대학수학

08

로그

- **지수 표현**

$$16 = 2^4$$

거듭제곱
또는 지수
또는 지표

밑

- **로그 표현**

$\mathbf{16 = 2^4} \xleftrightarrow{\text{동치}} \mathbf{\log_2 16 = 4}$ "밑 2인 16의 로그는 4와 같다."

두 명제 $\mathbf{16 = 2^4}$ 과 $\mathbf{\log_2 16 = 4}$ 는 동치이다.

$y = a^x$ 이면 $x = \log_a y$ 이다.

로그

- **상용로그** common logarithm
  - 밑이 10인 로그
  - $\log_{10} \to \lg$

예) $\lg 27.5 = 1.4393\cdots$

$\lg 378.1 = 2.5776\cdots$

$\lg 0.0204 = -1.6903\cdots$

로그

- **자연로그(네이피어 로그)** hyperbolic, Napierian, natural logarithm
  - 밑이 e인 로그
  - e : 수학적 상수, 약 2.7183
  - $\log_e \rightarrow \ln$
  - 예) $\ln 3.65 = 1.2947\cdots$

$$\ln 417.3 = 6.0338\cdots$$

$$\ln 0.182 = -1.7037\cdots$$

로그

- **임의의 밑에 적용하는 세 가지 로그법칙**

❶ 두 수의 곱

$$\log(A\times B)=\log A+\log B$$

계산기를 이용하여 다음을 확인할 수 있다.

$$\lg 10=1$$

또한, $\lg 5+\lg 2=0.69897\cdots+0.301029\cdots=1$

따라서 $\lg(5\times 2)=\lg 10=\lg 5+\lg 2$ 이다.

로그

- 임의의 밑에 적용하는 세 가지 로그법칙

❷ 두 수의 나누기

$$\log\left(\frac{A}{B}\right)=\log A-\log B$$

계산기를 이용하여 다음을 확인할 수 있다.

$$\ln\left(\frac{5}{2}\right)=\ln 2.5=0.91629\cdots$$

또한, $\lg 5-\lg 2=1.60943\cdots -0.69314\cdots =0.91629\cdots$

따라서 $\ln\left(\frac{5}{2}\right)=\ln 5-\ln 2$ 이다.

로그

- **임의의 밑에 적용하는 세 가지 로그법칙**

❸ 거듭제곱하기

$$\log A^n = n\log A$$

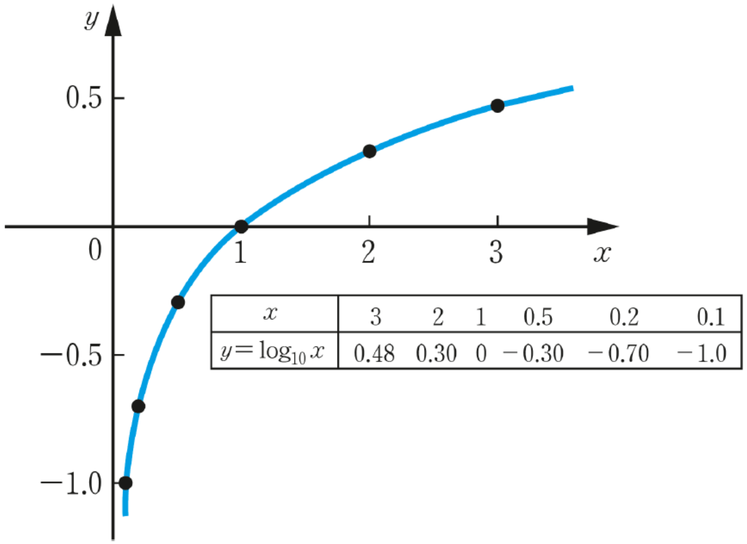
계산기를 이용하여 다음을 확인할 수 있다.

$$\lg 5^2 = \lg 25 = 1.39794\cdots$$

또한, $2\lg 5 = 2\times 0.69897\cdots = 1.39794\cdots$

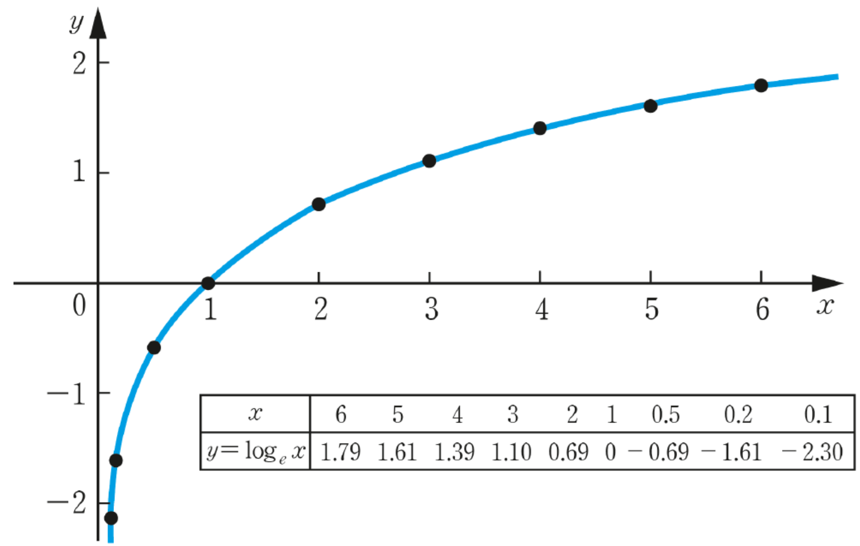
따라서 $\lg 5^2 = 2\lg 5$이다.

로그함수 그래프에서 주의할 점



x	3	2	1	0.5	0.2	0.1
$y=\log_{10}x$	0.48	0.30	0	−0.30	−0.70	−1.0

[그림 15–1]



x	6	5	4	3	2	1	0.5	0.2	0.1
$y=\log_e x$	1.79	1.61	1.39	1.10	0.69	0	−0.69	−1.61	−2.30

[그림 15–2]

$$y=\log_{10}x$$

$$y=\log_e x$$

로그함수 그래프에서 주의할 점

❶ $\log_a 1 = 0$

$\log_a 1 = x$라 하면 로그의 정의로부터 $a^x = 1$이다.

$a^x = 1$이면 로그법칙에 의해 $x = 0$이다.

그러므로 $\log_a 1 = 0$이다. 위 그래프에서 $\log_{10} 1 = 0$이

고, $\log_e 1 = 0$임을 보인다.

❷ $\log_a a = 1$

$\log_a a = x$라 하면 로그의 정의로부터 $a^x = a$이다.

$a^x = a$이면 $x = 1$이다.

그러므로 $\log_a a = 1$이다.

로그함수 그래프에서 주의할 점

❸ $\log_a 0 \to -\infty$ ($a>1$인 경우)

$\log_a 0 = x$라 하면 로그의 정의로부터 $a^x = 0$이다.

$a^x = 0$이고 a가 양수이면 x는 음의 무한대로 접근해야 한다.

그러므로 $\log_a 0 \to -\infty$ 이다.

❹ $\log_a 0 \to \infty$ ($0<a<1$인 경우)

$\log_a 0 = x$라 하면 로그의 정의로부터 $a^x = 0$이다.

$a^x = 0$이고 a가 $0<a<1$, 즉 $b>1$이고 $a=\dfrac{1}{b}$이면

$a^x = \dfrac{1}{b^x} = 0$이다. 이때 x는 양의 무한대로 접근해야 한다.

그러므로 $a^x = 0$이다.

테스트

지수함수

- **지수함수**
  - 지수함수 : e^x 를 포함하는 함수
  - e : 지수라 부르는 상수, 약 2.7183
  - 지수는 성장과 붕괴의 자연법칙에서 발생
  - 자연로그에 대한 밑으로 사용
  - 계산기로 다음을 확인

유효숫자 8자리로 보정하여 $e^1 = 2.7182818$ 이다.

유효숫자 7자리로 보정하여 $e^{-1.618} = 0.1982949$ 이다.

유효숫자 5자리로 보정하여 $e^{0.12} = 1.1275$ 이다.

소수점 아래 5자리로 보정하여 $e^{-1.47} = 0.22993$ 이다.

소수점 아래 4자리로 보정하여 $e^{-0.431} = 0.6499$ 이다.

유효숫자 5자리로 보정하여 $e^{9.32} = 11159$ 이다.

소수점 아래 7자리로 보정하여 $e^{-2.785} = 0.0617291$ 이다.

지수함수

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (16.1)$$

→ 수렴한다(=모든 항들이 더해지면 e^x에 대한 실제 값이 얻어진다).

예)
$$e^1 = 1 + 1 + \frac{(1)^2}{2!} + \frac{(1)^3}{3!} + \frac{(1)^4}{4!} + \frac{(1)^5}{5!} + \frac{(1)^6}{6!} + \frac{(1)^7}{7!} + \frac{(1)^8}{8!} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + 0.5 + 0.16667 + 0.04167 + 0.00833 + 0.00139 + 0.00020 + 0.00002 + \cdots$$

$$= 2.71828$$

→ 소수점 아래 4자리로 보정한 값 : e=2.7183

지수함수

예) $e^{0.05}=1+0.05+\frac{(0.05)^2}{2!}+\frac{(0.05)^3}{3!}+\frac{(0.05)^4}{4!}+\frac{(0.05)^5}{5!}+\cdots$

$=1+0.05+0.00125+0.000020833+0.000000260+0.0000000026$

→ 유효숫자 8자리로 보정한 값 : $e^{0.05}$ =1.0512711

$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\cdots$$

즉 $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$ 이다.

지수함수

비슷한 방법으로 e^x에 대한 거듭제곱급수는 $a\,e^{kx}$ 형태의 지수함수를 계산하는 데 사용될 수 있다. 여기서 a와 k는 상수이다. 식 (16.1)의 급수에서 x를 kx로 교체하면 다음을 얻는다.

$$a\,e^{kx} = a\left\{1 + (kx) + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \cdots\right\}$$

따라서,
$$5e^{2x} = 5\left\{1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots\right\}$$

$$= 5\left\{1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + \cdots\right\}$$

즉,
$$5e^{2x} = 5\left\{1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \cdots\right\}$$

지수함수

[표 16-1]

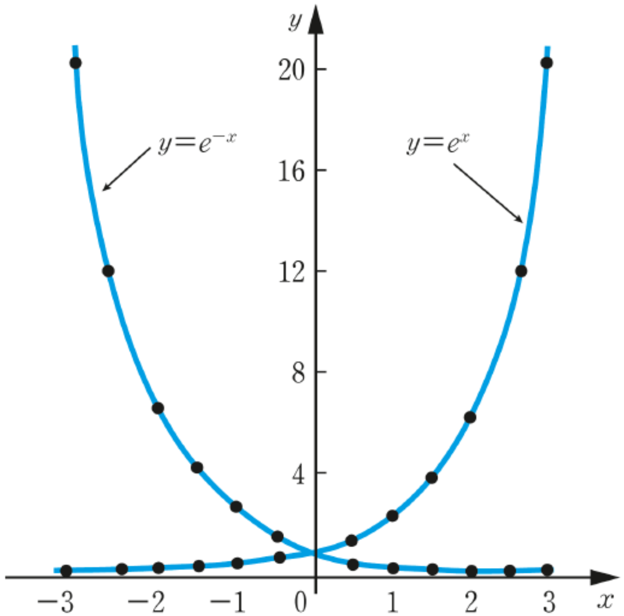
x	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0
e^x	0.05	0.08	0.14	0.22	0.37	0.61	1.00
e^{-x}	20.09	12.18	7.39	4.48	2.72	1.65	1.00
x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	
e^x	1.65	2.72	4.48	7.39	12.18	20.09	
e^{-x}	0.61	0.37	0.22	0.14	0.08	0.05	

지수함수

- 범위 x = -3에서 x = 3까지 소수점 아래 2자리로 보정하여 e^x과 e^{-x}의 값을 계산기로 얻은 값과 그래프 → [표 16-1] , [표 16-2]

[표 16–1]

x	−3.0	−2.5	−2.0	−1.5	−1.0	−0.5	0
e^x	0.05	0.08	0.14	0.22	0.37	0.61	1.00
e^{-x}	20.09	12.18	7.39	4.48	2.72	1.65	1.00
x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	
e^x	1.65	2.72	4.48	7.39	12.18	20.09	
e^{-x}	0.61	0.37	0.22	0.14	0.08	0.05	



[그림 16–1]

자연로그

- **자연로그**
  - 밑이 e인 로그
  - x의 자연로그 $\log_e x$, 보편적으로 $\ln x$ 로 쓴다.
  - 로그는 스코틀랜드 사람인 존 네이피어가 고안

테스트