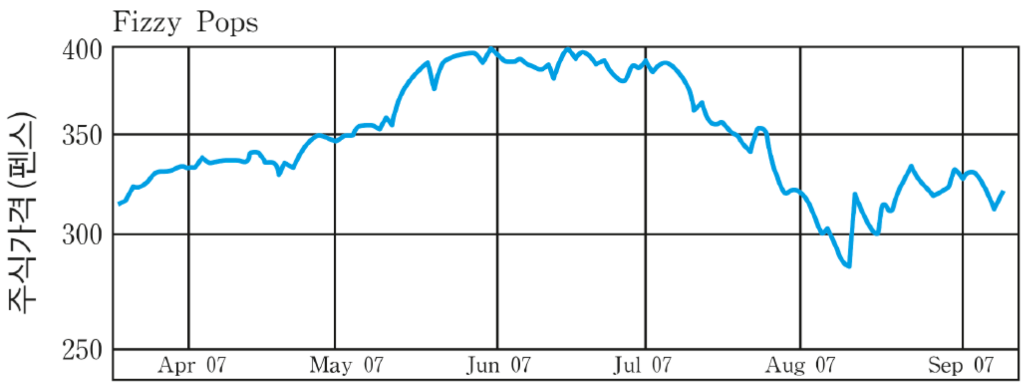
대학수학

09

그래프

- **그래프란 무엇인가?**
  - 정보의 시각적 표현
  - 한 물리량이 관련된 다른 물리량에 따라 어떻게 변하는지를 보여줌
  - 동일한 정보를 말로 설명하는 것보다 빠르게 독자에게 정보를 전달할 수 있음

예) 음료회사 Fizzy Pops의 6개월 주기 주가 그래프



그래프

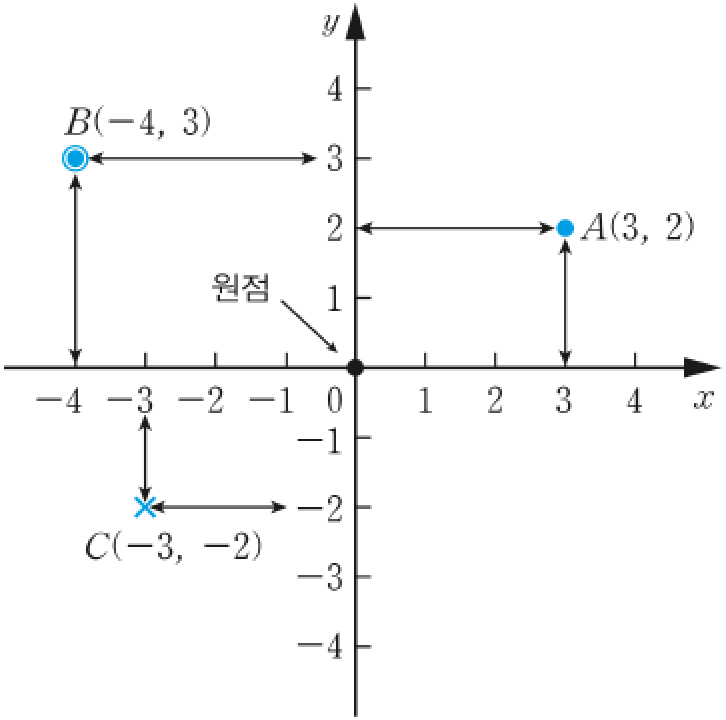
- **그리드**grid
  - 지도 위 가로선, 세로선
  - 관심이 있는 위치나 특정 도로를 찾기 쉽게 도와주는 역할
- **격자기준**grid reference
  - 지도 위 문자와 숫자
  - 관심이 있는 위치를 찾음
- **좌표**co-ordinates
  - 지도에서 한 점을 나타내는 위치를 지정하는 데 사용

그래프

- **그래프**graph
  - 한 물리량이 다른 관련 물리량에 따라 어떻게 변하는지 보여주는 정보의 시각적 표현
  - 데카르트 좌표cartesian 또는 사각형 좌표rectangular axes

그래프

- x축 : 가로축
- y축 : 세로축
- 원점 : x가 0이고 y가 0인 점
- 좌표 : 두 수 사이에 콤마가 있는 괄호로 사용



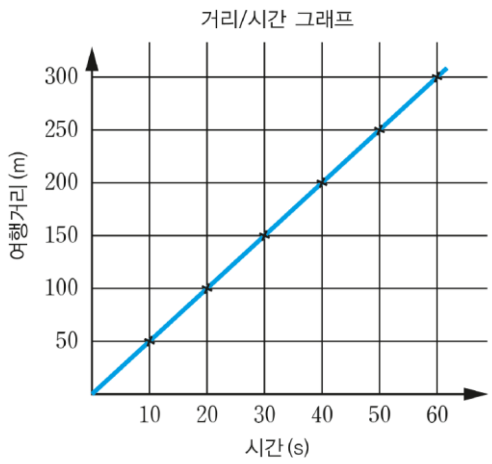
그래프

- 어떤 시간 주기에 따라 자동차로 여행한 거리를 나타낸 표

시간[s]	10	20	30	40	50	60
여행 거리[m]	50	100	150	200	250	300

- 시간은 가로축(x축)에 1cm=10s 스케일로 표시
- 거리는 세로축(y축)에 1cm=50m 스케일로 표시

  (스케일을 선정할 때, 값들을 쉽게 읽기 위해 1cm=1단위, 1cm=2단위, 1cm=10단위와 같이 선정하는 것이 좋다.)
- (x, y) 좌표는 (시간, 거리) 좌표
- 따라서 좌표는 (10, 50), (20, 100), (30, 150) ⋯
- 점으로 표시된 좌표를 이어서 직선을 그린다.



표를 직선 그래프로 그리는 방법

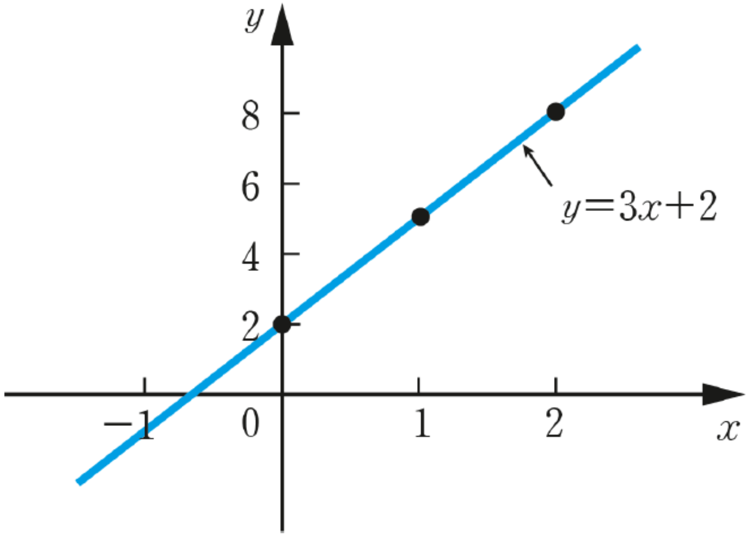
- 두 변수 x와 y 사이의 관계 : $y=3x+2$

$x=0$일 때, $y=0+2=2$

$x=1$일 때, $y=3+2=5$

$x=2$일 때, $y=6+2=8$, $\cdots$

- 좌표 (0, 2), (1, 5), (2, 8) ⋯



그래프를 그릴 때 적용되는 일반적인 규칙의 요약

❶ 그래프에, 그림이 무엇을 나타내는지 명확하게 설명하는 제목을 넣는다.

❷ 사용되는 그래프 용지에서 가능한 한 많은 공간을 쓸 수 있도록 스케일을 선택한다.

❸ 그래프에 기입한 숫자가 쉽게 이해될 수 있는 범위의 스케일을 선택한다. 보편적으로 1 cm = 1단위, 또는 1 cm = 2단위, 1 cm = 10단위를 사용하며, 1 cm = 3단위, 1 cm = 7단위와 같은 스케일은 사용하지 않는다.

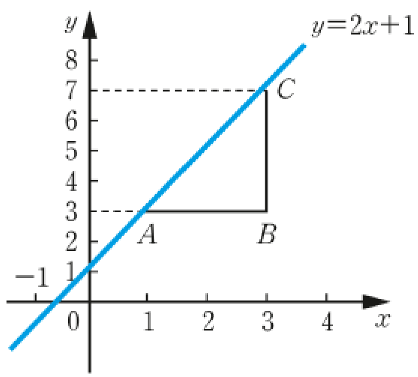
❹ 스케일은 0에서 시작할 필요는 없다. 특별히 0에서 시작하는 경우는 그래프 용지의 작은 영역 내에 점들이 집중할 때이다.

그래프를 그릴 때 적용되는 일반적인 규칙의 요약

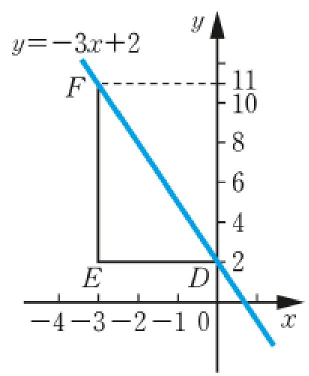
1. 그래프에, 그림이 무엇을 나타내는지 명확하게 설명하는 제목을 넣는다.
2. 사용되는 그래프 용지에서 가능한 한 많은 공간을 쓸 수 있도록 스케일을 선택한다.
3. 그래프에 기입한 숫자가 쉽게 이해될 수 있는 범위의 스케일을 선택한다. 보편적으로 1 cm = 1단위, 또는 1 cm = 2단위, 1 cm = 10단위를 사용하며, 1 cm = 3단위, 1 cm = 7단위와 같은 스케일은 사용하지 않는다.
4. 스케일은 0에서 시작할 필요는 없다. 특별히 0에서 시작하는 경우는 그래프 용지의 작은 영역 내에 점들이 집중할 때이다.
5. 좌표 또는 점들은 ×자, 점 또는 점원과 같이 명확하게 표시해야 한다.
6. 다음으로 각 좌표축에 이 점을 나타내는 수를 기입해야 한다.
7. 각 좌표축에 충분한 개수의 수를 알아보기 쉽게 써야 한다.

기울기

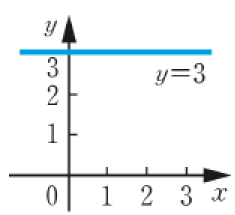
- **직선의 기울기**gradient, slop
  - 직선 위의 임의의 두 점 사이에서 x값의 변화에 대한 y값의 변화의 비율
  - x가 증가함(→)에 따라 y가 증가(↑)하면, 기울기는 양수



(a)



(b)



(c)

$$AC\text{의 기울기} = \frac{y\text{의 변화}}{x\text{의 변화}} = \frac{CB}{BA}$$

$$= \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

$$DF\text{의 기울기} = \frac{y\text{의 변화}}{x\text{의 변화}} = \frac{FE}{ED}$$

$$= \frac{11-2}{-3-0} = \frac{9}{-3} = \mathbf{-3}$$

기울기는 0

y절편

- **y절편**
  - $x = 0$일 때 y의 값
  - y절편은 1
  - y절편은 2

직선 그래프의 방정식

$$y = mx + c$$

- m : 기울기
- c : y 절편

$$y = 2x + 1$$

- 기울기 : 2
- y 절편 : 1

$$y = -3x + 2$$

- 기울기 : -3
- y 절편 : 2

$$y = 3$$

- 기울기 : 0
- y 절편 : 3

테스트

결정법칙

- **선형과 그래프의 법칙**
  - $y=mx+c$ 형태의 선형이 아닐 때 그래프의 법칙이 어떻게 결정될까?

    ➡ 결정법칙

결정법칙

- **결정법칙이 필요한 경우**
  - 두 변수 x와 y 사이의 관계가 선형이 아닌 경우
  - 비선형 방정식을 선형인 $y=mx+c$의 형태로 수정이 가능
  - 상수 m, c와 변수 x, y들의 결정에는 어떤 기교들이 필요
  - 결정법칙 : 비선형 방정식을 적절한 선형이 되도록 변형하는 기법

결정법칙

- **방정식을 선형으로 변환하는 예**

① $y = ax^2 + b$ 를 $Y = mX + c$ 와 비교할 수 있다. 여기서 $m=a$, $c=b$, $X=x^2$ 이다. 그러므로 기울기가 a이고 y절편이 b인 직선 그래프를 만들기 위해 x^2 의 값을 가로 방향으로, y의 값을 세로 방향으로 하는 좌표가 결정된다.

② $y = \frac{a}{x} + b$, 즉 $y = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$
기울기가 a이고 , y절편이 b인 직선 그래프를 만들기 위해 $\frac{1}{x}$의 값을 가로 방향으로, y의 값을 세로 방향으로 하는 좌표가 결정된다.

③ $y = ax^2 + bx$. x로 양변을 나누어 $\frac{y}{x} = ax + b$를 얻는다. 이를 $Y=mX+c$와 비교해보자. 기울기가 a이고, $\frac{y}{x}$절편이 b인 직선 그래프를 만들기 위해 x의 값을 가로 방향으로, $\frac{y}{x}$의 값을 세로 방향으로 하는 좌표가 결정된다.

로그법칙

- **로그법칙**

$$\log(A\times B)=\log A+\log B \quad ❶$$

$$\log\left(\frac{A}{B}\right)=\log A-\log B \quad ❷$$

$$\log A^n=n\times\log A \quad ❸$$

- $\ln e=1$이고 $\lg x=1.5$이면 $x=10^{1.5}=31.62$이다.
- $3^x=7$이면 $\lg 3^x=\lg 7$이고, $x\lg 3=\lg 7$ 이므로

$$x=\frac{\lg 7}{\lg 3}=1.771 \text{ 이다.}$$

- 이러한 법칙들과 기법은 $y=ax^n,\ y=ab^x,\ y=ae^{bx}$ 형태의 비선형 법칙을 선형으로 변환할 때 사용
- *a*와 *b*는 계산을 통해 구할 수 있음

방정식을 로그를 포함하는 선형으로 변환하는 예

(a) $y = ax^n$

양변에 밑 10인 로그를 취한다.

$$\lg y = \lg(ax^n)$$

$$= \lg a + \lg x^n \qquad \text{법칙 ❶에 따라}$$

$$= n \lg x + \lg a \qquad \text{법칙 ❸에 따라}$$

이를 $Y = mX + c$ 와 비교해보면, **기울기가** n, $\lg y$ **절편이** $\lg a$인 직선을 만들기 위해 $\lg y$는 **세로축으로,** $\lg x$는 **가로축으로 좌표의 위치가 결정된다.**

방정식을 로그를 포함하는 선형으로 변환하는 예

(b) $y = ab^x$

양변에 밑 10인 로그를 취한다.

$$\lg y = \lg(ab^x)$$

$$\lg y = \lg a + \lg b^x \qquad \text{법칙 ❶에 따라}$$

$$\lg y = \lg a + x \lg b \qquad \text{법칙 ❸에 따라}$$

$$\lg y = x \lg b + \lg a$$

또는 $$\lg y = (\lg b)x + \lg a$$

이를 $Y = mX + c$ 와 비교해보면, **기울기가 $\lg b$, $\lg y$ 절편이 $\lg a$**인 직선을 만들기 위해 $\lg y$는 **세로축으로, x는 가로축으로 좌표의 위치가 결정된다.**

방정식을, 로그를 포함하는 선형으로 변환하는 예

(c) $y = ae^{bx}$

양변에 밑 e인 로그를 취한다.

$$\ln y = \ln(ae^{bx})$$

$$\ln y = \ln a + \ln e^{bx} \qquad \text{법칙 ❶에 따라}$$

$$\ln y = \ln a + bx \ln e \qquad \text{법칙 ❸에 따라}$$

$$\ln y = bx + \ln a \qquad \ln e = 1\text{이므로}$$

이를 $Y = mX + c$와 비교해보면, **기울기가 b, $\ln y$ 절편이 $\ln a$**인 직선을 만들기 위해 **$\ln y$는 세로축으로, x는 가로축으로 좌표의 위치가 결정된다.**

테스트