1. Considere el modelo de regresión

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon,$$

y los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados escritos en forma matricial

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t y$$

- Usando la matriz proyección H y sus propiedades, encuentre $V(\hat{y})$, donde $\hat{y} = X\hat{\beta}$

propiedades de H

$$V(\hat{y}) = (V X\hat{\beta}) = V(Hy)$$

$$= H V(y) H^t = H \sigma^2 \mathbb{I} H^t = H \sigma^2 \mathbb{I} H$$

propiedades de la varianza

$$= \sigma^2 HH = \sigma^2 H$$ pues H es idempotente

propiedades del escalar por la identidad

- Encuentre $\sum_{i=1}^{n} V(\hat{y}_i)$

Notemos que

por lo de arriba

$$\sum_{i=1}^{n} V(\hat{y}_i) = tr(V(\hat{y})) = tr(\sigma^2 H) = \sigma^2 \, tr(H)$$

$$= \sigma^2 (p+1) = \sigma^2 p + \sigma^2$$

2. Considere el modelo de regresión siguiente

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 \left(\frac{3}{9} x_i^2 - 2\right) + \varepsilon_i \,, \quad i = 1,2,3.$$

donde $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$

I Defina la matriz diseño X asociada a este modelo. Calcule X^tX y su inversa.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \left(\frac{3}{9}\right)0^2 - 2 \\ 1 & 3 & \left(\frac{3}{9}\right)3^2 - 2 \\ 1 & -3 & \left(\frac{3}{9}\right)\cdot 3^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^tX = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (X^tX)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

II Dé las expresiones de los estimadores por mínimos cuadrados ordinarios de β_0, β_1 y β_2: $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$.

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X^t X)^{-1} X^t Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3} \\ \frac{Y_2-Y_3}{6} \\ \frac{-2Y_1+Y_2+Y_2}{6} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3} \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{Y_2-Y_3}{6} \qquad \hat{\beta}_2 = \frac{-2Y_1+Y_2+Y_3}{6}$$

III Muestre que los estimadores por mínimos cuadrados ordinarios del modelo cuando se supone $\beta_2 = 0$ no se alteran, es decir, que $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1$

$$y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_i + \varepsilon_i^* \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X^t X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \qquad (X^t X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^* \\ \hat{\beta}_1^* \end{pmatrix} = (X^t X)^{-1} X^t Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} \\ \frac{Y_2 - Y_3}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0^* = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} = \hat{\beta}_0$$

$$\text{y} \quad \hat{\beta}_1^* = \frac{Y_2 - Y_3}{6} = \hat{\beta}_1$$