

目标

统计分析 V.S. ML. 统计分析的主要目的应该是去分析或解析已存在的数据, 例如, 用某个概率模型, 从数据去估计分布的参数, 并计算置信度的;

而机器学习, 虽然看起来比较类似, 但本质区别在于, 机器学习的目的不在于分析当前数据, 而是对未来数据的识别。

风险.
经验风险

为了衡量 f 的好坏, 根据观察到的训练数据,

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum l_f(x_i, y_i)$$

为了衡量 f 的真实风险, 也谈 f 在未知数据上的风险, 借助对整体数据分布的假设 P .

$$R(f) = E_{XY}[l_f(X, Y)] = \int_{XY} l_f dP.$$

具体到0-1问题.

$$R(f) = E_Y[X_{f(X)} \neq Y] = P(f(X) \neq Y)$$

我们并不知道真实分布 P , 根据从 P 中采样出来的 sample S_n 来对 P 相关信息估计, 这是统计学习得以实现的基础。

我们的目的是找到使 $R(f)$ 最小的 f , 但 P 未知, 所以 $R(f)$ 无法求得, 可以通过 S_n 求 $R_n(f)$, 然后根据大数定理, 对某个固定的 f , $R_n(f)$ 会随 $n \rightarrow \infty$ 而趋近 $R(f)$,

收敛。

1. 根据 S_n 求 $R_n(f)$ 最小 f .

2. f 固定, 根据大数定理求 $R(f)$.

Bayes Error R^*

公式

$$R^* = \inf_f R(f)$$

- 理想情况下 $R^* = 0$, 但由于问题本身的原因决定, 与算法无关有风险, R^* 不一定是 0.



对于二分类和 0-1 loss 可以推导为:

$$\begin{aligned} R^* &= \inf_f R(f) \\ &= \inf_f E[X_{f(X) \neq Y}] \\ &= \inf_f E_x [P(f(X) \neq Y | X=x)] \\ &= \inf E_x [X_{f(x)=0} P(Y=1 | X=x) + X_{f(x)=1} P(Y=0 | X=x)] \\ &= \inf E_x [X_{f(x)=0} \eta(x) + X_{f(x)=1} (1 - \eta(x))] \\ &= E_x [\min \{ \eta(x), 1 - \eta(x) \}] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E_x [|2\eta(x) - 1|]. \end{aligned}$$

其中 $\eta(x)$ 表示 $X=x$ 时 $Y=1$ 的概率.

若 $\eta(x) = 0$ 或为 1 时 $R^* = 0$.







