VI. Sequences and Series of Functions

1. Introduction

convention

함수열의 성분인 함수를 포함하여 여기서 다루는 모든 함수는 complex valued function 이다. 즉 Complete metric space (모든 Cauchy sequence가 수렴하는 space) 에서 생각한다.

Definition : Sequence of functions, Pointwise convergence

E에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$ 이 모든 $x \in E$ 에서 수렴한다고 하자. 이 때 함수 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 로 정의하며 "$\{f_n\}$ converges to f pointwise on E" 라 한다. $\sum f_n(x)$ 가 모든 $x \in E$ 에서 수렴하면 $f(x) = \sum f_n(x)$ 로 정의하기도 하며 이때 f를 *sum of the series* $\sum f_n$ 라 한다.

$\{f_n\}$에서 각각의 f_n이 연속이거나, 미분가능하거나, integrable 할 때 이들의 limit 혹은 sum으로 정의되는 함수 f에서 이런 성질들이 유지되는가가 중요한 문제이다. 또한 $\{{f_n}'\}$ 이나 $\{\int f_n\}$ 과 f', $\int f$의 관계도 중요하다. 이것들에 대한 예를 몇가지 보자

Example 1. For $m,\, n \in \mathbb{Z}_+$, define $s_{m,\,n} = \dfrac{m}{m+n}$. Fixed n에 대해 $\lim\limits_{m\to\infty} s_{m,\,n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} s_{m,\,n}) = 1$ 이다. 그러나 fixed m 에 대해 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,\,n} = \lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,\,n}) = 0$ 이다. 즉 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} s_{m,\,n}) \neq \lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} s_{m,\,n})$.

Example 2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, for $x \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$ 이라 정의하고 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 이라 하자. $f_n(0) = 0$ for all n 이므로 $f(0) = 0$ 이다. $x \neq 0$ 일 때 $f(x) = 1 + x^2$ 이며 따라서 f는 0 에서 불연속이다.

Example 3. $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ for $m \in \mathbb{Z}_+$ 라 정의하자. $m!x \in \mathbb{Z} \implies f_m(x) = 1$.
$m!x \notin \mathbb{Z} \implies f_m(x) = 0$. $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}$ 로 정의하자. 그렇다면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = \text{irrational}\ , \\ 1 & x \in \mathbb{Q}\ . \end{cases}$$

이다. 즉 각각의 $f_m(x)$는 연속함수이지만 $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ 는 연속함수가 아니다.

Example 4. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ for $x \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$ 로 정의하자. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ 이므로 $f'(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ 이다. 그러나 ${f_n}'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ 이므로 ${f_n}'$ 은 f'으로 수렴하지 않는다.

Example 5. Define $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ for $0 \le x \le 1$ and $n \in \mathbb{Z}_+$. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ for all $0 \le x \le 1$ 임은 쉽게 보일 수 있다. 그러나 $\int_0^1 f_n(x)dx = n^2/(2n+2)$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \to \infty$ 이다.

2. Uniform convergence

Definition : Uniform convergence

E에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$과 함수 f가 다음의 조건을 만족하면 $\{f_n\}$ converge uniformly on E to f 라 한다.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \ge N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ for all $x \in E$.

Uniformly convergence and pointwise convergence

Pointwise convergence의 경우는 N이 x, ε에 dependent 하다. 그러나 uniform convergence 의 경우는 모든 x에서 성립하며 ε 에만 dependent한 N이 존재해야 한다.

Theorem 2.1 (Cauchy's criterion)

E에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$ 에 대해 다음이 성립한다 : $\{f_n\}$ converges uniformly on E $\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{Z}_+$ s.t. $n,\ m \ge N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ for all $x \in E$.

(Proof) (1) Suppose $\{f_n\}$ converges uniformly on f. Given $\varepsilon > 0$ 에 대해 $N \in \mathbb{Z}_+$ s.t. $n \ge N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. $n,\ m \ge N$ 이라 하면 $|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(2) Suppose $n,\ m \ge N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. f는 복소함수이며 복소공간에서 모든 Cauchy sequence는 수렴하므로 $\{f_n\}$ 은 모든 $x \in E$ 에서 수렴한다. 이를 $f(x)$라 하자. Fix n and let $m \to \infty$, then we can get uniformly convergent condition. $\square$

Theorem 2.2

E에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$ 과 f가 모든 $x \in E$에서 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 이며, $M_n = \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$ 라 하자. 이 때, 다음이 성립한다 : $f_n \to f$ uniformly iff $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Immediate consequence from the definition of uniform convergence

Theorem 2.3

$\{f_n\}$ 이 E에서 정의된 함수열이고 $|f_n| \le M_n$ ($x \in E$, $n = 1,\ 2, \ldots$) 라 하자. $\sum M_n$ 이 수렴하면 $\sum f_n$ 은 uniformly convergent 하다.

(Proof) $\sum M_n$ 이 수렴하므로 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해 l, m이 충분히 크다면 $\left|\sum_{n=m}^{l} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=m}^{l} M_n < \varepsilon$. Cauchy criterion!. $\square$

Theorem 2.4

Suppose $\{f_n\} \to f$ uniformly on a metric space E. x 가 E의 limit point 중 하나이며, $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$ for $n = 1, 2, \ldots$ 이면 $\{A_n\}$ 은 수렴하며 $\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n$ 이다. 즉 $\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)$.

(Proof) (1) 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $m, n \geq N \implies |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon$ for all $t \in E$인 N이 존재한다. $t \to x$ 를 생각하면 $m, n \geq N \implies |A_m - A_n| < \varepsilon$ 이므로 A_n은 Cauchy sequence. 수렴하므로 $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ 라 하면, $A = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to x} f_n(t)\right)$.

(2) $|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|$ 이다. $n > N_1 \implies |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ for all $t \in E$ 인 N_1 이 존재한다. $n > N_2 \implies |A_n - A| < \varepsilon/3$ 인 N_2 가 존재한다. $N = \max\{N_1, N_2\}$ 라 할 때 이 N에서 $|f_n(t) - A_n| < \varepsilon/3$ 인 $B(x, \delta) \cap E$ 가 존재한다. 그렇다면 $n > N$ and $t \in B(x, \delta)$ 이면 $|f(t) - A| < \varepsilon$ 이다. 즉 $A = \lim_{t\to x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)$. $\square$

Theorem 2.5

함수열 $\{f_n\}$ 의 모든 f_n 이 E에서 연속이며 $f_n \to f$ uniformly on E 이면 f는 E 에서 연속이다.

(Proof) (1) For fixed $x_0 \in E$, $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)|$.

(2) For given $\varepsilon > 0$ 에 대해 $n > N \implies |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ and $|f(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ 인 $N \in \mathbb{Z}_+$ 가 존재한다. (From uniformly continuity condition). 모든 f_n 이 연속이므로 이 n 에서 $x \in B(y, \delta)$ 일 때 $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$인 $\delta > 0$ 이 존재한다. 이 조건을 모두 합치면 f가 E 에서 연속이다. $\square$

Theorem 2.6

K 가 compact 이고, 연속함수 f와 함수열 $\{f_n\}$이 다음의 조건을 만족하면 $f_n \to f$ uniformly on K 이다.

(a) 모든 f_n 이 K 에서 연속이다.

(b) $f_n \to f$ pointwisely on K.

(c) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ for all $x \in K$ and $n \in \mathbb{Z}_+$.

(Proof) (1) Let $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. (a) 조건에 의해 g_n은 K에서 연속함수, (b) 조건에 의해 $g_n \to 0$ for all $x \in K$. (c) 조건에 의해 $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ for all $x \in K$.

(2) Given $\varepsilon > 0$ 에 대해 $K_n = \{x \in K : g_n(x) \geq \varepsilon\}$ 이라 하면 K_n 은 compact subset of K 이며 $K_n \supset K_{n+1}$ 이다. Let $x \in \bigcap_n K_n$ 이라 하면 $g_n \to 0$ 에 모순. 따라서 $\bigcap_n K_n = \varnothing$. 따라서 $K_n = \varnothing$ for all $n > N$ 인 N 이 존재해야 한다. 즉 $n > N \implies 0 \leq g_n(x) < \varepsilon$ for all $x \in K$. 즉 $f_n \to f$ uniformly on K. $\square$

Example. $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$ $(0 < x < 1, n = 1,\, 2, \dots)$ 라 하자. $I = (0,\,1)$ 에 대해 f_n은 I에서 연속이며 $f_n \to 0$ pointwisely on I 이며 $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ for all $x \in I$ and n 이다. Uniform convergence를 확인하자.
$|f_n(x)| < \varepsilon \implies n > 1/x \cdot (1/\varepsilon - 1)$ 이며 $x \to 0 \implies n \to \infty$ 이므로 uniform convergence 는 성립하지 않는다. 즉 Theorem 2.6 에서 compact 조건이 매우 중요하다.

Definition : $\mathscr{C}(X)$, supremum norm

Metric space X에 대해 X에서 정의되는 모든 연속이고 bounded인 complex valued function의 집합을 $\mathscr{C}(X)$ 라 하자. X가 compact metric space 이면 $\mathscr{C}(X)$ 모든 complex continuous complex valued functions 의 집합이다.

$f \in \mathscr{C}(X)$ 일 때 $\|f\| = \sum\limits_{x \in X} |f(x)|$ 를 **supremum norm** of f 라 한다. f가 bounded 이므로 $\|f\| < \infty$ 이다. 또한 $\|f\| = 0$ iff $f(x) = 0$ for all $x \in X$ 이다.

$f,\, g \in \mathscr{C}(X)$ 일 때 $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ 임을 보일 수 있다. 따라서 $\|f - g\|$를 거리로 생각 할 수 있으며, 따라서 $\mathscr{C}(X)$ 는 metric space 이다.

Lemma 2.7

$f,\, g \in \mathscr{C}(X)$ 이면 $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ 이다.

(Proof) $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\| + \|g\|$.

Theorem 2.8

$\mathscr{C}(X)$ 는 complete metric space 이다.

(Proof) Let $\{f_n\}$ be a Cauchy sequence in $\mathscr{C}(X)$. 즉 given $\varepsilon > 0$ 에 대해 $n,\, m \geq N \implies \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ for all $x \in X$ 인 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재한다. $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ for all $x \in X$ and $n,\, m \geq N$ 이므로 Cauchy's criterion (Theorem 2.1) 에 희해 $\{f_n\}$ 이 uniformly convergent 한 함수 f가 존재한다. Theorem 2.5에 의해 이 f 는 X 에서 연속이다. 큰 n 에서 $|f_n(x) - f(x)| < 1$ 을 만족하며 f_n 이 bounded 이므로 f는 bounded. 따라서 $f \in \mathscr{C}(X)$. $\{f_n\}$이 uniformly converge to f 이므로 given $\varepsilon > 0$ 에 대해 $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ for all $x \in X$ 인 N 이 존재한다. 즉 $n \geq N \implies \|f_n - f\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. 따라서 $f_n \to f$ in $\mathscr{C}(X)$ 이며 $\mathscr{C}(X)$ 는 complete metric space 이다.

Theorem 2.9

α 는 monotonically increasing on $[a,\, b]$ 이며, $f_n \in \mathscr{R}(\alpha)$ on $[a,\, b]$ and for all $n \in \mathbb{Z}_+$ 이라 하자. 이 때, $f_n \to f$ uniformly on $[a,\, b]$ 이면 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ 이며 $\int_a^b f\, d\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n\, d\alpha$ 이다.

---

*(Proof) 실함수에 대해 증명한다. Let $\varepsilon_n = \|f_n - f\|$. Then, $f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$ 이며, 따라서,

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) d\alpha \leq \underline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) d\alpha.$$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha - \underline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq \int_a^b \varepsilon_n\, d\alpha = \varepsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)]\ .$$

이다. $n \to 0 \implies \varepsilon_n \to 0$ 이므로 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ and $\int_a^b f\, d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha\ .$ $\square$

Corollary 2.10

$f_n \in \mathscr{R}(\alpha)$ on $[a,\, b]$ 이고 $\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n\} \to f$ uniformly on $[a,\, b]$ 이면 $\int_a^b f\, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\, d\alpha$ 이다.

Theorem 2.11

$\{f_n\}$ 이 $[a,\, b]$ 에서 미분가능한 함수들의 함수열이며, $x_0 \in [a,\, b]$ 에 대해 $\{f_n(x_0)\}$ 가 수렴한다고 하자. $\{f_n{}'\}$ 이 $[a,\, b]$ 에서 uniformly convergent 하면 $\{f_n\}$ 도 uniformly convergent to a function, f, on $[a,\, b]$ 이며 $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)$ for $x \in [a,\, b]$ 이다.

(Proof) (1) Let $\varepsilon > 0$ be given. $\{f_n(x_0)\}$ 가 수렴하므로 어떤 $N_1 \in \mathbb{N}$ 에 대해 $n,\, m \geq N_1$ 이면 $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon/2$ 이다. $\{f_n{}'\}$ 이 uniformly convergent 하므로 어떤 $N_2 \in \mathbb{N}$ 에 대해 $n,\, m \geq N_2$ 이면 $|f_n{}'(t) - f_m{}'(t)| < \varepsilon/2(b-a)$ for all $t \in [a,\, b]$ 이다 $(*)$. $N = \max\{N_1,\, N_2\}$ 라 하자.

(2) Mean value theorem을 $f_n - f_m$ 에 적용하면 모든 $x,\, t \in [a,\, b]$ 에 대해, $f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t) = (f_n{}'(s) - f_m{}'(s))(x - t)$ 인 s가 x와 t 사이에 존재한다. 따라서 모든 $x,\, t \in [a,\, b]$ 와 $n,\, M \geq N$ 에 대해

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{\varepsilon|x-t|}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .(**)$$

이다. From $(*)$ and $(**)$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ for all $x \in [a,\, b]$ and $n,\, m \geq N$. 즉 $\{f_n\}$ 은 uniformly convergent 하다. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in [a,\, b]$ 라 하면, $\{f_n\} \to f$ uniformly. 이다.

(3) Fixed $x \in [a,\, b]$ 에 대해 $\phi_n(t) = \dfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$, $\phi(x) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ 를 정의한다. 즉 $\lim_{t\to x} \phi_n(x) = f_n{}'(x)$, $\lim_{t\to x} \phi(x) = f'(x)$ 이다. $(**)$로 부터 $|\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon/(2(b-a))$ for $n,\, m \geq N$ and for all $t \in [a,\, b]$ 임을 알고 있다. 즉 $\{\phi_n\}$ converges uniformly to ϕ.

(4) From theorem 2.4, $\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} \phi_n(t)$ 이므로 $\lim_{t\to x} \phi(t) = f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)$. $\square$

Theorem 2.12

모든 $\mathbb{R}$에서 연속이지만, 모든 $\mathbb{R}$에서 미분 불가능한 실함수가 존재한다.

(Proof) (1) Define $\phi(x) = |x|$ for $x \in [-1,\, 1]$ and extend its domain to $\mathbb{R}$ by $\phi(x+2) = \phi(x)$. 여기서 ϕ는 $\mathbb{R}$ 연속이다. $|\phi(s) - \phi(t)| \le |s-t|$ (*) 임은 쉽게 보일 수 있다.

(2) Define $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$. $|\phi(x)| < 1$ 이므로 $f(x)$는 모든 x 에서 수렴하며, theorem 2.3에 의해 균등수렴한다. Theorem 2.5에 의해 $f(x)$는 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 연속이다.

(3) x 를 고정하고, $m \in \mathbb{Z}_+$ 에 대해 $\delta_m = \pm\frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$ 이라 하자. $4^m|\delta_m| = 1/2$ 이므로 $4^m x$ 와 $4^m(x+\delta_m)$ 사이에 정수가 없도록 δ_m의 부호를 정하자. 그리고 $\gamma_m = \dfrac{\phi(4^n(x+\delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m}$ 이라 정의한다.

(4) $n > m$ 이면 $4^n\delta_m$ 은 even integer. 따라서 $\gamma_m = 0$. $0 \le n \le m$ 이면 (*)에 의해 $\gamma_m \le 4^n$.

(5) $|\gamma_m| = |(\phi(4^m(x+\delta_m)) - \phi(4^m x)) \cdot 4^m/2| = 4^m$, since there is no integer between $4^m x$ and $4^m(x+\delta_m)$. 따라서,

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \ge 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m + 1)\ .$$

$m \to \infty \implies \delta_m \to 0$. 따라서 f는 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 미분 불가능 하다.

3. Equicontinuous families and Stone-Weierstrass theorem

Definition : Pointwise bounded and Uniformly bounded

$\{f_n\}$ 이 E에서 정의된 함수열이라 하자. 어떤 finite-valued function $\phi(x)$ 에 대해 $|f_n(x)| < \phi(x)$ for all $x \in E$ and $n \in \mathbb{Z}_+$ 이면 $\{f_n\}$ 은 **pointwise bounded** 라 한다. 어떤 $M > 0$ 에 대해 $|f_n(x)| < M$ for all $x \in E$ and $n \in \mathbb{Z}_+$ 이면 $\{f_n\}$ 은 **uniformly bounded** 라 한다.

Note : 뒤에 보이겠지만 $\{f_n\}$ 이 pointwise bounded 이고 E_1 이 countably infinite subset of E 이면 어떤 subsequence $\{f_{n_k}\}$ 에서 $\{f_{n_k}(x)\}$ 가 모든 $x \in E_1$ 에서 수렴한다. 그러나 $\{f_n\}$ 이 uniformly bounded sequence of continuous functions on an compact set E 일 경우는 there need not exist a subsequence which converges pointwise on E.

Exmaple 1. Let $f_n(x) = \sin nx$ for $0 \le x \le 2\pi$ and $n = 1,\, 2,\, \ldots$. 모든 $x \in [0,\, 2\pi]$ 에서 $\{\sin n_k x\}$ 가 수렴하도록 하는 sequence $\{n_k\}$ 존재한다고 가정하자. $[0,\, 2\pi]$ 는 compact subset of $\mathbb{R}$ 이므로 수렴하는 수열은 Cauchy sequence 이다. 즉 $\lim_{k\to\infty}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0$ 이어야 한다. 즉 $\lim_{k\to\infty}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0$ 이며 Lebesgue's theorem 에 의해 (우린 아직 안배웠다) $\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 0$ 이다. 그러나 우리는 $\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 2\pi$ for all $n_k \ne n_{k+1}$ 임을 알고 있다. 모순이므로 $\{\sin n_k x\}$ 가 수렴하도록 하는 $\{n_k\}$ 는 존재하지 않는다.

Example 2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ for $x \in [0,\, 1]$ and $n = 1,\, 2, \ldots$ 라 하자. $|f_n(x)| \le 1$ 이므로 $\{f_n\}$ 은 uniformpy bounded on $[0,\, 1]$ 이며 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ for all $x \in [0,\, 1]$ 이다. 그러나 $f_n(1/n) = 1$ for all $n = 1,\, 2, \ldots$ 이므로 어떤 subsequence도 $x \in [0,\, 1]$ 에서 uniformly converge 하지 않다.

Definition : Equicontinuous family.

$\mathscr{F}$ 이 metric space X의 subspace E에서 정의된 함수의 family이며 다음 조건을 만족하면 **equicontinuous** on E 라 한다. : $\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0$ s.t. $d(x,\, y) < \delta,\, x \in E,\, y \in E,\, f \in \mathscr{F} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Note :

1. 모든 equicontinuous family에 속하는 함수들은 uniformly continuous 하다.
2. Example 2 의 $\{f_n\}$ 은 equicontinuous family가 아니다.

Theorem 3.1

$\{f_n\}$ 이 pointwise bounded sequence of complex function on countably infinite set E 이면 $\{f_n\}$ 은 모든 $x \in E$ 에서 convergent한 subsequence $\{f_{n_k}\}$ 를 가진다.

(Proof) (1) Sequence $\{x_i\} \subset E$ 를 생각하자. $\{f_n\}$ 이 pointwise bounded 이므로 $\{f_n(x_1)\}$ 은 bounded 이다. 따라서