两个定义

- 一般核函数指正定核函数；

① • $K: \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{R}$.　$\forall x,z\in\mathcal{X}$，有 $K(x,z)$.

如果 $\exists$: $\phi: \mathcal{X}\to\mathbb{R}$　$\phi\in H$.　s.t. $K(x,z)=\langle\phi(x),\phi(z)\rangle$

那么称 $K(x,z)$ 为正定核函数.

② • $K: \mathcal{X}\times\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$.　$\forall x,z\in\mathcal{X}$，有 $K(x,z)$.

如果 $K(x,z)$ 满足以下两个性质.

①对称性：　$K(x,z)=K(z,x)$

②正定性：

那么 $K(x,z)$ 为正定核

正定性：

任取N个元素 $x_1,\cdots,x_N\in\mathcal{X}$.

对应的 Gram matrix 是半正定的. $K=[K(x_i,x_j)]$

需记：$K(x,z)=\langle\phi(x),\phi(z)\rangle \Longleftrightarrow$ Gram matrix半正定

Helbert space • 完备的，可能是无限维的，被赋予内积的线性空间

对极限操作封闭.

对称性
正定性
线性

向量空间
(加法，数乘).

$$\begin{cases} \langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle \\ \langle f,f\rangle \geq 0,\ "=" \Leftrightarrow f=0 \\ \langle r_1f_1+r_2f_2, g\rangle = r_1\langle f_1,g\rangle + r_2\langle f_2,g\rangle \end{cases}$$

必要性 ($\Rightarrow$) • 已知 $K(x,z)=\langle\phi(x),\phi(z)\rangle$，记 Gram matrix半正定且 $K(x,z)$对称，

$A_{n\times n}$ 半正定 $\begin{cases} ①\text{特征值} \geq 0 \\ ②\forall \alpha\in\mathbb{R}^n,\ \alpha^TA\alpha \geq 0 \end{cases}$

Gram matrix: $K=[K(x_i,x_j)]_{N\times N}$.

$$\alpha^TK\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ \vdots & & & \\ K_{N1} & \cdots & & K_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_N\end{pmatrix}$$

$$= \sum_i\sum_j \alpha_i\alpha_j K_{ij}.$$

$$= \sum_i\sum_j \alpha_i\alpha_j \langle\phi(x_i),\phi(x_j)\rangle$$

$$= \left\langle \sum_i \alpha_i\phi(x_i),\ \sum_j\alpha_j\phi(x_j)\right\rangle.$$

$$= \left\|\sum_i\alpha_i\phi(x_i)\right\|^2 \geq 0$$

则K为半正定.