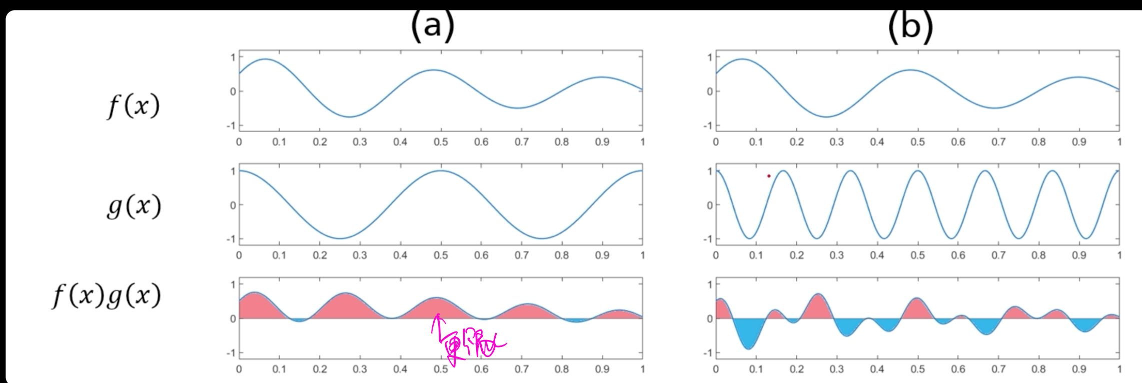
- 函数相关性.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $R \to C$ 的函数,

$$\int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

表征它们在 $[a,b]$ 上的相似程度.



(a)图的相关性 > (b)图.

20210807

- 什么是傅立叶级数

如果函数 $f(x)$ 是周期函数，那么 $f(x)$ 可以展开成以正弦和余弦为基的线性组合，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right].$$

周期为 T

$\Downarrow$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx),\quad n\in N,\quad a_n,b_n\in R.$$

确定 a_n, b_n ？

- 如何确定系数？

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos(2x)+b_1\sin x+b_2\sin(2x)$$

$$f(x)=f(x+2\pi)\qquad T=2\pi.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}a_0dx=2a_0\pi\quad\Rightarrow\quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos x}\,dx=a_0\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)dx}_{0}+a_1\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos x\,dx}_{\pi}$$
$$+a_2\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)\cos x\,dx}_{0}+b_1\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx}_{0}$$
$$+b_2\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)\cos x\,dx}_{0}$$
$$=a_1\pi.\qquad\Rightarrow\quad a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx$$

$f(x)$ 与 $\cos x$ 相关性.

类似地：$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2x)dx$

$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx\qquad b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2x)dx.$

· 傅立叶系数的计算:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

20210807

- 三角函数正交性.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m+n)x]+\cos[(m-n)x]\,dx\begin{cases}2\pi & n=m=0\\ 0 & n\neq m\\ \pi & n=m\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin[(m+n)x]+\sin[(m-n)x]\,dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(m+n)x]-\cos[(m-n)x]\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m,\ n=m=0\\ \pi & n=m\neq 0.\end{cases}$$

正交性成立条件:

1. 2π 是 $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ 的周期;
2. 积分区间的长度为 2π;

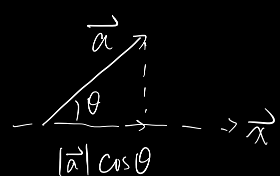
- 正交基与向量空间.

正交基: $\begin{cases}\text{跟自己内积} \neq 0\\ \text{跟其它内积} = 0.\end{cases}$

	向量空间	函数空间
元素	$[\cdots,1,2,0,3,\cdots]$	周期为2π的所有函数
正交基	$[\cdots,1,0,0,0,\cdots]$ $[\cdots,0\ 1,0,0,\cdots]$ $[\cdots,0,0,1,0,\cdots]$ $[\cdots,0,0,0,1,\cdots]$	$1,\cos(x),\sin(x),\cos(2x),\sin(2x),\cos(3x),\sin(3x),\cdots$
加减	$[\cdots,1,0,0,0,\cdots]+2[\cdots,0,1,0,0,\cdots]=[\cdots,1,2,0,0,\cdots]$	$\sin(x)+2\cos(2x)$
模	$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\cdots}$	$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\lvert f(x)\rvert^2\mathrm{dx}}$
内积	$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n+\cdots$	$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{dx}$

希尔伯特(Hilbert)空间

- 投影与坐标.



$$\langle\vec{a},\vec{x}\rangle=|\vec{a}|\cdot|\vec{x}|\cdot\cos\theta.$$

- 三角函数基的探索：

1. $\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \cdots$

$\sin(nx)$ 的模：$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx} = \sqrt{\pi}$

$\cos(nx)$ 的模：$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx} = \sqrt{\pi} \quad (n \neq 0)$

1 的模：$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi}$.

对于周期 2π 的函数 $f(x)$ 在 $\cos(2x)$ 方向的投影长度：

$$\frac{\langle f(x), \cos(2x) \rangle}{|\cos(2x)|} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x)dx}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

20210808 傅里叶级数的复数形式.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) dx \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{inx}+e^{-inx}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx} \Rightarrow \quad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n+ib_n}{2} \quad n \geq 1, \quad C_0 = a_0$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}.$$

- 系数 C_n 怎么求:

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos(nx) - i\sin(nx)]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n \geq 1)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \quad (n \geq 1) \Rightarrow C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n \leq -1)$$

$$\Downarrow$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} \quad (n\text{是整数}).$$

- $f(x)$是复数？

$$f(x) = g(x) + ih(x)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{inx} + i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{inx}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(g_n + ih_n)}_{c_n} e^{inx}.$$

这里 g_n, h_n 是实数

g_{-n}, h_{-n} 与 g_n, h_n 共轭

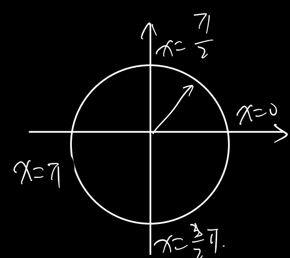
$$\overline{c_n} = \overline{g_n} - i\overline{h_n} = g_{-n} - ih_{-n}$$

$$c_{-n} = g_{-n} + ih_{-n} \neq \overline{c_n}$$

- 复数基是什么

$n=0 \qquad f(x) = e^0 = 1$

$n=1 \qquad f(x) = e^{ix}$



$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi}$$

- 复数形式下的标准正交基

$\ldots, e^{-i3x}, e^{-i2x}, e^{-ix}, 1, e^{x}, e^{2x}, \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx}\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases} \qquad \|e^{imx}\|_c = \sqrt{2\pi}.$$

- 周期函数的傅立叶变换.

周期 2π； $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

$$f(x) \xrightarrow{\text{傅立叶变换}} [\ldots, c_{-k}, c_{-k+1}, \ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots]$$

2024 0811 离散傅立叶变换.

- 从连续函数到离散函数.

$f(x)$ 周期 2π $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$.

$$\Downarrow$$

$[\underbrace{f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}}_{N个}]$ 假设 $f(n)$ 是 $f(x)$ 在一个周期内等距离采样.