



# 面向等几何分析的区域参数化方法研究

*On Domain Parameterization for Isogeometric Analysis*

大连理工大学, 数学科学学院

**纪野** 指导教师: 朱春钢 教授 & Matthias Möller 教授  
博士学位论文答辩, 海山楼 A1101, 2023 年 11 月 21 日

# 目 录

## ① 研究背景与动机

## ② 基于优化的参数化方法

- 基于障碍函数的参数化方法
- 基于惩罚函数的参数化方法

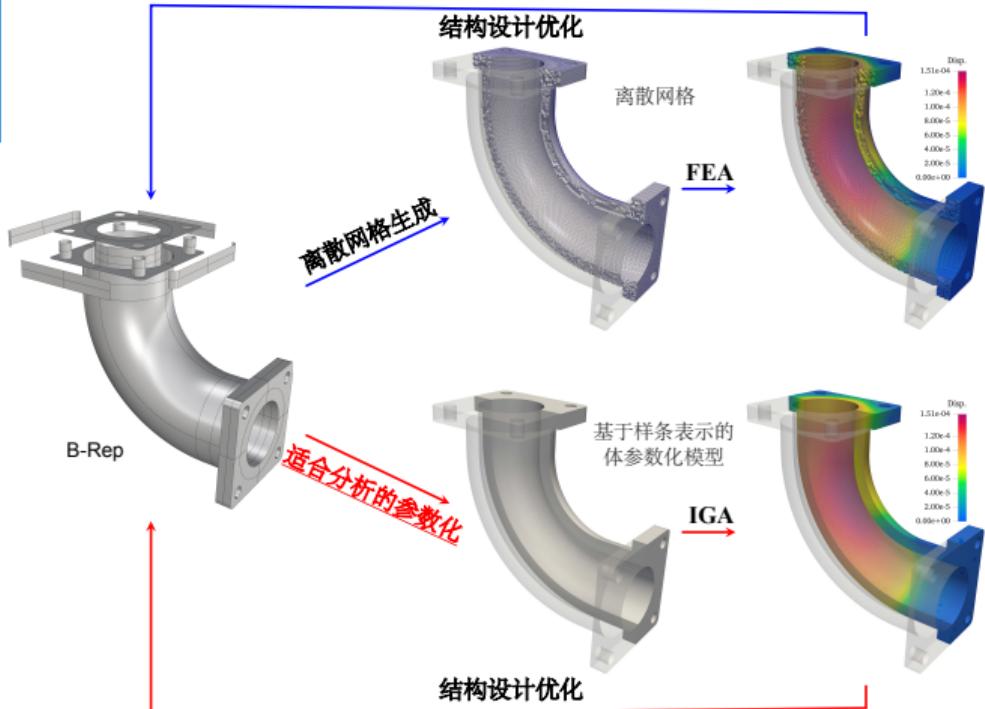
## ③ 改进的椭圆参数化方法与预条件 Anderson 加速算法

## ④ 基于样条参数化的双螺杆压缩机网格生成方法

## ⑤ 基于绝对主曲率度量和双层优化的 $r$ -自适应方法

## ⑥ 结论与展望

# 等几何分析 (IsoGeometric Analysis, IGA)



基于传统 FEA 和 IGA 的产品设计迭代流程

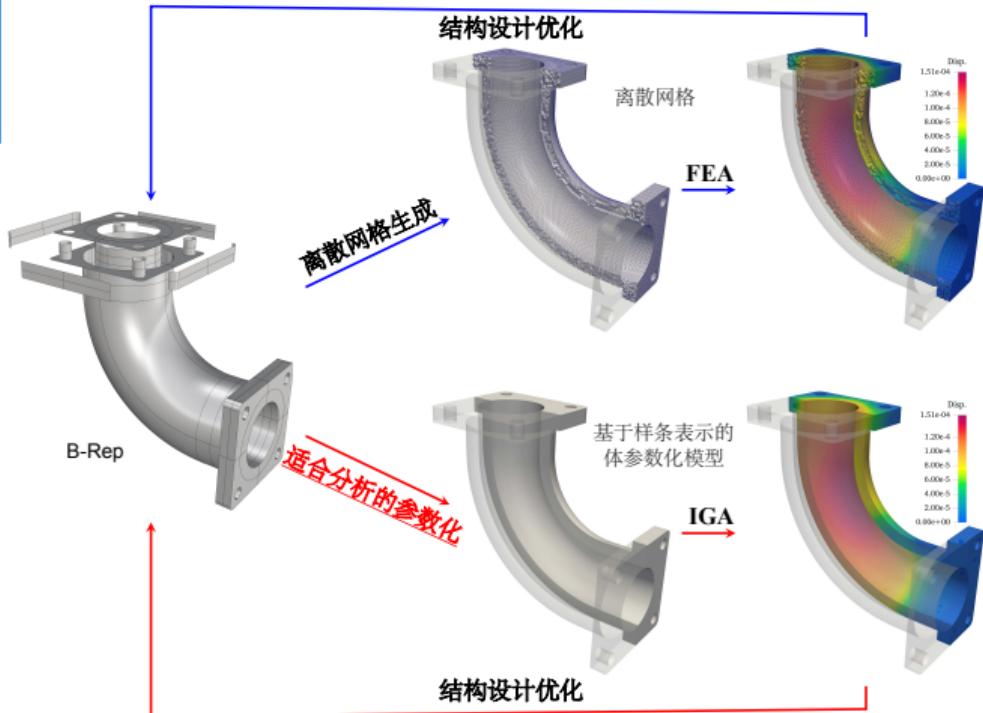
- 在基于传统有限元分析的产品设计迭代循环中, **几何处理和网格生成占 80% 以上的时间**, 且通常需要**大量人工干预**<sup>a</sup>.
- CAD 与 CAE 软件间的数据交换和兼容性问题**被列为**十大 CAD 挑战之一**<sup>b</sup>.
- 仅美国汽车行业就因设计与分析阶段的数据类型转换而**每年损失 10 亿美元**, 并导致新型汽车的推出至少推迟两个月<sup>c</sup>.

<sup>a</sup>美国 Sandia 国家实验室数据.

<sup>b</sup>Ten CAD challenges. IEEE CGA, 2005.

<sup>c</sup>美国三角研究所 1999 年报告.

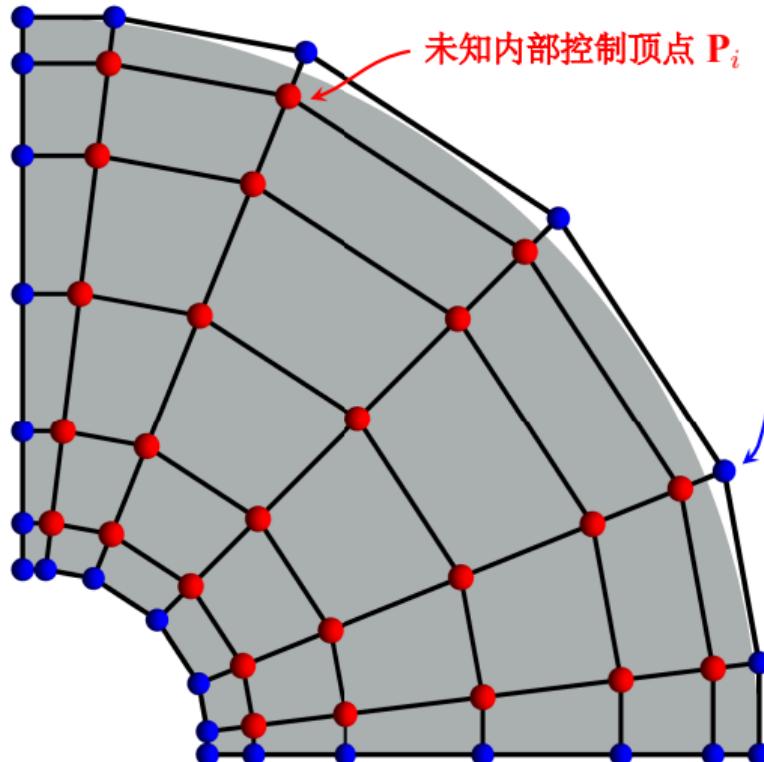
# 等几何分析 (IsoGeometric Analysis, IGA)



基于传统 FEA 和 IGA 的产品设计迭代流程

- 由美国三院院士 Thomas J.R. Hughes 等人于 2005 年提出.
- **核心思想:** 采用与表示 CAD 模型相同的基函数逼近物理场.
- IGA 的优势:
  - 一致的设计与分析模型;
  - 精确且高效的几何表示;
  - 无需额外数据类型转换;
  - 极大简化网格细化流程;
  - 高阶连续的物理场表示;
  - 优于 FEA 的逼近性质.
- 具有十分广泛的应用: 壳分析、流固耦合、形状和拓扑优化等.

# 问题描述: 区域参数化



$$x(\xi) = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_I} P_i R_i(\xi)}_{\text{未知}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{I}_B} P_j R_j(\xi)}_{\text{已知}}.$$

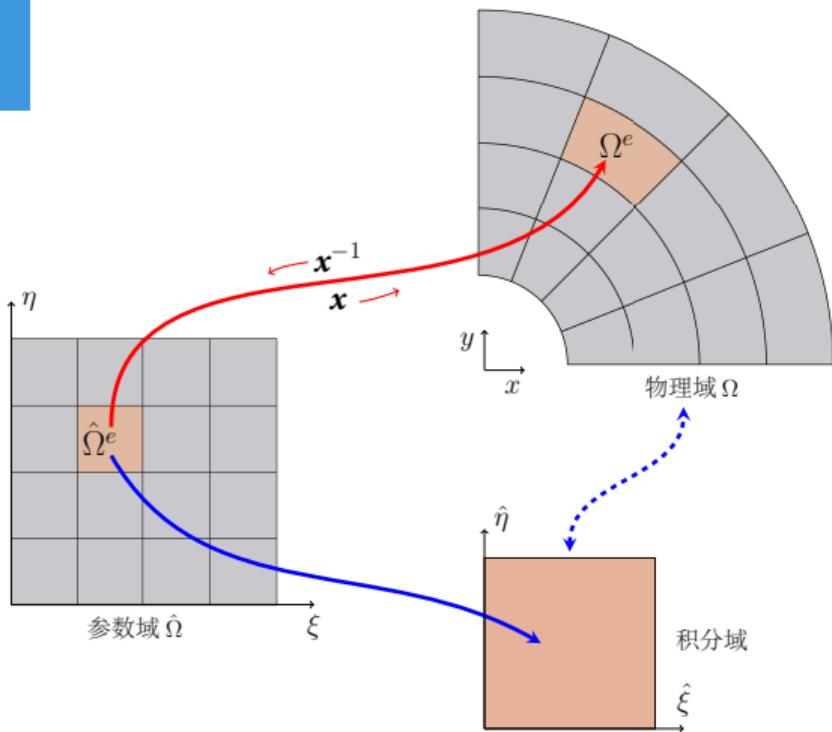
**目标:** 构造未知的内部控制顶点  $P_i$ (或基函数  $R_i(\xi)$ ) 使得参数化  $x$  是从参数域  $\hat{\Omega}$  到物理域  $\Omega$  的双射, 且具有

- 最佳的正交性和均匀性;
- 或最小的数值误差.

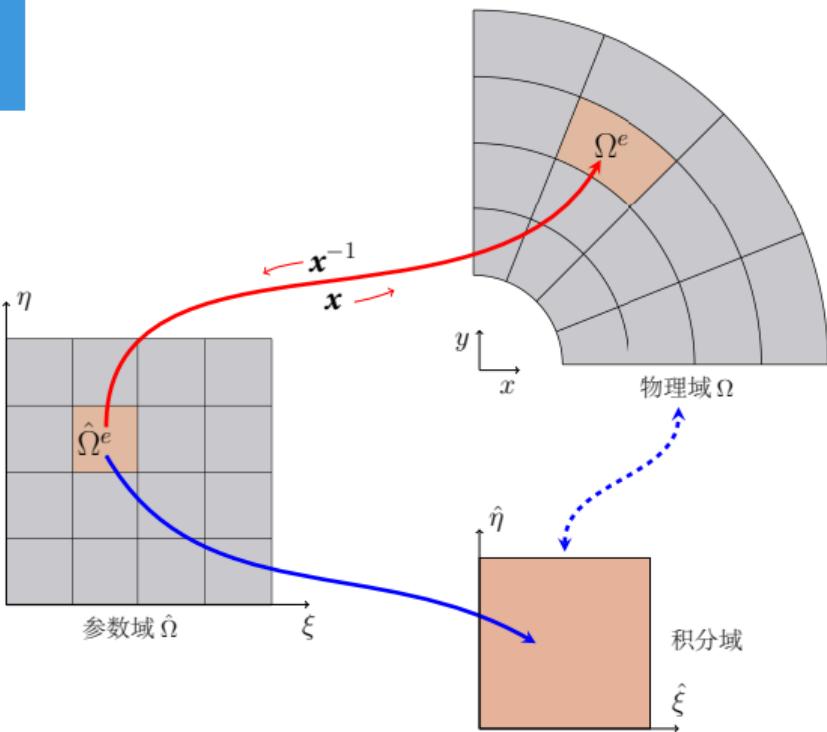
# 各向同性参数化 vs. 各向异性参数化

- 适合分析的参数化

- 首先是一个**双射** (解不唯一);

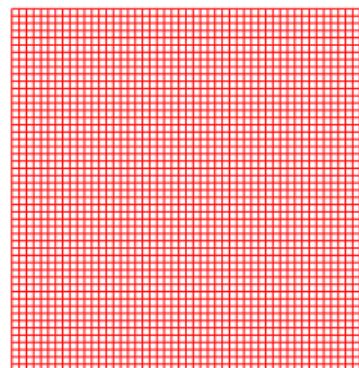


# 各向同性参数化 vs. 各向异性参数化

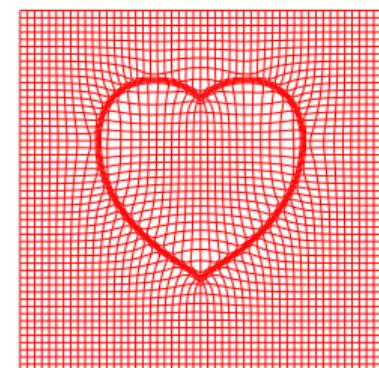


## 适合分析的参数化

- 首先是一个**双射** (解不唯一);
- 最小化角度和面积/体积扭曲:  
⇒ **各向同性参数化**;
- 或最小化数值误差:  
⇒ **各向异性参数化**.

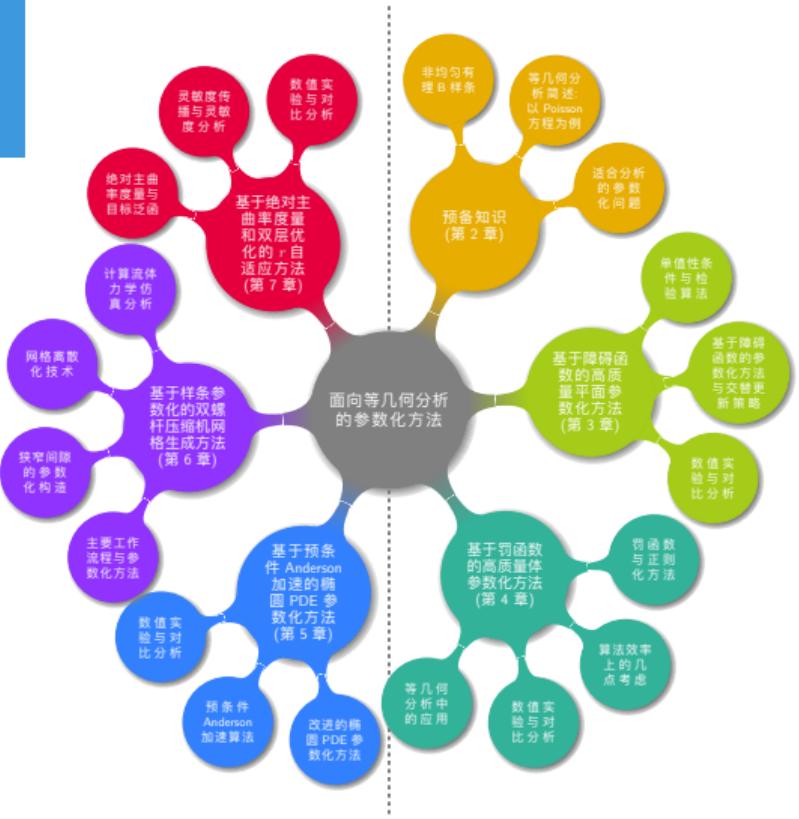


各向同性参数化



各向异性参数化

# 本论文主要内容与结构安排



- 第 1 章: 绪论.
- 第 2 章: 预备知识.
- 第 3 章: 基于障碍函数的高质量平面参数化方法.
- 第 4 章: 基于罚函数的高质量体参数化方法.
- 第 5 章: 基于预条件 Anderson 加速的椭圆 PDE 参数化方法.
- 第 6 章: 基于样条参数化的双螺杆压缩机网格生成方法.
- 第 7 章: 基于绝对主曲率度量和双层优化的  $r$  自适应方法.
- 第 8 章: 总结与展望.

# 目 录

## ① 研究背景与动机

## ② 基于优化的参数化方法

- 基于障碍函数的参数化方法**
- 基于惩罚函数的参数化方法**

## ③ 改进的椭圆参数化方法与预条件 Anderson 加速算法

## ④ 基于样条参数化的双螺杆压缩机网格生成方法

## ⑤ 基于绝对主曲率度量和双层优化的 $r$ -自适应方法

## ⑥ 结论与展望

# 目标函数项

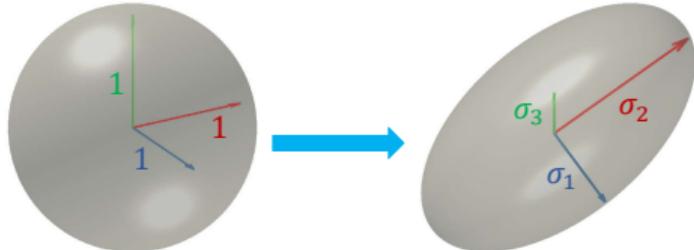
## 角度扭曲

- Most Isometric ParametrizationS (MIPS) 能量 [HG2000, Fu et al. 2015]:

$$\mathcal{E}^{\text{angle}} = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \\ \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_3} + \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right) \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} + \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right), \end{cases}$$

其中  $\sigma_i$  是雅可比矩阵  $\mathcal{J}$  的奇异值.

- 理想情况下,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_d$ .



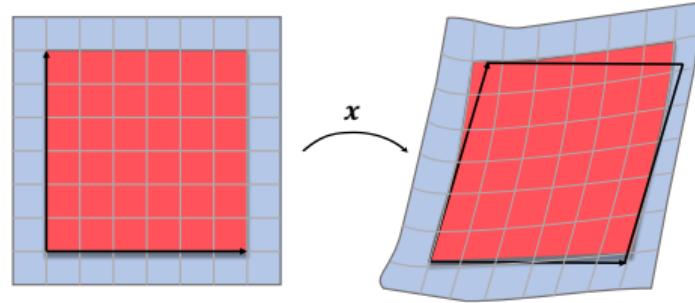
## 面积/体积扭曲

- 面积/体积扭曲能量:

$$\mathcal{E}^{\text{unif.}}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathcal{J}|}{\text{vol}(\Omega)} + \frac{\text{vol}(\Omega)}{|\mathcal{J}|},$$

其中  $\text{vol}(\Omega)$  表示物理域  $\Omega$  的面积/体积;

- 理想情况下,  $\mathcal{E}^{\text{unif.}}(\mathbf{x}) = 1$ .



# 一个自然的想法：约束优化方法

- 求解如下的约束优化问题 [Xu et al. 2011, Pan et al. 2020]:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{P}_i, i \in \mathcal{I}_I} \quad & \mathcal{E}(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Omega}} \left( \lambda_{\text{angle}} \mathcal{E}^{\text{angle}}(\mathbf{x}) + \lambda_{\text{unif.}} \mathcal{E}^{\text{unif.}}(\mathbf{x}) \right) d\hat{\Omega}, \\ \text{s.t.} \quad & |\mathcal{J}|_i > 0, \end{aligned}$$

其中  $|\mathcal{J}|_i$  是雅可比行列式  $|\mathcal{J}| = \sum_i |\mathcal{J}|_i R_i(\xi)$  中的控制系数.

- 约束优化方法的缺点:

- 由于 NURBS 不满足 Kronecker-Delta 性质, 通常难以事先预测雅可比行列式的下界;

# 一个自然的想法：约束优化方法

- 求解如下的约束优化问题 [Xu et al. 2011, Pan et al. 2020]:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{P}_i, i \in \mathcal{I}_I} \quad & \mathcal{E}(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Omega}} \left( \lambda_{\text{angle}} \mathcal{E}^{\text{angle}}(\mathbf{x}) + \lambda_{\text{unif.}} \mathcal{E}^{\text{unif.}}(\mathbf{x}) \right) d\hat{\Omega}, \\ \text{s.t.} \quad & |\mathcal{J}|_i > 0, \end{aligned}$$

其中  $|\mathcal{J}|_i$  是雅可比行列式  $|\mathcal{J}| = \sum_i |\mathcal{J}|_i R_i(\xi)$  中的控制系数.

- 约束优化方法的缺点:

- 由于 NURBS 不满足 Kronecker-Delta 性质, 通常难以事先预测雅可比行列式的下界;
- 更糟糕的是, 非线性约束的数量极其多!**  
(对于一个  $20 \times 20$  双三次平面 NURBS 参数化, 约束数量超过 **34k**)

↙ [Pan et al. 2020, Ji et al. 2021].

# 等价问题：无约束优化问题

- 回想平面 MIPS 能量,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2D}^{\text{angle}}(\mathbf{x}) &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} \\ &= \frac{\text{trace}(\mathcal{J}^T \mathcal{J})}{|\mathcal{J}|}.\end{aligned}$$

- 当  $|\mathcal{J}| \rightarrow 0$  时, MIPS 能量 **趋向于无穷**.

# 等价问题：无约束优化问题

- 回想平面 MIPS 能量,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2D}^{\text{angle}}(\mathbf{x}) &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} \\ &= \frac{\text{trace}(\mathcal{J}^T \mathcal{J})}{|\mathcal{J}|}.\end{aligned}$$

- 当  $|\mathcal{J}| \rightarrow 0$  时, MIPS 能量 **趋向于无穷**.
- 观察: 采用的优化求解器配有线搜索准则以保证目标函数充分下降.

# 等价问题：无约束优化问题

- 回想平面 MIPS 能量,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2D}^{\text{angle}}(\mathbf{x}) &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} \\ &= \frac{\text{trace}(\mathcal{J}^T \mathcal{J})}{|\mathcal{J}|}.\end{aligned}$$

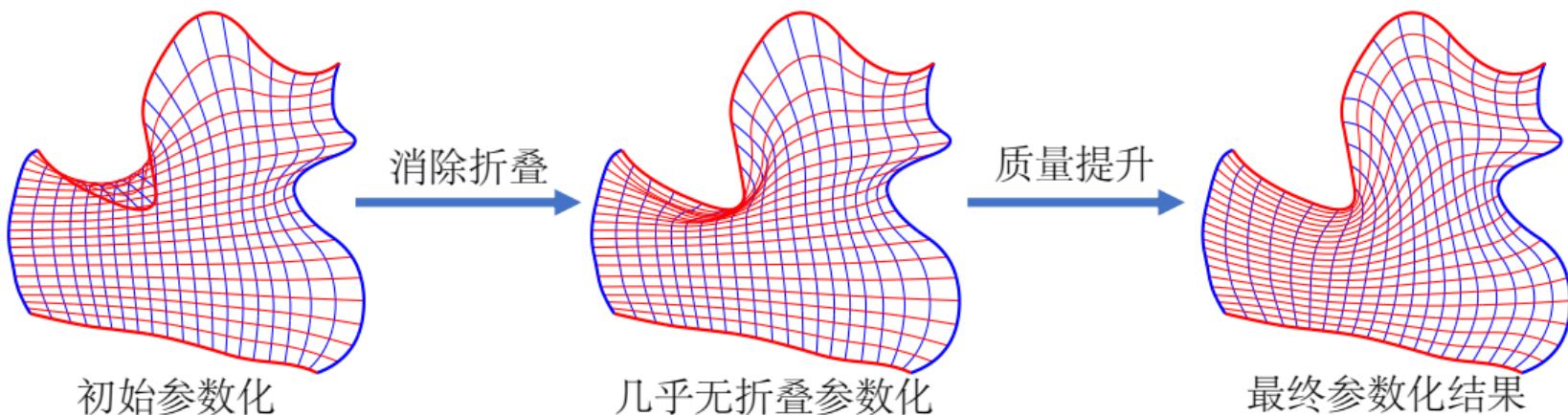
- 当  $|\mathcal{J}| \rightarrow 0$  时, MIPS 能量 **趋向于无穷**.
- 观察: 采用的优化求解器配有线搜索准则以保证目标函数充分下降.
- 求解如下**无约束优化问题**

$$\min_{\mathbf{P}_i, i \in \mathcal{I}_I} \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Omega}} \left( \lambda_{\text{angle}} \mathcal{E}^{\text{angle}}(\mathbf{x}) + \lambda_{\text{vol}} \mathcal{E}^{\text{vol}}(\mathbf{x}) \right) d\hat{\Omega}.$$

- 避免计算控制系数  $|\mathcal{J}|_i$ .
- 前提条件: 一个已经是双射的初始参数化.

# 基于障碍函数的参数化方法

- **第一步: 初始化**
  - 利用计算代价较低的代数参数化方法, 如离散 Coons 方法.
- **第二步: 消除折叠**
  - 消除初始参数化中可能存在的折叠.
- **第三步: 参数化质量提升**
  - 提升前一步参数化结果的质量.

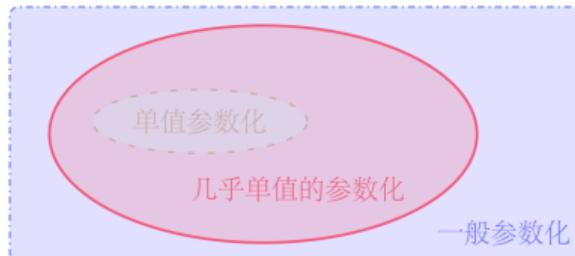


# 消除折叠与参数化质量提升

- 求解如下的优化问题:

$$\arg \min_{\mathbf{P}_i, i \in \mathcal{I}_I} E(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Omega}} \max(0, \delta - |\mathcal{J}|) \, d\hat{\Omega},$$

其中  $\delta$  是用户指定的参数 (默认值  $\delta = 5\% vol(\Omega)$ ).



# 消除折叠与参数化质量提升

- 求解如下的优化问题:

$$\arg \min_{\mathbf{P}_i, i \in \mathcal{I}_I} E(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Omega}} \max(0, \delta - |\mathcal{J}|) d\hat{\Omega},$$

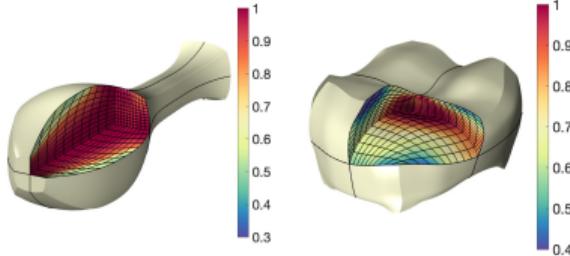
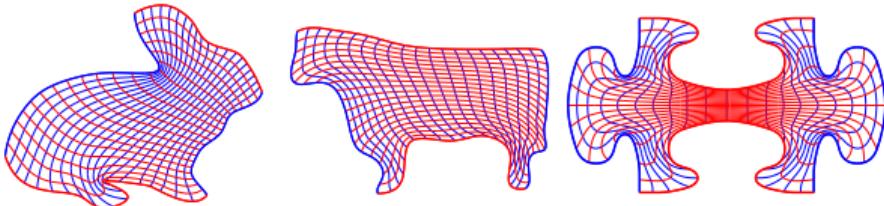
其中  $\delta$  是用户指定的参数 (默认值  $\delta = 5\% vol(\Omega)$ ).

- 参数化质量提升 (提升算法鲁棒性):

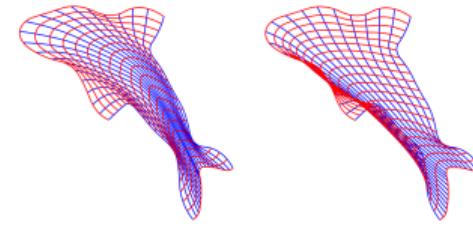
$$\mathcal{E}^c = \begin{cases} \int_{\hat{\Omega}} (\lambda_{\text{angle}} \mathcal{E}^{\text{angle}}(\mathbf{x}) + \lambda_{\text{vol}} \mathcal{E}^{\text{vol}}(\mathbf{x})) d\hat{\Omega}, & \min |\mathcal{J}| > 0, \\ +\infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

- 交替更新内部控制顶点和权因子.

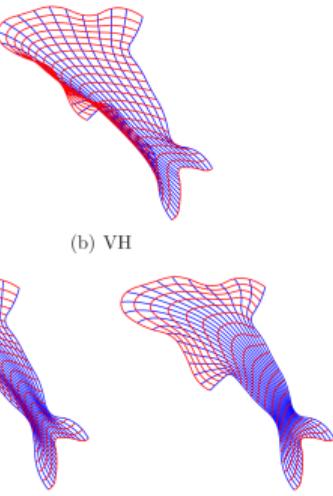
# 参数化结果 & 与现有方法对比



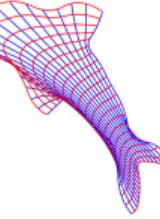
参数化结果



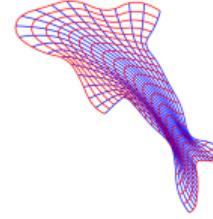
(a) NCO



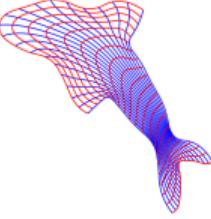
(b) VH



(c) T-Map



(d) LRQC



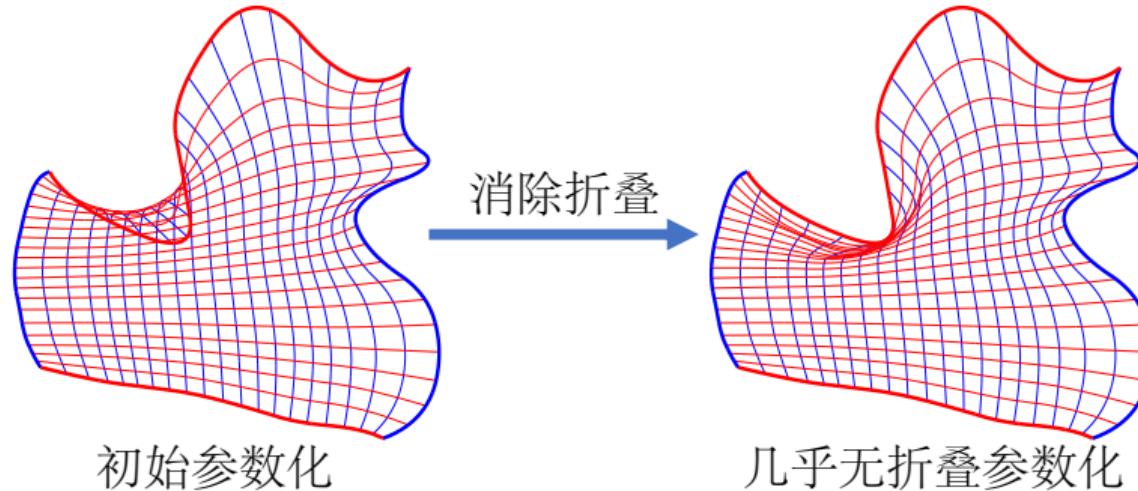
(e) Ours

与现有方法对比

- NCO: 非线性约束优化方法 [Xu et al. 2011];
- VH: 变分调和方法 [Xu et al. 2013];
- T-Map: Teichmüller 映射方法 [Nian & Chen 2016];
- LRQC: 低秩拟共形映射方法 [Pan et al. 2018].

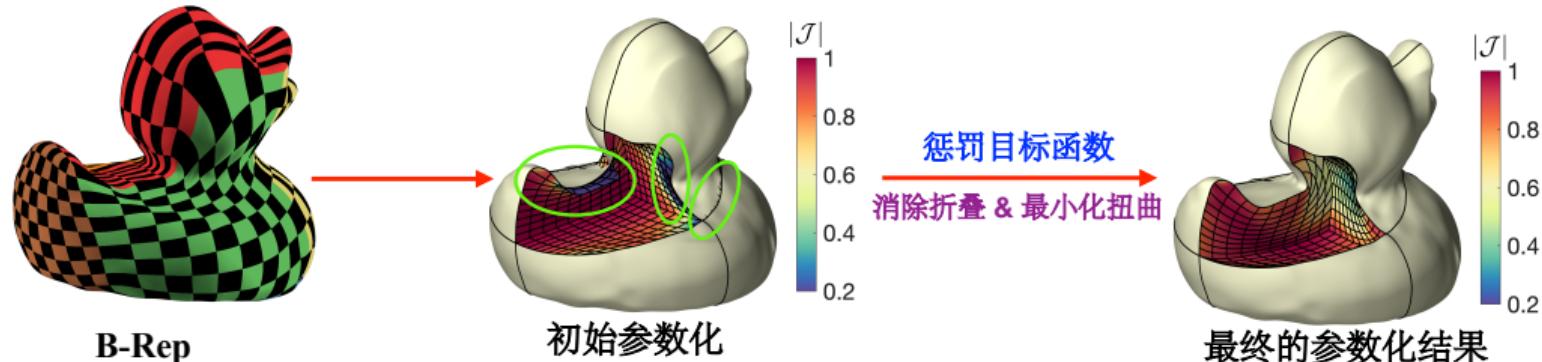
# 基于惩罚函数的参数化方法

- 消除折叠步通常是有必要的，但是对参数化质量提升并不明显。
- 能否跳过消除折叠这一步？



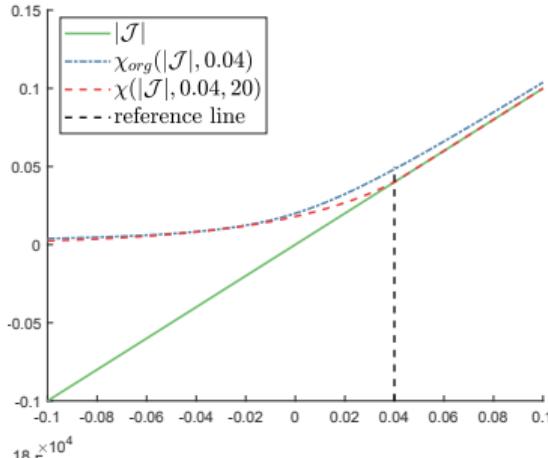
# 基于惩罚函数的参数化方法

- 消除折叠步通常是有必要的, 但是对参数化质量提升并不明显.
- 能否跳过消除折叠这一步?



- 当然可以! 同时消除折叠和极小化扭曲!!!

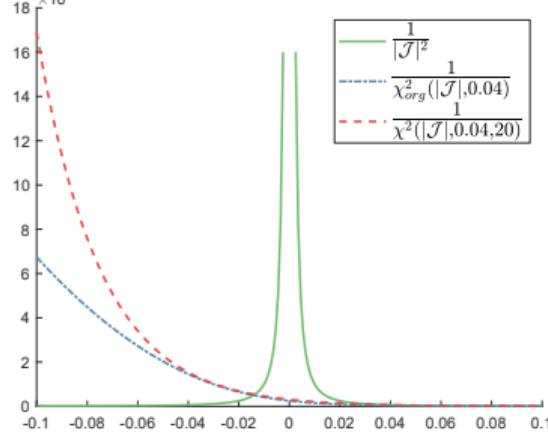
# 核心思想：惩罚函数



- 惩罚函数：

$$\chi(|J|, \varepsilon, \beta) = \begin{cases} \varepsilon \cdot e^{\beta(|J| - \varepsilon)} & \text{if } |J| \leq \varepsilon \\ |J| & \text{if } |J| > \varepsilon \end{cases},$$

其中  $\varepsilon > 0$  是一个很小的正数,  $\beta$  是惩罚因子;



- 当  $|J| < 0$  时,  $\chi$  趋向于  $\varepsilon$ , 否则严格等于  $|J|$ .
- $\frac{1}{\chi^2(|J|, \varepsilon, \beta)}$ 
  - 具有较大的值**惩罚负的雅可比**;
  - 具有较小的值**接收正的雅可比**;

# 雅可比正则化 & 修正的目标函数

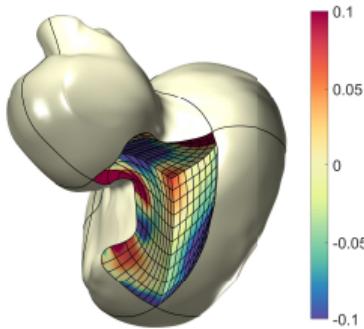
- 仅需求解一个优化问题:

$$\begin{aligned}\arg \min_{\mathbf{P}_i, i \in \mathcal{I}_I} \mathcal{E}^c &= \int_{\hat{\Omega}} (\lambda_{\text{mips}} \mathcal{E}_{\text{mips}}^c + \lambda_{\text{vol}} \mathcal{E}_{\text{vol}}^c) d\hat{\Omega} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \left( \frac{\lambda_{\text{mips}}}{8} \kappa_F^2(\mathcal{J}) \cdot \frac{|\mathcal{J}|^2}{\chi^2(|\mathcal{J}|, \varepsilon, \beta)} + \lambda_{\text{vol}} \left( \frac{\text{vol}(\Omega)}{\chi(|\mathcal{J}|, \varepsilon, \beta)} + \frac{\chi(|\mathcal{J}|, \varepsilon, \beta)}{\text{vol}(\Omega)} \right) \right) d\hat{\Omega},\end{aligned}$$

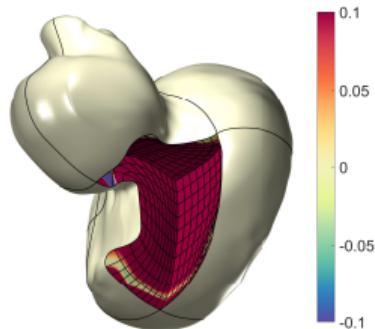
其中  $\mathbf{P}_i, i \in \mathcal{I}_I$  是未知的内部控制顶点.

- 快速计算方法:
  - 全解析的梯度计算公式;
  - 减缩积分策略;
  - 预算算技术和 look-up table.

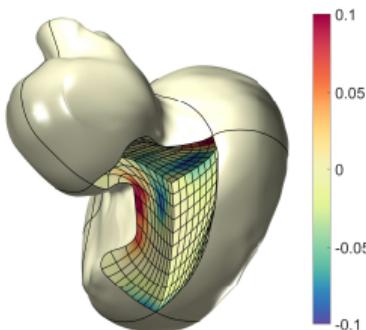
# 参数化质量对比



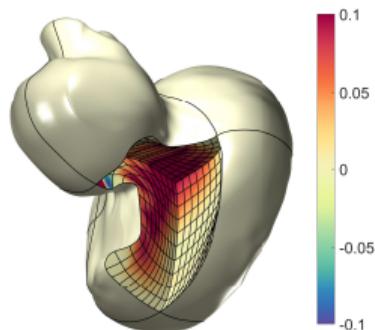
$$m_{SJ}^{Ours} - m_{SJ}^{Pan}$$



$$m_{unif.}^{Pan} - m_{unif.}^{Ours}$$



$$m_{SJ}^{Ours} - m_{SJ}^{Liu}$$



$$m_{unif.}^{Liu} - m_{unif.}^{Ours}$$

- Pan et al. 2020 <sup>a</sup> 和 Liu et al. 2020 <sup>b</sup>.
- 左图中正值 (红色部分) 代表本文方法表现优于其他方法.

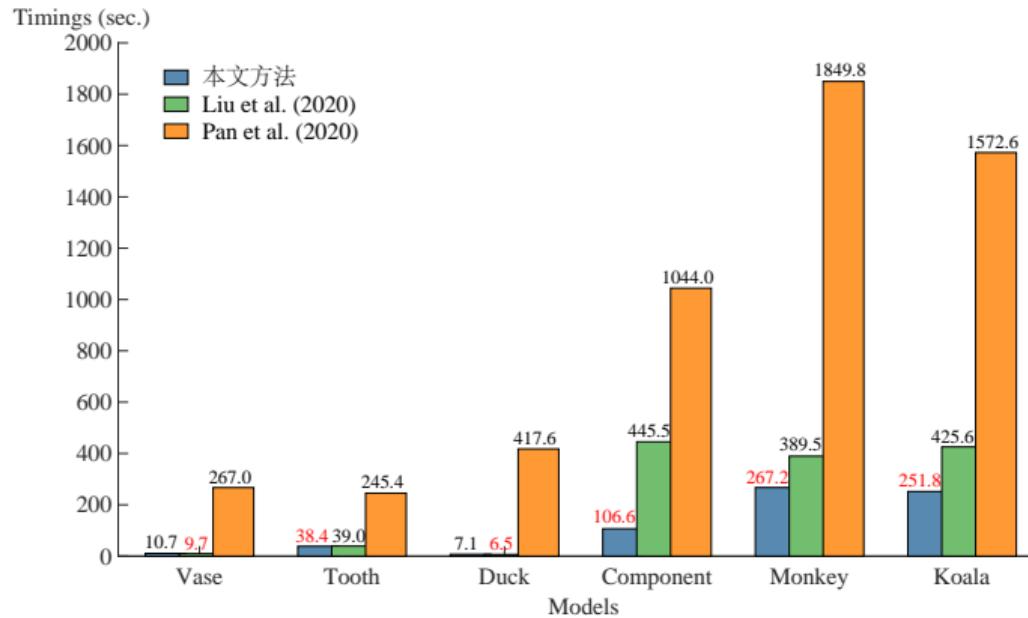
---

<sup>a</sup>Pan, M., Chen, F., & Tong, W. (2020). Volumetric spline parameterization for isogeometric analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 359, 112769.

<sup>b</sup>Liu, H., Yang, Y., Liu, Y., & Fu, X. M. (2020). Simultaneous interior and boundary optimization of volumetric domain parameterizations for IGA. Computer Aided Geometric Design, 79, 101853.

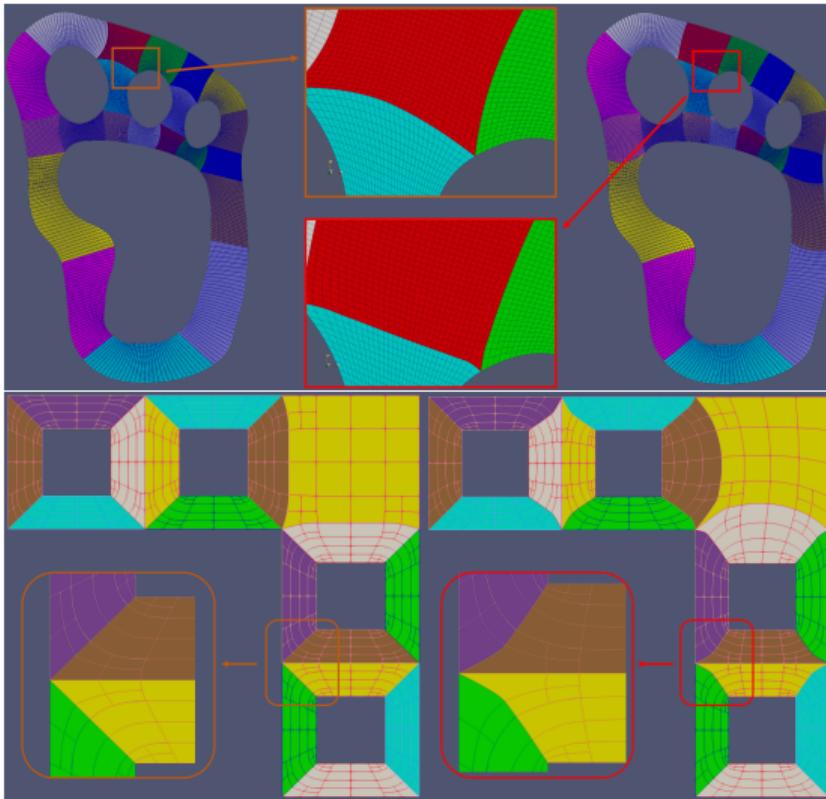
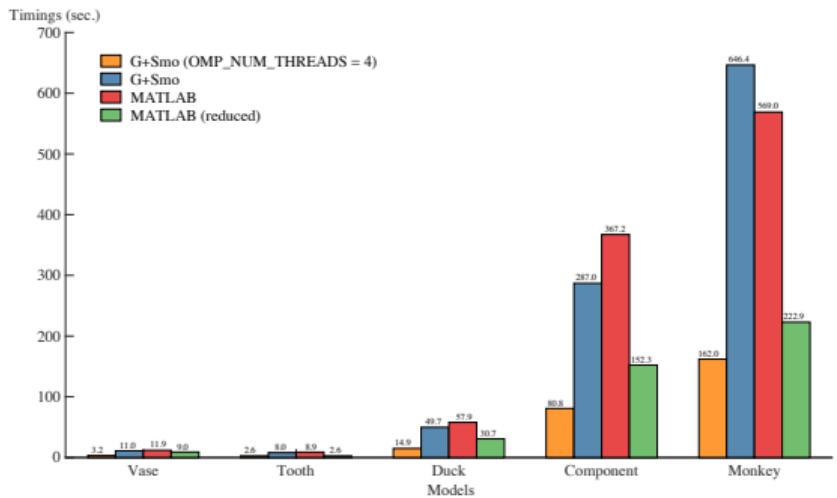
# 计算效率对比

- 计算效率上明显优于 Pan et al. 2020, 因为无需考虑非线性约束.
- 大规模模型上优于 Liu et al. 2020.
- 算法实现中, 我们使用 MATLAB vs. 其他方法使用 C++.



# 开源 G+Smo 实现

- 在开源的 G+Smo 实现中, **3-4x 加速**;
- 完全支持多片和 THB 样条参数化;
- 开源代码:  [G+Smo](#).



# 目 录

- ① 研究背景与动机
- ② 基于优化的参数化方法
  - 基于障碍函数的参数化方法
  - 基于惩罚函数的参数化方法
- ③ 改进的椭圆参数化方法与预条件 Anderson 加速算法
- ④ 基于样条参数化的双螺杆压缩机网格生成方法
- ⑤ 基于绝对主曲率度量和双层优化的  $r$ -自适应方法
- ⑥ 结论与展望

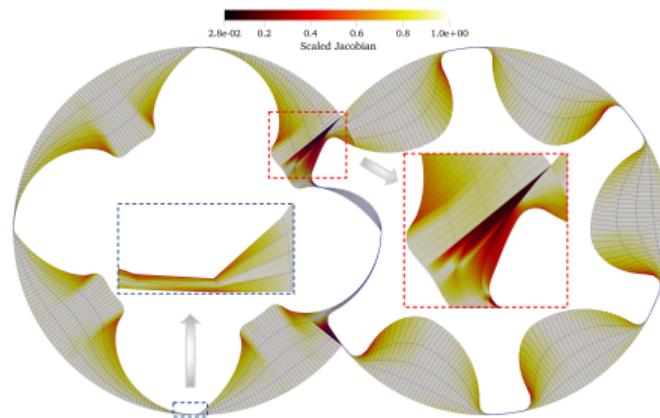
# 旋转式双螺杆压缩机

旋转式双螺杆压缩机 source

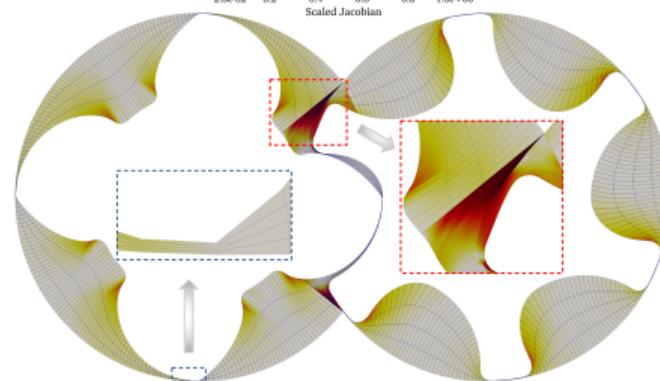
---

<sup>a</sup> Ji et al. (2022). Penalty function-based volumetric... Computer Aided Geometric Design, 94, 102081.

<sup>b</sup> Hinz et al. (2018). Elliptic grid generation techniques... Computer Aided Geometric Design, 65, 48-75.



惩罚函数方法 <sup>a</sup>

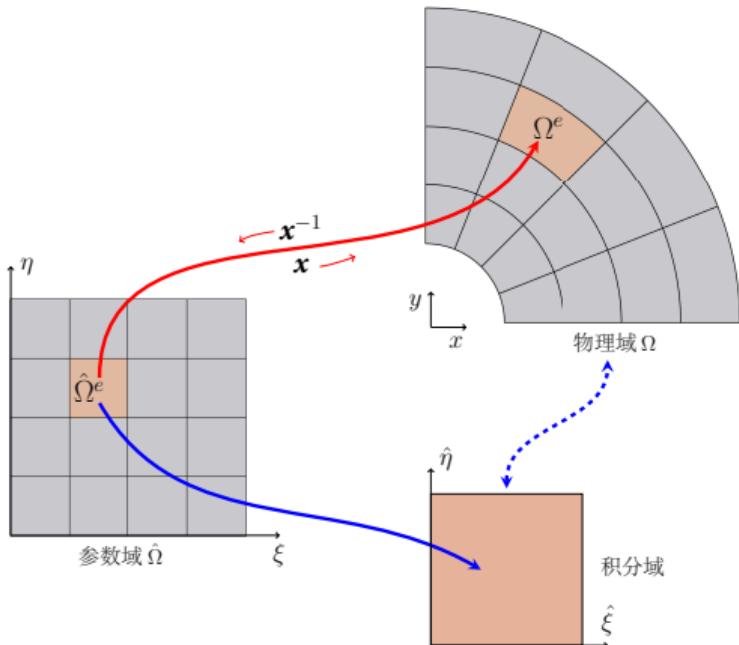


椭圆网格生成方法 <sup>b</sup>

# 椭圆网格生成方法

- 计算一个拟调和映射  $x: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbb{A}(x) \nabla \xi(x)) = 0 \\ \nabla \cdot (\mathbb{A}(x) \nabla \eta(x)) = 0 \end{cases} \quad \text{s.t. } x^{-1}|_{\partial\Omega} = \partial\hat{\Omega}.$$



- 调和映射  $x^{-1}$  的解存在且唯一, 如果<sup>a</sup>:
  - $\hat{\Omega}$  的曲率是非正的;
  - 边界  $\partial\hat{\Omega}$  关于  $\Omega$  上的度量是凸的.
- Radó-Kneser-Choquet 定理: 唯一解  $x^{-1}$  是一一映射 (雅可比行列式非零)<sup>b</sup>.

<sup>a</sup>Eells, J., & Lemaire, L., (1978). A report on harmonic maps. Bulletin of the London mathematical society, 10(1):1–68.

<sup>b</sup>Duren, P., & Hengartner, W., (1997). Harmonic mappings of multiply connected domains. Pac. J. Math. 180, 201–220.

# 椭圆参数化方法及其离散

- 令  $\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ , 得到如下向量值二阶非线性 PDE [J.P. Hinz 2020]

$$\forall R_i \in \Sigma_0 : \begin{cases} \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{R} \tilde{\mathcal{L}}x \, d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \\ \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{R} \tilde{\mathcal{L}}y \, d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{s.t. } \mathbf{x}|_{\partial\hat{\Omega}} = \partial\Omega,$$

其中

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}}{g_{11} + g_{22}}, \quad \mathcal{L} = g_{22} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

# 椭圆参数化方法及其离散

- 令  $\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ , 得到如下向量值二阶非线性 PDE [J.P. Hinz 2020]

$$\forall R_i \in \Sigma_0 : \begin{cases} \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{R} \tilde{\mathcal{L}}x \, d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \\ \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{R} \tilde{\mathcal{L}}y \, d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{s.t. } \mathbf{x}|_{\partial\hat{\Omega}} = \partial\Omega,$$

其中

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}}{g_{11} + g_{22}}, \quad \mathcal{L} = g_{22} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

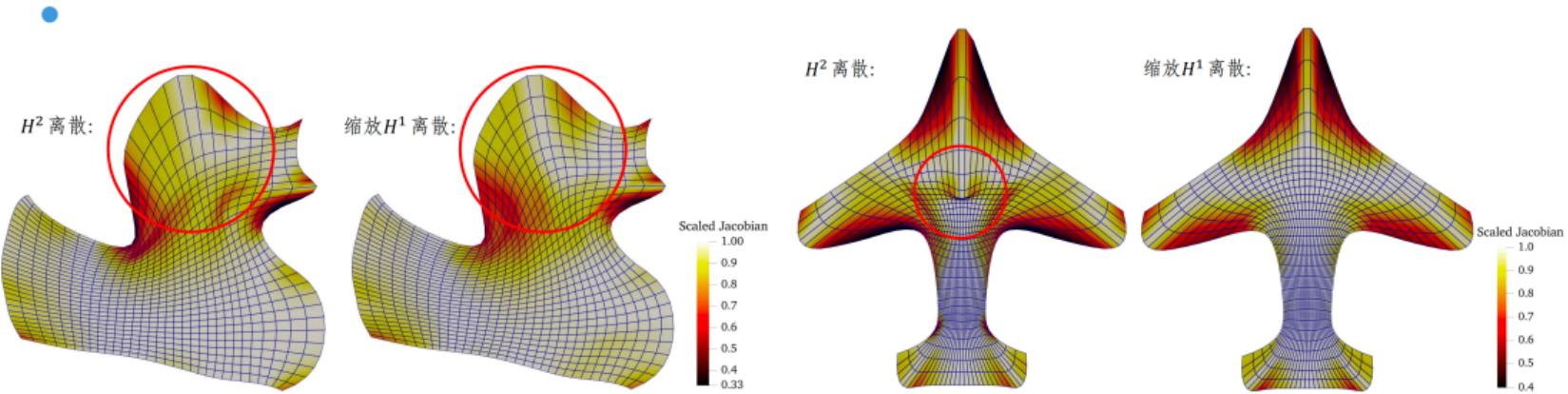
- 取度量张量  $\mathbb{A}(\mathbf{x}) = \text{diag}(1/|\mathcal{J}|, 1/|\mathcal{J}|)$ , 其在 Sobolev 空间  $H^1$  中的变分公式为

$$\forall R_i \in \Sigma_0 : \begin{cases} \mathbf{F}_{H^1}^x = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_{H^1}^y = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \text{s.t. } \mathbf{x}|_{\partial\hat{\Omega}} = \partial\Omega.$$

其中

$$\mathbf{F}_{H^1}^x = \int_{\hat{\Omega}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \xi \, d\hat{\Omega}, \quad \mathbf{F}_{H^1}^y = \int_{\hat{\Omega}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \eta \, d\hat{\Omega},$$

# 椭圆参数化方法及其离散



# Anderson 加速算法 (D.G. Anderson, 1965)

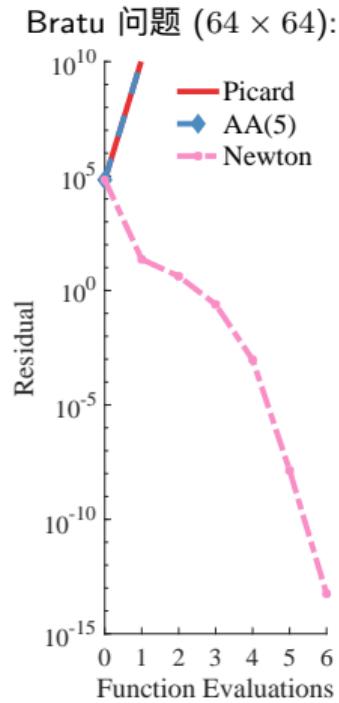
- 与经典的 Picard 方法不同, AA( $m$ )**在最小二乘意义下最小化前  $m$  次迭代的线性化不动点残差  $\mathcal{F}$ .**

---

## Algorithm AA: Anderson 加速算法

---

- 1 给定  $u_0$  和**窗口尺寸**  $m \geq 1$ ;
  - 2 令  $u_1 = \mathcal{G}(u_0)$ ;
  - 3 **for**  $k = 1, 2, \dots, itmax$  直到  $\|\mathcal{F}_k\| < tol$  **do**
  - 4   令  $m_k = \min\{\mathfrak{m}, k\}$ ;
  - 5   求解  $\alpha^{(k)} = (\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{m_k}^{(k)})^T$  使得
  - 6     
$$\arg \min_{\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m_k})^T} \left\| \sum_{i=0}^{m_k} \mathcal{F}_{k-m_k+i} \alpha \right\|_2^2, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=0}^{m_k} \alpha_i = 1;$$
  - 7   更新  $u_{k+1} = \sum_{i=0}^{m_k} \alpha_i^{(k)} \mathcal{G}_{k-m_k+i}$ ;
- 



# 引入预条件子增强算法稳定性

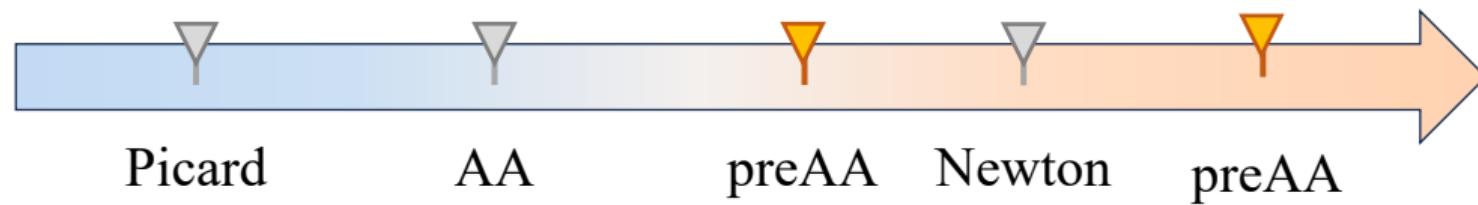
## 预条件策略

在固定点迭代格式中引入一个**动态的预条件子**:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \mathcal{M}_k^{-1} \mathcal{F}_k,$$

其中  $\mathcal{M}_k$  是一个非奇异矩阵.

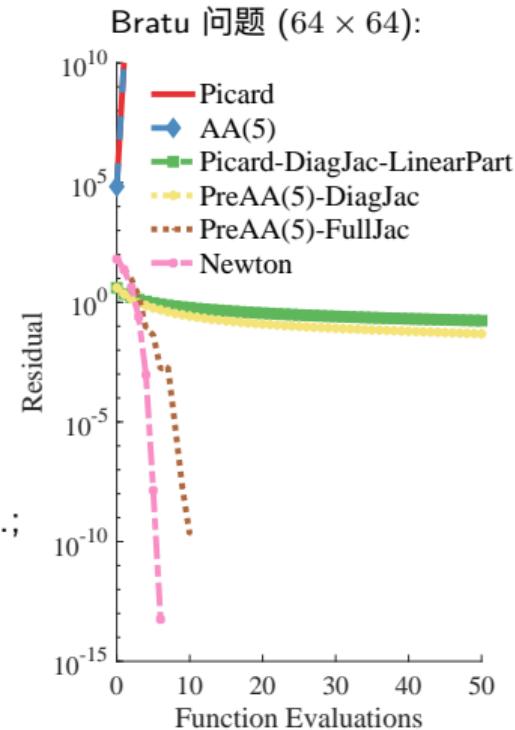
- **理想的预条件子:** 尽可能接近  $jac(\mathcal{F})$ , 但应该计算高效.
- 提供了更多的灵活性, 如常数预条件子  $\alpha I$ , 对角雅可比  $diagJac(\mathcal{F})$ , 上(下)三角雅可比  $TriU(jac(\mathcal{F}))$  和块对角雅可比  $diagBlockJac(\mathcal{F})$ .
- **延迟更新策略:** 降低更新雅可比矩阵的频率.



# PreAA: 预条件 Anderson 加速算法

## Algorithm PreAA: preAA

```
1 给定  $u_0$  和窗口尺寸  $m \geq 1$ ;  
2 令  $u_1 = \mathcal{G}(u_0)$ ;  
3 for  $k = 1, 2, \dots, itmax$  直到  $\|\mathcal{F}(u)\| < tol$  do  
    // 更新预条件子  
    if  $k$  能被  $N_{update}$  整除 then  
        更新预条件子  $\mathcal{M}_k$ ;  
    令  $m_k = \min\{m, k\}$ ;  
    计算  $\mathcal{E}_k$  使得  $\mathcal{M}_k \mathcal{E}_k = -\mathcal{F}_k$ ;  
    求解  $\alpha^{(k)} = (\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{m_k}^{(k)})^T$  使得  
    
$$\arg \min_{\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m_k})^T} \left\| \sum_{i=0}^{m_k} \mathcal{E}_{k-m_k+i} \alpha \right\|_2^2, \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=0}^{m_k} \alpha_i = 1.;$$
  
    更新  $u_{k+1} = \sum_{i=0}^{m_k} \alpha_i^{(k)} (u_{k-m_k+i} + \mathcal{E}_{k-m_k+i})$ ;
```



# 算法收敛性结果

## 残差界估计

假设非奇异预条件子  $\mathcal{M}_k$  满足  $\|\mathbf{I} - \mathcal{M}_k^{-1} \mathcal{J}_k\| \leq L_k$ , 那么预条件 Anderson 加速算法的误差满足如下估计

$$\|e_{k+1}\| \leq \mathcal{C} \sum_{j=0}^m \|e_{k-j}\|,$$

其中  $\mathcal{C} = \max\{L_k, L_{k-1}, \dots, L_{k-m}\} \cdot \max\{2\|\Gamma_k\|_\infty, 1 + \|\Gamma_k\|_\infty\}$  且  $\Gamma_k = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)^T$ .

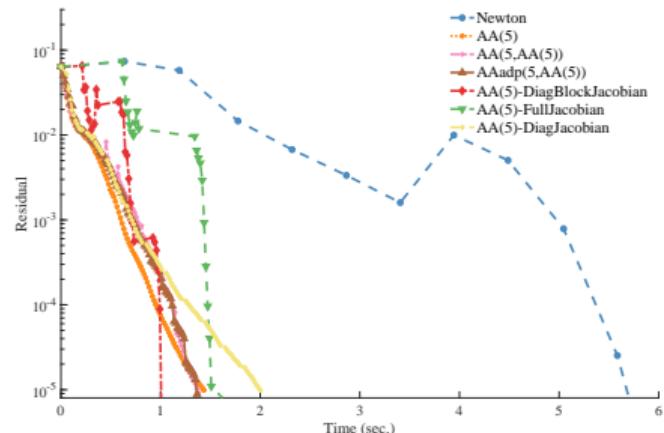
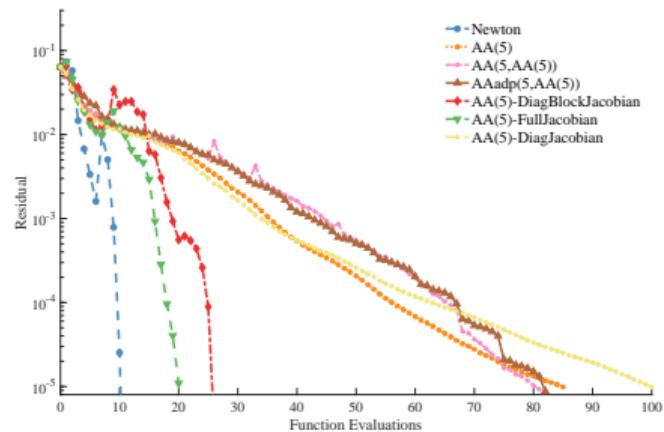
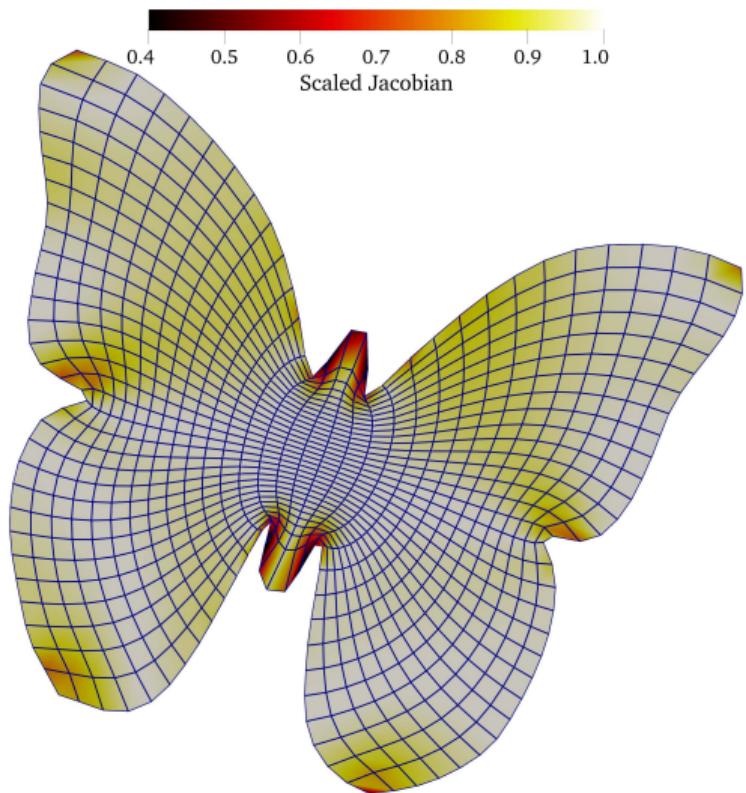
## 算法收敛性结果

如果非奇异预条件子  $\mathcal{M}_k$  充分接近非线性方程组的雅可比矩阵  $\text{jac}(\mathcal{F})$ , 使得

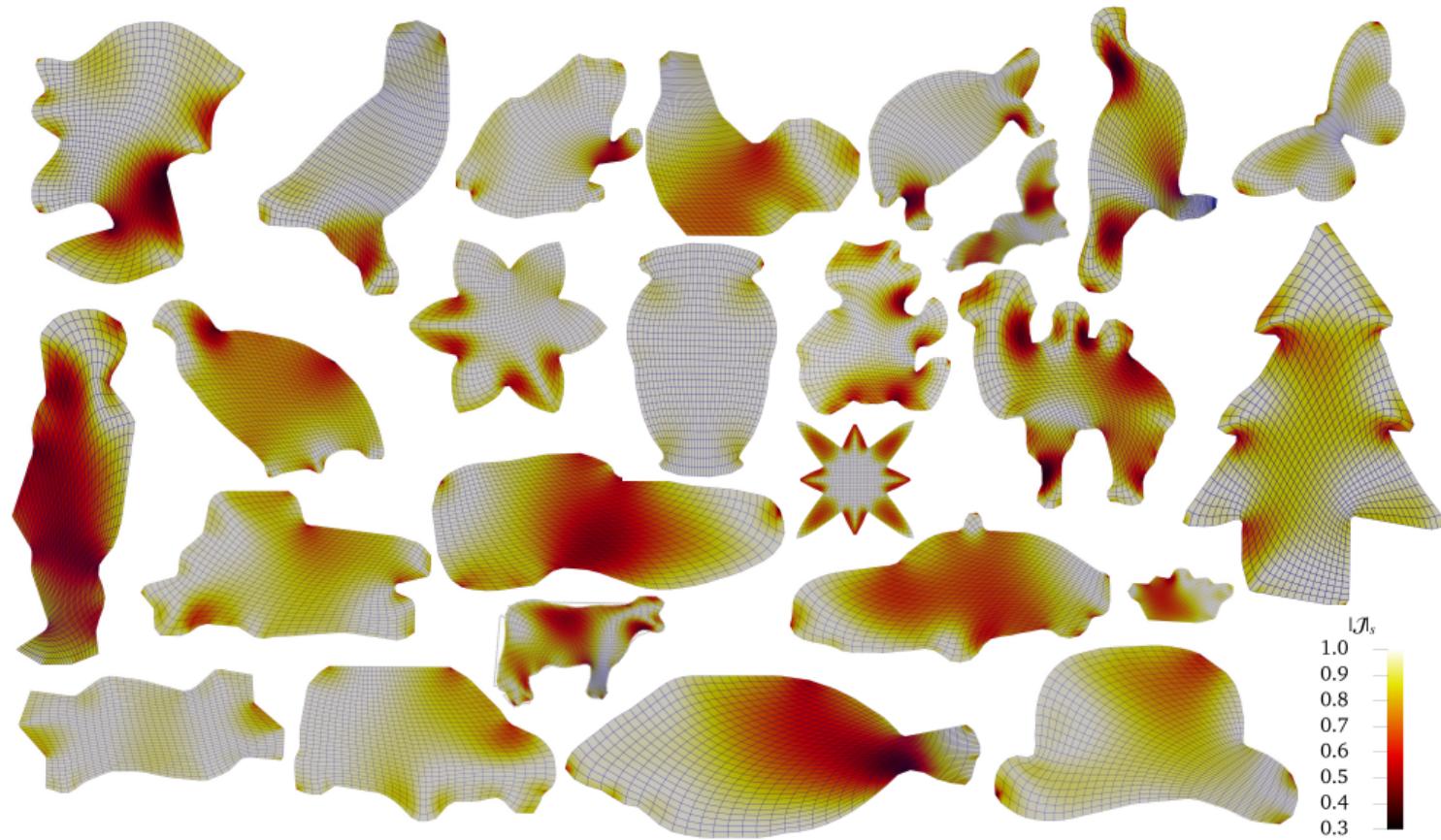
$$\|\mathbf{I} - \mathcal{M}_k^{-1} \mathcal{J}_k\| \leq L_k < 1,$$

则预条件 Anderson 加速算法 PreAA(m) 收敛.

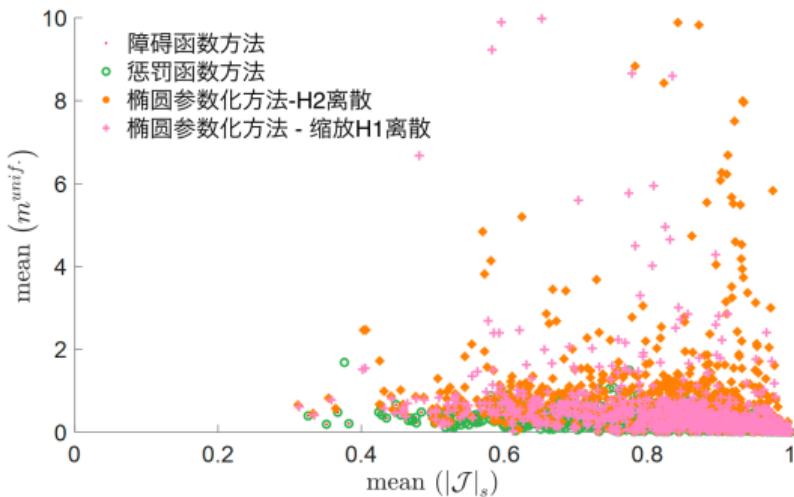
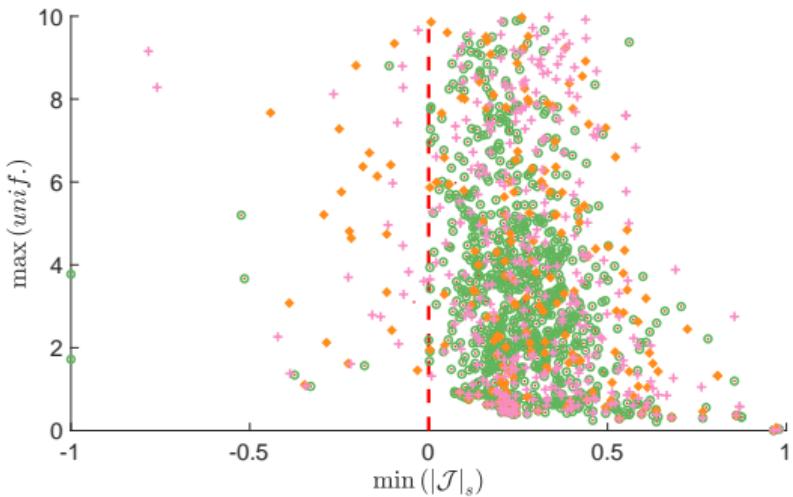
# 蝴蝶算例：算法对比



# 平面参数化测试集 (977 模型)



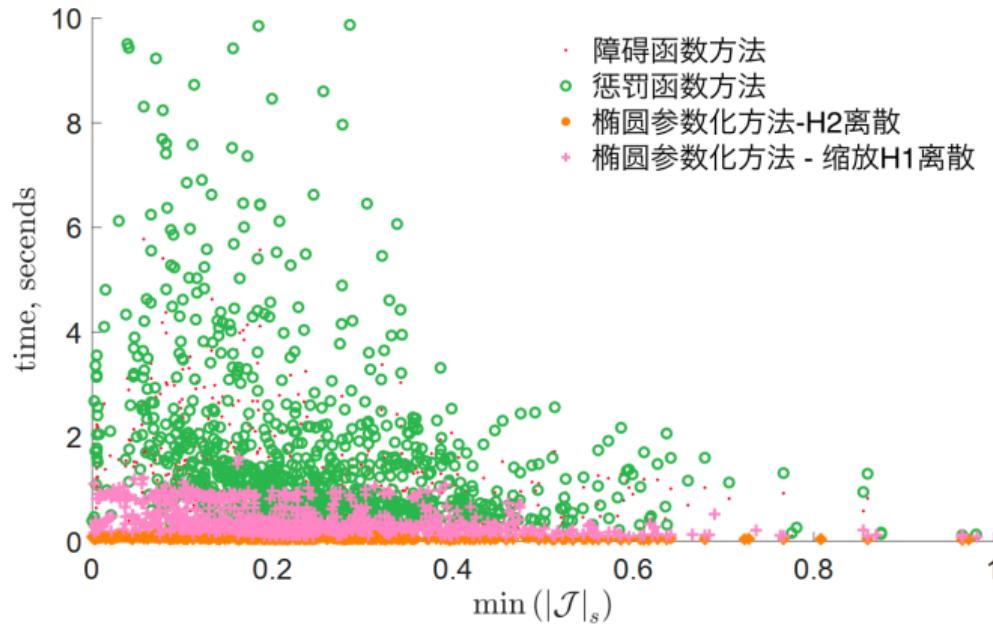
# 有效性和参数化质量



## 成功率:

- PDE -  $H^2$  离散 [Hinz et al. 2018]:  $608/977 \simeq 62.23\%$ ;
- PDE - 缩放  $H^1$  离散 [Ji et al. 2023]:  $721/977 \simeq 73.80\%$ ;
- 基于障碍函数的参数化方法 [Ji et al. 2021]:  $961/977 \simeq \mathbf{98.36\%}$ ;
- 基于惩罚函数的参数化方法 [Ji et al. 2022]:  $956/977 \simeq 97.85\%$ .

# 计算效率对比



- 个人笔记本电脑: PDE 方法  $\sim 0.2$  sec., 优化方法  $\sim 2$  sec. (DOFs=1250)
- 基于 PDE 的参数化方法更高效. 原因? 策略.

# 目 录

## ① 研究背景与动机

## ② 基于优化的参数化方法

- 基于障碍函数的参数化方法
- 基于惩罚函数的参数化方法

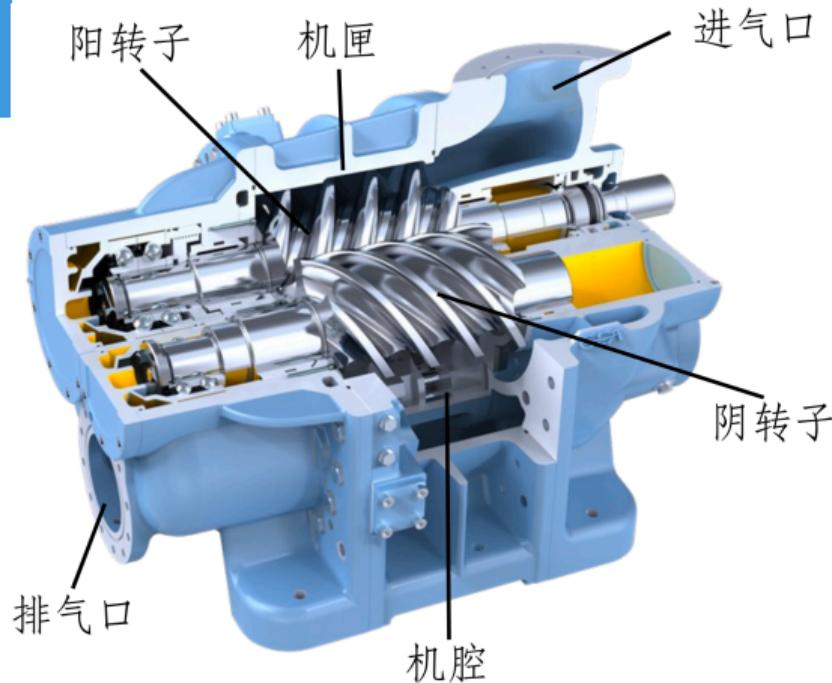
## ③ 改进的椭圆参数化方法与预条件 Anderson 加速算法

## ④ 基于样条参数化的双螺杆压缩机网格生成方法

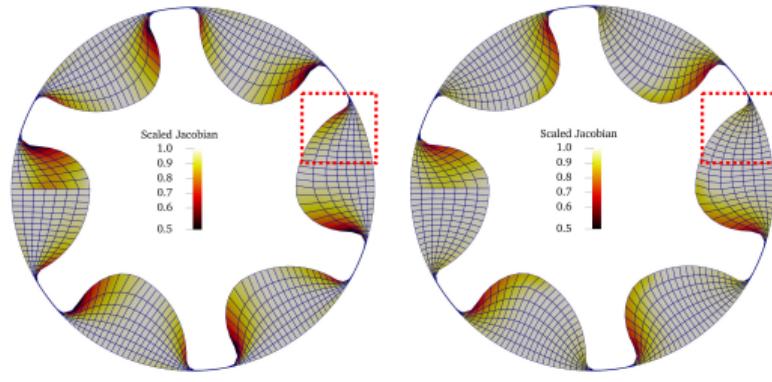
## ⑤ 基于绝对主曲率度量和双层优化的 $r$ -自适应方法

## ⑥ 结论与展望

# 旋转式双螺杆压缩机



旋转式双螺杆压缩机 [source](#)

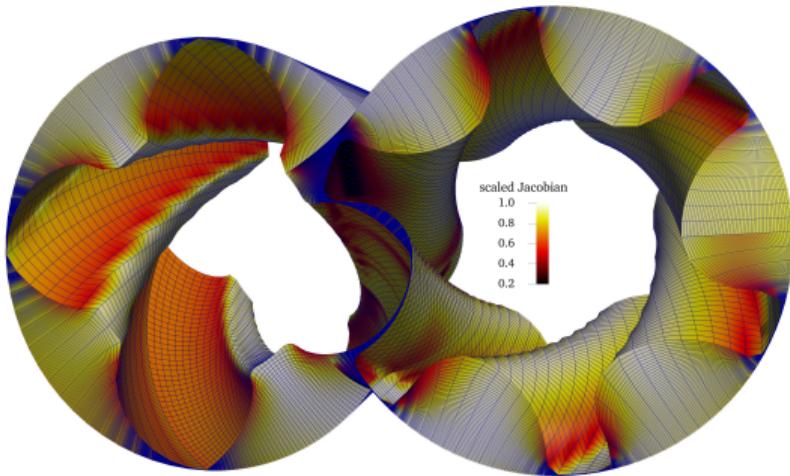
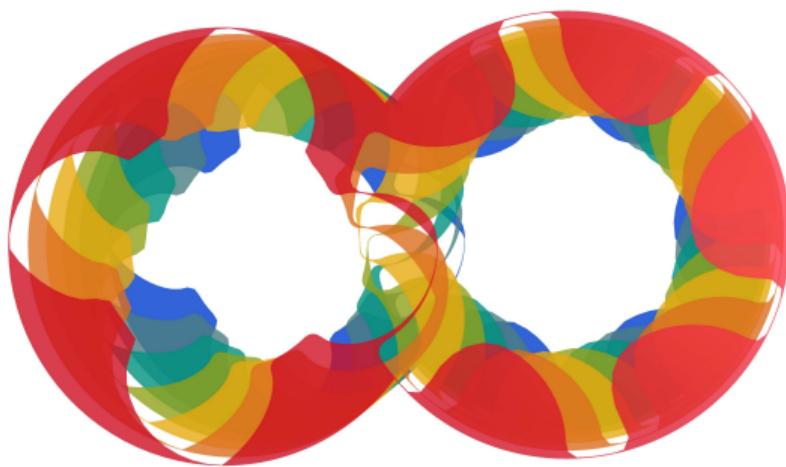


Hinz (2020)

本文方法

# 利用放样技术生成体参数化

- 利用样条放样技术生成最终的体参数化结果.
- 利用我们的高效**PreAA**求解器, 在个人笔记本电脑上**三秒内**完成整个计算流程.

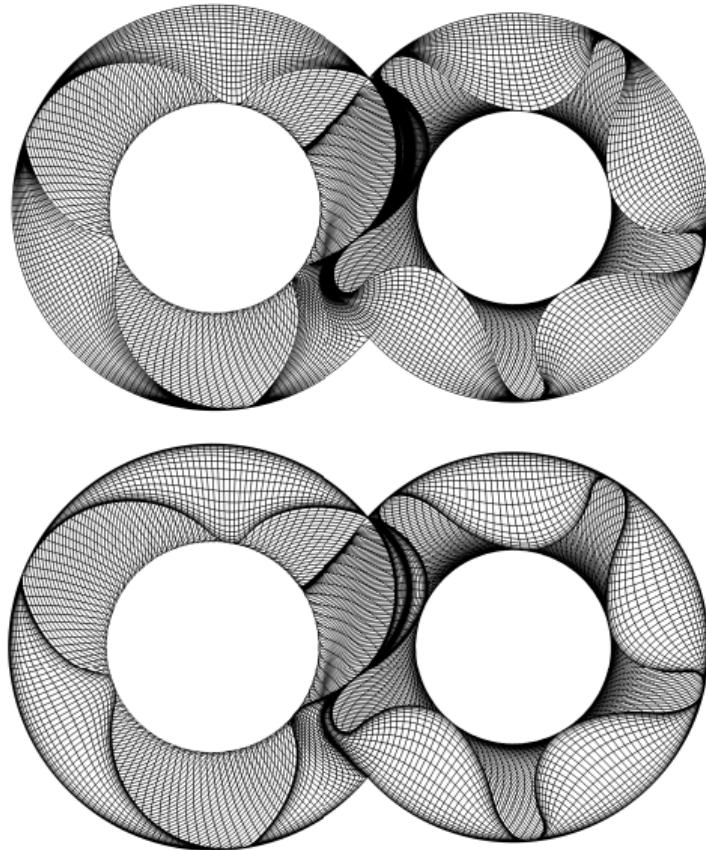


# 网格离散方法 I: 边界层网格

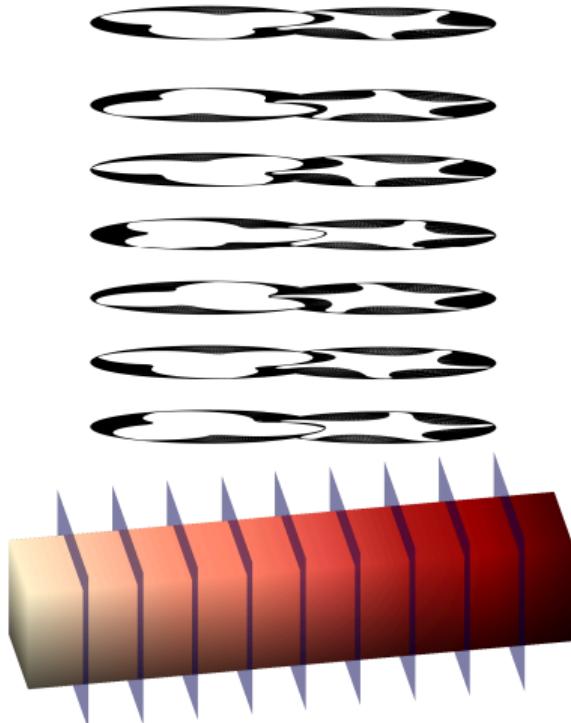
- 仅需要进行一次下采样.
- 利用一个简单的变换:

$$\begin{cases} \xi = \hat{\xi}, \\ \eta = \frac{\tanh(\alpha(2\hat{\eta} - 1))}{2\tanh(\hat{\eta})} + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

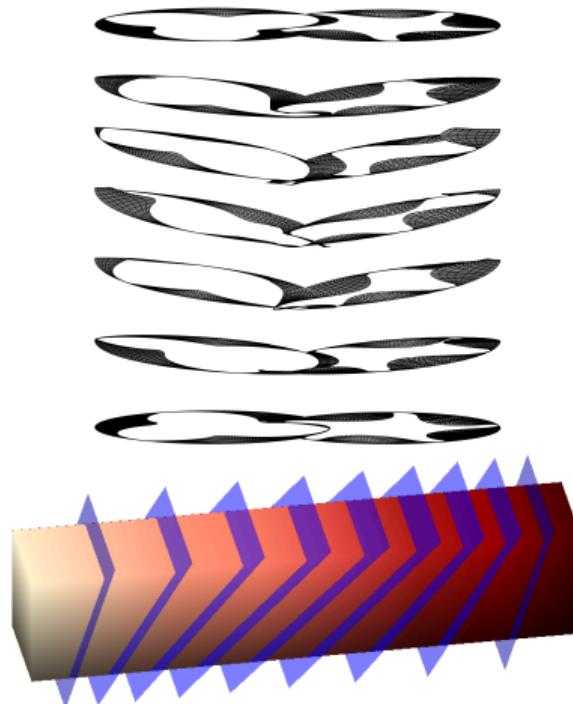
其中  $\alpha$  表示膨胀系数.



## 网格离散方法 II: 流对齐结构六面体网格



普通网格离散方法

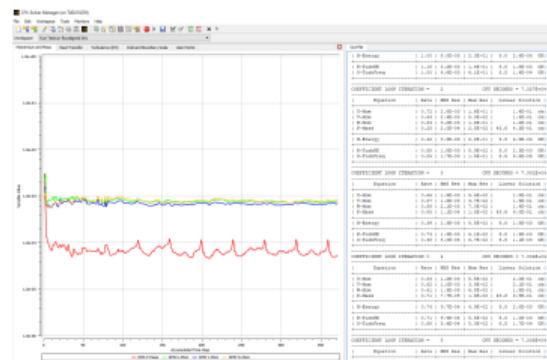
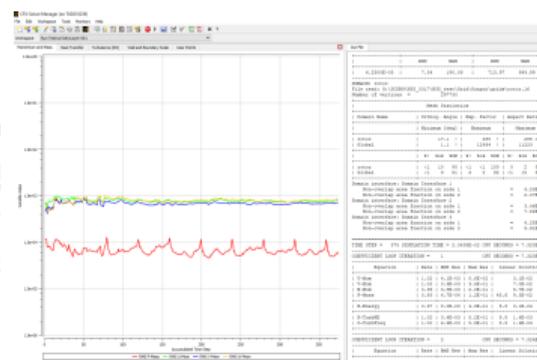


流对齐网格离散方法

# ANASYS CFX 仿真结果

- **SCORG™ 软件:**

- 行业领先的螺杆压缩机、膨胀机、泵和发动机**设计与分析一体化**软件;
- 超过 25 年研发, 2014 年起商用; 与 City, University of London 合作.



**SCORG™**

边界层网格

流对齐网格

# 目 录

- ① 研究背景与动机
- ② 基于优化的参数化方法
  - 基于障碍函数的参数化方法
  - 基于惩罚函数的参数化方法
- ③ 改进的椭圆参数化方法与预条件 Anderson 加速算法
- ④ 基于样条参数化的双螺杆压缩机网格生成方法
- ⑤ 基于绝对主曲率度量和双层优化的  $r$ -自适应方法
- ⑥ 结论与展望

# 各向异性现象在自然界中广泛存在

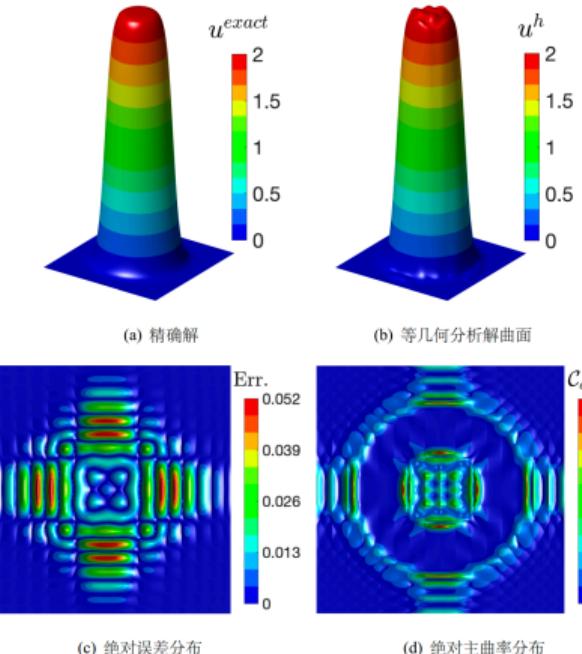
声音传播. [source](#)

激光打印. [source](#)

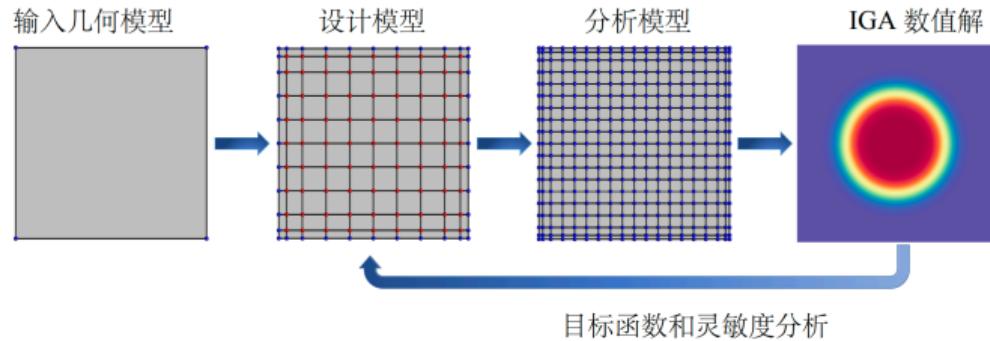
应力集中. [source](#)

- 局部和各向异性特征广泛存在于物理现象中;
- 各向同性参数化在这些问题中往往并不高效;
- **各向异性参数化方法 ( $r$ -自适应)**
  - 保持总自由度不变的前提下, 增加每个自由度的精度.

# 核心思想



- 绝对误差和曲率具有相似的表现;
- 利用**绝对主曲率**捕捉 IGA 解的变化;
- 建立几何量与数值解之间的**紧密联系**.
- 双层优化策略:
  - 设计模型: **调整尽量少的控制顶点**以提高效率;
  - 分析模型: **良好的数值解准确度**以驱动参数化;
- 详尽地推导出了解析的灵敏度传播和计算公式.

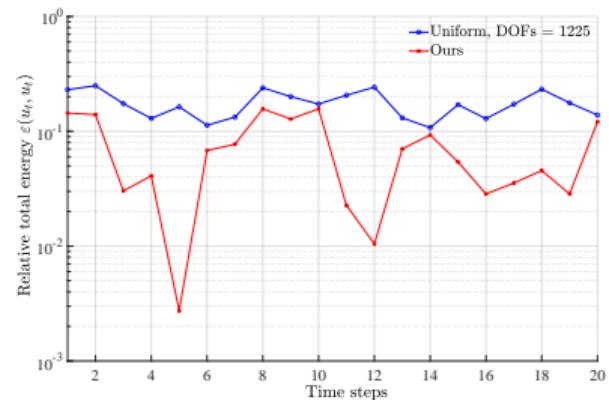


# 在动态 PDE 中的应用

- 考虑一个带有移动 Gaussian 热源的二维线性热传导问题:

$$\begin{cases} C_p \rho \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa \nabla u(\mathbf{u}, t)) = f(\mathbf{x}, t) & \text{in } \Omega \times T \\ u(\mathbf{x}, t) = u_0 & \text{in } \Omega \\ \kappa \nabla u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times T \end{cases}$$

$u(\mathbf{x}, t)$  和参数化



数值误差 vs. 时刻  $t$

# 目 录

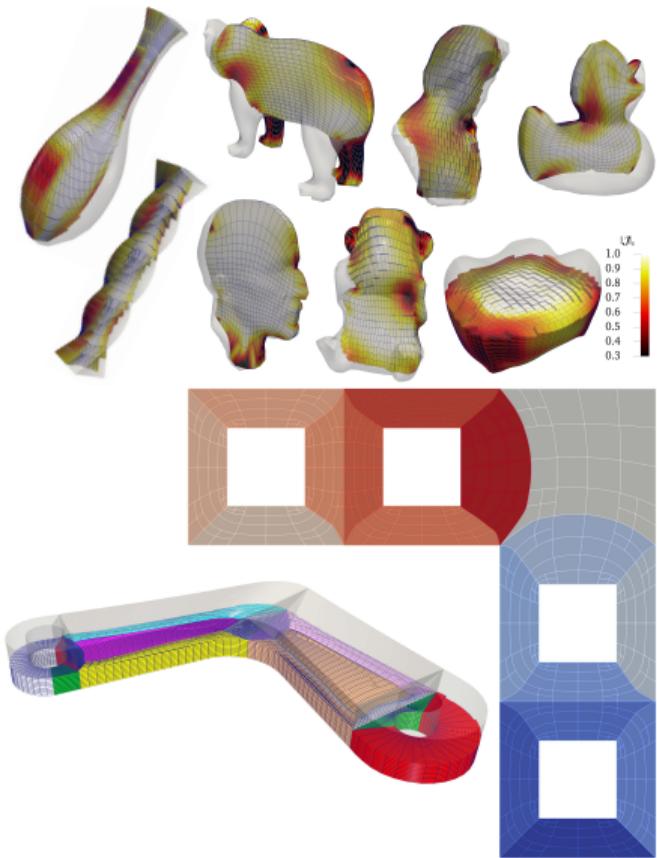
- ① 研究背景与动机
- ② 基于优化的参数化方法
  - 基于障碍函数的参数化方法
  - 基于惩罚函数的参数化方法
- ③ 改进的椭圆参数化方法与预条件 Anderson 加速算法
- ④ 基于样条参数化的双螺杆压缩机网格生成方法
- ⑤ 基于绝对主曲率度量和双层优化的  $r$ -自适应方法
- ⑥ 结论与展望

# 结论与展望

- 提出了三种**高效且鲁棒的各向同性参数化方法**;
- 将所提出方法应用到了**真实工业场景中**;
- 提出了一种**基于绝对主曲率度量和双层优化策略的  $r$  自适应方法**;
- 提供了**开源代码**  G+Smo.

## 将来工作:

- 拓扑计算:** 研究多块参数化方法.
- 自适应方法:** 提高计算效率.

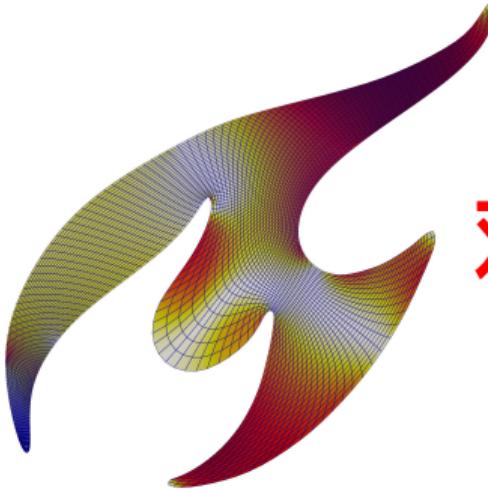


# 创新点摘要

- 提出了两类基于优化的高效参数化方法. 提出基于障碍函数的三步参数化方法, 避免计算和更新参数化雅可比行列式的系数, 从而大幅提升了计算效率. 通过交替更新内部的控制顶点和权因子, 有效提高了具有复杂几何形状计算域的参数化质量. 提出了平面 NURBS 参数化单值性的充分条件和必要条件, 并设计了一种实用的单值性检验算法. 设计了基于罚函数的参数化方法, 引入了新的惩罚函数, 有效降低了计算误差. 利用散度定理, 仅通过模型的边界表示求出计算域的体积, 构造了刻画参数化体积扭曲的目标泛函项. 结合雅可比正则化思想, 该方法可以直接接受带有自相交的参数化作为初值, 进一步简化了计算流程.
- 提出了预条件 Anderson 加速求解器集成的改进椭圆参数化方法. 针对具有极端纵横比的计算域, 提出了一种改进的椭圆参数化算法, 并给出了其在 Sobolev 空间  $H^1$  中的新离散格式, 有效提升了参数化质量. 推导出了所涉及非线性方程组的全解析雅可比矩阵计算公式. 引入了带有动态更新策略的预条件 Anderson 加速算法, 增强了数值稳定性和求解效率, 并给出该算法残差界的估计和收敛性分析. 该方法已成功应用于双螺杆压缩机流体力学仿真的真实工业场景中.

## 创新点摘要 (续)

- 提出了基于曲率度量和双层优化策略的各向异性参数化方法。将 IGA 数值解视作  $\mathbb{R}^3$  空间中的参数曲面，利用绝对主曲率来表征 IGA 解的变化程度。借助带有线搜索准则的优化算法，修正后的目标函数可以有效保证参数化结果的单值性。使用具有相同几何形状而细化程度不同的双层优化策略，实现在粗参数化层次上更新参数化以提高计算效率，并在细参数化层次上执行等几何分析以提高计算精度。推导出了灵敏度传播和解析的灵敏度计算公式，提高了基于梯度的优化方法中的数值稳定性。相较于各向同性参数化，本方法在处理具有局部特征的复杂物理问题时展现了良好的适用性和计算效率。



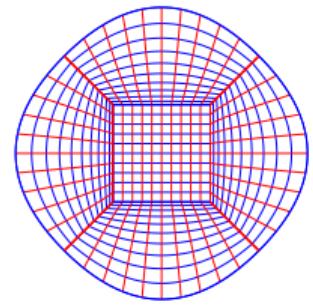
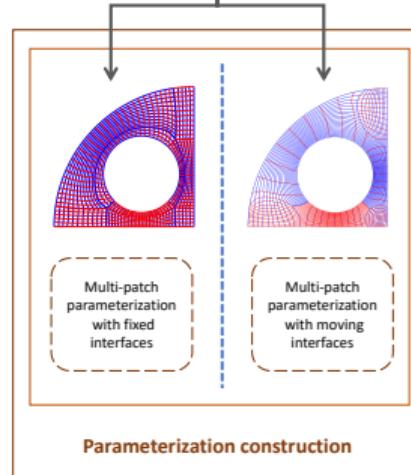
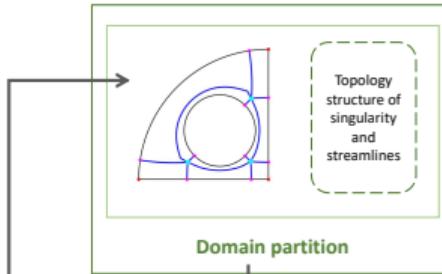
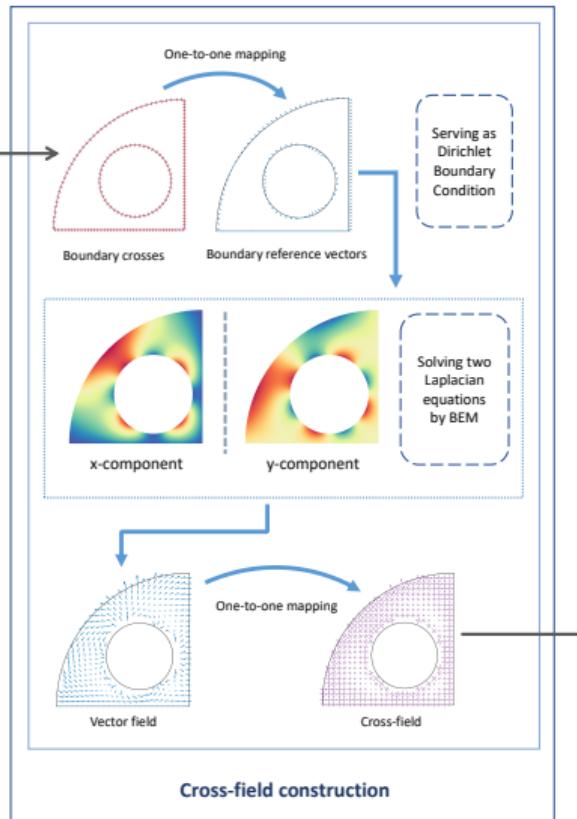
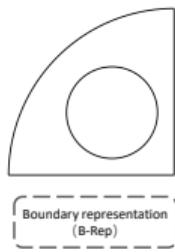
# 欢迎各位老师同学批评指正!

## Q&A.

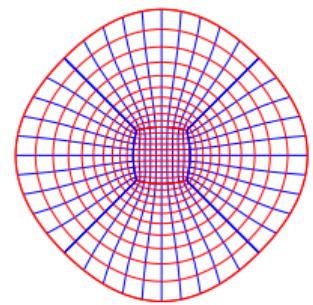
如果您对我的研究感兴趣, 欢迎与我联系! ;-)

- 电子邮箱: [jiyess@outlook.com](mailto:jiyess@outlook.com)
- 个人主页: <https://jiyess.github.io>
- GitHub: [jiyess](https://github.com/jiyess)

# Multi-patch Parameterization using Cross-field

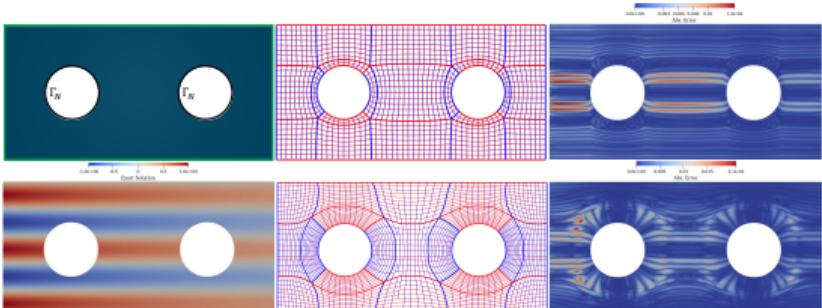
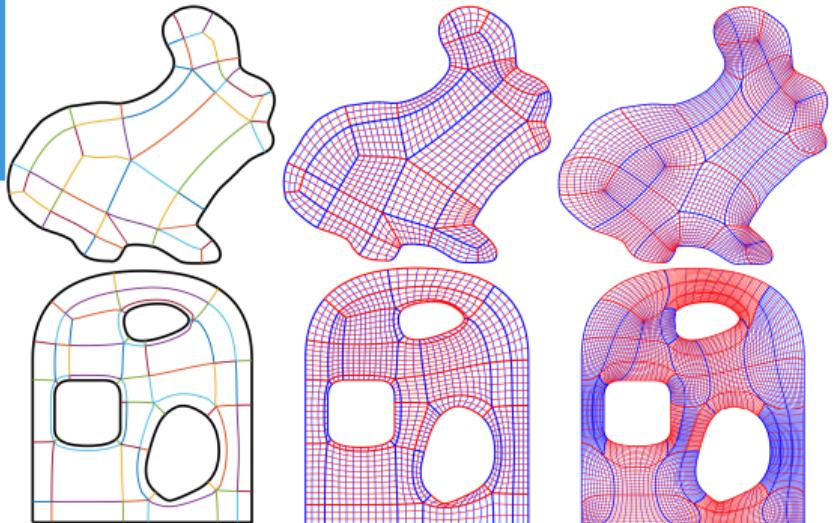


AS- $G^1$  方法 (2016)



我们方法

# Results and Comparisons



Model	#Patch	Method	$ \mathcal{J} _s$		unif.		
			min.	avg.	min.	avg.	max.
rabbit	33	Coons	-0.8593	0.9628	0.7030	<b>0.9410</b>	1.0524
		fixed-I	<b>0.2204</b>	<b>0.9504</b>	0.6103	0.9544	<b>0.9982</b>
		moving-I	0.02918	0.9283	<b>0.0000</b>	0.9550	1.0000
3 holes	46	Coons	-0.5492	0.9710	0.8008	0.9573	1.0958
		fixed-I	<b>0.1545</b>	<b>0.9716</b>	0.8007	0.9573	0.9978
		moving-I	0.1461	0.9361	<b>0.6791</b>	<b>0.9571</b>	<b>0.9968</b>

