铁磁学笔记

作者：李程轲

时间：November 2, 2022

目录

第 1 章 静磁现象

定义 1.1 (磁性)

外磁场改变时，系统能量随之改变的性质。

1.1 磁矩

定义 1.2 (磁荷)

假设的仅带有北极或南极的单一磁极的基本粒子。

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m, m$ 单位为 Wb。

命题 1.1 (磁力矩)

一个大小为 m 的磁极放入大小为 H 的场所受的力 $F = mH$。磁极成对出现致使匀强场中合力为零，力矩为 $L = -mlH\sin\theta$。非匀强场中合力为 $F = mH_1 - mH_2 = m(\Delta H)$。当 $l \to 0$ 时，$\Delta H \approx l\frac{dH}{dx}$。

定义 1.3 (磁矩)

磁矩：

$$M = ml$$

其转矩与势能：

$$\vec{L} = \vec{M} \times \vec{H}$$

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{H}$$

1.2 磁性材料和磁化强度

定义 1.4 (磁化强度)

单位体积内，材料中磁矩的总和。

$$\vec{I} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i$$

注 M 为磁化强度，$I = \mu_0 M$ 为磁极化强度。I 的单位为 $Wb \times m/m^3 = Wb/m^2 = T$

对磁化强度的理解：

1. 磁矩观点;
2. 磁极（荷）观点：若所有磁矩平行排列，且大小相等。

$$I = NM = Nml = \rho l$$

N 为单位体积内的磁矩数，ρ 为磁荷密度。I 可以解释为 $+\rho$ 和 $-\rho$ 相对位移 l 距离，在表面出现未被补偿的磁荷，表面密度 $\omega = \rho l$，故 $I = \omega$

3. 分子环流观点：相邻电流方向相反抵消，只有侧面电流环。每单位长度有 n 个电流环，每个电流环的面积 S。

$$I = NM = \frac{n}{S}(\mu_0 iS = \mu_o(ni) = \mu_0 H'$$

H' 为内部的分子环流磁场。

定义 1.5 (磁通密度)

材料的磁化强度与真空磁化强度之和。

$$B = I + \mu_o H = \mu_0(H' + H)$$

♣

定义 1.6 (磁通量)

通过某给定曲面的磁场（亦称为磁通量密度）的大小的度量。

$$\Phi = BS$$

$$\Phi = \int_s \vec{B}\, d\vec{S}$$

♣

定义 1.7 (磁导率)

某种材料对一个外加磁场线性反应的磁化程度。

电磁感应：

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

空心线圈：

$$V_0 = -N\frac{d(BS)}{dt} = -NS\mu_0\frac{dH}{dt}$$

有磁性材料：

$$V_m = -NS\frac{dI}{dt} - NS\mu_0\frac{dH}{dt}$$

♣

注 若 $I = \chi H$(通常不成立)，χ 磁导率；$B = (\chi + \mu_0)H$，μ 磁导率。

工程上，用相对 μ_0 的无量纲值。

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\chi_r = \frac{\chi}{\mu_0}$$

$$B = \mu_0\mu_r H$$

$$V_m = -NS\frac{dB}{dt} - NS\mu_0\mu_r\frac{dH}{dt} = \mu H$$

空心线圈插入磁性材料，会使电磁感应效应提升 μ_r 倍。

1.3 铁磁材料的磁化强度和退磁场

1. 初始磁化曲线：

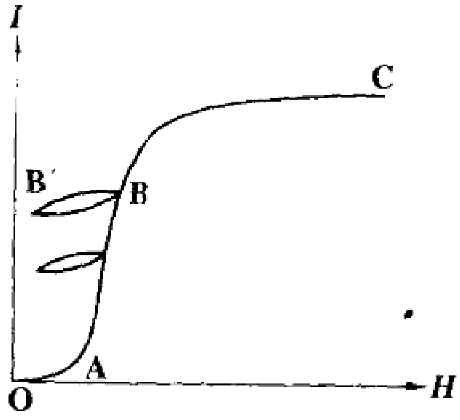

图 1.1: 初始磁化曲线

(a). 退磁状态（起始）$H = 0$，$I = 0$。I 随着 H 沿 OABC 非线性变化。
(b). OA 段：I 和 H 几乎线性变化且可逆。
(c). AB 段：I 增加快，发生不可逆磁化。（H 减小，并不会沿 BA 返回）
(d). BC 段：趋近饱和
(e). C 点：饱和点，I 不再随 H 增大而增大。I_s 为饱和磁化强度。

2. 磁滞回线：从 $+H_m$（饱和）减小到零，反向到 $-H_m$，然后回到 $+H_m$，形成一个磁化闭环时，$I \sim H$ 的变化曲线。

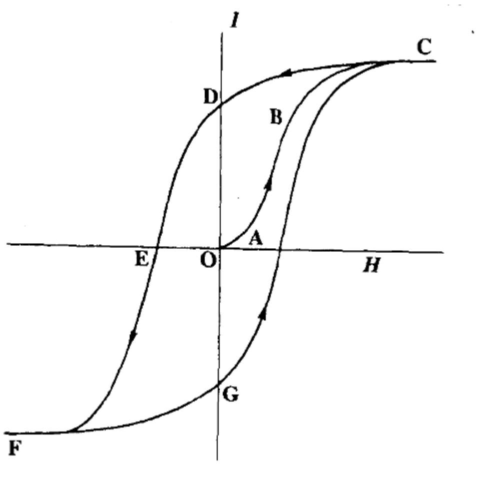

图 1.2: 磁滞回线

(a). CD 段：H 减小，但不沿着 CBAO 回去，在 $H = 0$ 具有非零的 I_r，即剩余磁化强度。
(b). 反向加场：I 减小到零，对应场记做 $-H_c$，即矫顽场。
(c). EF 段：负向趋近饱和 $-I_s$（F 点）
(d). FGC 段：回到正向饱和。

3. 退磁场：有限大小磁体在其两端出现的自由磁极产生与 I 方向相反的内部磁场。

$$H_d = N\frac{I}{\mu_0}$$

N 为退磁因子，只与样品形状有关。
退磁因子本质与磁偶相互作用有关。

命题 1.2

退磁因子对任意椭球，内部 I 处处相等。

(a). 球体：$N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$
(b). 细长圆柱：$N_z \approx 0$

$N_x = N_y = \frac{1}{2}$

(c). 薄膜：$N_z = 1$

$N_x = N_y = 0$

4. 退磁校正：校正回线不依赖磁体形状，只反映材料磁特性。

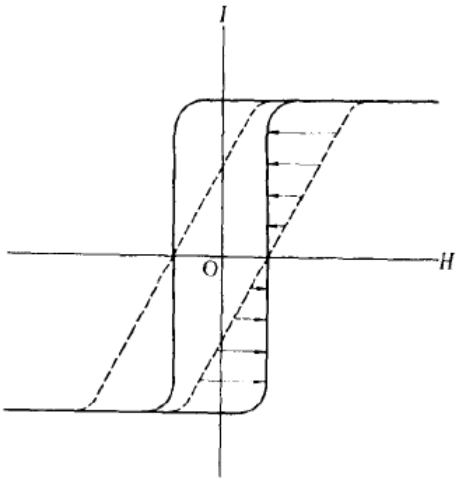

图 1.3: 校正回线

5. 磁体空腔内的有效场：$H_{in} = N\frac{I}{\mu_0}$，$N$ 为形状同空腔的磁体的退磁因子。

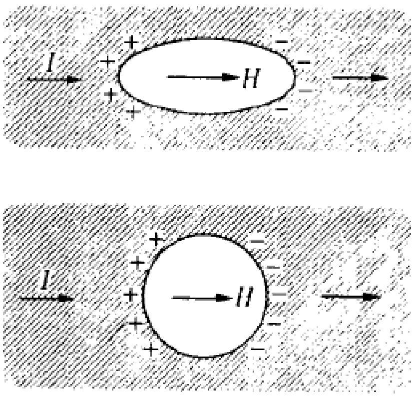

图 1.4: 磁体空腔内的有效场

1.4 磁路

高磁导率材料，倾向于把磁力线封闭与于内部。
类比于电路：

$$I = \iint \vec{j}\, d\vec{S}$$

$$\begin{aligned}\epsilon &= \oint_L E dl = \oint_L \frac{\vec{I}}{\sigma} dl \\ &= \sum_i \frac{j_i s_i}{\sigma_i s_i} l_i = I \sum_i \frac{l_i}{\sigma_i s_i} \\ &= I(R_1 + R_2 + ...) = I R_{tot}\end{aligned}$$

磁路：

$$\Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} NI_0 &= \oint_L H dl = \oint_L \frac{\vec{B}}{\mu} dl \\ &= \sum_i \frac{B_i s_i}{\mu_i s_i} l_i = I \sum_i \frac{l_i}{\mu_i s_i} \\ &= \Phi(R_{m_1} + R_{m_2} + \ldots) = I R_{m_{tot}} \end{aligned}$$

利用永磁体提供磁动势：

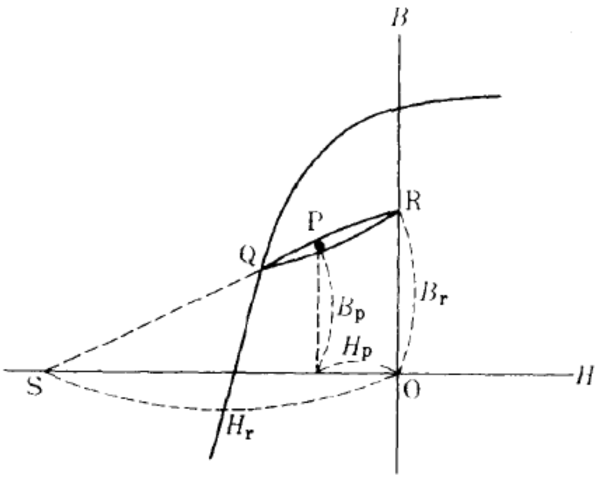

图 1.5: 永磁体的退磁曲线

孤立永磁体状态于 Q，放入磁路后其 H_d 减小至 P。视 PQR 为可逆小回线有可逆磁导率 μ_{rev}。永磁体于 R 时状态等效为 $B_r = \mu_{rev} H_r$ 的软磁，其磁动势：

$$\epsilon_m = -H_r l = \frac{B_r l}{\mu_{rev}}$$

1.5 静磁能

铁磁体能量来自原子尺度的静磁效应，由自能与外场能组成。

定义 1.8 (自能)

磁矩 $\vec{M}$ 在 $\vec{H}$ 中能 $-\vec{M} \cdot \vec{H}$

视铁磁体含有多个 $\vec{M}_i$，则

$$U_{自} = -\frac{1}{2} \sum_i \vec{\mu}_i \vec{H}_i$$

1. 积分形式 I：

$$U_{自} = -\frac{1}{2} \int_V \vec{I} \cdot \vec{H}_d d^3\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \vec{I} \cdot \vec{H}_d d^3\vec{r}_{磁体内}$$

2. 积分形式 II：

$$U = -\frac{1}{2} \int \mu_0 H_d^2 d^3\vec{r} = -\frac{1}{2} \int \mu_0 H_d^2 d^3\vec{r}_{全空间}$$

♣

例：孤立磁体的

$$\frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot d^3\vec{r} = 0$$

由：

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot\vec{H} &= \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\\ &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{H})+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{H})\end{aligned}$$

有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iiint\vec{B}\cdot\vec{H}d^3\vec{r} &= \frac{1}{2}\iiint\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{H})d^3\vec{r}\\ &= \frac{1}{2}\oint\vec{A}\cdot\vec{H}dS\frac{1}{2}\oint\vec{A}\cdot\vec{H}dS_{r\to\infty}\\ &= 0\end{aligned}$$

磁化过程中外场做功：

$$\vec{H}=\vec{H_{ex}}+\vec{H_d}$$

$$d\vec{B}=d\mu_0\vec{H_{ex}}+d\mu_0\vec{H_d}+dI$$

系统：

$$\begin{aligned}\delta w &= \int_{全}\vec{H}\cdot d\vec{B}d^3\vec{r}\\ &= \int_{全}(H_{ex}+H_d)(\delta\mu_0\vec{H_{ex}}+\delta\mu_0\vec{H_d}+\delta I)d^3\vec{r}\\ &= \underbrace{\int H_{ex}\delta(\mu_0\vec{H_{ex}})d^3\vec{r}}_{磁场对真空做功}\\ &\quad+\underbrace{\int\mu_0(\vec{H_{ex}}\delta\vec{H_d}+\vec{H_d}\delta\vec{H_{ex}})d^3\vec{r}}_{\int\mu_0\delta(H_{ex}\cdot H_d)d^3r=0}\\ &\quad+\underbrace{\int H_d\delta(\mu_0H_d)d^3\vec{H}}_{\delta U_{自}}\\ &\quad+\underbrace{\int H_d\delta Id^3\vec{H}}_{-\delta U_{自}}\\ &\quad+\underbrace{\int H_{ex}\delta Id^3\vec{H}}_{外场对磁体做功}\end{aligned}$$

外场做功：

$$W_{外}=\int_{I_1}^{I_2}H_{ex}dI$$

1.6 软磁和硬磁

在初始磁化曲线中，外场将磁体从初始化到饱和所做功的面积为：

$$\int_o^{I_s}H_{ex}\,dI$$

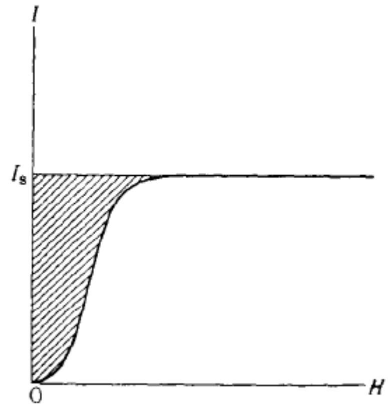

图 1.6: 初始磁化曲线

在磁滞回线中，磁滞损耗为：$\oint \vec{H} d\vec{I}$
对于软磁：$\chi = I_S/H_S$，$\mu = B/H$
储能为：

$$V\int_0^H \vec{H}\cdot x\,dH = \frac{1}{2}\mu H^2 V$$

硬磁材料在空间产生强 H_d，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{外}\mu_0 H_d^2\,d^3\vec{r} &= -\frac{1}{2}\int_{内}\vec{I}\cdot\vec{H}_d\,d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int_{内}\mu_0\vec{H}_d\cdot\vec{H}_d\,d^3\vec{r}\\ &= -\frac{1}{2}\int_{内}(\mu_0\vec{H}_d+\vec{I})\cdot\vec{H}_d\,d^3\vec{r}\\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}\int_{内}\vec{B}\cdot\vec{H}\,d^3\vec{r}}_{磁能积}\end{aligned}$$

该磁能积是永磁体外部杂散场的两倍。

第 2 章 磁测量

1. 典型场强：
   (a). 地磁场：$0.5 \times 10^{-5} T$
   (b). 空心螺线管：$0.2T$
   (c). 永磁体：$0.1 \sim 2T$
   (d). 电磁铁：$0.5 \sim 2T$
   (e). 超导螺线管：$2 \sim 23T$
      I. 稳态：$50T$
      II. 亚稳态：$500T$
2. 磁测量：
   (a). $\vec{B} \rightarrow$ 闭路 $\rightarrow$ BH loop
   (b). $\vec{I} \rightarrow$ 开路 $\rightarrow$ 振动样品测量计（VSM）

第 3 章 原子磁矩

物质磁性：原（离）子磁性基础。具有复合性：

1. 原子局域环境（晶胞形状）
2. 集体行为（晶格振动）

原子核与核外电子之间：

1. 量子处理
2. 壳层结构
3. 电子-电子，电子-核相互作用

3.1 电子磁矩和磁性

3.1.1 电子磁矩

电子角动量：自旋 + 轨道

3.1.1.1 轨道磁矩

1. 经典：运动轨迹
   若电子半径为 r，为圆形，角速率 ω：
   磁矩：
   $$\begin{aligned}\vec{m} &= \mu_0 I\vec{S} \\ m &= \mu_0(\frac{-e\omega}{2\pi})\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 e\omega r^2\end{aligned}$$
   轨道角动量：
   $$\begin{aligned}\vec{l} &= m_e\vec{r}\times\vec{v} \\ l &= m_e\omega r^2 \\ \vec{m} &= -\frac{\mu_0 e}{2m_e}\vec{l}\end{aligned}$$
2. 量子：具有特定轨道角动量的状态
   对于：
   $$\hat{m} = -\frac{\mu_0 e}{2m_e}\hat{m}$$
   仅：
   $$\hat{m}_e = -\frac{\mu_0 e}{2m_e}\hat{m}_z$$
   $$m_{\mathrm{eff}} = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$
   实验可测：
   $$\begin{aligned}m_z &= -\frac{\mu_0 e}{2m_e}m_l\hbar \\ &= -m_l\mu_B\end{aligned}$$

玻尔磁子：

$$\mu_B \equiv \frac{\mu_0 e\hbar}{2m_e}$$

3.1.1.2 自旋磁矩

自旋角动量：

$$\hat{s}^2 \longrightarrow s(s+1)\hbar^2, \qquad s = \frac{1}{2}$$

$$\hat{s}_z \longrightarrow m_s\hbar, \qquad m_s = \pm\frac{1}{2}$$

有：

$$m_z^s = -2m_s\mu_B$$
$$m_{\text{eff}}^s = \sqrt{s(s+1)}\hbar^2$$

3.1.1.3 总磁矩

$$m_z = -m_j g\mu_B$$
$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$
$$\vec{j}_z = m_j\hbar$$

当 $\vec{j} = \vec{l}$，无自旋，$g = 1, m_z = -m_l\mu_B$；
当 $\vec{j} = \vec{s}$，无轨道，$g = 2, m_z = -2m_s\mu_B$。

1. 朗德因子 g：

$$g = \frac{\text{测量到的} m_z/\mu_B}{\text{角动量投影}/\hbar}$$
$$g = \frac{\text{总磁矩} \vec{j} \text{方向投影}/\mu_B}{\text{总角动量}/\hbar}$$
$$= \frac{\vec{m}_{\text{总}}\vec{j}/\mu_B}{|\vec{j}|^2/\hbar}$$

引入：

$$\hat{m}_{\text{总}} = -\frac{\hat{l}}{\hbar}\mu_B - 2\frac{\hat{s}}{\hbar}\mu_B$$
$$= -\frac{\mu_B}{\hbar}(\hat{l} + 2\hat{s})$$

$$\vec{m}_{\text{总}}\vec{j} = -\frac{\mu_B}{\hbar}[(\hat{l} + 2\hat{s})(\hat{l} + \hat{s})]$$
$$= -\frac{\mu_B}{\hbar}(\hat{l}^2 + 3\hat{l}\cdot\hat{s} + 2\hat{s}^2)$$
$$= -\frac{\mu_B}{\hbar}(\frac{2}{3}\hat{j}^2 - \frac{1}{2}\hat{l}^2 + \frac{1}{2}\hat{s}^2)$$

代入本征值得：

$$g = \frac{\frac{2}{3}j(j+1) - \frac{1}{2}l(l+1) + \frac{1}{2}s(s+1)}{j(j+1)}$$

2. 旋磁比：
   电子磁矩与角动量的比值：

$$\gamma = \frac{m}{j} = g\frac{\mu_B}{\hbar} = g\frac{\mu_0 e}{2m_e}$$

$$\vec{m} = -\gamma j$$

g 即为无量纲的 γ。

3.1.2 电子磁矩的动力学方程

1. 进动方程:
   $\vec{m}$ 电子磁矩放入 $\vec{H}$ 外场（均匀）

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{H}$$
$$\vec{\tau} = d\vec{j}/dt$$
$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{m} \times \vec{H} \to \frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma\vec{m} \times \vec{H}$$

   电子磁矩绕 H 逆时针进动。
2. 进动频率:

$$\frac{d}{dt}\vec{m} = \sum_i \frac{d}{dt} m_i \hat{e}_i$$

$$\vec{m} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} = m_y H \hat{e}_x - m_x H \hat{e}_y$$

$$\frac{d}{dt} m_x = -\gamma h m_y \hat{e}_x$$
$$\frac{d}{dt} m_y = \gamma h m_x \hat{e}_y$$
$$\frac{d}{dt} m_z = 0$$

   取 $m_x = |\vec{m}| \sin\theta \sin\varphi(t)$，$m_y = |\vec{m}| \sin\theta \sin\varphi(t)$。
   有:

$$\frac{d}{dt} m_x = -\frac{d\varphi}{dt} |\vec{m}| \sin\theta \sin\varphi(t) = \gamma H |\vec{m}| \sin\theta \sin\varphi(t)$$

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \gamma H$$

   拉莫尔进动:
   (a). 仅 s，$g = 2$，$\mu_0 H = 1T$ 时 $f = 28GHz$
   (b). 仅 l，$g = 1$，$\mu_0 H = 1T$ 时 $f = 14GHz$

3.1.3 电子的磁性

3.2 原子中局域电子的磁性