \begin{cases} a-2=0 \\ b-2a=0 \\ -2b=-8 \end{cases}$　　……【对比各项系数列方程组】

解得：$a=2$，$b=4$.　　……【解方程组求得系数】

$\therefore x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$.　　……【代回，观察是否能继续因式分解，得最终结果】

巩固练习：

1．已知二次三项式x^2-4x+m有一个因式是$x+3$，求另一个因式以及m的值

2.　已知二次三项式$3x^2+5x-m$有一个因式是$3x-1$，求另一个因式以及m的值

3. 已知x^3+27有一个因式$x+3$，用待定系数法因式分解x^3+27

4. 用待定系数法分解因式：x^3-1

5. 已知多项式x^4+x^2+1有因式x^2+x+1，请用待定系数法求出该多项式的另一因式

6. 若下面的等式恒成立：$x^2-y^2+4x-6y-5=(x-y-A)(x+y+B)$，求$A$、$B$

7. 用待定系数法分解因式：$2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20$

8. 用待定系数法分解因式：$2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$

9. 用待定系数法分解因式：$6x^2+xy-2y^2+2x-8y-8$

10. 若x^3+5x^2+7x+a有一个因式是$x+1$，求a的值，并将原式因式分解

11. 若x^2-3x+1是x^4+ax^2+bx+2的一个因式，求a、b的值并将原式因式分解

12. x^4-x^2+1是否能分解成两个整系数的二次因式的乘积？请说明理由

13. 用待定系数法因式分解：$x^4+5x^3+15x-9$

14. 用待定系数法分解因式：$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

15. 用待定系数法分解因式：$x^4-x^3-5x^2-6x-4$

16. 多项式$12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m$可以分解成两个一次因式的积，求m的值并对此多项式进行因式分解

17. 关于x，y的二次式$x^2+7xy+my^2-5x+43y-24$可分解为两个一次因式的乘积，求m的值并对此多项式进行因式分解

18. 求证：$x^2+2xy+x+y+1$不能分解成两个一次因式的积

19. x^6+x^3-1能否分解为两个整系数的三次因式的积？

20. 若代数式$x(x+1)(x+2)(x+3)+p$恰好能分解为两个二次整式的乘积(其中二次项系数均为1，且一次项系数相同)，则p的最大值是多少？

模块十一　　轮换对称式

方法总结：

1.对称式

如果将一个多元多项式中任意两个字母互换后多项式保持不变，那么称这个多项式为对称式

2.轮换式

如果将一个多元多项式中的字母依次轮换后，多项式保持不变，那么称这个多项式为轮换式

3. 齐次轮换式的因式分解步骤

①判断多项式是否为齐次轮换式；

②利用因式定理试根；

③利用轮换式性质得到更多因式；

④通过次数特征与轮换式特征，利用待定系数法设出剩余因式；

⑤解出待定系数，完成因式分解

4.常见的对称多项式

①二元齐次对称多项式

一次： $a(x+y)$

二次：$a(x^2+y^2)+bxy$

三次：$a(x^3+y^3)+b(x^2y+y^2x)$

②三元齐次对称多项式

一次：$l(x+y+z)$

二次：$l(x^2+y^2+z^2)+m(xy+yz+zx)$

三次：$l(x^3+y^3+z^3)+m(x^2y+y^2z+z^2x)+n(xy^2+yz^2+zx^2)+kxyz$

这里，a、b、l、m、n、k都是待定的常数

易错总结：

①代入数值计算时，不能代入让因式为 0 的数值；

②代入计算的数值，尽量往简单了选，如 0, 1, 2，-1，-2 这些数

例题解析：

分解因式：$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

解：∵当$a=b$时，$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$ ……【利用因式定理试根】

∴原式含有因式$a-b$

由轮换对称式的特点，原式还含有因式$b-c$、$c-a$ ……【利用轮换式性质得到更多因式】

原式是三次轮换对称多项式，故可设

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=k(a-b)(b-c)(c-a)$① ……【利用待定系数法设出剩余因式】

其中k是待定系数

令$a=1$，$b=0$，$c=-1$，代入①式得 ……【代入方便计算的数值】

$k=-1$ ……【求解系数】

∴原式$=-(a-b)(b-c)(c-a)$ ……【代回，完成因式分解】

巩固练习：

1. 分解因式：$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

2. 分解因式：$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

3. 分解因式：$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)-(x^3+y^3+z^3)-2xyz$

4. 分解因式：$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

5. 分解因式$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

6. 分解因式：$(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(b-c+a)(b+c-a)$
$+(a-b)\cdot(c-a+b)(c+a-b)$

7. 分解因式：$(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$

8. 因式分解：$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

9. 分解因式：$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

10. 分解因式：$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

11. 因式分解：$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^4+y^4+z^4)$

12. 因式分解：$x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$

13. 分解因式：$(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$

14. 分解因式：$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

15. 分解因式：$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

16. 分解因式：$(a+b)^5-a^5-b^5$

17. 分解因式：$a^3(b-c)(c-d)(d-b)-b^3(c-d)(d-a)(a-c)$
$+c^3(d-a)(a-b)(b-d)-d^3(a-b)(b-c)(c-a)$

18. 分解因式：$(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)$
$+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$

19. 分解因式：$(bcd+cda+dab+abc)^2-(bc-ad)(cd-ab)(db-ac)$

20.分解因式：$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$

参考答案

模块一　　提公因式法

1. 【解答】解：原式$= a(a-6)$
2. 【解答】解：原式$= m(m+2)$
3. 【解答】解：$2a^2-6a=2a(a-3)$
4. 【解答】解：原式$= 6b(2a-1)$
5. 【解答】解：$16ab^2-48a^2b=16ab(b-3a)$
6. 【解答】解：$3a^2b+6ab^2=3ab(a+2b)$
7. 【解答】解：原式$= ax(ax-1)$
8. 【解答】解：$3p^2-6pq=3p(p-2q)$
9. 【解答】解：$12abc-3bc^2=3bc(4a-c)$
10. 【解答】解：原式$= 2ab^2(ab+3)$
11. 【解答】解：原式$= 2a(a-b)+b(a-b)=(a-b)(2a+b)$
12. 【解答】解：原式$= a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(a+b)$
13. 【解答】解：$3x(a-b)-6y(b-a)=3x(a-b)+6y(a-b)=3(a-b)(x+2y)$
14. 【解答】解：原式$= 3m(b-c)+2n(b-c)=(3m+2n)(b-c)$
15. 【解答】解：$x(x-a)+y(a-x)=x(x-a)-y(x-a)=(x-a)(x-y)$
16. 【解答】解：原式$= a(p-q+m)$
17. 【解答】解：$m^2+6mn+9m=m(m+6n+9)$
18. 【解答】解：$2x^2-4xy+2x=2x(x-2y+1)$
19. 【解答】解：原式$= -2m(2m^2-8m+13)$
20. 【解答】解：原式$= 3x(2x-3y+1)$
21. 【解答】解：原式$= -8a^2b-2ab+6b^2=-2b(4a^2+a-3b)$
22. 【解答】解：原式$= 7ab(-2c-1+7bc)=-7ab(2c+1-7bc)$
23. 【解答】解：原式$= -2xy(2xy^2-3x+4y)$
24. 【解答】解：原式$= \frac{1}{2}(12x^2y+6x^3y^2+9xy^2)\ =\frac{3xy}{2}(4x+2x^2y+3y)$
25. 【解答】解：原式$= -2x^2y^2(2x-3y+6)$
26. 【解答】解：$-6abc-14a^2b^3+12a^3b=-2ab(3c+7ab^2-6a^2)$
27. 【解答】解：$-26xy^3z^2+13xy^2z^2+52x^5y^2z^4=-13xy^2z^2(2y-1-4x^4z^2)$
28. 【解答】解：原式$= 2(a-3)^2-(a-3)=(a-3)(2a-6-1)\ =(a-3)(2a-7)$
29. 【解答】解：原式$= (a-3)^2-2(a-3)\ =(a-3)[(a-3)-2]\ =(a-3)(a-5)$
30. 【解答】解：原式$= 6(a-b)^2[3b-2(a-b)]=6(a-b)^2(5b-2a)$
31. 【解答】解：原式$=10a(x-y)^2-5ax(x-y)$
   $=5a(x-y)[2(x-y)-x]$
   $=5a(x-y)(x-2y)$
32. 【解答】解：$(x+y)^2-(x+y)(x-y)$
   $=(x+y)[(x+y)-(x-y)]$
   $=(x+y)\cdot 2y$
   $=2y(x+y)$
33. 【解答】解：原式$= (m-1)(m+1+1)=(m-1)(m+2)$
34. 【解答】解：$a-1+a^2(1-a)$
   $=(a-1)(1-a^2)$

$=(a-1)(1-a)(1+a)$

$=-(a-1)^2(1+a)$

35. 【解答】解：$4x(a^2+x^2)-a^2-x^2=(4x-1)(a^2+x^2)$

36. 【解答】解：原式$=2(x-2)^2(2a+bx-2b)$

37. 【解答】解：$4(a+1)^2-2(a+1)(a-1)$

$=2(a+1)[2(a+1)-(a-1)]$

$=2(a+1)(a+3)$

38. 【解答】解：$a(a+b)(a-b)-a(a+b)^2$

$=a(a+b)[(a-b)-(a+b)]$

$=a(a+b)(-2b)$

$=-2ab(a+b)$

39. 【解答】解：原式$=(m+n)(x-y-x-y)=-2y(m+n)$

40. 【解答】解：原式$=16m(n-m)^2+56(n-m)^3$

$=8(n-m)^2[2m+7(n-m)]$

$=8(n-m)^2(7n-5m)$

41. 【解答】解：原式$=5ab(x-y)^2(ax-ay-6b)$

42. 【解答】解：原式$=6(m-n)^3+12(m-n)^4$

$=6(m-n)^3[1+2(m-n)]$

$=6(m-n)^3(1+2m-2n)$

43. 【解答】解：原式$=m(m-n)^5+n(n-m)^5$

$=m(m-n)^5-n(m-n)^5$

$=(m-n)^5(m-n)$

$=(m-n)^6$

44. 【解答】解：$a(1-b+b^2)-1+b-b^2=(a-1)(1-b+b^2)$

45. 【解答】解：①$5a^3b(a-b)^3-10a^4b^3(b-a)^2=5a^3b(a-b)^2(a-b-2ab^2)$

②$(b-a)^2+a(a-b)+b(b-a)=(a-b)(a-b+a-b)\ =2(a-b)^2$；

③$(3a-4b)(7a-8b)+(11a-12b)(8b-7a)$

$=(7a-8b)(3a-4b-11a+12b)$

$=8(7a-8b)(b-a)$

46. 【解答】解：$x(b+c-d)-y(d-b-c)-c-b+d=(b+c-d)(x+y-1)$

47. 【解答】解：原式$=(2a+3b)(a-2b)+(3a+2b)(a-2b)$

$=(a-2b)(5a+5b)=5(a-2b)(a+b)$

48. 【解答】解：$(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)$

$=(3x-2y)[(2x-3y)-(2x+3y)]$

$=-6y(3x-2y)$

49. 【解答】解：原式$=(x-y)^2(a-b)(x+1)$

50. 【解答】解：$(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)$

$=(2x+y)(4x^2+4xy+y^2-2x-y+1)$

51. 【解答】解：原式$=4x^2y^2z^3(a-b)^2(6yz-5x+2x^3y^2z^2)$

52. 【解答】解：原式$=x^2(z-x-y)[-x(y+z-a)+z+y(x-z-a)]$

$=x^2(z-x-y)(ax+z-xz-yz-ay)$

53. 【解答】解：原式$=6x^n(3x-4)$

54. 【解答】解：$(a-b)^{2n+1}+(b-a)^{2n}\cdot x^2=(a-b)^{2n}(a-b+x^2)$

55. 【解答】解：原式$=-2(y-x)[(-1)(x-y)]^{2n-1}+4(x-y)^{2n-1}$

$=[-2(y-x)(-1)+4](x-y)^{2n-1}$

$=2(y-x+2)(x-y)^{2n-1}$

56. 【解答】解：$\because n$大于1，$\therefore n-1>0$，$\therefore$公因式是$3xy^{n+1}$

$\therefore 3x^2y^{n+1}-12xy^{2n}z=3xy^{n+1}(x-4y^{n-1}z)$

57. 【解答】解：$\because (2n+1)-(n+2)=n-1>0$

$\therefore 2n+1>n+2$

$\therefore 4a^{2n+1}b^m-6a^{n+2}b^{m-1}=2a^{n+2}b^{m-1}(2a^{n-1}b-3)$

58. 【解答】解：原式$=15a(a-b)^{2n+1}-10ab(a-b)^{2n}$

$=5a(a-b)^{2n}[3(a-b)-2b]$

$=5a(a-b)^{2n}(3a-5b)$

59. 【解答】解：$-4m^nn^{3n}+12m^{3n}n^{2n-2}-2m^{n-1}n^{n+1}$

$=-2m^{n-1}n^{n+1}(2mn^{2n-1}-6m^{2n+1}n^{n-3}+1)$

60. 【解答】解：原式$=(x-y)^{2n}[(x-y)-(x-z)+2(y-z)]$

$=(x-y)^{2n}[x-y-x+z+2y-2z]$

$=(x-y)^{2n}(y-z)$

模块二　　公式法

1. 【解答】解：原式$=(a+2b)(a-2b)$
2. 【解答】解：$x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y)$
3. 【解答】解：原式$=(3a+1)(3a-1)$.
4. 【解答】解：$4x^2-9y^2=(2x+3y)(2x-3y)$.
5. 【解答】解：$25x^2-16y^2=(5x+4y)(5x-4y)$.
6. 【解答】解：原式$=a(1-4b^2)=a(1+2b)(1-2b)$.
7. 【解答】解：$-a^4+16=(4-a^2)(4+a^2)=(2+a)(2-a)(4+a^2)$.
8. 【解答】解：$1-a^4=(1+a^2)(1-a^2)=(1+a^2)(1+a)(1-a)$；
9. 【解答】解：$4x^2-64=(2x)^2-8^2=(2x+8)(2x-8)=4(x+4)(x-4)$.
10. 【解答】解：原式$=9-(a^2-4ab+4b^2)=9-(a-2b)^2=(3+a-2b)(3-a+2b)$.
11. 【解答】解：$4(m+n)^2-9(m-n)^2$

$=[2(m+n)+3(m-n)][2(m+n)-3(m-n)]$

$=(5m-n)(-m+5n)$.

12. 【解答】$(a+1)^2-(b-2)^2$.

$=(a+1+b-2)(a+1-b+2)$

$=(a+b-1)(a-b+3)$.

13. 【解答】解：原式$=(m+3n)(n-m)$.
14. 【解答】解：原式$=[(4x-3y)+4y][(4x-3y)-4y]=(4x+y)(4x-7y)$.
15. 【解答】解：$(3a-2b)^2-(2a+3b)^2$

$=[(3a-2b)+(2a+3b)][(3a-2b)-(2a+3b)]$

$=(5a+b)(a-5b)$.

16. 【解答】解：$(m^2+4)^2-16m^2$

$=(m^2+4-4m)(m^2+4+4m)$

$=(m-2)^2(m+2)^2$.

17. 【解答】解：原式$=(m^2+6mn+9n^2)-25$

$=(m+3n)^2-25$

$=(m+3n+5)(m+3n-5)$.

18. 【解答】解：原式$=a^2-3ab-4b^2+3ab=a^2-4b^2=(a-2b)(a+2b)$.

19. 【解答】解：原式$=[4(a+b)+3(a-b)][4(a+b)-3(a-b)]=(7a+b)(a+7b)$.

20. 【解答】解：$a^2(x-y)^2-b^2(y-x)^2=(x-y)^2(a^2-b^2)=(x-y)^2(a-b)(a+b)$.

21. 【解答】解：$x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

22. 【解答】解：原式$=(a^2+9)(a^2-9)=(a^2+9)(a+3)(a-3)$.

23. 【解答】解：$2y^4-32=2(y^4-16)=2(y^2+4)(y^2-4)=2(y^2+4)(y+2)(y-2)$.

24. 【解答】解：$(m-n)^{2m+1}-(m-n)^{2m-1}$

$=(m-n)^{2m-1}[(m-n)^2-1]$

$=(m-n)^{2m-1}(m-n-1)(m-n+1)$.

25. 【解答】解：$(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$

$=(a-d)(a+2b+d)+(a-d)(a+2c+d)$

$=2(a-d)(a+b+c+d)$.

26. 【解答】解：$a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2$

27. 【解答】解析：$16a^4+8a^2+1=(4a^2)^2+2\times4a^2\times1+1=(4a^2+1)^2$.

28. 【解答】解：$-9x^2-24xy-16y^2=-(3x+4y)^2$.

29. 【解答】解：$16a^4+24a^2b^2+9b^4=(4a^2+3b^2)^2$.

30. 【解答】解：$2x^2+2x+\frac{1}{2}=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

31. 【解答】解：$\frac{1}{2}x^2+2xy+2y^2$

$=\frac{1}{2}(x^2+4xy+4y^2)$

$=\frac{1}{2}(x+2y)^2$.

32. 【解答】解：原式$=3(a^2+2ab+b^2)=3(a+b)^2$.

33. 【解答】解：$ax^2+4ax+4a$

$=a(x^2+4x+4)$

$=a(x+2)^2$

34. 【解答】解：$9a^3+6a^2b+ab^2$

$=a(9a^2+6ab+b^2)$

$=a(3a+b)^2$.

35. 【解答】解：$3x^2y^2+12xy+12=3[(xy)^2+4xy+4]=3(xy+2)^2$.

36. 【解答】解：原式$=3b(4a^2+4ab+b^2)=3b(2a+b)^2$.

37. 【解答】解：$2ax^5+8ax^3+8ax$

$=2ax(x^4+4x^2+4)$

$=2ax(x^2+2)^2$.

38. 【解答】解：原式$=(x-y+5)^2$.

39. 【解答】解：$(x+y-z)^2$

40. 【解答】解：原式$=[3(a+b)+1]^2=(3a+3b+1)^2$.

41. 【解答】解：原式$=9(a-b)^2+12(a+b)(a-b)+4(a+b)^2$

$=[3(a-b)+2(a+b)]^2$

$=(5a-b)^2$.

42. 【解答】解：$-(a+1)^2-2(a^2-1)-(a-1)^2$

$=-[(a+1)^2+2(a+1)(a-1)+(a-1)^2]$

$=-[(a+1)+(a-1)]^2$

$=-4a^2$.

43. 【解答】解：$x^2+2x(x-3y)+(x-3y)^2$
$=(x+x-3y)^2$
$=(2x-3y)^2$.
44. 【解答】解：$(x^2-3)^2+2(x^2-3)(x-3)+(x-3)^2$
$=(x^2+x-6)^2=(x-2)^2(x+3)^2$.
45. 【解答】解：原式$=(x+y)^2+4(x+y)+4=(x+y+2)^2$.
46. 【解答】解：原式$=(x+1)^2-y^2$
$=(x+y+1)(x-y+1)$.
47. 【解答】解：$(x^2+2x)^2+2x^2+4x+1$
$=(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1$
$=[(x^2+2x)+1]^2$
$=(x^2+2x+1)^2$
$=[(x+1)^2]^2$
$=(x+1)^4$
48. 【解答】解：(x^2+4)相当于公式$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$中的a，
$4x$相当于公式$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$中的b.
$(x^2+4)^2+8x(x^2+4)+16x^2$
$=(x^2+4)^2+2\cdot(x^2+4)\cdot 4x+16x^2$
$=(x^2+4+4x)^2$
$=(x+2)^4$.
49. 【解答】解：原式$=x^2+1+2x+x^2+(x+x^2)^2$
$=1+2(x+x^2)+(x+x^2)^2$
$=(1+x+x^2)^2$
50. 【解答】
〈 法一 〉
解：原式$=4x^2-8x+4-4+4x^2+1+2x+x^2$
$=9x^2-6x+1$
$=(3x-1)^2$.
〈 法二 〉
解：原式$=4(x-1)^2+4(x-1)(x+1)+(x+1)^2$
$=[2(x-1)+(x+1)]^2$
$=(3x-1)^2$.
51. 【解答】解：$a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2$；
52. 【解答】解：原式$=(x-5y)^2$.
53. 【解答】解：原式$=(x-8a)^2$.
54. 【解答】解：$a^2-ab+\frac{1}{4}b^2=a^2-2a\times\frac{1}{2}b+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2$.
55. 【解答】解析：$-\frac{1}{4}+a^2-a^4$
$=-\left[(a^2)^2-a^2+\frac{1}{4}\right]$
$=-\left[(a^2)^2-2a^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$
$=-\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2$.
56. 【解答】解：$9a^2-12ab+4b^2=(3a-2b)^2$.

57. 【解答】解：$9x^2-24xy+16y^2=(3x-4y)^2$.

58. 【解答】$16m^4-8m^2n^2+n^4$

$=(4m^2-n^2)^2$

$=(2m+n)^2(2m-n)^2$.

59. 【解答】解：$-ma^2+2mab-mb^2$

$=-m(a^2-2ab+b^2)$

$=-m(a-b)^2$;

60. 【解答】解：原式$=3ab(b^2-10ab+25a^2)=3ab(b-5a)^2$.

61. 【解答】$(a^2+1)^2-4a(a^2+1)+4a^2$

$=(a^2+1)^2-2(a^2+1)\cdot 2a+(2a)^2$

$=(a^2+1-2a)^2$

$=[(a-1)^2]^2=(a-1)^4$.

62. 【解答】解：原式$=(y-1-3)^2=(y-4)^2$.

63. 【解答】解：原式$=(a+b-3c)^2$.

64. 【解答】解：$(x+y)^2-10(x+y)+25=(x+y-5)^2$.

65. 【解答】解：原式$=(a-2b)^2-2(a-2b)+1=(a-2b-1)^2$.

66. 【解答】解：原式$=25(x-y)^2-10(x-y)+1$.

$=[5(x-y)-1]^2$

$=(5x-5y-1)^2$.

67. 【解答】解：$-9a^2+6a(a-b)-(a-b)^2$

$=-[3a-(a-b)]^2$

$=-(2a+b)^2$.

68. 【解答】解：$(m+n)^2-4(m^2-n^2)+4(m-n)^2=[(m+n)-2(m-n)]^2=(3n-m)^2$.

69. 【解答】解：$(x^2-x)^2-12(x^2-x)+36=(x^2-x-6)^2=(x+2)^2(x-3)^2$

70. 【解答】解：原式$=[4(a+b)]^2+2\times 4(a+b)\times 5(a-b)+[5(a-b)]^2$

$=[4(a+b)+5(a-b)]^2$

$=(9a-b)^2$

71. 【解答】解：立方和公式

原式$=(a^2)^3+(b^2)^3$

$=(a^2+b^2)[(a^2)^2-a^2b^2+(b^2)^2]$

$=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

72. 【解答】解：$x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)^2$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2+x+y)$.

73. 【解答】解：原式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+2(x+y)^2$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2+2x+2y)$.

74. 【解答】解：由$a^3+b^3=72$，得

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=72$，

因为$a+b=6$，所以$a^2-ab+b^2=12$①，

又$a^2+2ab+b^2=36$②，

①$\times 2+$②得$3(a^2+b^2)=60$，

所以$a^2+b^2=20$

75. 【解答】解：原式$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)^3$
$=(a+b)[a^2-ab+b^2+(a+b)^2]$
$=(a+b)(2a^2+ab+2b^2)$.
76. 【解答】解：原式
$=(ax-by+by-cz)\left[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2\right]-(ax-cz)^3$
$=(ax-cz)\left[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2-(ax-cz)^2\right]$
$=(ax-cz)\{(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+[(by-cz)+(ax-cz)][(by-cz)-(ax-cz)]\}$
$=(ax-cz)\left[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-2cz+ax)(by-ax)\right]$
$=(ax-cz)(ax-by)[(ax-by)-(by-cz)-(by-2cz+ax)]$
$=3(ax-cz)(ax-by)(cz-by)$.
亦可直接使用欧拉公式
77. 【解答】解：原式$=[(a+b)^3+c^3]+[(b+c)^3+a^3]+[(a+c)^3+b^3]$
$=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]+(a+b+c)[(b+c)^2-a(b+c)+a^2]+(a+b+c)[(a+c)^2-b(a+c)+b^2]$
$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2+b^2+2bc+c^2-ab-ac+a^2+a^2+2ac+c^2-ab-bc+b^2)$
$=(a+b+c)(3a^2+3b^2+3c^2)$
$=3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.
78. 【解答】证明：
原式$=(a^3+b^3)+(a^2+b^2)c-abc$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a^2+b^2)c-abc$
$=(a+b)(a^2+b^2)-ab(a+b)+(a^2+b^2)c-abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2)-ab(a+b)-abc$；
$\because a+b+c=0$
$\therefore a+b=-c$
$\therefore$原式$=(a+b+c)(a^2+b^2)-ab(a+b)-abc$
$=0\times(a^2+b^2)-ab(-c)-abc$
$=0$.
79. 【解答】解：原式$=(9x)^3-2^3$
$=(9x-2)[(9x)^2+9x\cdot 2+2^2]$
$=(9x-2)(81x^2+18x+4)$.
80. 【解答】解：$9x^5-72x^2y^3$
$=9x^2(x^3-8y^3)$
$=9x^2[x^3-(2y)^3]$
$=9x^2(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.
81. 【解答】解：原式$=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
82. 【解答】解：由已知得$x^3-x-(y^3-y)=0$，
则$(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)=0$，
所以$(x-y)(x^2+xy+y^2-1)=0$，
因为$x\neq y$，所以$x^2+xy+y^2=1$
83. 【解答】解：原式$=x^3-x+xy(x-y)-y^3+y$
$=(x^3-y^3)+xy(x-y)-(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)-(x-y)$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2+xy-1)$
$=(x-y)[(x+y)^2-1]$
$=(x-y)(x+y+1)(x+y-1)$.
84. 【解答】解：$x^6-19x^3y^3-216y^6$
$=(x^3-27y^3)(x^3+8y^3)$
$=(x+2y)(x-3y)(x^2-2xy+4y^2)(x^2+3xy+9y^2)$.
85. 【解答】解：a^6-b^6
$=(a^3)^2-(b^3)^2$
$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$
或$a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$
$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
$=(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
86. 【解答】解：$a^3+b^3+15ab=a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3=125$；
87. 【解答】解：原式$=(x^3-y^3)+(x^2-y^2)+(x-y)$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)+(x-y)$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1)$.
88. 【解答】解：原式$=(x-1)^3-y^3$
$=(x-1-y)[(x-1)^2+(x-1)y+y^2]$
$=(x-y-1)(x^2+xy+y^2-2x-y+1)$.
89. 【解答】解：原式$=(x^3-1)+3x^2+3x+3$
$=(x-1)(x^2+x+1)+3(x^2+x+1)$
$=(x+2)(x^2+x+1)$.
90. 【解答】解：
法一：
原式$=x^3-x-8x+8$
$=x(x^2-1)-8(x-1)$
$=x(x+1)(x-1)-8(x-1)$
$=(x-1)(x^2+x-8)$；
法二：
原式$=x^3-1-9x+9$
$=(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)$
$=(x-1)(x^2+x-8)$；
法三：
原式$=x^3-x^2+x^2-9x+8$
$=x^2(x-1)+(x-1)(x-8)$
$=(x-1)(x^2+x-8)$.
91. 【解答】解：$8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2=(2x+3y)^3$.
92. 【解答】解：原式$=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$
$=(x^3+1)(x^2+x+1)$
$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.
93. 【解答】解：原式$=x^{12}(x^3+1)+x^6(x^3+1)+(x^3+1)$

$=(x^3+1)(x^{12}+x^6+1)$
$=(x^3+1)[(x^6+1)^2-x^6]$
$=(x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$.

94.【解答】解：前三项比完全立方公式少1，四、五、六项的和也比完全立方公式少1．如果把2拆为两个1，那么就可以使两组都成为完全立方．于是

$a^3+3a^2+3a+b^3+3b^2+3b+2$
$=(a^3+3a^2+3a+1)+(b^3+3b^2+3b+1)$
$=(a+1)^3+(b+1)^3$
$=(a+b+2)[(a+1)^2-(a+1)(b+1)+(b+1)^2]$
$=(a+b+2)(a^2-ab+b^2+a+b+1)$.

95.【解答】解：$512a^9-192a^6+24a^3-1=(8a^3-1)^3=(2a-1)^3(4a^2+2a+1)^3$.

96.【解答】解：我们需要引入一个公式．由乘法可得

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$，

即若干项的和的平方等于各项的平方与每两项乘积的2倍的和．

上面的式子可写成

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

$4a^2+9b^2+9c^2-18bc-12ca+12ab$
$=(2a)^2+(3b)^2+(-3c)^2+2(3b)(-3c)+2(2a)(-3c)+2(2a)(3b)$
$=(2a+3b-3c)^2$.

97.【解答】解：原式$=x^2+(2y)^2+(-3z)^2+2x(2y)+2x(-3z)+2(2y)\cdot(-3z)$
$=(x+2y-3z)^2$.

98.【解答】解：由$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$，
$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$，

所以$\begin{cases}3^2=29+2(xy+yz+zx)\\45-3xyz=3[29-(xy+yz+zx)]\end{cases}$

所以$xy+yz+zx=-10$，从而$15-xyz=29+10$，

即$xyz=-24$

99.【解答】解：应用欧拉公式，

原式$=-6(x-y)(x-y+2)$.

提示：由于$(x-y)+(y-x-2)+2=0$，

所以原式$=3(x-y)(y-x-2)\cdot2=6(x-y)(y-x-2)$

100.【解答】解：应用欧拉公式，

原式$=x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)=(x+y-1)(x^2+y^2+1+x+y-xy)$.

模块三　十字相乘法

1.【解答】解：原式$=(x-3)(x+2)$.
2.【解答】解：$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$.
3.【解答】解：$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$.
4.【解答】解：$x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$.
5.【解答】解：原式$=(x+2)(x+4)$.
6.【解答】解：原式$=(x+8)(x-1)$.
7.【解答】解：$x^2+7xy+10y^2=(x+2y)(x+5y)$.
8.【解答】解：$x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$.

9. 【解答】解：原式$=(x-8)(x+2)$.

10. 【解答】解：原式$=x^2-4x-21=(x-7)(x+3)$.

11. 【解答】解：$x^2-9x-22=(x+2)(x-11)$.

12. 【解答】解：$x^2-10x-24=(x+2)(x-12)$.

13. 【解答】解：$x^2-10xy-24y^2=(x+2y)(x-12y)$.

14. 【解答】解：$x^2-11x+24=(x-3)(x-8)$.

15. 【解答】解：$x^2+14x+24=(x+2)(x+12)$.

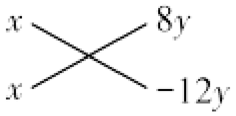
16. 【解答】解：原式$=(x^2-3)(x^2+10)$.

17. 【解答】解：原式$=(m-9)(m+4)$.

18. 【解答】解：$x^2+144y^2-25xy=(x-16y)(x-9y)$.

19. 【解答】解：$8xy+(-12xy)=-4xy$，

∴原式$=(x+8y)(x-12y)$.



20. 【解答】解：$x^2+4x(3-x)-9$

$=x^2+12x-4x^2-9$

$=-3x^2+12x-9$

$=-(3x^2-12x+9)$

$=-3(x^2-4x+3)$

$=-3(x-1)(x-3)$

21. 【解答】解：x^4+3x^2-28

$=(x^2-4)(x^2+7)$

$=(x-2)(x+2)(x^2+7)$.

22. 【解答】解：$x^4+7x^2-30=(x^2-3)(x^2+10)$.

23. 【解答】解：$x^4-7x^2-18=(x-3)(x+3)(x^2+2)$.

24. 【解答】解：原式$=a(x^4-14x^2-32)$，

$=a(x^2+2)(x^2-16)$.

$=a(x^2+2)(x+4)(x-4)$.

25. 【解答】解：原式$=(x^2+a^2)(x^2+1)$.

26. 【解答】解：$x^4-x^2(a^2+1)+a^2$

$=(x^2-a^2)(x^2-1)$

$=(x+1)(x-1)(x+a)(x-a)$

27. 【解答】解：原式$=(m^2)^2-10m^2n^2+9(n^2)^2$

$=(m^2-9n^2)(m^2-n^2)$

$=(m+3n)(m-3n)(m+n)(m-n)$.

28. 【解答】解：$x^4-26x^2y^2+25y^4$

$=(x^2-y^2)(x^2-25y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x+5y)(x-5y)$.

29. 【解答】解：原式$=(a^2-7)(a^2+2)=\left(a+\sqrt{7}\right)\left(a-\sqrt{7}\right)(a^2+2)$.

30. 【解答】解：$x^5-x^3y^2-12xy^4=x(x^2+3y^2)(x+2y)(x-2y)$.

31. 【解答】解：$12x^2+4xy-y^2$
$=(2x+y)(6x-y)$.

32. 【解答】解：$-6x^2+12-x=-(6x^2+x-12)=-(2x+3)(3x-4)$.

33. 【解答】解：$6x^2-7x+2=(2x-1)(3x-2)$.

34. 【解答】解：$6x^2-7xy+2y^2=(2x-y)(3x-2y)$.

35. 【解答】解：$-6x^2+11x-3$
$=-(6x^2-11x+3)$
$=-(3x-1)(2x-3)$.

36. 【解答】解：$2a^2-ab-3b^2=(2a-3b)(a+b)$.

37. 【解答】解：原式$=(3x-y)(x+3y)$.

38. 【解答】解：原式$=(2x+1)(3x-4)$.

39. 【解答】解：$-12x^2-28x+5=-(12x^2+28x-5)=-(2x+5)(6x-1)$

40. 【解答】解：原式$=(2x-1)(3x-5)$.

41. 【解答】解：$5x^2-17x+6=(x-3)(5x-2)$.

42. 【解答】解：原式$=-2y(x^2-4x+3)=-2y(x-1)(x-3)$.

43. 【解答】解：$\frac{1}{3}x^2-xy-6y^2=\frac{1}{3}(x^2-3xy-18y^2)=\frac{1}{3}(x-6y)(x+3y)$

44. 【解答】解：原式$=-(6x^2+11x-7)$
$=-(2x-1)(3x+7)$.

45. 【解答】解：$12x^2-19xy+7y^2=(x-y)(12x-7y)$.
若$a+b+c=0$，那么$ax^2+bx+c=(x-1)(ax-c)$，这个结论很重要.

46. 【解答】解：$3x^2+5x-8=(x-1)(3x+8)$，
此题注意观察题干中的二次三项式的各个系数和刚好等于0，对于一般表达式$ax^2+bx+c=0$而言，若$a+b+c=0$，那么$ax^2+bx+c=(x-1)(ax-c)$，这个结论很重要.

47. 【解答】解：$-x^2-2x+8=-(x^2+2x-8)=-(x+4)(x-2)$

48. 【解答】解：原式$=(7x+4)(9x-2)$.

49. 【解答】解：原式$=(x+3)(5x-3)$.

50. 【解答】解：原式$=4(2x-3)(x-1)$

51. 【解答】解：$12x^2-11x-15=(4x+3)(3x-5)$.

52. 【解答】解：$12x^2-11xy-15y^2=(3x-5y)(4x+3y)$.

53. 【解答】解：$27x^2-33x-20=(9x+4)(3x-5)$.

54. 【解答】解：$6x^2-7x-24=(2x+3)(3x-8)$.

55. 【解答】解：原式$=-(27x^2+12x-32)$
$=-(3x+4)(9x-8)$.

56. 【解答】解：原式$=(x-2y)(5x+14y)$.

57. 【解答】解：$15x^2+28y^2-47xy=(3x-7y)(5x-4y)$.

58. 【解答】解：原式$=(ab-9c)(ab+4c)$.

59. 【解答】解：$-x^2+x+56=(x+7)(8-x)$.

60. 【解答】解：原式$=x^2-20xy+64y^2$
$=(x-16y)(x-4y)$.

61. 【解答】解：$mnx^2+(m^2+n^2)x+mn=(mx+n)(nx+m)$.

62. 【解答】解：根据十字相乘法，

$(a^2+a)^2-8(a^2+a)+12$

$=(a^2+a-2)(a^2+a-6)$

$=(a+2)(a-1)(a+3)(a-2)$.

考点：因式分解-十字相乘法等.

63. 【解答】解：$kx^2+(2k-3)x+k-3=(x+1)(kx+k-3)$.

64. 【解答】解：$(a^2-6)^2-4a(a^2-6)-5a^2=(a-6)(a+1)(a+3)(a-2)$.

65. 【解答】解：原式$=[(k+1)x-k+1](x-2)$

$=(kx+x-k+1)(x-2)$.

66. 【解答】解：$2m^3n+6m^2n+4mn$

$=2mn(m^2+3m+2)$

$=2mn(m+2)(m+1)$.

67. 【解答】解：原式$=3a^3(a^2-4a+3)$

$=3a^3(a-1)(a-3)$.

68. 【解答】解：原式=$(mx-n)(x-1)$.

69. 【解答】解：原式$=(mx-2m+3)(x-1)$.

70. 【解答】解：

$$\begin{array}{ccc} abx & \times & c \\ cx & & ab \end{array}$$

$c^2x+a^2b^2x=(a^2b^2+c^2)x$，

原式$=(abx+c)(cx+ab)$.

71. 【解答】解：$abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)$

$=[ax+(a-b)][bx-(a+b)]$

$=(ax+a-b)(bx-a-b)$.

72. 【解答】解：原式$=x^2-(6p+5q)x+(3p+2q)(3p+3q)$

$=(x-3p-2q)(x-3p-3q)$.

73. 【解答】解：原式$=(x-y)^2+5(x-y)+(-5)\times 10$

$=(x-y+10)(x-y-5)$.

74. 【解答】解：

原式$=(x^2+x+6)(x^2+x-2)$

$=(x+2)(x-1)(x^2+x+6)$.

75. 【解答】解：原式$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+4)$

$=(x+2)^2(x+5)(x-1)$.

76. 【解答】解：原式$=(a^2-3a-2)(a^2-3a-4)$

$=(a^2-3a-2)(a-4)(a+1)$.

77. 【解答】解：$(2x-y)^2-4(2x-y)-12$

$=(2x-y+2)(2x-y-6)$.

78. 【解答】$(a-2b)^2-8(a-2b)+12$

$=[(a-2b)-2][(a-2b)-6]$

$=(a-2b-2)(a-2b-6)$.

79. 【解答】解：$5+7(a+1)-6(a+1)^2$

$=[5-3(a+1)][1+2(a+1)]$

$=(2-3a)(2a+3)$.

80. 【解答】解：$(x+y)^2-4(x+y)-12$

$=(x+y+2)(x+y-6)$.

81. 【解答】解：原式$=(x^2-4x-12)(x^2-4x+4)$

$=(x+2)(x-6)(x-2)^2$.

82. 【解答】解：$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$.

83. 【解答】解：将$x+y$、$x-y$看作整体，则

原式$=[4(x+y)+(x-y)][3(x+y)+2(x-y)]$

$=(5x+3y)(5x+y)$.

84. 【解答】解：$(x^2-x)^2-12(x^2-x)+36=(x^2-x-6)^2=(x+2)^2(x-3)^2$

85. 【解答】解：原式$=(m^2-2m-3)(m^2-2m+1)$

$=(m-3)(m+1)(m-1)^2$.

86. 【解答】原式$=[2(x^2+6x+1)+(x^2+1)][(x^2+6x+1)+2(x^2+1)]$

$=(3x^2+6x+3)(3x^2+12x+3)$

$=9(x+1)^2(x^2+4x+1)$.

87. 【解答】解：$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$

$=[(x^2+x+4)+5x][(x^2+x+4)+3x]$

$=(x^2+6x+4)(x^2+4x+4)$

$=(x^2+6x+4)(x+2)^2$.

88. 【解答】解：$(x^2-3)^2+2(x^2-3)(x-3)+(x-3)^2$

$=(x^2+x-6)^2=(x-2)^2(x+3)^2$.

89. 【解答】解：$x^2-(p^2+q^2)x-pq(p+q)(p-q)=(x-p^2-pq)(x-q^2+pq)$.

90. 【解答】

〈 法一 〉

解：原式$=4x^2-8x+4-4+4x^2+1+2x+x^2$

$=9x^2-6x+1$

$=(3x-1)^2$.

〈 法二 〉解：原式$=4(x-1)^2+4(x-1)(x+1)+(x+1)^2$

$=[2(x-1)+(x+1)]^2$

$=(3x-1)^2$.

91. 【解答】解：原式$=y(y+1)x^2+(2y^2+2y+1)x+y(y+1)$

$=[yx+(y+1)][(y+1)x+y]$

$=(yx+y+1)(yx+x+y)$

92. 【解答】解：原式$=(x^2+2x+1)^2+(x^4-2x^2+1)+(x^2-2x+1)^2$

$=3x^4+10x^2+3$

$=(3x^2+1)(x^2+3)$.

93. 【解答】解：$(a+b)^2ab-(a+b)^2+1$
$=[a(a+b)-1][b(a+b)-1]$
$=(a^2+ab-1)(ab+b^2-1)$.
94. 【解答】解：
法1：这是x的二次式，”常数项“可分解为$-3a^2+10ab-3b^2=-(3a-b)(a-3b)$
再对整个式子运用十字相乘
$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2=(x+3a-b)(x-a+3b)$
法2：把$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2$看成$x$、$a$、$b$的二次齐次式，对它采用双十字相乘
$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2=(x-a+3b)(x+3a-b)$.
95. 【解答】解：$6x^2+xy-2y^2+2x-8y-8$
$=6x^2+(y+2)x-(2y^2+8y+8)$
$=6x^2+(y+2)x-2(y+2)^2$
$=(2x-y-2)(3x+2y+4)$.
96. 【解答】解：原式$=(x+3)(4x^2-12x+5)=(x+3)(2x-1)(2x-5)$.
97. 【解答】解：$x^2+2xy+y^2+x+y-2$
$=(x+y)^2+(x+y)-2$
$=(x+y+2)(x+y-1)$.
98. 【解答】解：原式$=(2x-mx-m)(x-1)$.
99. 【解答】解：$x^2+(a+b+c)x+(a+b)c=(x+a+b)(x+c)$，利用十字相乘思想.
100. 【解答】解：将原式展开并写成关于a的二次三项式：$6a^2+(11b+4)a+3b^2-b-2$，$3b^2-b-2$可以分解为：$(3b+2)(b-1)$，再次运用十字相乘法可知原式$=(2a+3b+2)(3a+b-1)$.

模块四　分组分解法

1. 【解答】解：原式$=(a^2-ab)+(a-b)$
$=a(a-b)+(a-b)$
$=(a-b)(a+1)$
2. 【解答】解：原式$=(ab-ac)+(bc-b^2)$
$=a(b-c)-b(b-c)$
$=(b-c)(a-b)$
3. 【解答】解：$am+bm+a+b$
$=m(a+b)+(a+b)$
$=(a+b)(m+1)$
4. 【解答】$xy-x-y+1$
$=x(y-1)-(y-1)$
$=(x-1)(y-1)$
5. 【解答】解：原式$=(x^2-xy)+(3y-3x)$
$=x(x-y)+3(y-x)$
$=(x-y)(x-3)$
6. 【解答】解：原式$=(abx^2+b^2x)+(ab+a^2x)$
$=bx(ax+b)+a(b+ax)$
$=(ax+b)(bx+a)$

7. 【解答】解：$5x^3-15x^2-x+3$

$=5x^2(x-3)-(x-3)$

$=(5x^2-1)(x-3)$

或$5x^3-15x^2-x+3$

$=x(5x^2-1)-3(5x^2-1)$

$=(5x^2-1)(x-3)$

8. 【解答】解：x^3+9+3x^2+3x

$=(x^3+3x^2)+(3x+9)$

$=x^2(x+3)+3(x+3)$

$=(x+3)(x^2+3)$

9. 【解答】解：

法1：$x^4+x^3+x^2+x$

$=x^3(x+1)+x(x+1)$

$=x(x+1)(x^2+1)$

法2：$x^4+x^3+x^2+x$

$=(x^4+x)+(x^3+x^2)$

$=x(x^3+1)+x^2(x+1)$

$=x(x+1)(x^2-x+1)+x^2(x+1)$

$=x(x+1)[(x^2-x+1)+x]$

$=x(x+1)(x^2+1)$

法3：$x^4+x^3+x^2+x$

$=x(x^3+x^2+x+1)$

$=x[x^2(x+1)+(x+1)]$

$=x(x+1)(x^2+1)$

10. 【解答】解：原式$=m(5a^2-15a+3ab-9b)$

$=m[5a(a-3)+3b(a-3)]$

$=m(a-3)(5a+3b)$

11. 【解答】解：$x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1$

$=x^2z(y^2z-1)-(y^2z-1)$

$=(y^2z-1)(x^2z-1)$

12. 【解答】解：x^2-y^2-x+y

$=(x^2-y^2)-(x-y)$

$=(x+y)(x-y)-(x-y)$

$=(x-y)(x+y-1)$

13. 【解答】解：原式$=1-(x^2-2xy+y^2)$

$=1-(x-y)^2$

$=(1+x-y)(1-x+y)$

14. 【解答】解：原式$=x^2-(y^2-2y+1)$

$=x^2-(y-1)^2$

$=(x+y-1)(x-y+1)$

15. 【解答】解：原式$=(x^2-9y^2)-(x+3y)$

$=(x+3y)(x-3y)-(x+3y)$

$=(x+3y)(x-3y-1)$

16. 【解答】解：a^2-b^2-2b-1

$=a^2-(b^2+2b+1)$

$=a^2-(b+1)^2$

$=(a+b+1)(a-b-1)$.

17. 【解答】解：$4a^2+4ab+b^2-1$

$=(2a+b)^2-1$

$=(2a+b-1)(2a+b+1)$

18. 【解答】解：原式$=(x-2y)^2-2^2=(x-2y+2)(x-2y-2)$

19. 【解答】解：$x^2-y^2-z^2-2yz$

$=x^2-(y^2+z^2+2yz)$

$=x^2-(y+z)^2$

$=(x+y+z)(x-y-z)$

20. 【解答】解：$49+14x+x^2-y^2$

$=(49+14x+x^2)-y^2$

$=(x+7)^2-y^2$

$=(x+y+7)(x-y+7)$

21. 【解答】解：$9m^2-4x^2+4xy-y^2$

$=9m^2-(4x^2-4xy+y^2)$

$=(3m)^2-(2x-y)^2$

$=(3m+2x-y)(3m-2x+y)$

22. 【解答】解：原式$=(x^3+x^2y)-(xy^2+y^3)$

$=x^2(x+y)-y^2(x+y)$

$=(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x+y)^2(x-y)$

23. 【解答】解：x^5-x^4-x+1

$=x^4(x-1)-(x-1)$

$=(x^4-1)(x-1)$

$=(x^2+1)(x^2-1)(x-1)$

$=(x^2+1)(x+1)(x-1)(x-1)$

$=(x^2+1)(x+1)(x-1)^2$

24. 【解答】解：原式$=a(a^2-b^2+a^2b-ab^2)$

$=a[(a-b)(a+b)+ab(a-b)]$

$=a(a-b)(a+ab+b)$

25. 【解答】解：$a^2b^3-abc^2d+ab^2cd-c^3d^2$

$=ab(ab^2-c^2d)+cd(ab^2-c^2d)$

$=(ab+cd)(ab^2-c^2d)$

26. 【解答】解：原式$=(32ac^2-48ax^2)+(15cx^2-10c^3)$

$=16a(2c^2-3x^2)+5c(3x^2-2c^2)$

$=(2c^2-3x^2)(16a-5c)$

27. 【解答】解：原式$=45am^2-5a(4x^2-4xy+y^2)$

$=45am^2-5a(2x-y)^2$

$=5a[9m^2-(2x-y)^2]$

$=5a(3m-2x+y)(3m+2x-y)$

28. 【解答】解：$x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2+z^4$

$=x^2(y^2-z^2)-z^2(y^2-z^2)$

$=(y^2-z^2)(x^2-z^2)$

$=(y-z)(y+z)(x-z)(x+z)$

29. 【解答】解：$ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$
$=(ac^2-ad^2)+(bd^2-bc^2)$
$=a(c^2-d^2)-b(c^2-d^2)$
$=(a-b)(c^2-d^2)=(a-b)(c+d)(c-d)$
30. 【解答】解：原式$=x^5-x^4y+y^5-xy^4$
$=x^4(x-y)-y^4(x-y)$
$=(x-y)(x^4-y^4)$
$=(x-y)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$
$=(x-y)^2(x+y)(x^2+y^2)$
31. 【解答】解：$a(1-b)^2-1+2b-b^2$
$=a(1-b)^2-(1-b)^2$
$=(1-b)^2(a-1)$
32. 【解答】解：原式$=x(x^2-3x+2)-6$
$=x^3-3x^2+2x-6$
$=x^2(x-3)+2(x-3)$
$=(x-3)(x^2+2)$
33. 【解答】解：原式$=x^2-y^2+4y-4$
$=x^2-(y^2-4y+4)$
$=x^2-(y-2)^2$
$=(x-y+2)(x+y-2)$
34. 【解答】解：$1+(b-a^2)x^2-abx^3$
$=1+bx^2-a^2x^2-abx^3$
$=(1-a^2x^2)+(bx^2-abx^3)$
$=(1+ax)(1-ax)+bx^2(1-ax)$
$=(1-ax)(1+ax+bx^2)$
35. 【解答】解：$x(x-1)-y(y-1)$
$=x^2-x-y^2+y$
$=(x^2-y^2)-(x-y)$
$=(x+y)(x-y)-(x-y)$
$=(x-y)(x+y-1)$
36. 【解答】解：原式$=x^2+x+y^2-y-2xy$
$=x^2-2xy+y^2+x-y$
$=(x-y)^2+(x-y)$
$=(x-y)(x-y+1)$
37. 【解答】解：原式$=x^2+xz-y^2-yz$
$=(x^2-y^2)+(xz-yz)$
$=(x+y)(x-y)+z(x-y)$
$=(x-y)(x+y+z)$
38. 【解答】解：原式$=4a^2+4ac+c^2-(b^2+9d^2-6bd)$
$=(2a+c)^2-(b-3d)^2$
$=(2a+c+b-3d)(2a+c-b+3d)$
39. 【解答】解：原式$=(m-2)^2-(n^2+2n+1)$
$=(m-2)^2-(n+1)^2$
$=(m-2+n+1)(m-2-n-1)$
$=(m+n-1)(m-n-3)$
40. 【解答】解：$(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$

$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)+(a+b+c+d)(a+c-b-d)$

$= (a+b+c+d)(a+b-c-d+a+c-b-d)$

$= 2(a-d)(a+b+c+d)$

41. 【解答】解：原式$= (abc+ab+ac+a)+(bc+b+c+1)$

$= a(bc+b+c+1)+(bc+b+c+1)$

$= [(bc+b)+(c+1)](a+1)$

$= [b(c+1)+(c+1)](a+1)$

$= (a+1)(b+1)(c+1)$

42. 【解答】解：$x^4+x^3y+xz^3+yz^3$

$= x^3(x+y)+z^3(x+y)$

$= (x+y)(x+z)(x^2-xz+z^2)$

43. 【解答】解：原式$= (ax^3+a)+(x+1)$

$= a(x^3+1)+(x+1)$

$= a(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)$

$= (x+1)[a(x^2-x+1)+1]$

$= (x+1)(ax^2-ax+a+1)$

44. 【解答】解：$x^2+2x-15-ax-5a$

$= (x+5)(x-3)-a(x+5)$

$= (x+5)(x-3-a)$

45. 【解答】解：原式$= (2m^2-mn-n^2)+(2m+n)$

$= (2m+n)(m-n)+(2m+n)$

$= (2m+n)(m-n+1)$

46. 【解答】解：$x^3-2x^2-x+2+x^5-2x^4$

$= (x^5-2x^4)+(x^3-2x^2)-(x-2)$

$= x^4(x-2)+x^2(x-2)-(x-2)$

$= (x-2)(x^4+x^2-1)$

47. 【解答】解：原式$= (x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)$

$= (x^2+1)^2+2x(x^2+1)$

$= (x^2+1)(x^2+1+2x)$

$= (x^2+1)(x+1)^2$

48. 【解答】解：原式$= x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$= (x^3+1)(x^2+x+1)$

$= (x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

49. 【解答】解：原式$= x^2+y^2+m^2-2xy+2my-2mx$

$= x^2+y^2-2xy+2my-2mx+m^2$

$= (x-y)^2-2m(x-y)+m^2$

$= (x-y-m)^2$

50. 【解答】解：原式$= (x^3-y^3)+(x^2-y^2)+(x-y)$

$= (x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)+(x-y)$

$= (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1)$

模块五　　拆添项法

1. 【解答】解：$x^4+64=(x^4+16x^2+64)-16x^2$

$= (x^2+8)^2-(4x)^2$

$= (x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$

2. 【解答】解：$x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2$

$=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$

3. 【解答】解：$x^2-2ax-b^2-2ab$

$=x^2-2ax+a^2-a^2-b^2-2ab$

$=(x-a)^2-(a+b)^2$

$=(x-a+a+b)(x-a-a-b)$

$=(x+b)(x-2a-b)$

4. 【解答】解：$x^2-120x+3456$

$=x^2-2\times60x+60^2-60^2+3456$

$=(x-60)^2-144$

$=(x-60)^2-12^2$

$=(x-60+12)(x-60-12)$

$=(x-48)(x-72)$

5. 【解答】解：$x^2-140x+4756$

$=x^2-2\times70x+70^2-70^2+4756$

$=(x-70)^2-144=(x-70)^2-12^2$

$=(x-70+12)(x-70-12)$

$=(x-58)(x-82)$

6. 【解答】解：$(x-1)(x-3)+1$

$=x^2-4x+3+1$

$=x^2-4x+4$

$=(x-2)^2$

7. 【解答】解：原式$=m^2-6m+9-5$

$=(m-3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2$

$=\left(m-3+\sqrt{5}\right)\left(m-3-\sqrt{5}\right)$

8. 【解答】解：原式$=x^4+18x^2y^2+81y^4-25x^2y^2$

$=(x^2+9y^2)^2-(5xy)^2$

$=(x^2+9y^2+5xy)(x^2+9y^2-5xy)$

9. 【解答】解：$x^4+14x^2y^2+81y^4$

$=x^4+18x^2y^2+81y^4-4x^2y^2$

$=(x^2+9y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+9y^2-2xy)(x^2+9y^2+2xy)$

10. 【解答】解：$a^4+a^2b^2+b^4$

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

11. 【解答】解：$x^4+x^2y^2+y^4$

$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

12. 【解答】解：x^4-23x^2+1

$=x^4+2x^2+1-25x^2$

$=(x^2+1)^2-25x^2$

$=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$

13. 【解答】解：x^4-3x^2+1

$=x^4-2x^2+1-x^2$

$=(x^2-1)^2-x^2$

$=(x^2-1-x)(x^2-1+x)$

14. 【解答】解：原式$=x^4+8x^2y^2+16y^4-8x^2y^2$

$=(x^2+4y^2)^2-(2\sqrt{2}xy)^2$

$=\left(x^2+4y^2+2\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+4y^2-2\sqrt{2}xy\right)$

15. 【解答】解：原式$=(a^2)^2+(8b^2)^2$

$=(a^2)^2+(8b^2)^2+2a^2\cdot 8b^2-16a^2b^2$

$=(a^2+8b^2)^2-(4ab)^2$

$=(a^2+8b^2+4ab)(a^2+8b^2-4ab)$

16. 【解答】解：原式$=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2$

$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$

$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$

17. 【解答】解：a^4+a^2+1

$=a^4+2a^2+1-a^2$

$=(a^2+1)^2-a^2$

$=(a^2+1+a)(a^2+1-a)$

18. 【解答】解：原式$=a^8+2a^4+1-a^4$

$=(a^4+1)^2-(a^2)^2$

$=(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)$

$=(a^4+2a^2+1-a^2)(a^4-a^2+1)$

$=[(a^2+1)^2-a^2](a^4-a^2+1)$

$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$

19. 【解答】解：$a^{16}+a^8+1$

$=a^{16}+2a^8+1-a^8$

$=(a^8+1)^2-(a^4)^2$

$=(a^8+a^4+1)(a^8-a^4+1)$

$=(a^8+2a^4+1-a^4)(a^8-a^4+1)$

$=[(a^4+1)^2-(a^2)^2](a^8-a^4+1)$

$=(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)(a^8-a^4+1)$

$=(a^4+2a^2+1-a^2)(a^4-a^2+1)(a^8-a^4+1)$

$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)(a^8-a^4+1)$

20. 【解答】解：y^2+4y-x^2+2x+3

$=(y^2+4y+4)-(x^2-2x+1)$

$=(y+2)^2-(x-1)^2$

$=(y+2-x+1)(y+2+x-1)$

$=(y-x+3)(y+x+1)$

21. 【解答】解：原式$=(4x^2-4x+1)-(y^2-4y+4)$

$=(2x-1)^2-(y-2)^2$

$=(2x-1+y-2)(2x-1-y+2)$

$=(2x+y-3)(2x-y+1)$

22. 【解答】解：原式$=a^2-2ab+b^2-4b^2+12b-9$

$=(a^2-2ab+b^2)-(4b^2-12b+9)$

$=(a-b)^2-(2b-3)^2$

$= (a+b-3)(a-3b+3)$

23. 【解答】解：原式$= x^2+y^2-2xy-x^2y^2-2xy-1$

$= x^2+y^2-2xy-(x^2y^2+2xy+1)$

$= (x-y)^2-(xy+1)^2$

$= (x+xy-y+1)(x-xy-y-1)$

24. 【解答】解：原式$= x^3-x-2x-2$

$= (x^3-x)-2(x+1)$

$= x(x-1)(x+1)-2(x+1)$

$= (x+1)(x^2-x-2)$

$= (x+1)^2(x-2)$

25. 【解答】解：原式$= x^3-x+3x+3$

$= x(x^2-1)+3(x+1)$

$= x(x+1)(x-1)+3(x+1)$

$= (x+1)(x^2-x+3)$

26. 【解答】解：$x^3-19x-30$

$= x^3-4x-15x-30$

$= x(x+2)(x-2)-15(x+2)$

$= (x+2)(x^2-2x-15)$

$= (x+2)(x+3)(x-5)$

27. 【解答】解：法一：

原式$= x^3-x-8x+8$

$= x(x^2-1)-8(x-1)$

$= x(x+1)(x-1)-8(x-1)$

$= (x-1)(x^2+x-8)$

法二：

原式$= x^3-1-9x+9$

$= (x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)$

$= (x-1)(x^2+x-8)$

法三：

原式$= x^3-x^2+x^2-9x+8$

$= x^2(x-1)+(x-1)(x-8)$

$= (x-1)(x^2+x-8)$

28. 【解答】解：x^3-2x^2+1

$= x^3-x^2-x^2+1$

$= x^2(x-1)-(x+1)(x-1)$

$= (x-1)(x^2-x-1)$

29. 【解答】解：$3x^3+2x-5$

$= 3x^3-3x+5x-5$

$= 3x(x+1)(x-1)+5(x-1)$

$= (x-1)(3x^2+3x+5)$

30. 【解答】解：原式$= x^3+2x^2+x-5x-5$

$= x(x+1)^2-5(x+1)$

$= (x+1)(x^2+x-5)$

31. 【解答】解：x^3-x^2-5x+6

$= x^3-2x^2+x^2-5x+6$

$=x^2(x-2)+(x-2)(x-3)$

$=(x-2)(x^2+x-3)$

32. 【解答】解：原式$=(x^3+x^2)+(x^2+x)-(6x+6)$

$=x^2(x+1)+x(x+1)-6(x+1)$

$=(x+1)(x+3)(x-2)$

33. 【解答】解：原式$=4x^3+2x^2-6x^2-3x-6x-3$

$=2x^2(2x+1)-3x(2x+1)-3(2x+1)$

$=(2x^2-3x-3)(2x+1)$

34. 【解答】解：$x^3+9x^2+26x+24$

$=(x^3+7x^2+12x)+(2x^2+14x+24)$

$=x(x^2+7x+12)+2(x^2+7x+12)$

$=(x+2)(x^2+7x+12)$

$=(x+2)(x+3)(x+4)$

35. 【解答】解：原式$=(x^3-1)+3x^2+3x+3$

$=(x-1)(x^2+x+1)+3(x^2+x+1)$

$=(x+2)(x^2+x+1)$

36. 【解答】解：原式$=6x^3-5x^2-4x-8x-4$

$=x(6x^2-5x-4)-4(2x+1)$

$=x(2x+1)(3x-4)-4(2x+1)$

$=(2x+1)(3x^2-4x-4)$

$=(2x+1)(3x+2)(x-2)$

37. 【解答】解：原式$=(a^3+3a^2+3a+1)+(b^3+3b^2+3b+1)$

$=(a+1)^3+(b+1)^3$

$=(a+1+b+1)[(a+1)^2-(a+1)(b+1)+(b+1)^2]$

$=(a+b+2)(a^2+2a+1-ab-a-b-1+b^2+2b+1)$

$=(a+b+2)(a^2+b^2-ab+a+b+1)$

38. 【解答】解：原式$=x^4-1-2x-2$

$=(x^2+1)(x^2-1)-(2x+2)$

$=(x^2+1)(x+1)(x-1)-2(x+1)$

$=(x+1)[(x^2+1)(x-1)-2]$

$=(x+1)(x^3-x^2+x-3)$

39. 【解答】解：原式$=x^4+2x^2+1-x^2-a^2-2ax$

$=(x^2+1)^2-(x+a)^2$

$=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)$

40. 【解答】解法一：

原式$=(x^4+x^3-x^2)+(3x^2+3x-3)$

$=x^2(x^2+x-1)+3(x^2+x-1)$

$=(x^2+3)(x^2+x-1)$

解法二：

原式$=(x^4+3x^2)+(x^3+3x)-(x^2+3)$

$=(x^2+3)(x^2+x-1)$

41. 【解答】解：原式$=(x^4-x^2)+(2x^3-2x)-(8x^2-8)$

$=x^2(x^2-1)+2x(x^2-1)-8(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^2+2x-8)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+2x+1-9)$

$=(x+1)(x-1)(x+4)(x-2)$

42. 【解答】解：原式$=x^4-x^3+x^2+2x^2-2x+2$

$=x^2(x^2-x+1)+2(x^2-x+1)$

$=(x^2+2)(x^2-x+1)$

43. 【解答】解：原式$=(9x^4+9x^2)-3(x^3+x)-2x^2-2$

$=9x^2(x^2+1)-3x(x^2+1)-2(x^2+1)$

$=(x^2+1)(9x^2-3x-2)$

$=(x^2+1)(3x+1)(3x-2)$

44. 【解答】解：原式$=(2x^4-4x^2+2)+(3x^3-3x)-2x^2$

$=2(x^4-2x^2+1)+(3x^3-3x)-2x^2$

$=2(x^2-1)^2+3x(x^2-1)-2x^2$

$=[2(x^2-1)-x][(x^2-1)+2x]$

$=(2x^2-2-x)(x^2-1+2x)$

45. 【解答】解：a^5+a^4+1

$=a^5+a^4+a^3+1-a^3$

$=a^3(a^2+a+1)-(a-1)(a^2+a+1)$

$=(a^2+a+1)(a^3-a+1)$

46. 【解答】解：x^5+x+1

$=x^5-x^2+x^2+x+1$

$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

47. 【解答】解：原式$=x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x+x-1$

$=x^4(x-1)+x^3(x-1)+x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1)$

$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

48. 【解答】解：原式$=x^7+x^6+x^5+1-x^6$

$=x^5(x^2+x+1)+(1-x)(1+x+x^2)(1+x^3)$

$=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1)$

49. 【解答】解：原式$=[(a-b)^2]^2+[(a+b)^2]^2+2(a^2-b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

$=[(a-b)^2+(a+b)^2]^2-(a^2-b^2)^2$

$=[(a-b)^2+(a+b)^2+a^2-b^2][(a-b)^2+(a+b)^2-a^2+b^2]$

$=(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)$

50. 【解答】解：

原式$=(1+y)^2+2(1+y)x^2(1-y)+x^4(1-y)^2-2(1+y)x^2(1-y)-2x^2(1+y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-2x^2+2x^2y^2-2x^2-2x^2y^2$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$

$=[(1+y)+x^2(1-y)+2x][(1+y)+x^2(1-y)-2x]$

$=[(x^2+2x+1)+y-yx^2][(x^2-2x+1)+y-yx^2]$

$=[(x+1)^2+y(1-x^2)][(x-1)^2+y(1-x^2)]$

$=(x+1)[(x+1)+y(1-x)](x-1)[(x-1)-y(x+1)]$

$=(x-1)(x+1)(x+1+y-xy)(x-1-yx-y)$

模块六　换元法

1. 【解答】解：设$x^2-4x=y$，则

$(x^2-4x+2)(x^2-4x+6)+4$

$= (y+2)(y+6)+4$
$= y^2+8y+16$
$= (y+4)^2$
$= (x^2-4x+4)^2$
$= [(x-2)^2]^2$
$= (x-2)^4$

2. 【解答】解：设$x^2+2x=y$
原式$= y(y+2)+1$
$= y^2+2y+1$
$= (y+1)^2$
$= (x^2+2x+1)^2$
$= (x+1)^4$

3. 【解答】解：设$2x-y=t$
则原式$= t^2-2t-3=(t-3)(t+1)$
∴原式$= (2x-y-3)(2x-y+1)$

4. 【解答】解：设$t=x^2+x+1$
则原式$= t(t+2)-8=t^2+2t-8=(t-2)(t+4)$
∴原式$= (x^2+x-1)(x^2+x+5)$

5. 【解答】解：设$x^2+x=\mathrm{t}$
则原式$= (t+1)(t+2)-6=t^2+3t-4=(t-1)(t+4)$
∴原式$= (x^2+x-1)(x^2+x+4)$

6. 【解答】解：设$a^2+3a-2=m$
则原式$= m(m+6)-16$
$= m^2+6m-16$
$= (m+8)(m-2)$
$= (a^2+3a+6)(a^2+3a-4)$
$= (a^2+3a+6)(a+4)(a-1)$

7. 【解答】解：设$x^2+2x+5=t$
则$(x^2+2x+5)^2+3(x^2+2x+5)+2$
$= t^2+3t+2$
$= (t+1)(t+2)$
∴原式$= (x^2+2x+6)(x^2+2x+7)$

8. 【解答】解：设$x^2+4x+8=t$
则原式 $= t^2+3t+2=(t+1)(t+2)$
$= (x^2+4x+9)(x^2+4x+10)$

9. 【解答】解：设$y=x^2+x$
原式$= (y+1)(y+2)-12$
$= y^2+3y+2-12$
$= y^2+3y-10$
$= (y+5)(y-2)$
$= (x^2+x+5)(x^2+x-2)$
$= (x-1)(x+2)(x^2+x+5)$

10. 【解答】解：
方法1：将x^2+5x看作一个整体，设$x^2+5x=t$，则

原式$=(t+2)(t+3)-12$

$=t^2+5t-6$

$=(t-1)(t+6)$

$=(x^2+5x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x+2)(x+3)(x^2+5x-1)$

方法2：将x^2+5x+2看作一个整体，设$x^2+5x+2=t$，则

原式$=t(t+1)-12$

$=t^2+t-12$

$=(t-3)(t+4)$

$=(x^2+5x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x+2)(x+3)(x^2+5x-1)$

方法3：直接把x^2+5x看作一个整体，将原式展开，分组分解即可，则

原式$=(x^2+5x)^2+5(x^2+5x)-6$

$=(x^2+5x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x+2)(x+3)(x^2+5x-1)$

11. 【解答】解：

方法一：令$x^2-x-4=y$，则

原式$=(y+1)(y-1)-3$

$=(y-2)(y+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

方法二：令$x^2-x-3=y$，则

原式$=y(y-2)-3$

$=y^2-2y-3$

$=(y+1)(y-3)$

$=(x^2-x-3+1)(x^2-x-3-3)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

12. 【解答】解：设$x^2+4x+8=u$

原式$=u^2+3xu+2x^2$

$=(u+x)(u+2x)$

$=(x^2+4x+8+x)(x^2+4x+8+2x)$

$=(x^2+5x+8)(x^2+6x+8)$

$=(x+2)(x+4)(x^2+5x+8)$

13. 【解答】解：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

令$x^2+5x+4=u$

$\therefore$上式$=u(u+2)+1=(u+1)^2=(x^2+5x+5)^2$

即$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2$

14. 【解答】解：原式$=[(a-1)(a-4)][(a-2)(a-3)]-15$

$=(a^2-5a+4)(a^2-5a+6)-15$

设$t=a^2-5a+5$

则原式$=(t-1)(t+1)-15=t^2-16=(t-4)(t+4)$

$=(a^2-5a+5-4)(a^2-5a+5+4)$

$=(a^2-5a+1)(a^2-5a+9)$

15. 【解答】解：原式$=[(a-1)(a-4)][(a-2)(a-3)]-24$

$=(a^2-5a+4)(a^2-5a+6)-24$

设$t=a^2-5a+5$

则原式$=(t-1)(t+1)-24=t^2-25=(t-5)(t+5)$

∴原式$=(a^2-5a)(a^2-5a+10)=a(a-5)(a^2-5a+10)$

16. 【解答】解：原式$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

令$x^2+8x+11=t$，则

原式$=(t-4)(t+4)+15$

$=(t-1)(t+1)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$

17. 【解答】解：原式$=(6x-1)(4x-2)(6x+2)(4x-4)+25$

$=(24x^2-16x+2)(24x^2-16x-8)+25$

设$24x^2-16x+2=t$

原式$=t(t-10)+25$

$=(t-5)^2$

$=(24x^2-16x-3)^2$

18. 【解答】解：$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$

$=4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$

$=4[(x^2+16x+60)+x](x^2+16x+60)-3x^2$

设$x^2+16x+60=u$

原式$=4u^2+4xu-3x^2$

$=(2u-x)(2u+3x)$

$=[2(x^2+16x+60)-x][2(x^2+16x+60)+3x]$

$=(2x^2+31x+120)(2x^2+35x+120)$

$=(2x+15)(x+8)(2x^2+35x+120)$

19. 【解答】解：设$x^4+3x^2+1=y$

则原式$=(y-7x^2)y+10x^4$

$=y^2-7x^2y+10x^4$

$=(y-2x^2)(y-5x^2)$

$=(x^4+3x^2+1-2x^2)(x^4+3x^2+1-5x^2)$

$=(x^4+x^2+1)(x^4-2x^2+1)$

$=(x^4+x^2+1)(x^2-1)^2$

$=(x^4+2x^2+1-x^2)(x^2-1)^2$

$=[(x^2+1)^2-x^2](x^2-1)^2$

$=(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

20. 【解答】解：原式$=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90$

$=[(x+1)(2x+3)][(x+2)(2x+1)]-90$

$=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90$.

令$y=2x^2+5x+2$

则原式$=y(y+1)-90$

$=y^2+y-90$

$=(y+10)(y-9)$

$=(2x^2+5x+12)(2x^2+5x-7)$

$=(2x^2+5x+12)(2x+7)(x-1)$

21. 【解答】解：原式$=[(2a+5)(a-3)][(a+3)(2a-7)]-91$

$=(2a^2-a-15)(2a^2-a-21)-91$

设$2a^2-a-15=x$

则原式$=x(x-6)-91$

$=x^2-6x-91$

$=(x-13)(x+7)$

$=(2a^2-a-28)(2a^2-a-8)$

$=(a-4)(2a+7)(2a^2-a-8)$

22. 【解答】解：原式$=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-72$

$=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-72$

$y=2x^2+5x$

原式$=(y+3)(y+2)-72$

$=y^2+5y-66$

$=(y+11)(y-6)$

$=(2x^2+5x+11)(2x^2+5x-6)$

23. 【解答】解：原式$=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+12$

$=[(x+2)(x+8)][(x+4)(x+6)]+12$

$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+12,$

设$t=x^2+10x+20$

则原式$=(t-4)(t+4)+12=t^2-4=(t+2)(t-2),$

∴原式$=(x^2+10x+22)(x^2+10x+18)$

24. 【解答】解：

原式$=[(x+1)(3x-1)][(2x+1)(4x-1)]+6x^4$

$=(3x^2+2x-1)(8x^2+2x-1)+6x^4$

设$A=3x^2+2x-1$

∴原式$=A(A+5x^2)+6x^4=A^2+5x^2\cdot A+6x^4=(A+2x^2)(A+3x^2)$

∴原式$=(5x^2+2x-1)(6x^2+2x-1)$

25. 【解答】解：设$x+y=A$，$xy=B$

则原式$=A^3+2B(1-A)-1=(A-1)(A^2+A+1)+2B(1-A)$

$=(A-1)(A^2+A+1-2B)$

$=(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1-2xy)$

$=(x+y-1)(x^2+y^2+x+y+1)$

26. 【解答】解：$(3x^2-x-1)+(x^2+2x-3)=4x^2+x-4$

故可设$3x^2-x-1=A$，$x^2+2x-3=B$

则$4x^2+x-4=A+B$

故原式$=4AB-(A+B)^2$

$=-A^2-B^2+2AB$

$=-(A-B)^2$

$=-[(3x^2-x-1)-(x^2+2x-3)]^2$

$=-(2x^2-3x+2)^2$

27. 【解答】解：如果把x^3记为u，那么原式就成为$u^2-28u+27$

$u^2-28u+27=(u-1)(u-27)$

$\therefore x^6-28x^3-27=(x^3-1)(x^3-27)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9)$

28. 【解答】解：原式$=(y+2-1)^4+(y+2+1)^4-272$

令$x=y+2$

原式$=(x-1)^4+(x+1)^4-272$

$=2(x^4+6x^2+1)-272$

$=2(x^4+6x^2-135)$

$=2(x^2-9)(x^2+15)$

$=2(x+3)(x-3)(x^2+15)$

$=2(y+5)(y-1)(y^2+4y+19)$

29. 【解答】解：

方法一：设$(a+b-ab)=x$，$(a+b-1)=y$，则

原式$=4xy+(x-y)^2=(x+y)^2$

$=(2a+2b-ab-1)^2$

方法二：设$a+b=x$，$ab=y$

则原式$=4(x-y)(x-1)+(1-y)^2=4x^2-4xy+y^2-4x+2y+1$

$=(2x-y)^2-2(2x-y)+1$

$=(2x-y-1)^2$

则原式$=(2a+2b-ab-1)^2$

30. 【解答】解：令$x+y=a$，$xy=b$

则原式$=(1-b)^2+(a-2)(a-2b)$

$=1-2b+b^2+a^2-2ab-2a+4b$

$=a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$

$=(a-b)^2-2(a-b)+1$

$=(a-b-1)^2$

$=(x+y-xy-1)^2$

$=(xy-x-y+1)^2$

$=[(x-1)(y-1)]^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2$

模块七　　主元法

1. 【解答】解：$x^2-6xy+9y^2-z^2=(x-3y+z)(x-3y-z)$.

2. 【解答】解：$abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc=(abx+c)(cx+ab)$.

3. 【解答】解：将x看作主元，将y看作x的系数，对关于y的二次三项式十字相乘得：

原式$=x^2+(2y+1)x-(3y+2)(5y+3)$

$=(x-3y-2)(x+5y+3)$.

4. 【解答】解：$x^2-(p^2+q^2)x-pq(p+q)(p-q)=(x-p^2-pq)(x-q^2+pq)$.

5. 【解答】解：

法一

解：选x作主元，

原式$=x^2-4x-(y^2+6y+5)$

$=x^2-4x-(y+1)(y+5)$

$=(x+y+1)(x-y-5)$.

法二：双十字相乘法，

原式$= x^2 + 0xy - y^2 - 4x - 6y - 5$，

∴原式$= (x + y + 1)(x - y - 5)$.

6. 【解答】解：将b看作主元，将a看作b的系数，对原式进行变形：

原式$= a^3 + a^2 - a^2b - 2ab + b^2$

$= b^2 - (a^2 + 2a)b + (a^3 + a^2)$

十字相乘得：$b^2 - (a^2 + 2a)b + a(a^2 + a)$

$= (b - a)(b - a^2 - a)$.

7. 【解答】解：将a看作主元，将b、c看作a的系数，对原式进行变形：

原式$= (b + c)a^2 + (c^2 - b^2)a - (b^2c + bc^2)$

$= (b + c)a^2 + (b + c)(c - b)a - (b + c)bc$

$= (b + c)[a^2 + (c - b)a - bc]$，

十字相乘得：

原式$= (b + c)(a - b)(a + c)$.

（也可将b、c看作主元）

8. 【解答】解：将a看作主元，将b、c看作a的系数，对原式进行变形，

原式$= (b + c)a^2 + (b^2 - c^2)a - (b^2c + bc^2)$

$= (b + c)a^2 + (b + c)(b - c)a - (b + c)bc$

$= (b + c)[a^2 + (b - c)a - bc]$

$= (b + c)(a + b)(a - c)$.

（也可将b、c看作主元）.

故选 B.

9. 【解答】解：首先将原式按a的降幂排列

写成关于a的二次三项式$2a^2 + (4c - b)a + 2bc - b^2$

此时的常数$2bc - b^2$ 提取公因式b即可分解成$b(2c - b)$

再运用十字相乘法便可很快将原式分解成$(2a + b)(a - b + 2c)$.

10. 【解答】解：原式$= a^2 + (3b + 4c)a + (2b + 3c)(b + c)$

$= (a + 2b + 3c)(a + b + c)$

11. 【解答】解：此多项式是关于x的四次四项式，分解难度较大，若反客为主，视次数最低的字母a为主元，原多项式就可看成关于a的二次三项式，则易找到分解思路.

原式$= -a^2 + 2xa + x^4 + 3x^2 + 4$

$= -[a^2 - 2xa - (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)]$

$= -(a - x^2 - x - 2)(a + x^2 - x + 2)$.

或者：原式$= -a^2 + 2xa + x^4 + 3x^2 + 4$

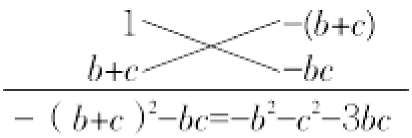
$= -[(a - x)^2 - (x^2 + 2)^2]$

$= (x^2 + 2)^2 - (a - x)^2$

$= (x^2 + x - a + 2)(a + x^2 - x + 2)$.

12. 【解答】解：原式$= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2$

$= [a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2]$
$= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$
13. 【解答】解：把a视为未知数，其他视为参数.
原式$= a + ab + ac + abc + 1 + b + c + bc$
$= a(1+b+c+bc) + (1+b+c+bc)$
$= (a+1)(1+b+c+bc)$
$= (a+1)(b+1)(c+1)$.
14. 【解答】解：这个多项式是a、b、c的三次式，项数多，似乎无从下手，解决它的方法却是最基本的：把a当作主要字母，也就是把这个多项式看成a的二次式，按a降幂排列整理为
$(b+c)a^2 - (b^2+c^2+3bc)a + (b^2c+bc^2)$，
然后用十字相乘进行分解，这里的“常数项”为$b^2c + bc^2 = bc(b+c)$.
由算式



得$a^2b - ab^2 + a^2c - ac^2 - 3abc + b^2c + bc^2$
$= [a-(b+c)][(b+c)a - bc]$
$= (a-b-c)(ab+ac-bc)$.
15. 【解答】解：$a^2 + 4ac + 3c^2 - 3ab - 7bc + 2b^2 = (a-b+3c)(a-2b+c) = 0$，
因为三角形的两边之和大于第三边，
所以$a - b + 3c \neq 0$，
故$a - 2b + c = 0$，
即$2b = a + c$.
16. 【解答】解：将原式展开并写成关于a的二次三项式：$6a^2 + (11b+4)a + 3b^2 - b - 2$，
$3b^2 - b - 2$可以分解为：$(3b+2)(b-1)$，
再次运用十字相乘法
可知原式$= (2a+3b+2)(3a+b-1)$.
17. 【解答】解：选a作主元，
原式$= a^2x^2 + (x^3+x-1)a + x^2 - x$
$= a^2x^2 + (x^3+x-1)a + x(x-1)$，
利用十字相乘得
$= (a+x)(ax^2+x-1)$.
18. 【解答】解：将x看为主元，原式可化为：
$y(y+1)x^2 + (2y^2+2y+1)x + y(y+1)$
$= [yx + (y+1)][(y+1)x + y]$
$= (yx+y+1)(yx+x+y)$.
19. 【解答】解：原式$= (x+1)a^2 + (2x^2+2x)a + (x^3+x^2-x-1)$
$= (x+1)a^2 + 2x(x+1)a + (x+1)^2(x-1)$
$= (x+1)[a^2 + 2xa + (x+1)(x-1)]$
$= (x+1)(x+a+1)(x+a-1)$

20. 【解答】解：以a、b为主要字母，这个多项式是a、b的二次齐次式，

把它整理成$b^2[(xy+1)-(x+y)]+ab(x^2-y^2)-a^2[(x+y)+(xy+1)]$

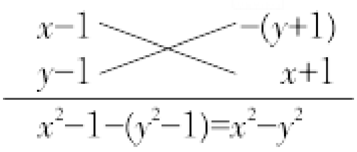
$=b^2[(xy-x)-(y-1)]+ab(x^2-y^2)-a^2[(x+xy)+(y+1)]$

$=b^2[x(y-1)-(y-1)]+ab(x^2-y^2)-a^2[x(y+1)+(y+1)]$

$=b^2(x-1)(y-1)+ab(x^2-y^2)-a^2(x+1)(y+1)$.

(注：我们把b^2与a^2的系数分解是为了进行十字相乘，ab的系数不必分解)

由算式



得原式$=[(x-1)b-(y+1)a][(y-1)b+(x+1)a]$

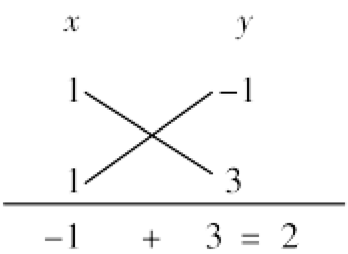
$=(bx-b-ay-a)(by-b+ax+a)$.

这题按a降幂排列也未尝不可，但是首项系数有一个负号．

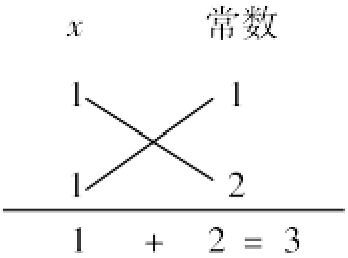
模块八　　双十字相乘法（长十字相乘法）

1．【解答】解：如果只有二次项$x^2+2xy-3y^2$，

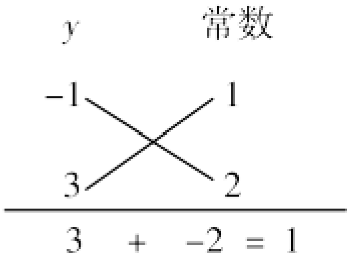
如图(1)，那么$x^2+2xy-3y^2=(x-y)(x+3y)$，



(1)



(2)

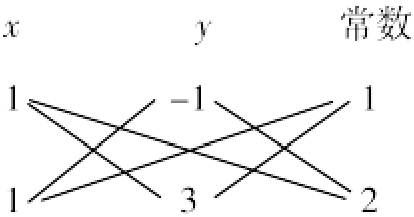


(3)

如果没有含y的项，如图(2)，那么多项式$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，

如果没有含x的项，如图(3)，那么多项式$-3y^2+y+2=(-y+1)(3y+2)$.

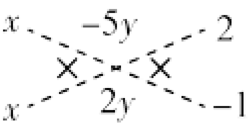
把以上三个算式“拼”在一起，写成



(4)

便得到所需要的分解：$x^2+2xy-3y^2+3x+y+2=(x-y+1)(x+3y+2)$.

2．【解答】解：



$x^2-3xy-10y^2+x+9y-2=(x-5y+2)(x+2y-1)$.

3. 【解答】解：原式$=(2x-y)(3x-y)+x-y-2=(2x-y-1)(3x-y+2)$.

4. 【解答】解：将原式写成关于x的二次三项式：

$3x^2+(4y+8)x-4y^2-8y-3$，$-4y^2-8y-3$

可以用十字相乘法分解为：$-4y^2-8y-3=-(2y+1)(2y+3)$，

再次运用十字相乘法可得，

原式$=(3x-2y-1)(x+2y+3)$.

5. 【解答】解：$2x^2-7xy-22y^2-5x+35y-3=(x+2y-3)(2x-11y+1)$.

6. 【解答】解：原式$=(2x-3y-1)(3x-2y+4)$.

7. 【解答】解：原式$=(2x-y+2)(x-y+3)$.

8. 【解答】解：$x^2+xy-6y^2+x+13y-6=(x-2y+3)(x+3y-2)$.

双十字相乘法和主元法均可.

9. 【解答】解：$x^2+2xy-15y^2+x-19y-6=(x-3y-2)(x+5y+3)$.

10. 【解答】解：分析：要分解的式子是二元二次多项式，

且二次项$6x^2+xy-2y^2=(3x+2y)(2x-y)$，

从而可断定原式分解的结果形式为$(3x+2y+a)(2x-y+b)$，

于是可用待定系数法分解.

解：法一：双十字相乘法

原式$=(3x+2y+4)(2x-y-2)$.

法二：设原式$=(3x+2y+a)(2x-y+b)$，将右边展开得

$6x^2+xy-2y^2+2x-8y-8$

$=6x^2+xy-2y^2+(2a+3b)x+(-a+2b)y+ab$.

由恒等式的性质，比较两边的系数，得

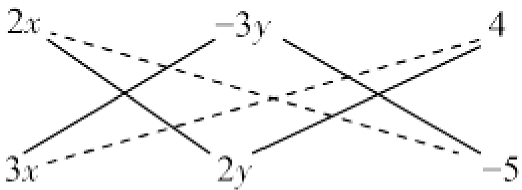
$$\begin{cases}2a+3b=2① \\ -a+2b=-8② \\ ab=-8③\end{cases}$$

由①、②可解得$a=4$，$b=-2$.

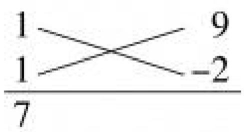
将$a=4$，$b=-2$代入③，③也成立．所以原式$=(3x+2y+4)(2x-y-2)$.

11. 【解答】解：双十字展开如下图

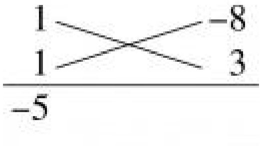
$6x^2-5xy-6y^2+2x+23y-20=(2x-3y+4)(3x+2y-5)$



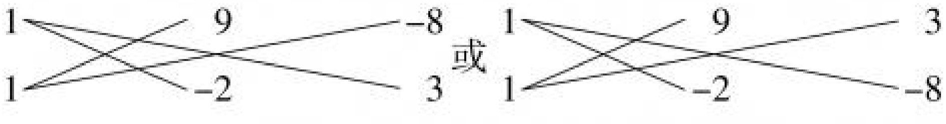
12. 【解答】解：对于多项式$x^2+7xy-18y^2$，有算式



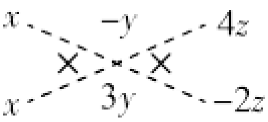
对于多项式$x^2-5x-24$，有算式



这两个算式可以拼成长十字相乘



对第一个长十字相乘，有$9\times 3+(-2)\times(-8)=43$，
而对第二个长十字相乘，有$9\times(-8)+(-2)\times 3=-78$，
所以，$m=43$或$m=-78$时，$x^2-7xy-18y^2-5x+my-24$才可以分解，
并且由第一个长十字相乘，得$x^2-7xy-18y^2-5x+my-24=(x+9y-8)(x-2y+3)$，
由第二个长十字相乘，得$x^2-7xy-18y^2-5x+my-24=(x+9y+3)(x-2y-8)$．
13．【解答】解：
法1：这是x的二次式，”常数项“可分解为$-3a^2+10ab-3b^2=-(3a-b)(a-3b)$
再对整个式子运用十字相乘
$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2=(x+3a-b)(x-a+3b)$
法2：把$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2$看成$x$、$a$、$b$的二次齐次式，
对它采用双十字相乘
$x^2+2(a+b)x-3a^2+10ab-3b^2=(x-a+3b)(x+3a-b)$．
14．【解答】解：$2x^2-3xy-2y^2-3xz+yz+z^2=(x-2y-z)(2x+y-z)$．
15．【解答】解：$x^2-6xy+9y^2-5xz+15yz+6z^2=(x-3y-2z)(x-3y-3z)$．
16．【解答】解：原式$=(x-y+4z)(x+3y-2z)$．



17．【解答】解：$6x^2-5xy-6y^2-2xz-23yz-20z^2$
$=(2x-3y-4z)(3x+2y+5z)$．
18．【解答】解：$mn+n^2+m-n-2=(n+1)(m+n-2)$．
19．【解答】解：
法1：双十字相乘法

原式$=x^2+0xy-y^2+5x+3y+4$
$=(x+y+1)(x-y+4)$．
法2：原式$=(x^2+4x+4)-(y^2-2y+1)+x+y+1$
$=(x+2)^2-(y-1)^2+(x+y+1)$
$=(x+2+y-1)(x+2-y+1)+(x+y+1)$
$=(x+y+1)(x-y+3)+(x+y+1)$
$=(x+y+1)(x-y+4)$．

法3：拆、添项法

原式$=x^2+5x+\frac{25}{4}-y^2+3y-\frac{9}{4}$

$=\left(x^2+5x+\dfrac{25}{4}\right)-\left(y^2-3y+\dfrac{9}{4}\right)$

$=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2$

$=(x+y+1)(x-y+4)$.

20.【解答】法一

解：选x作主元，

原式$=x^2-4x-(y^2+6y+5)$

$=x^2-4x-(y+1)(y+5)$

$=(x+y+1)(x-y-5)$.

法二：双十字相乘法，

原式$=x^2+0xy-y^2-4x-6y-5$，

∴原式$=(x+y+1)(x-y-5)$.

21.【解答】解：$7x^4+20x^3+11x^2+40x-6=(x^2+2)(7x-1)(x+3)$

22.【解答】解：原式$=(x^2+x+3)(x^2-2x+5)$.

23.【解答】解：$9x^2-16y^2+18x+40y-16=(3x-4y+8)(3x+4y-2)$.

24.【解答】解：

原式$=2x^2-5xy+2y^2-ax-ay-a^2$，

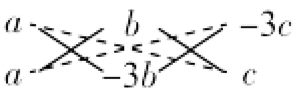
$=(x-2y-a)(2x-y+a)$.

25.【解答】解：原式$=(3x^2-xz-2z^2)-(11xy+4yz)+6y^2$

$=(3x+2z)(x-z)-y(11x+4z)+6y^2$

$=(3x+2z-2y)(x-z-3y)$.

26.【解答】解：



原式$=a^2-2ab-3b^2-2ca+10bc-3c^2$，

$=(a+b-3c)(a-3b+c)$.

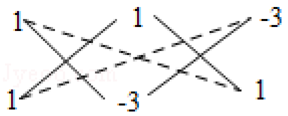
27.【解答】解：$6x^2-3y^2-2z^2-7xy-xz+7yz$

$=(2x-3y+z)(3x+y-2z)$.

28.【解答】解：提示：因$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，故可令原式$=(x+my+1)\cdot(x+ny+2)$，展开后比较对应项系数求出k.

29.【解答】解：$a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$；

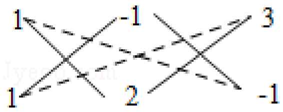
$=a^2-2ab-3b^2-2ca+10bc-3c^2$；



∴原式=（$a+b-3c$）（$a-3b+c$）；

30. 【解答】解：$x^2-2y^2-3z^2+xy+7yz+2xz$；

$=x^2+xy-2y^2+2xz+7yz-3z^2$，



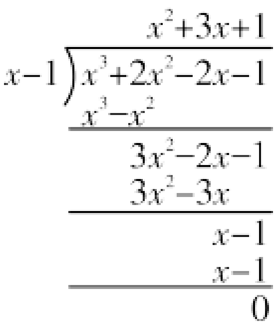
∴原式=（$x-y+3z$）（$x+2y-z$）；

模块九　　因式定理与试根法

1. 【解答】解：$x^3+2x^2-2x-1=0$的有理根可能为±1.

因为1是$x^3+2x^2-2x-1=0$的一个根，从而$x-1$是x^3+2x^2-2x-1的因式，

这里我们可以利用竖式除法，此时一般将被除式按未知数的降幂排列：

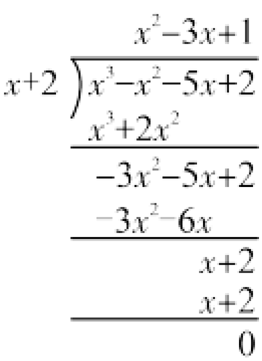


可得原式$=(x^2+3x+1)(x-1)$.

2. 【解答】解：本题有理根可能为±1，±2.

因为-2是$x^3-x^2-5x+2=0$的一个根，从而$x+2$是x^3-x^2-5x+2的因式，

这里我们可以利用竖式除法，此时一般将被除式按未知数的降幂排列：



可得原式$=(x^2-3x+1)(x+2)$.

3. 【解答】解：方法1：因为-1是$f(x)$的一个根，从而$x+1$是$f(x)$的因式，

这里我们可以利用竖式除法，此时一般将被除式按未知数的降幂排列，

没有的补0：

$$
\begin{array}{r}
2x^2-3x-2\\
x+1\,\overline{\big)\,2x^3-x^2-5x-2}\\
\underline{2x^3+2x^2\qquad\qquad}\\
-3x^2-5x\qquad\\
\underline{-3x^2-3x\qquad}\\
-2x-2\\
\underline{-2x-2}\\
0
\end{array}
$$

可得原式$=(2x^2-3x-2)(x+1)$

$=(x-2)(2x+1)(x+1)$.

$a_0=-2$的因数是±1、±2，$a_n=2$的因数是±1、±2.

因此，$f(x)$的有理根只可能是±1、±2(分母为1)、$\pm\frac{1}{2}$.

方法2：因为$f(1)=2-1-5-2=-6$，$f(-1)=-2-1+5-2=0$，

于是-1是$f(x)$的一个根，从而$x+1$是$f(x)$的因式，可得

$2x^3-x^2-5x-2$

$=(2x^3+2x^2)-(3x^2+3x)-(2x+2)$

$=2x^2(x+1)-3x(x+1)-2(x+1)$

$=(2x^2-3x-2)(x+1)$

$=(x-2)(2x+1)(x+1)$.

4. 【解答】解：令$f(x)=3x^3+x^2+x-2$，

则$a_0=-2$，$a_n=3$，a_0的因数为±1，±2，a_n的正因数为$+1$，$+3$(我们可以计为$\frac{p}{q}$的分母q，是正的，因此a_0的因数有正有负，a_n的因数可只取正的).

所以，$f(x)$的有理根只可能是±1，±2，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{2}{3}$.

由于$f\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)-2=\frac{8}{9}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-2=0$，

所以$x-\frac{2}{3}$是$f(x)$的因式，从而$3x-2$是$f(x)$的因式，可得

$f(x)=3x^3+x^2+x-2$

$=(3x^3-2x^2)+(3x^2-2x)+(3x-2)$

$=x^2(3x-2)+x(3x-2)+(3x-2)$

$=(3x-2)(x^2+x+1)$.

5. 【解答】解：设$f(x)=8x^4+6x^3-19x^2+3x+2$，

这是一个整系数一元多项式，若有整数根，必是2的约数，逐个检验2的约数，有$f(-2)=0$、$f(1)=0$，即$x=-2$和$x=1$是方程$f(x)=0$的根.

根据因式定理，$f(x)$必有因式$x+2$和$x-1$．再做长除法，即可得到剩余部分.

$8x^4+6x^3-19x^2+3x+2=(x-1)(x+2)(2x-1)(4x+1)$.

6. 【解答】解：$a_0=-2$的因数为±1，±2，$a_n=6$的正因数为1，2，3，6.

所以，$f(x)$的有理根只可能为±1，±2，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{2}{3}$，$\pm\frac{1}{9}$.

经检验$c=-\frac{1}{2}$是一个根，所以$2x+1$是$f(x)$的因式，可得

$6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$

$=(6x^4+3x^3)+(2x^3+x^2)+(2x^2+x)-(4x+2)$
$=(2x+1)(3x^3+x^2+x-2)$
$=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1)$.
7. 【解答】解：设$f(x)=x^3-4x^2+6x-4$，
这是一个整系数一元多项式，若有整数根，必是-4的约数，逐个检验-4的约数，只有$f(2)=0$，
即$x=2$是方程$f(x)=0$的一个根.
根据因式定理，$f(x)$必有因式$x-2$。
再做长除法，即可得到剩余部分。原式$=(x-2)(x^2-2x+2)$。
8. 【解答】解：令$f(x)=x^3+6x^2+11x+6$，
因为$f(-1)=0$，根据上面的结论$x-(-1)=x+1$是它的一次因式.
知道这个因式后，用除法就可以把商式求出来.
也可以直接去分组分解，这里分组是“有的放矢”的，每一组都有一个因式$x+1$. 即
$x^3+6x^2+11x+6$
$=(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)$
$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$
$=(x+1)(x^2+5x+6)$
$=(x+1)(x+2)(x+3)$.
9. 【解答】解：有理根只可能为±1，±2，±3，±4，±6，±8，±12，±24
经检验，2是根，所以原式有因式$x-2$，所以
$x^3-9x^2+26x-24$
$=(x-2)(x^2-7x+12)$
$=(x-2)(x-3)(x-4)$.
10. 【解答】解：原式$=(x-y)^2(3x+y)$
本题为x与y的齐次式，与$3x^3-5x^2+x+1$比较，不过是相应添上几个y而已，故试根时只需改成x与y的关系即可.
11. 【解答】解：原式$=(x-y)(2x-y)(3x+2y)$本题为x与y的齐次式，
与$6x^3-5x^2-3x+2$比较，不过是相应添上几个y而已，故试根时只需改成x与y的关系即可。
12. 【解答】解：本题有理根只可能为±1. $+1$当然不可能为根(因为多项式的系数全是正的)，经检验-1是根，
所以原式有因式$x+1$，
原式$=(x+1)\left(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1\right)$
容易验证-1也是$x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1$的根，
$x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1$
$=(x+1)(x^4+2x^2+1)$
$=(x+1)(x^2+1)^2$，
所以$x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1=(x+1)^2(x^2+1)^2$.
13. 【解答】解：常数项$-abc$的因数为
$\pm a$，$\pm b$，$\pm c$，$\pm ab$，$\pm bc$，$\pm ca$，$\pm abc$.
把$x=a$代入原式，得
$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc$
$=a^3-a^3-ba^2-ca^2+a^2b+abc+a^2c-abc=0$，
所以a是原式的根，$x-a$是原式的因式，并且
$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

$=(x^3-ax^2)-[(b+c)x^2-a(b+c)x]+(bcx-abc)$
$=(x-a)[x^2-(b+c)x+bc]$
$=(x-a)(x-b)(x-c)$.

14. 【解答】解：多项式的系数和为0，那么1一定是它的根，如果多项式的偶次项系数和减去奇次项系数的和为0，那么-1一定是它的根

所以$x+1$是原式的因式

$(l+m)x^3+(3l+2m-n)x^2+(2l-m-3n)x-2(m+n)$
$=(x+1)[(l+m)x^2+(2l+m-n)x-2(m+n)]$
$=(x+1)(x+2)(lx+mx-m-n)$.

15. 【解答】解：因为$f(x)$被$(x+1)(x-2)$整除，所以$f(x)$被$x+1$和$x-2$整除，根据因式定理，有

$f(-1)=2\times(-1)^4-3\times(-1)^3+a\times(-1)^2+5\times(-1)+b$
$=a+b=0$，
$f(2)=2\times2^4-3\times2^3+a\times2^2+5\times2+b$
$=4a+b+18=0$，

即$\begin{cases}a+b=0\\4a+b+18=0\end{cases}$，

解之得$a=-6$，$b=6$.

16. 【解答】解：由余数定理：多项式$f(x)$除以$(x-a)$所得的余数等于$f(a)$，

可得，余式为$f(1)=0$。

17. 【解答】解：令$f(x)=2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$，

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$，根据因式定理可得$f(1)=0$，$f(-2)=0$，

则$\begin{cases}a+b=-6\\4a+b=-42\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-12\\b=6\end{cases}$，

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{-12}{6}=-2$.

18. 【解答】解：由题意知$f(-3)=0$，即：

$(-3)^4+3\times(-3)^3+8\times(-3)^2-k(-3)+11=0$，

即$3k+83=0$，从而$k=-\frac{83}{3}$.

19. 【解答】解：原式的根可能有±1，±2，±4，代入发现1，±2为方程的根

原式$=(x-1)(x-2)(x+2)(x^2-2x+1)=(x-1)^3(x-2)(x+2)$

$\therefore$原方程的根为$x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=2,x_5=-2$

20. 【解答】解：设$f(x)$被$(x-a)(x-b)$除时，商式为$q(x)$，余式为$mx+n$，其中m，n为待定常数，则$f(x)=(x-a)(x-b)\cdot q(x)+mx+n$.

因为$f(x)$能被$x-a$和$x-b$整除，由因式定理得：

$f(a)=(a-a)(a-b)\cdot q(a)+ma+n=0$，
$f(b)=(b-a)(b-b)\cdot q(b)+mb+n=0$，

即$\begin{cases}ma+n=0①\\mb+n=0②\end{cases}$

由①$-$②得$(a-b)m=0$，

又因为$a\neq b$，所以$m=0$.

把$m=0$代入①，得$n=0$．所以$mx+n=0$，

因此，$f(x)$除以$(x-a)(x-b)$的余式为0，即$f(x)$被$(x-a)(x-b)$整除.

模块十　　待定系数法

1. 【解答】解：设另一个因式为$(x+n)$，得$x^2-4x+m=(x+3)(x+n)$

则$x^2-4x+m=x^2+(n+3)x+3n$

$\therefore \begin{cases} n+3=-4 \\ m=3n \end{cases}$

解得：$n=-7$，$m=-21$

$\therefore$另一个因式为$(x-7)$，m的值为-21

2. 【解答】解：设另一个因式为$(x+n)$，得$3x^2+5x-m=(3x-1)(x+n)$

则$3x^2+5x-m=3x^2+(3n-1)x-n$

$\therefore \begin{cases} 3n-1=5 \\ -n=-m \end{cases}$

解得：$n=2$，$m=2$

$\therefore$另一个因式为$(x+2)$，m的值为2

3. 【解答】解：设$x^3+27=(x+3)(x^2+ax+b)$

$\because (x+3)(x^2+ax+b)=x^3+(a+3)x^2+(b+3a)x+3b$

$\therefore \begin{cases} a+3=0 \\ b+3a=0 \\ 3b=27 \end{cases}$，即$a=-3$，$b=9$

$\therefore x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

4. 【解答】解：$\because x^3-1$为三次多项式，若能因式分解

则可以分解成一个一次多项式和一个二次多项式的乘积

故我们猜想x^3-1可以分解成$x^3-1=(x-1)(x^2+ax+b)$

展开等式右边得：$x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$

根据待定系数法原理，等式两边多项式的同类项的对应系数相等：

$a-1=0$，$b-a=0$，$-b=-1$

可以求出$a=1$，$b=1$

$\therefore x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

5. 【解答】解：设x^4+x^2+1

$=(x^2+ax+1)(x^2+x+1)$

$=x^4+(a+1)x^3+(a+2)x^2+(a+1)x+1$

对比系数得：$a+1=0$，$a+2=1$

解得$a=-1$

多项式的另一因式是x^2-x+1

6. 【解答】解：$x^2-y^2+4x-6y-5$

$=(x-y-A)(x+y+B)$

$=x^2-y^2+(B-A)x-(A+B)y-AB$

对比系数得$B-A=4$，$A+B=6$

解得：$A=1$，$B=5$

7. 【解答】解：设$2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20=(2x-3y+a)(x+3y+b)$

$(2x-3y+a)(x+3y+b)=2x^2+3xy-9y^2+(a+2b)x+(3a-3b)y+20$

根据对应系数相等

得：$\begin{cases} a+2b=14 \\ 3a-3b=-3 \\ ab=20 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$

解得：$a=4$，$b=5$

$\therefore 2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20=(2x-3y+4)(x+3y+5)$

8. 【解答】解：$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y)$

故可设：$2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$

$=(2x-y+az)(x-3y+bz)$

$=2x^2-7xy+3y^2+(a+2b)xz-(3a+b)yz+abz^2$

对比系数，得：

$\begin{cases}a+2b=5\\3a+b=5\\ab=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

$\therefore 2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2=(2x-y+z)(x-3y+2z)$

9. 【解答】解：设原式$=(3x+2y+a)(2x-y+b)$

$=6x^2+xy-2y^2+(2a+3b)x+(-a+2b)y+ab$

由恒等式的性质，比较两边的系数

得$\begin{cases}2a+3b=2\\-a+2b=-8\\ab=-8\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=4\\b=-2\end{cases}$

$\therefore$原式$=(3x+2y+4)(2x-y-2)$

10. 【解答】解：设$x^3+5x^2+7x+a=(x+1)(x^2+mx+n)$

$(x+1)(x^2+mx+n)=x^3+(m+1)x^2+(m+n)x+n$

比较x^2，x项的系数和常数项，得：

$\begin{cases}m+1=5\\m+n=7\\a=n\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=4\\n=3\\a=3\end{cases}$

$\therefore x^3+5x^2+7x+3$

$=(x+1)(x^2+4x+3)$

$=(x+1)(x+3)(x+1)$

$=(x+1)^2(x+3)$

11. 【解答】解：由x^4+ax^2+bx+2中4次项系数为1, 常数项为2可设另一个因式为x^2+mx+2，

则$(x^2-3x+1)(x^2+mx+2)=x^4+ax^2+bx+2$

$\therefore\begin{cases}1\times m-3\times 1=0\\1\times 2+1\times 1+(-3)\times m=a\\-3\times 2+1\times m=b\end{cases}$

解得：$\begin{cases}m=3\\a=-6\\b=-3\end{cases}$

$\therefore$原式$=x^4-6x^2-3x+2$

$=(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)$

$=(x^2-3x+1)(x+2)(x+1)$

12. 【解答】解：不能，理由如下：

如果x^4-x^2+1能够分解

那么一定分解为$(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$，或$(x^2+ax-1)(x^2+bx-1)$

比较x^3与x^2的系数可得

$\begin{cases}a+b=0\\ab+2=-1\end{cases}$，或$\begin{cases}a+b=0\\ab-2=-1\end{cases}$

由$a+b=0$得：$b=-a$

代入$ab+2=-1$得：$a^2=3$，或代入$ab-2=-1$得：$a^2=-1$

即$a^2=3$或$a^2=-1$

又∵a为整数

∴没有符合题意的a

∴x^4-x^2+1不能分解成两个整系数的二次因式的积

（从而也不能分解成两个有理系数的二次因式的积）

13. 【解答】解：设原式$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd$

对比x^3，x^2，x的系数和常数项，得

$\begin{cases}a+c=5\\ac+b+d=0\\ad+bc=15\\bd=-9\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=5\\b=-3\\c=0\\d=3\end{cases}$

∴原式$=(x^2+5x-3)(x^2+3)$

14. 【解答】解：设原式$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$=x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd$

对比x^3，x^2，x的系数和常数项，得

$\begin{cases}a+c=2\\b+d+ac=3\\ad+bc=2\\bd=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\\d=1\end{cases}$

∴原式$=(x^2+x+1)(x^2+x+1)=(x^2+x+1)^2$

15. 【解答】解：原式$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd$

对比x^3，x^2，x的系数和常数项，得：

$\begin{cases}a+c=-1\\b+ac+d=-5\\ad+bc=-6\\bd=-4\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-2\\d=-4\end{cases}$

∴原式$=(x^2+x+1)(x^2-2x-4)$

16. 【解答】解：∵$12x^2-10xy+2y^2=(3x-y)(4x-2y)$

∴设$12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+m=(3x-y+a)(4x-2y+b)$

对比x，y的系数和常数项，得

$\begin{cases}4a+3b=11\\2a+b=5\\ab=m\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=1\\m=2\end{cases}$

∴原式$=12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+2=(3x-y+2)(4x-2y+1)$

17. 【解答】解：∵$x^2-5x-24=(x+3)(x-8)$

∴设$x^2+7xy+my^2-5x+43y-24=(x+ay+3)(x+by-8)$

即$x^2+7xy+my^2-5x+43y-24$

$=x^2+(a+b)xy+aby^2-5x+(3b-8a)y-24$

比较对应项的系数，得：

$\begin{cases}a+b=7\\ab=m\\3b-8a=43\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-2\\b=9\\m=-18\end{cases}$

∴原式$=x^2+7xy-18y^2-5x+43y-24=(x-2y+3)(x+9y-8)$

18. 【解答】证明：假设能分解成两个一次因式的积

设$x^2+2xy+x+y+1=(x+ay+b)(x+cy+e)$，则：

首先有$ac=0$，不妨设$a=0$

$\therefore x^2+2xy+x+y+1=(x+b)(x+cy+e)$
对比xy的系数，得$c=2$
$\therefore x^2+2xy+x+y+1=(x+b)(x+2y+e)=x^2+2xy+(b+e)x+2by+be$
对比x，y的系数和常数项
有$\begin{cases}b+e=1\\2b=1\\be=1\end{cases}$，此方程组无解
$\therefore$假设不成立
$\therefore x^2+2xy+x+y+1$不能分解成两个一次因式

19. 【解答】解：设$x^6+x^3-1=(x^3+ax^2+bx+1)(x^3+cx^2+dx-1)$
比较x^5、x^3及x的系数
得$\begin{cases}a+c=0① \\ ad+bc=+1② \\ b-d=0③\end{cases}$
由方程①与方程③可得：$c=-a$，$d=b$
再把它们代入第二个方程中，得$ab-ab=1$，矛盾！
$\therefore x^6+x^3-1$不可能分解为两个整系数的三次因式的积

20. 【解答】解：设原式可分解为$(x^2+ax+m)(x^2+ax+n)$，展开可得：
$(x^2+ax+m)(x^2+ax+n)=x^4+2ax^3+(a^2+m+n)x^2+a(m+n)x+mn$
$x(x+1)(x+2)(x+3)+p=x^4+6x^3+11x^2+6x+p$
比较等号两边的系数可得：$\begin{cases}a=3\\m+n=2\\mn=p\end{cases}$
故$p=m(2-m)=2m-m^2\quad=1-(m^2-2m+1)=1-(m-1)^2$
$\because(m-1)^2\geq0$
$\therefore-(m-1)^2\leq0$
$\therefore 1-(m-1)^2\leqslant1$
$\therefore p$的最大值为1

模块十一　　轮换对称式

1. 【解答】解：因为当$x=y$时，$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$
所以原式含有因式$x-y$
由轮换对称式的特点，原式还含有因式$y-z$、$z-x$
由于原式是三次轮换对称多项式，故可设
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$①
其中k是待定系数
令$x=1$，$y=0$，$z=-1$，代入①式得
$k=-1$
所以$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$

2. 【解答】解：当$a=b$时，原式$=0$
$\therefore a-b$是其因式
同理，$b-c$，$c-a$也是原式的因式
设原式$=k(a-b)(b-c)(c-a)$，
代入$a=1$，$b=2$，$c=0$得：$2k=2$

解得$k=1$

∴原式$=(a-b)(b-c)(c-a)$

3. 【解答】解：当$x=y+z$时，原式$=0$

∴$x-y-z$是原式的因式

同理$y-x-z$、$z-x-y$也是它的因式

设原式$=k(x-y-z)(y-x-z)(z-x-y)$

代入：$x=1$，$y=1$，$z=1$

解得：$k=-1$

∴原式$=-(x-y-z)(y-x-z)(z-x-y)$

4. 【解答】解：当$x=y$时，原式$=0$

∴$x-y$是原式的因式

同理$y-z$、$z-x$也是它的因式

设原式$=k(x-y)(y-z)(z-x)$

代入：$x=0$，$y=1$，$z=-1$得$2k=6$

解得：$k=3$

∴$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y)$

5. 【解答】解：在$a=0$时，原式的值为

$(b+c)^3-(b+c)^3-(c-b)^3-(b-c)^3=0$

∴ a是原式的因式

∵原式是a、b、c的轮换式

∴b、c也是它的因式

∴设$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=kabc$

其中k是待定系数，令$a=b=c=1$，得

$3^3-1^3-1^3-1^3=k$，即$k=24$

∴$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=24abc$

6. 【解答】解：当$a=b$时，原式$=0$

∴ $a-b$是其因式

同理，$b-c$，$c-a$也是原式的因式，

设原式$=k(a-b)(b-c)(c-a)$

代入$a=1$，$b=2$，$c=0$解得：$k=-4$

∴原式$=-4(a-b)(b-c)(c-a)$

7. 【解答】解：当$a=0$时，原式$=0$

∴a是原式的因式

同理：b、c也是原式的因式

原式为 5 次齐次轮换对称式

设原式$=abc[l(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ac)]$

代入$a=b=c=1$得，$3^5-1-1-1=3l+3m$，即$l+m=80$①

代入$a=b=1$，$c=-1$得：$1+1+1-3^5=-1(3l-m)$，即$3l-m=240$②

由①②两式得：$l=80$，$m=0$

∴原式$=80abc(a^2+b^2+c^2)$

8. 【解答】令$a=b$时，原式$=0$

∴$a-b$是原式的因式

同理：$c-a$、$b-c$也是它的因式

原式为 5 次多项式

设原式$=(a-b)(b-c)(c-a)[l(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ac)]$

代入$a=1$，$b=2$，$c=0$得：$5l+2m=-7$

代入$a=1$，$b=2$，$c=-1$得：$6l-m=-5$

解得：$l=m=-1$

∴原式$=(a-b)(b-c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$

9. 【解答】$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$是关于$a$、$b$、$c$的轮换式

当$a=b$时，原式$=0$

$\therefore a-b$是原式的因式

同理：$c-a$、$b-c$也是它的因式

∴原式有三次因式$(a-b)(b-c)(c-a)$

由于原式是a、b、c的四次式

∴还应当有一个一次因式

∵原式是a、b、c的四次齐次式

∴这个一次因式也是a、b、c的一次齐次式

设$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=k(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ ①

比较两边a^3b的系数，得$k=-1$

$\therefore a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

上面求k的方法是比较系数，也可以改用另一种方法

即适当选一组使$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$的数代替$a$、$b$、$c$从而定出$k$

例如，令$a=2$，$b=1$，$c=0$，把它代入①，得$8-2+0=k\cdot 3\cdot(-2)$，即$k=-1$

所以$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

以上两种确定系数的方法可以结合起来使用

10. 【解答】解：当$a=b$时，原式$=0$

$\therefore a-b$是其因式

同理，$b-c$，$c-a$也是原式的因式，

设原式$=(a-b)(b-c)(c-a)[m(a+b+c)]$

代入$a=1$，$b=2$，$c=0$得：$6m=6$

解得$m=1$

∴原式$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

11. 【解答】解：当$x=y+z$时，原式$=0$

∴所以$x-y-z$是其因式

同理$y-x-z$、$z-x-y$也是原式的因式

原式$=k(x-y-z)(y-x-z)(z-x-y)(x+y+z)$

令$x=y=z=1$，得$k=-1$

∴原式$=-(x-y-z)(y-x-z)(z-x-y)(x+y+z)$

12. 【解答】解：当$x=y$时，原式等于0

∴原式含有因子$x-y$

又∵原式是关于x，y，z的轮换对称式，故原式还含因子$y-z$，$z-x$

又∵原式为x，y，z的五次式，

∴可设$x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$

$=(x-y)(y-z)(z-x)[A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)]$

令$x=-1$，$y=0$，$z=1$得$2A-B=-1$
令$x=0$，$y=1$，$z=2$得$5A+2B=2$
解得$A=0$，$B=1$
∴原式$=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$
13. 【解答】令$a=b$时，原式$=0$
$\therefore a-b$是它的因式
同理，$c-a$、$b-c$也是它的因式
设原式$=(a-b)(b-c)(c-a)[l(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)]$
代入$a=1$，$b=-1$，$c=0$得：$2l-m=15$
代入$a=1$，$b=2$，$c=0$得：$5l+2m=15$
解得：$l=5$，$m=-5$
∴原式$=(a-b)(b-c)(c-a)[5(a^2+b^2+c^2)-5(ab+bc+ca)]$
$=5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
14. 【解答】解：当$x=y$时，原式$=0$
$\therefore (x-y)$是原式的因式
同理$(y-z)$、$(z-x)$也是原式的因式
∴原式有因式$(x-y)(y-z)(z-x)$
∵原式是x、y、z的五次齐次轮换式
∴还有一个因式是二次齐次轮换式
设$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$
$=(x-y)(y-z)(z-x)[l(x^2+y^2+z^2)+m(xy+yz+zx)]$．①
令$x=2$，$y=1$，$z=0$得，$1-32+1=-2(5l+2m)$
即$5l+2m=15$．②
令$x=1$，$y=0$，$z=-1$，得$1-32+1=-2(2l-m)$
即$2l-m=15$．③
由②、③这两个方程，解得$\begin{cases} l=5 \\ m=-5 \end{cases}$
于是$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$
$=(x-y)(y-z)(z-x)[5(x^2+y^2+z^2)-5(xy+yz+zx)]$
$=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
15. 【解答】解：当$x=-y$时，原式$=0$
$\therefore x+y$是它的因式
同理$x+z$、$z+y$也是原式的因式
设原式$=(x+y)(y+z)(z+x)[l(x^2+y^2+z^2)+m(xy+yz+zx)]$
令$x=1$，$y=1$，$z=0$得：$2l+m=15$
令$x=2$，$y=1$，$z=0$得：$5l+2m=35$
解得$l=m=5$
原式$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$
16. 【解答】解：当$a=-b$时，原式$=0$
$\therefore a+b$是其因式
同理，a，b也是原式的因式
设原式$=ab(a+b)[m(a^2+b^2)+nab]$
代入$a=1$，$b=1$得：$2m+n=15$

代入$a=1$，$b=2$得：$5m+2n=35$
解得$m=5$，$n=5$
原式$=ab(a+b)[5(a^2+b^2)+5ab]$
$=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$
17. 【解答】解：当$a=b$时，原式$=0$
$\therefore a-b$是原式的因式
同理：$b-c$、$c-a$、$c-d$、$a-d$、$b-d$也是其因式
原式是 6 次齐次多项式
$\therefore$设原式$=k(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$
令$a=0$，$b=1$，$c=-1$，$d=2$得：$-12=-12k$
$\therefore k=1$
$\therefore$原式$=(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$
18. 【解答】解：当$a=b$时，原式$=0$
$\therefore a-b$是原式的因式
同理：$b-c$、$c-a$也是其因式
原式有因式$(a-b)(b-c)(c-a)$
另一方面，把原式看成d的多项式，在$d=a$时，易知原式的值为0
$\therefore$原式有因式$d-a$．再由轮换性，它也有因式$d-b$，$d-c$
$\therefore (a-b)(b-c)(c-a)(d-a)(d-b)(d-c)$是它的因式
$\because$原式是a、b、c、d的6次式，我们设
原式$=k(a-b)(b-c)(c-a)(d-a)(d-b)(d-c)$
令$a=1$，$b=0$，$c=-1$，$d=2$，得$k=16$．即
原式$=16(a-b)(b-c)(c-a)(d-a)(d-b)(d-c)$
19. 【解答】当$a=0$时，原式$=0$
$\therefore a$为原式的因式
同理b、c、d均为原式的因式
设原式$=abcd[l(a^2+b^2+c^2+d^2)+m(ab+ac+ad+bc+bd+cd)]$
令$a=b=c=d=1$，得$2l+3m=8$
令$a=b=1,c=d=-1$，得$2l-m=0$
解得：$l=1$，$m=2$
原式$=abcd[a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd]$
$=abcd(a+b+c+d)^2$
20. 【解答】原式$=a^4(b-c)(b+c)+b^4(c-a)(c+a)+c^4(a-b)(a+b)$
当$a=b$时，原式$=0$
$\therefore a-b$是原式的因式
同理：$b-c$、$c-a$、$b+c$、$a+b$、$c+a$也是其因式
原式是 6 次齐次多项式
$\therefore$设原式$=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$
令$a=0$，$b=1$，$c=2$得：$-12=12k$
$\therefore k=-1$
$\therefore$原式$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$