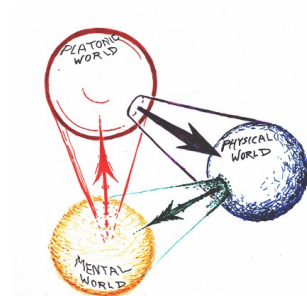




铁磁学笔记

作者：李程轲

时间：October 22, 2022



目录

1	静磁现象	1
1.1	磁矩	1
1.2	磁性材料和磁化强度	1
1.3	铁磁材料的磁化强度和退磁场	2
1.4	磁路	4
1.5	静磁能	5
1.6	软磁和硬磁	6
2	磁测量	8
3	原子磁矩	9
3.1	电子磁矩和磁性	9
3.2	原子中局域电子的磁性	11

第1章 静磁现象

定义 1.1 (磁性)

外磁场改变时，系统能量随之改变的性质。

1.1 磁矩

定义 1.2 (磁荷)

假设的仅带有北极或南极的单一磁极的基本粒子。

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$, m 单位为 Wb 。

命题 1.1 (磁力矩)

一个大小为 m 的磁极放入大小为 H 的场所受的力 $F = mH$ 。磁极成对出现致使匀强场中合力为零，力矩为 $L = -mlH \sin \theta$ 。非匀强场中合力为 $F = mH_1 - mH_2 = m(\Delta H)$ 。当 $l \rightarrow 0$ 时， $\Delta H \approx l \frac{dH}{dx}$ 。

定义 1.3 (磁矩)

磁矩：

$$M = ml$$

其转矩与势能：

$$\vec{L} = \vec{M} \times \vec{H}$$

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{H}$$

1.2 磁性材料和磁化强度

定义 1.4 (磁化强度)

单位体积内，材料中磁矩的总和。

$$\vec{I} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

注 M 为磁化强度， $I = \mu_0 M$ 为磁极化强度。 I 的单位为 $\text{Wb} \times \text{m}/\text{m}^3 = \text{Wb}/\text{m}^2 = \text{T}$

对磁化强度的理解：

1. 磁矩观点；
2. 磁极（荷）观点：若所有磁矩平行排列，且大小相等。

$$I = NM = Nml = \rho l$$

N 为单位体积内的磁矩数， ρ 为磁荷密度。 I 可以解释为 $+\rho$ 和 $-\rho$ 相对位移 l 距离，在表面出现未被补偿的磁荷，表面密度 $\omega = \rho l$ ，故 $I = \omega$

3. 分子环流观点：相邻电流方向相反抵消，只有侧面电流环。每单位长度有 n 个电流环，每个电流环的面积 S 。

$$I = NM = \frac{n}{S}(\mu_0 i S = \mu_0 (ni) = \mu_0 H')$$

H' 为内部的分子环流磁场。

定义 1.5 (磁通密度)

材料的磁化强度与真空磁化强度之和。

$$B = I + \mu_0 H = \mu_0 (H' + H)$$

定义 1.6 (磁通量)

通过某给定曲面的磁场（亦称为磁通量密度）的大小的度量。

$$\Phi = BS$$

$$\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{S}$$

定义 1.7 (磁导率)

某种材料对一个外加磁场线性反应的磁化程度。

电磁感应：

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

空心线圈：

$$V_0 = -N \frac{d(BS)}{dt} = -NS\mu_0 \frac{dH}{dt}$$

有磁性材料：

$$V_m = -NS \frac{dI}{dt} - NS\mu_0 \frac{dH}{dt}$$

注 若 $I = \chi H$ (通常不成立)， χ 磁导率； $B = (\chi + \mu_0)H$ ， μ 磁导率。

工程上，用相对 μ_0 的无量纲值。

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\chi_r = \frac{\chi}{\mu_0}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

$$V_m = -NS \frac{dB}{dt} - NS\mu_0 \mu_r \frac{dH}{dt} = \mu H$$

空心线圈插入磁性材料，会使电磁感应效应提升 μ_r 倍。

1.3 铁磁材料的磁化强度和退磁场

1. 初始磁化曲线：

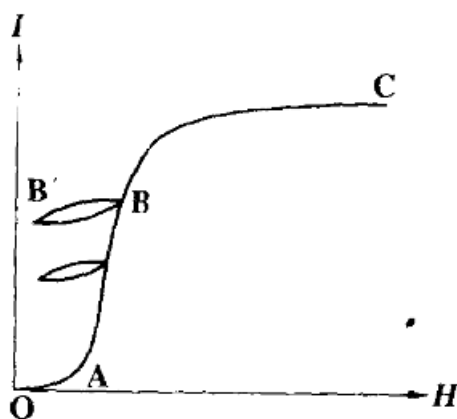


图 1.1: 初始磁化曲线

- (a). 退磁状态 (起始) $H = 0$, $I = 0$. I 随着 H 沿 OABC 非线性变化。
 - (b). OA 段: I 和 H 几乎线性变化且可逆。
 - (c). AB 段: I 增加快, 发生不可逆磁化. (H 减小, 并不会沿 BA 返回)
 - (d). BC 段: 趋近饱和
 - (e). C 点: 饱和点, I 不再随 H 增大而增大. I_s 为饱和磁化强度。
2. 磁滞回线: 从 $+H_m$ (饱和) 减小到零, 反向到 $-H_m$, 然后回到 $+H_m$, 形成一个磁化闭环时, $I \sim H$ 的变化曲线。

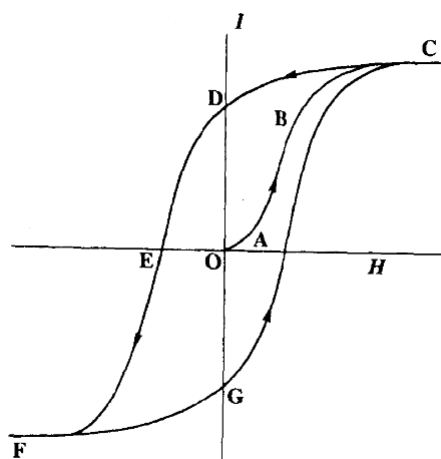


图 1.2: 磁滞回线

- (a). CD 段: H 减小, 但不沿着 CBAO 回去, 在 $H = 0$ 具有非零的 I_r , 即剩余磁化强度。
 - (b). 反向加场: I 减小到零, 对应场记做 $-H_c$, 即矫顽场。
 - (c). EF 段: 负向趋近饱和 $-I_s$ (F 点)
 - (d). FGC 段: 回到正向饱和。
3. 退磁场: 有限大小磁体在其两端出现的自由磁极产生与 I 方向相反的内部磁场。

$$H_d = N \frac{I}{\mu_0}$$

N 为退磁因子, 只与样品形状有关。

退磁因子本质与磁偶相互作用有关。

命题 1.2

退磁因子对任意椭球, 内部 I 处处相等。

- (a). 球体: $N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$
- (b). 细长圆柱: $N_z \approx 0$

$$N_x = N_y = \frac{1}{2}$$

(c). 薄膜: $N_z = 1$

$$N_x = N_y = 0$$

4. 退磁校正: 校正回线不依赖磁体形状, 只反映材料磁特性。

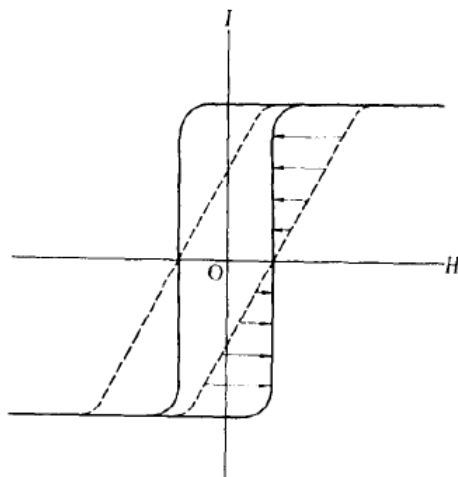


图 1.3: 校正回线

5. 磁体空腔内的有效场: $H_{in} = N \frac{I}{\mu_0}$, N 为形状同空腔的磁体的退磁因子。

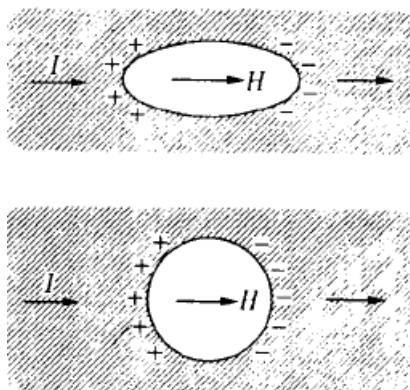


图 1.4: 磁体空腔内的有效场

1.4 磁路

高磁导率材料, 倾向于把磁力线封闭与于内部。

类比于电路:

$$I = \iint \vec{j} d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \oint_L E dl = \oint_L \frac{\vec{I}}{\sigma} dl \\ &= \sum_i \frac{j_i s_i}{\sigma_i s_i} l_i = I \sum_i \frac{l_i}{\sigma_i s_i} \\ &= I(R_1 + R_2 + \dots) = IR_{tot} \end{aligned}$$

由：

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \vec{H} &= \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{H})\end{aligned}$$

有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} d^3\vec{r} &= \frac{1}{2} \iiint \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{H}) d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{H} dS - \frac{1}{2} \oint \vec{A} \cdot \vec{H} dS \\ &= 0\end{aligned}$$

磁化过程中外场做功：

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}_{ex} + \vec{H}_d \\ d\vec{B} &= d\mu_0 \vec{H}_{ex} + d\mu_0 \vec{H}_d + dI\end{aligned}$$

系统：

$$\begin{aligned}\delta w &= \int_{\text{全}} \vec{H} \cdot d\vec{B} d^3\vec{r} \\ &= \int_{\text{全}} (H_{ex} + H_d)(\delta\mu_0 \vec{H}_{ex} + \delta\mu_0 \vec{H}_d + \delta I) d^3\vec{r} \\ &= \underbrace{\int H_{ex} \delta(\mu_0 \vec{H}_{ex}) d^3\vec{r}}_{\text{磁场对真空做功}} \\ &\quad + \underbrace{\int \mu_0 (\vec{H}_{ex} \delta \vec{H}_d + \vec{H}_d \delta \vec{H}_{ex}) d^3\vec{r}}_{\int \mu_0 \delta(H_{ex} \cdot H_d) d^3r = 0} \\ &\quad + \underbrace{\int H_d \delta(\mu_0 H_d) d^3\vec{r}}_{\delta U_{\text{自}}} \\ &\quad + \underbrace{\int H_d \delta I d^3\vec{r}}_{-\delta U_{\text{自}}} \\ &\quad + \underbrace{\int H_{ex} \delta I d^3\vec{r}}_{\text{外场对磁体做功}}\end{aligned}$$

外场做功：

$$W_{\text{外}} = \int_{I_1}^{I_2} H_{ex} dI$$

1.6 软磁和硬磁

在初始磁化曲线中，外场将磁体从初始化到饱和所做功的面积为：

$$\int_0^{I_s} H_{ex} dI$$

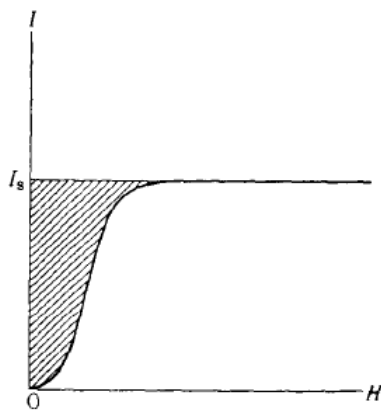


图 1.6: 初始磁化曲线

在磁滞回线中，磁滞损耗为： $\oint \vec{H} d\vec{l}$

对于软磁： $\chi = I_S/H_S$, $\mu = B/H$

储能为：

$$V \int_0^H \vec{H} \cdot x dH = \frac{1}{2} \mu H^2 V$$

硬磁材料在空间产生强 H_d ，有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\text{外}} \mu_0 H_d^2 d^3 \vec{r} &= -\frac{1}{2} \int_{\text{内}} \vec{l} \cdot \vec{H}_d d^3 \vec{r} - \frac{1}{2} \int_{\text{内}} \mu_0 \vec{H}_d \cdot \vec{H}_d d^3 \vec{r} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\text{内}} (\mu_0 \vec{H}_d + \vec{l}) \cdot \vec{H}_d d^3 \vec{r} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\text{内}} \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{H} d^3 \vec{r}}_{\text{磁能积}} \end{aligned}$$

该磁能积是永磁体外部杂散场的两倍。

第2章 磁测量

1. 典型场强:

- (a). 地磁场: $0.5 \times 10^{-5} T$
- (b). 空心螺线管: $0.2 T$
- (c). 永磁体: $0.1 \sim 2 T$
- (d). 电磁铁: $0.5 \sim 2 T$
- (e). 超导螺线管: $2 \sim 23 T$
 - I. 稳态: $50 T$
 - II. 亚稳态: $500 T$

2. 磁测量:

- (a). $\vec{B} \rightarrow$ 闭路 \rightarrow BH loop
- (b). $\vec{I} \rightarrow$ 开路 \rightarrow 振动样品测量计 (VSM)

第3章 原子磁矩

物质磁性：原（离）子磁性基础。具有复合性：

1. 原子局域环境（晶胞形状）
2. 集体行为（晶格振动）

原子核与核外电子之间：

1. 量子处理
2. 壳层结构
3. 电子-电子，电子-核相互作用

3.1 电子磁矩和磁性

3.1.1 电子磁矩

电子角动量：自旋 + 轨道

3.1.1.1 轨道磁矩

1. 经典：运动轨迹

若电子半径为 r ，为圆形，角速率 ω ：

磁矩：

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \mu_0 I \vec{S} \\ m &= \mu_0 \left(\frac{-e\omega}{2\pi} \right) \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 e \omega r^2\end{aligned}$$

轨道角动量：

$$\begin{aligned}\vec{l} &= m_e \vec{r} \times \vec{v} \\ l &= m_e \omega r^2 \\ \vec{m} &= -\frac{\mu_0 e}{2m_e} \vec{l}\end{aligned}$$

2. 量子：具有特定轨道角动量的状态

对于：

$$\hat{m} = -\frac{\mu_0 e}{2m_e} \hat{m}$$

仅：

$$\begin{aligned}\hat{m}_e &= -\frac{\mu_0 e}{2m_e} \hat{m}_z \\ m_{\text{eff}} &= \sqrt{l(l+1)} \hbar\end{aligned}$$

实验可测：

$$\begin{aligned}m_z &= -\frac{\mu_0 e}{2m_e} m_l \hbar \\ &= -m_l \mu_B\end{aligned}$$

玻尔磁子:

$$\mu_B \equiv \frac{\mu_0 e \hbar}{2m_e}$$

3.1.1.2 自旋磁矩

自旋角动量:

$$\begin{aligned}\hat{s}^2 &\rightarrow s(s+1)\hbar^2, & s &= \frac{1}{2} \\ \hat{s}_z &\rightarrow m_s \hbar, & m_s &= \pm \frac{1}{2}\end{aligned}$$

有:

$$\begin{aligned}m_z^s &= -2m_s \mu_B \\ m_{\text{eff}}^s &= \sqrt{s(s+1)}\hbar^2\end{aligned}$$

3.1.1.3 总磁矩

$$\begin{aligned}m_z &= -m_j g \mu_B \\ \vec{j} &= \vec{l} + \vec{s} \\ \vec{j}_z &= m_j \hbar\end{aligned}$$

当 $\vec{j} = \vec{l}$, 无自旋, $g = 1, m_z = -m_l \mu_B$;

当 $\vec{j} = \vec{s}$, 无轨道, $g = 2, m_z = -2m_s \mu_B$ 。

1. 朗德因子 g :

$$\begin{aligned}g &= \frac{\text{测量到的 } m_z / \mu_B}{\text{角动量投影} / \hbar} \\ g &= \frac{\text{总磁矩 } \vec{j} \text{ 方向投影} / \mu_B}{\text{总角动量} / \hbar} \\ &= \frac{\vec{m}_{\text{总}} \cdot \vec{j} / \mu_B}{|\vec{j}|^2 / \hbar}\end{aligned}$$

引入:

$$\begin{aligned}\hat{m}_{\text{总}} &= -\frac{\hat{l}}{\hbar} \mu_B - 2\frac{\hat{s}}{\hbar} \mu_B \\ &= -\frac{\mu_B}{\hbar} (\hat{l} + 2\hat{s}) \\ \vec{m}_{\text{总}} \cdot \vec{j} &= -\frac{\mu_B}{\hbar} [(\hat{l} + 2\hat{s})(\hat{l} + \hat{s})] \\ &= -\frac{\mu_B}{\hbar} (\hat{l}^2 + 3\hat{l} \cdot \hat{s} + 2\hat{s}^2) \\ &= -\frac{\mu_B}{\hbar} \left(\frac{2}{3} \hat{j}^2 - \frac{1}{2} \hat{l}^2 + \frac{1}{2} \hat{s}^2 \right)\end{aligned}$$

代入本征值得:

$$g = \frac{\frac{2}{3}j(j+1) - \frac{1}{2}l(l+1) + \frac{1}{2}s(s+1)}{j(j+1)}$$

2. 旋磁比:

电子磁矩与角动量的比值:

$$\gamma = \frac{m}{j} = g \frac{\mu_B}{\hbar} = g \frac{\mu_0 e}{2m_e}$$

$$\vec{m} = -\gamma \vec{j}$$

g 即为无量纲的 γ 。

3.1.2 电子磁矩的动力学方程

1. 进动方程:

\vec{m} 电子磁矩放入 \vec{H} 外场 (均匀)

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{H}$$

$$\vec{\tau} = d\vec{j}/dt$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{m} \times \vec{H} \rightarrow \frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma \vec{m} \times \vec{H}$$

电子磁矩绕 H 逆时针进动。

2. 进动频率:

$$\frac{d}{dt}\vec{m} = \sum_i \frac{d}{dt}m_i\hat{e}_i$$

$$\vec{m} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} = m_y H \hat{e}_x - m_x H \hat{e}_y$$

$$\frac{d}{dt}m_x = -\gamma h m_y \hat{e}_x$$

$$\frac{d}{dt}m_y = \gamma h m_x \hat{e}_y$$

$$\frac{d}{dt}m_z = 0$$

取 $m_x = |\vec{m}| \sin \theta \sin \varphi(t)$, $m_y = |\vec{m}| \sin \theta \cos \varphi(t)$ 。

有:

$$\frac{d}{dt}m_x = -\frac{d\varphi}{dt}|\vec{m}| \sin \theta \sin \varphi(t) = \gamma H |\vec{m}| \sin \theta \sin \varphi(t)$$

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \gamma H$$

拉莫尔进动:

(a). 仅 s , $g = 2$, $\mu_0 H = 1T$ 时 $f = 28GHz$

(b). 仅 l , $g = 1$, $\mu_0 H = 1T$ 时 $f = 14GHz$

3.1.3 电子的磁性

3.2 原子中局域电子的磁性