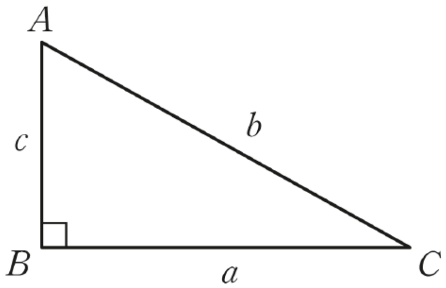
대학수학

11

삼각형 특징

- **피타고라스 정리**
  - 임의의 직각삼각형에서 빗변의 제곱은 다른 두 변의 제곱의 합과 같다.
  - 직각삼각형 ABC에서 다음이 성립함을 의미한다.

$$b^2 = a^2 + c^2$$



  - 직각삼각형의 임의의 두 변의 길이를 알고 있다면, 피타고라스 정리에 의해 세 번째 변의 길이를 계산할 수 있다.

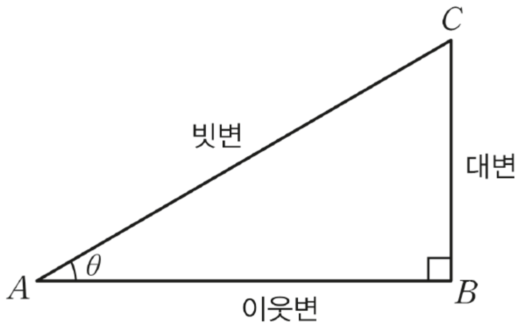
$$b = \sqrt{a^2 + c^2} \qquad a = \sqrt{b^2 - c^2} \qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

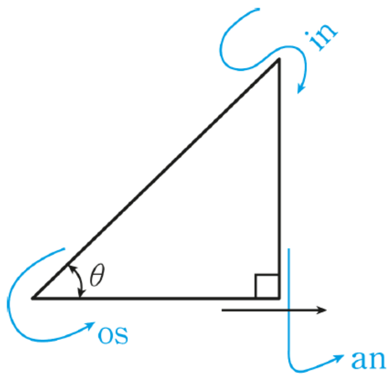
삼각형 특징

$$\text{sine}\,\theta = \frac{\text{대변}}{\text{빗변}} \qquad \sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{cosine}\,\theta = \frac{\text{이웃변}}{\text{빗변}} \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tangent}\,\theta = \frac{\text{대변}}{\text{이웃변}} \qquad \tan\theta = \frac{BC}{AB}$$





➤ 이 세 개의 삼각비는 오직 직각삼각형에만 적용된다.

삼각형 특징

“직각삼각형의 문제풀기” = “미지의 변과 각을 구하는 것”

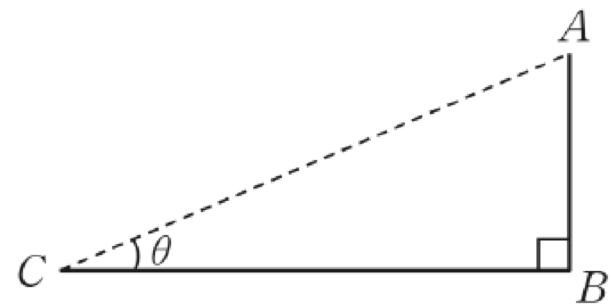
① 피타고라스 정리

② 삼각비

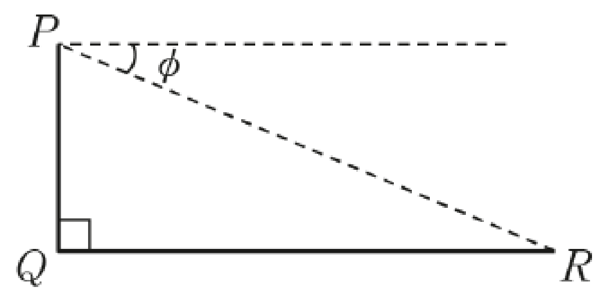
- 여섯 개의 정보(세 변과 세 각에 대한 정보)로 삼각형 파악 가능
- 적어도 세 개의 정보가 주어지면, 나머지 세 개 계산 가능

삼각형 특징

- BC는 수평인 땅이고, AB는 수직인 깃대라고 할 때, 점 C에서 깃대의 꼭대기인 A를 올려다 본 각(앙각elevation)은, 수평선 CB에서 가상의 직선 AC까지 올려다 본 각 θ



PQ는 수직 절벽이고, R은 바다에 떠 있는 배라고 할 때, 점 P에서 배를 내려다 본 각 (부각depression)은 수평선으로부터 가상의 직선 PR 사이의 각, 즉 점 P에서 수평선으로부터 배까지 내려다 본 각 φ($\angle PRQ$도 φ → 엇각)



테스트

삼각함수와 그래프

(a) $y = \sin A$

A	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\sin A$	0	0.500	0.866	1.000	0.866	0.500	0

A	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\sin A$	−0.500	−0.866	−1.000	−0.866	−0.500	0

(b) $y = \cos A$

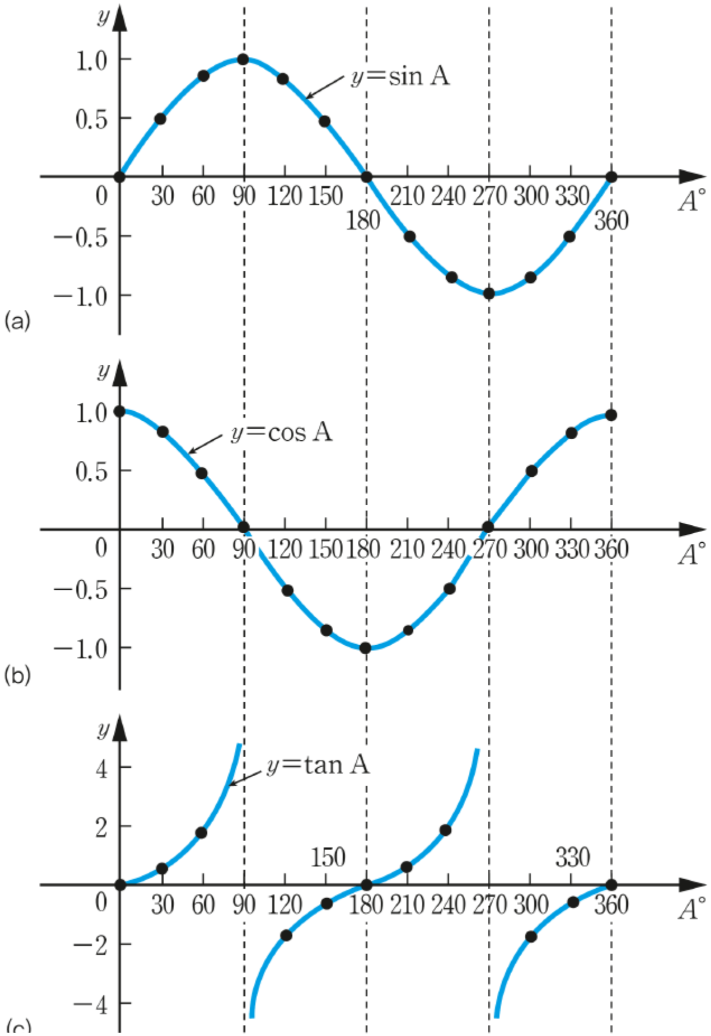
A	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\cos A$	1.000	0.866	0.500	0	−0.500	−0.866	−1.000

A	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\cos A$	−0.866	−0.500	0	0.500	0.866	1.000

(c) $y = \tan A$

A	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\tan A$	0	0.577	1.732	∞	−1.732	−0.577	0

A	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\tan A$	0.577	1.732	∞	−1.732	−0.577	0



삼각함수와 그래프

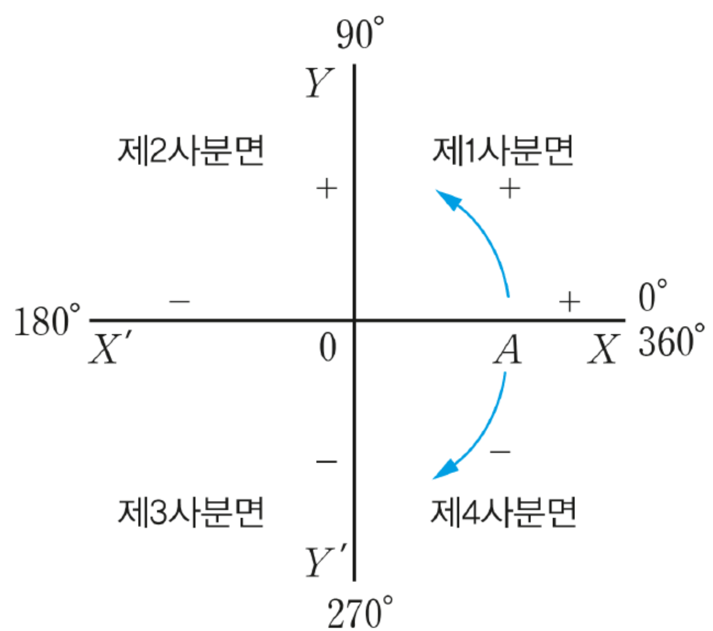
❶ 사인(sin)과 코사인(cos) 그래프는 최댓값/최솟값 ±1 사이에서 진동한다.

❷ 코사인(cos) 곡선은 사인(sin) 곡선과 모양은 동일하지만, 위상은 90°만큼 차이가 난다.

❸ 사인(sin)과 코사인(cos) 곡선은 연속이고, 360° 구간마다 반복된다. 그리고 탄젠트(tan) 곡선은 불연속이고, 180° 구간마다 반복된다.

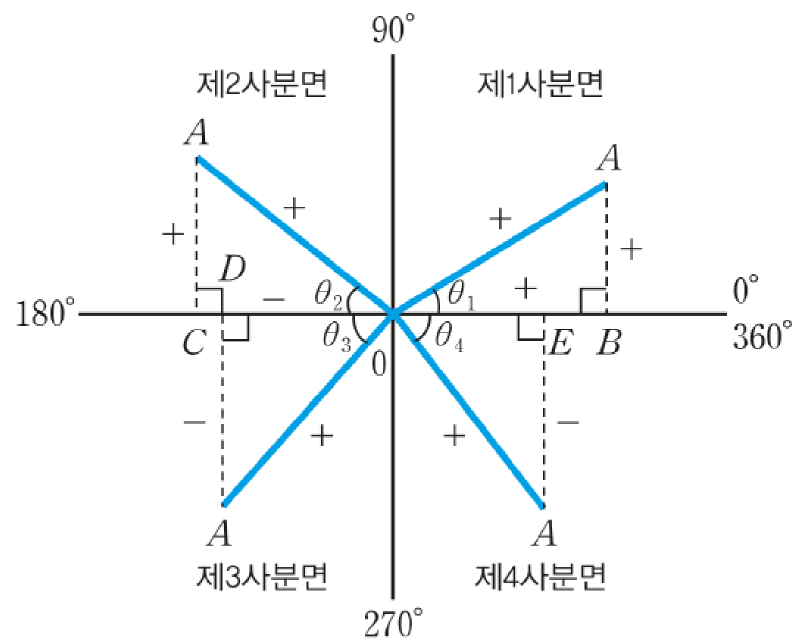
삼각함수와 그래프

- 원점 0에서 교차하는 사각형 축 *XX'*과 *YY'*
- 0의 오른쪽 위로 만들어진 측정값은 양수
- 0의 왼쪽 아래로 만들어진 측정값은 음수
- 0*A*가 시계 반대 방향으로 움직여서 만들어진 각을 양수로 측정
- 시계 방향으로 움직여서 만들어진 각을 음수로 측정



삼각함수와 그래프

- $0A$가 임의의 각 θ_1만큼 회전하여 제1사분면 위에 위치하였다고 가정
  - 직각삼각형 $0AB$를 만들기 위해 AB를 수직을 이루도록 설정함
  - 삼각형의 모든 세 변이 양수이므로 삼각비 sin, cos, tan는 제1사분면에서 모두 양수

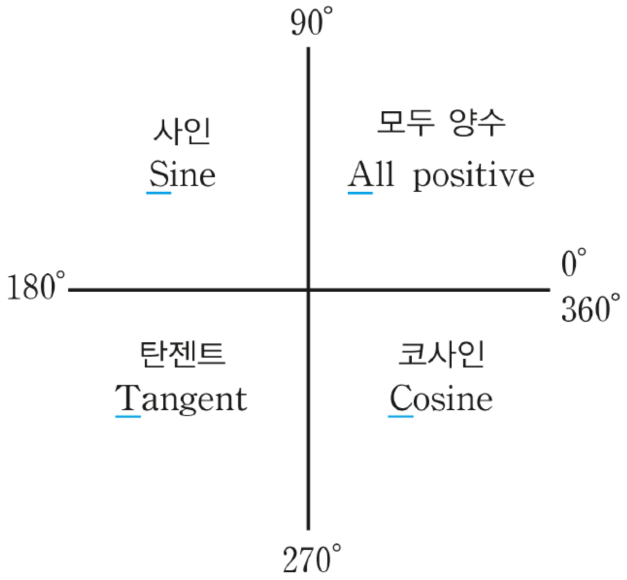


$$\sin\theta_2 = \frac{+}{+} = +,\quad \cos\theta_2 = \frac{-}{+} = -,\quad \tan\theta_2 = \frac{+}{-} = -$$

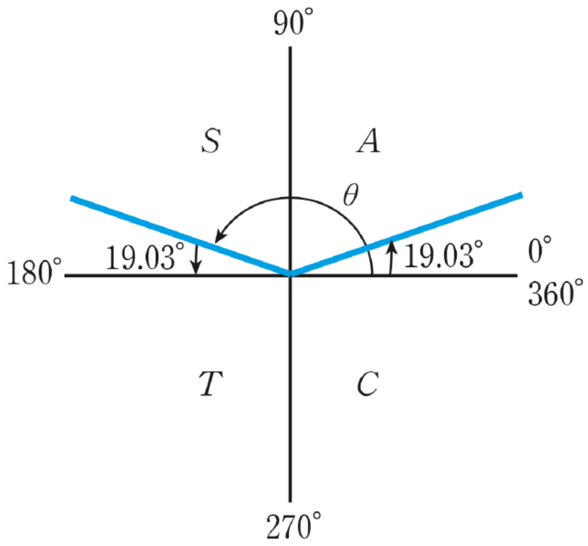
$$\sin\theta_3 = \frac{-}{+} = -,\quad \cos\theta_3 = \frac{-}{+} = -,\quad \tan\theta_3 = \frac{-}{-} = +$$

$$\sin\theta_4 = \frac{-}{+} = -,\quad \cos\theta_4 = \frac{+}{+} = +,\quad \tan\theta_4 = \frac{-}{+} = -$$

삼각함수와 그래프



90°
사인
Sine
모두 양수
All positive
180°
0°
360°
탄젠트
Tangent
코사인
Cosine
270°

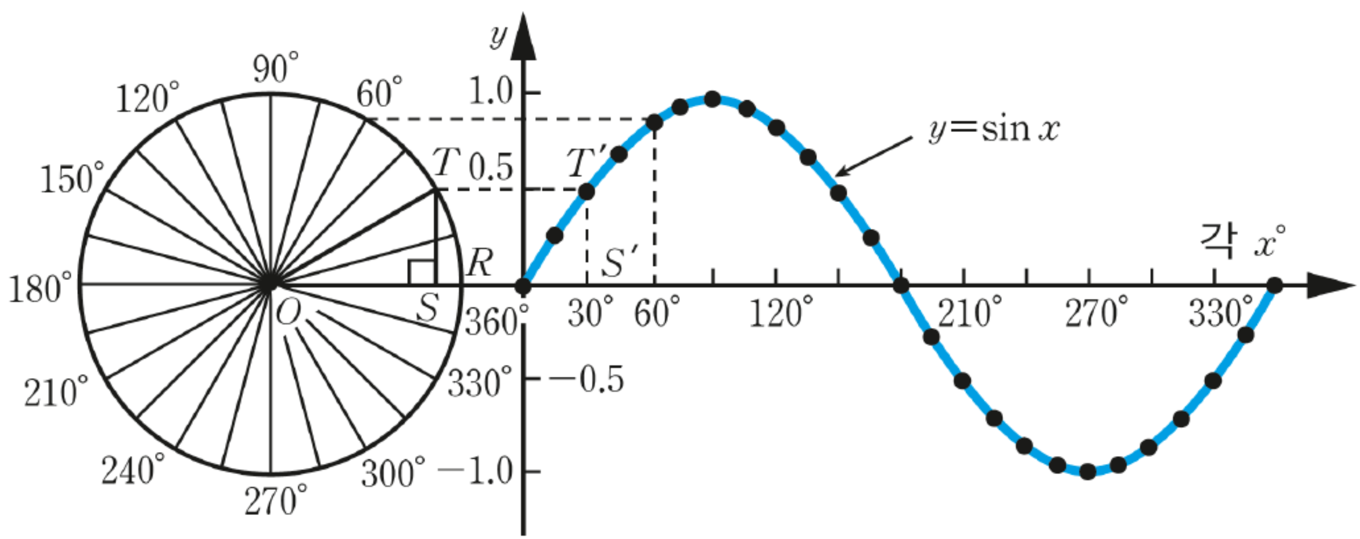


90°
S
A
θ
180°
19.03°
19.03°
0°
360°
T
C
270°

삼각함수와 그래프

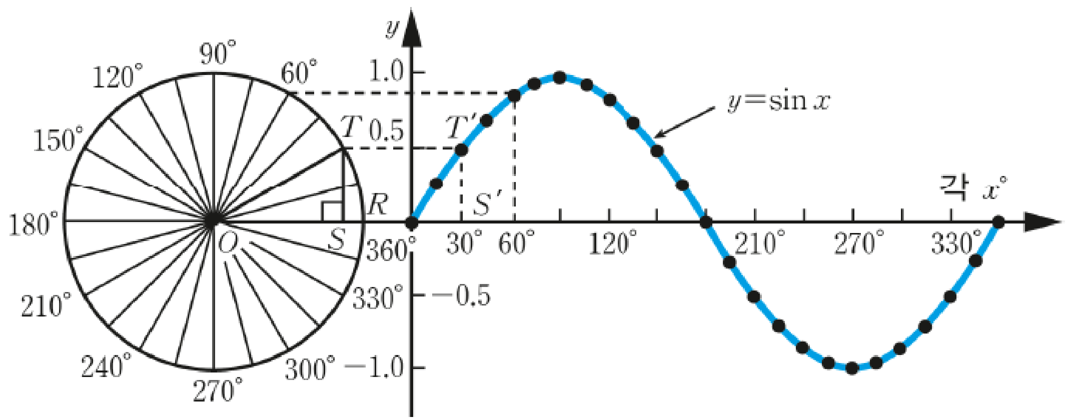
$$\sin 30^\circ = \frac{TS}{TO} = \frac{TS}{1}, \text{ 즉 } TS = \sin 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OS}{TO} = \frac{OS}{1}, \text{ 즉 } OS = \cos 30^\circ$$



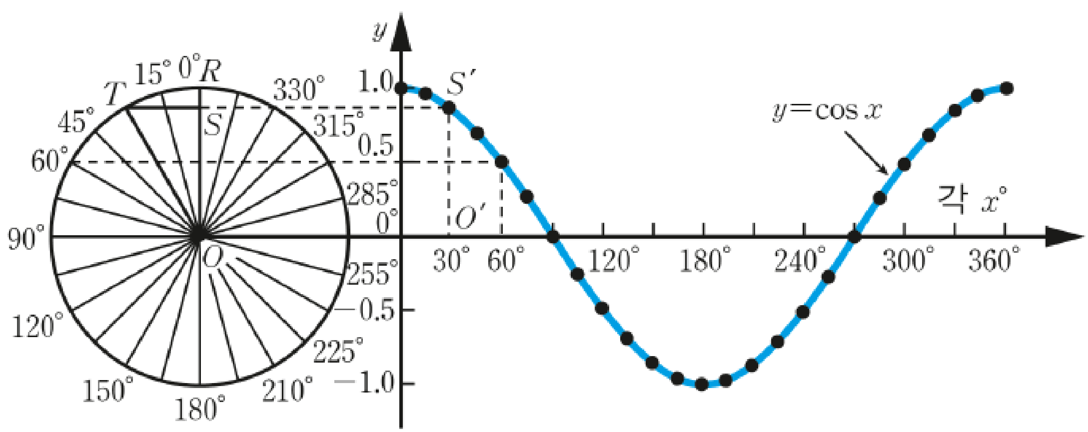
삼각함수와 그래프

- 수직 성분 *TS*는 *T′S′*으로 투영될 수 있으며, 이것은 각 $x°$에 대한 y의 그래프에서 30°에 대응하는 값
- *TS*와 같은 모든 수직 성분이 투영되면 사인파sine wave 생성



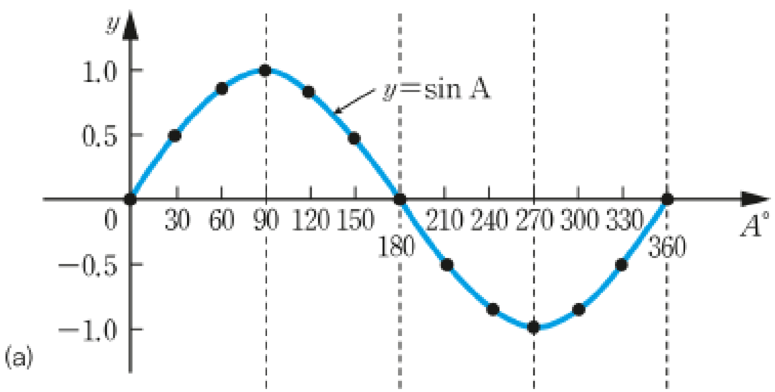
삼각함수와 그래프

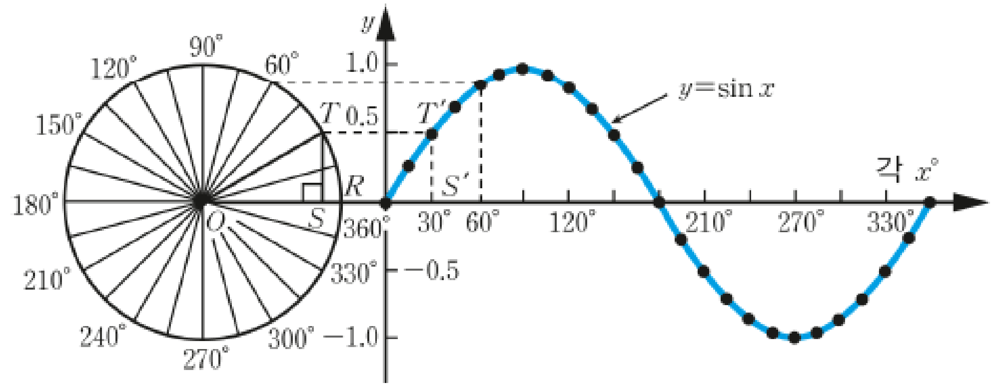
- OS와 같은 모든 수평 성분이 각 $x°$에 대한 y의 그래프에서 투영되면 코사인파cosine wave 생성
- 코사인 곡선은 사인 곡선과 모양은 동일하나 위치는 90°(또는 $\frac{\pi}{2}$ 라디안)만큼 이동된 모습
- 사인파와 코사인파는 모두 360°마다 반복됨



삼각함수와 그래프

- 사인파가 양의 값과 음의 값 모두를 완전히 지났을 때, 1사이클cycle을 완료했다고 한다.
- 사인의 1사이클





삼각함수와 그래프

- 진폭amplitude : 사인파가 반 회전할 때 이루어지는 최댓값

  ≒ 피크값peak value 또는 최댓값maximum value

- 예) $y = 5\sin x$ → 진폭 : 5

  $v = 200\sin 314t$ → 진폭 : 200

  $y = \sin x$ → 진폭 : 1

삼각함수와 그래프

- 파형 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 는 360°마다 반복됨

  → 주기period : 360°

- 파형 $y = \tan x$ 의 주기 : 180°

- $y = 3\sin 2A$: 진폭 3, 주기 180°

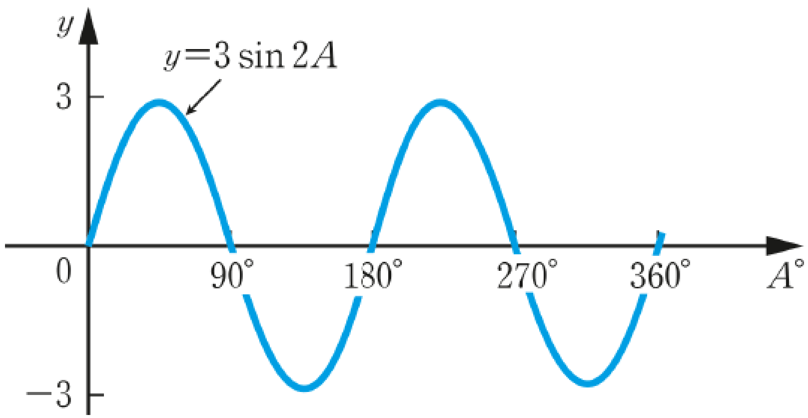
- $y = \sin 3A$: 진폭 1, 주기 120°

- $y = 4\cos 2x$: 진폭 4, 주기 180°

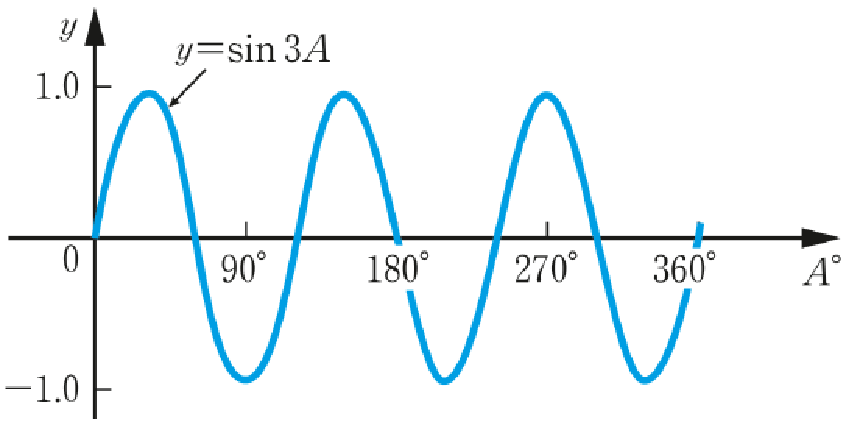
- 일반적으로, $y = A\sin px$ 와 $y = A\cos px$ 이면,

  진폭= A, 주기= $\dfrac{360°}{p}$

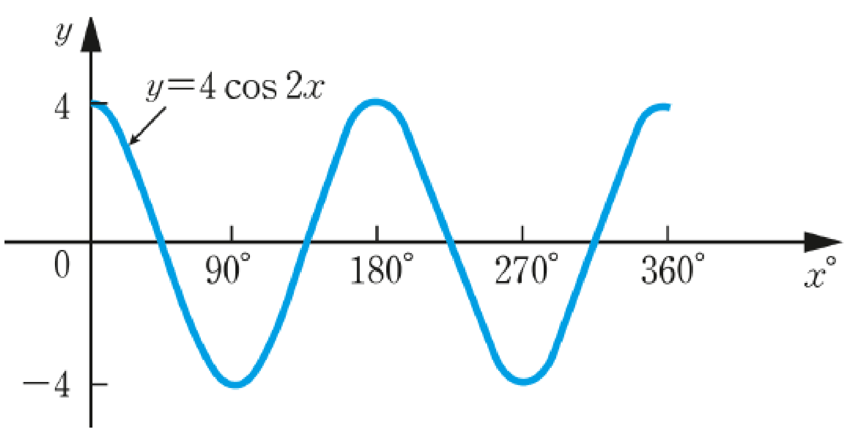
삼각함수와 그래프



y
y=3 sin 2A
3
0
90°
180°
270°
360°
A°
−3



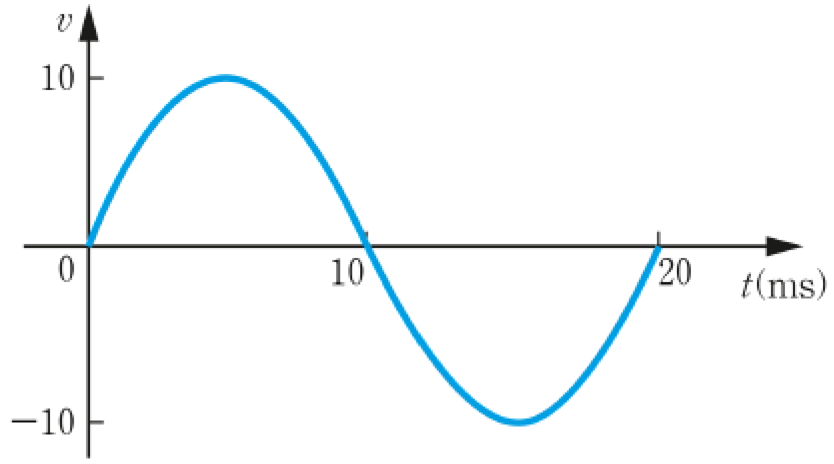
y
y=sin 3A
1.0
0
90°
180°
270°
360°
A°
−1.0



y
y=4 cos 2x
4
0
90°
180°
270°
360°
x°
−4

삼각함수와 그래프

- 사인파의 수평축 : 시간
- 주기시간periodic time T
  - 사인파가 1사이클을 이루는 시간



삼각함수와 그래프

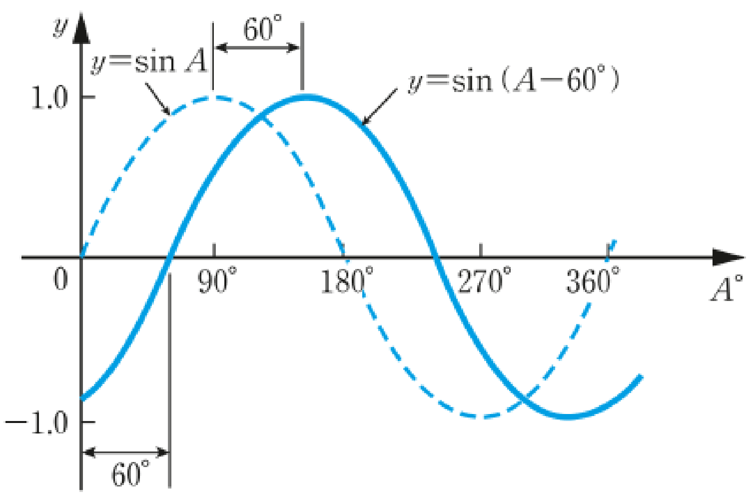
- 주파수[frequency] f
  - 1초 동안에 이루어진 회전수
  - 헤르츠[Hz]로 측정

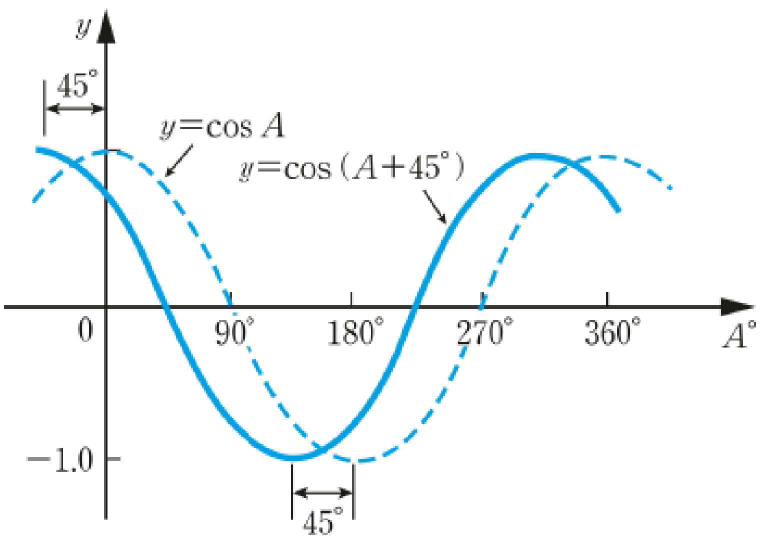
$$f = \frac{1}{T} \quad \text{또는} \quad T = \frac{1}{f}$$

삼각함수와 그래프

그래프 $y = \sin(A - 60°)$는 $y = \sin A$보다 60° 만큼 뒤처진다$^{\text{lag}}$

그래프 $y = \cos(A + 45°)$는 $y = \cos A$보다 45°만큼 앞선다$^{\text{lead}}$.





삼각함수와 그래프

사인파가 $y = A\sin(\omega t \pm \alpha)$ 의 형식으로 표현된다고 할 때,

❶ A = 진폭

❷ ω = 각속도 = $2\pi f$ rad/s

❸ 주파수, $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ Hz

❹ 주기시간, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ s , (즉, $T = \dfrac{1}{f}$)

❺ α = 앞선 각 또는 뒤진 각($y = A\sin\omega t$와 비교하여)

테스트