Partition of Unity, Diffeomorphism and Change of Variables

(2019.05.09)

Lemma 1.

A 가 $\mathbb{R}^n$ 에서의 열린집합이면 다음 성질을 만족하는 compact rectifiable subsets of A의 sequence $\{C_1,\, C_2, \cdots\}$ 가 존재한다.

1. $\bigcup C_i = A$
2. $C_i \subset \mathrm{int}(C_{i+1})$

(proof) Let $B = \mathbb{R}^n - A$ and $D_N = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,\, B) \geq 1/N \text{ and } d(x, 0) \leq N\}$. Then D_N is a compact set in $\mathbb{R}^n$, $D_N \subset D_{N+1}$, and $\bigcup D_N$ covers A. 그런데 D_N 이 rectifiable이라는 보장이 없다.

각각의 $x \in D_N$ 에 대해 x를 center에 두고 $\mathrm{int}(D_{N+1})$에 포함되는 open cube $C_{N,x}$를 모으자. D_N은 compact set 이므로 finitely many $C_{N,x}$'s cover D_N. 이 finitely many $C_{N,x}$의 union을 C_N이라 하면, $C_N \subset \mathrm{Int}(D_{N+1})$ 이며 각각의 C_N은 finite union of cubes 이므로 rectifiable 이다.

$D_N \subset \mathrm{Int}(C_N) \subset C_N \subset \mathrm{Int}(D_{N+1})$ for all $N \in \mathbb{Z}_+$ 이므로 $\bigcup C_N = A$. $\square$.

Lemma 2.

A rectangle Q in $\mathbb{R}^n$ 에 대해 $\mathrm{Int}(Q)$에서 positive 이고 $\mathbb{R}^n - Q$에서 0인 함수 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$이 존재한다.

Hint of proof

Define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

Lemma 3.

$\mathcal{A}$ 가 $\mathbb{R}^n$ 에서의 open sets의 collection 이며 $A = \bigcup \mathcal{A}$이면 다음 성질을 만족하는 countable collection $\{Q_1,\, Q_2, \ldots\}$ of (closed) rectangles contained in A 가 존재한다.

1. $\{\mathrm{Int}(Q_1),\, \mathrm{Int}(Q_2), \ldots\}$ covers A.
2. Each Q_i is contained in an element of $\mathcal{A}$.
3. Each point of A has a neighborhood that intersects only finitely many of the sets Q_i.

마지막 조건을 **local finiteness condition** 이라 한다.

(proof) Lemma 1에서 보았듯이 collection of compact subsets of A, $\{D_1,\, D_2, \ldots\}$ such that $D_i \subset \mathrm{Int}(D_{i+1})$ 가 존재한다.

Let $B_i = D_i - \mathrm{Int}(D_{i-1})$. B_i는 compact set in $\mathbb{R}^n$ 이며, $B_i \cap D_{i-2} = \varnothing$ 이다. 또한 $\bigcup B_i = A$ 이다.

$x \in B_i$ 이면 x 를 중심으로 A에 포함되며 D_{i-2}와 disjoint한 closed cubes 가 존재한다. 각각의 x에 대해 이런 closed cubes를 모은 collection을 생각하자. 이 cubes는 임의로 작게 할 수 있으므로 $\mathcal{A}$의 한 elements에 포함되도록 작게 잡자. B_i는 compact set 이므로 finite subcollections of interior of the collections로 B_i를 cover 할 수 있다. 이 closed cubes의 collection을 $\mathcal{C}_i$라 하자. 즉 $\mathcal{C}_i = \{Q_1^i,\, Q_2^i, \dots,\, Q_k^i\}$ 이며 $B_i \subset \bigcup_k \mathrm{Int}(Q_k^i) \subset A$ 이다.
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots$ 라 하면 $\mathcal{C}$ 는 countable collection of cubes which covers A 이다. 이 $\mathcal{C}$가 우리가 구하고자 하는 $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ 이다.

$\mathcal{C}$ 가 조건 1, 2를 만족하는 것은 쉽게 보일 수 있다. 앞서 $\mathcal{C}_i$를 구성할 때 $\mathcal{C}_i$에 포함되는 각각의 cube가 $\mathcal{A}$의 어떤 element의 subset이 되도록 했다(조건 2). $x \in A$ 이면 $x \in \mathrm{Int}(D_i)$인 가장 작은 i값이 존재한다. 그렇다면 $x \in B_i = D_i - \mathrm{int}(D_{i-1})$ 이므로 x는 D_i의 open cover인 $\mathcal{C}_i$의 어떤 원소인 cube의 interior에 포함된다. 따라서 $A \subset \bigcup_i \mathrm{Int}(Q_i)$ 이다. (조건 1).

이제 local finiteness condition을 만족함을 보이자. $x \in A$ 이면 어떤 $x \in D_i$ for some i. 이다. $\mathcal{C}_i$를 구성할때를 생각해 보면 $\mathcal{C}_j$ for $j \geq i+2$ 에 포함되는 cube는 D_i와 disjoint 하다. 따라서 $\mathrm{Int}(D_i)$는 기껏해야 $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{i+1}$과만 intersect 할 수 있다(조건 3). □.

Definition : Support of a function

$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 일 때 $\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}$의 closure를 **support** of ϕ라 하고 $\mathrm{Supp}(\phi)$라 쓴다. $x \notin \mathrm{Supp}(\phi)$ 이면 x의 어떤 neighborhood N 에서 $\phi(N) = \{0\}$ 이다.

Theorem 4. (Existence of a partition of unity)

$\mathcal{A}$가 $\mathbb{R}^n$에서의 열린 집합의 collection이고 $A = \bigcup \mathcal{A}$일 때 다음 1 ~ 7을 만족하는 sequence $\phi_1,\, \phi_2, \dots$ of continuous functions $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$이 존재한다. $S_i = \mathrm{Supp}(\phi_i)$라 하자.

1. $\phi_i(x) \geq 0 \text{ for } \forall x \in A$.
2. Each $S_i \subset A$.
3. $x \in A$ 이면 finitely many S_i와 intersect 하는 x의 neighborhood가 존재한다.
4. $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) = 1$ for each $x \in A$.
5. Each ϕ_i is C^∞ class function.
6. Each S_i is compact.
7. Each S_i is contained in an element of $\mathcal{A}$.

1.-4. 조건을 만족하는 $\{\phi_i\}$를 **partition of unity** on A 라 한다. 5.의 조건도 만족하면 **partition of unity** on A of **class $\mathbf{C}^\infty$** 라 한다. 6.의 조건을 만족하면 **have compact support** 라 한다. 7.의 조건을 만족하면 **dominated by the collection $\mathcal{A}$** 라 한다.

(proof) $\mathcal{A}$와 A에 대해 Lemma 3의 $\{Q_1,\, Q_2, \dots\}$를 생각하자. 각각의 Q_i는 $\mathcal{A}$의 어떤 elements의 compact subset 이다. Lemma 2.로부터 각각의 Q_i에 대해 $\mathrm{Int}(Q_i)$에서는 positive 이고 밖에서는 0인 C^∞ class 함수 $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 이 존재함을 알고 있다. 따라서 $\psi_i(x) \geq 0$ for $\forall x \in A$ 이며(조건 1) $\mathrm{Supp}(\psi_i) = Q_i$ 이다(조건 2). 모든 $x \in A$는 finitely many Q_i와 intersect 하는 neighborhood를 가진다(조건 3).

$\phi_i(x) = \psi_i(x)/\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)$로 정의하면 $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$는 조건 1, 4, 5를 만족한다. 조건 6, 7은 Lemma 3.로부터 쉽게 알 수 있다.

Lemma 5.

A 가 open in $\mathbb{R}^n$ 이고 $f: A \to \mathbb{R}$ 이 연속이라 하자. f가 A의 compact subset C 밖에서 0이면 $\int_A f$와 $\int_C f$는 존재하며 서로 같다.

---

proof

C가 bounded이고 f가 연속이므로 $\int_C f$는 존재한다. $f_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$을 $f_C = f$ if $x \in A$ and $f_C = 0$ otherwise 로 정의하자. Sequence of compact subset of A, $\{C_i\}$ 가 $\bigcup C_i = A$ and $C_i \subset \operatorname{int}(C_{i+1})$을 만족한다고 하자. 이런 sequence가 항상 존재함은 Lemma 1에서 보였다.

C는 compact set이며 $\{\operatorname{Int}(C_i)\}$ 는 C의 open cover 이므로 finitely many $\{\operatorname{Int}(C_i)\}$가 C를 cover 한다. 따라서 $C \subset \operatorname{Int}(C_M)$ 인 $C_M \in \{C_i\}$ 가 존재하며 $\int_C f = \int_{C_N} f$ for all $N \geq M$. 따라서 $\int_A f = \int_C f$.

Lemma 6.

A가 $\mathbb{R}^n$의 open set이고 $\{\phi_i\}$가 partition of unity on A라 하자. D가 compact rectifiable subset of A 이면 유한개의 ϕ_i 만이 D 에서 nonzero 이다.

(Proof) $x \in D$ 이면 $x \in A$ 이므로 finitely many $\operatorname{Supp}(\phi_i)$와 intersect 하는 neighborhood of x가 존재한다. 이런 neighborhood를 모으면 D를 cover 한다. D가 compact 하므로 finitly many neighborhood of로 cover 할 수 있다. 이 Neighborhood를 $\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$라 하면 각각의 N_i가 finitly many support of ϕ_i와 intersect 하며 이 ϕ_i만이 D에서 nonzero 이다.

Theorem 7.

A 는 open in $\mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$ 는 연속함수, $\{\phi_i\}$ 는 partition of unity on A having compact support 라 하자. 그렇다면 $\int_A f$ exists iff $\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_A \phi_i |f|\right]$ converges 이며 $\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_A \phi_i f\right]$ 이다.

(Proof) 우선 f is non-negative on A일 때 성립함을 보이자. Lemma 6.에 의해 D가 compact rectifiable subsets of A 이면, 어떤 $M \in \mathbb{Z}_+$ s. t. $\phi_i(x) = 0$ for all $x \in D$ and $i \geq M$. 그렇다면

$$f(x) = \sum_{i=1}^{M} \phi_i(x) f(x)$$

for all $x \in D$.

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{M} \left[\int_D \phi_i f\right] \leq \sum_{i=1}^{M} \left[\int_{D \cup S_i} \phi_i f\right] = \sum_{i=1}^{M} \int_A [\phi_i f] \leq \sum_{i=1}^{M} \left[\int_A \phi_i f\right].$$

따라서 $\sum_{i=1}^{M} \phi_i f$ 가 integrable over A 이면 Lemma 5.에 의해 f도 integrable over A 이다.

f가 integrable over A라 가정하자. Given N에 대해 $D = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_N$은 compact set 이다. 또한 $1 \leq i \leq N$에 대해 $\phi_i(x) f(x) = 0$ for all $x \in D$ 이다. 따라서 $\int_A \phi_i f = \int_D \phi_i f$ 이다. 이를 이용하면,

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\int_A \phi_i f\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\int_D \phi_i f\right] = \int_D \left[\sum_{i=1}^{N} \phi_i f\right] \leq \int_D f \leq \int_A f.$$

$\int_D f \leq \sum\left[\int_A \phi_i f\right] \leq \int_D f$ 이므로 f가 integrable over A 이면 $\sum\left[\int_A \phi_i f\right]$가 수렴하며, $\sum\left[\int_A \phi_i f\right]$가 수렴하면 f는 integrable over D 이고, 임의의 partial sum 에 대해 수렴하므로 f is integrable over A 이다.

이제 f가 임의의 연속 함수일 때를 생각하자. 우리는 $\int_A f$ exists iff $\int_A |f|$ exists 임을 알 고 있다. 따라서 f가 integrable over A iff $\sum\left[\int_A \phi_i |f|\right]$ converges.

이제 $\int_A f = \sum\left[\int_A \phi_i f\right]$ 임을 보이자.

$$\int_A f = \int_A f_+ + \int_A f_- = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_A \phi_i f_+\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_A \phi_i f_-\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_A \phi_i f\right]. \square$$

Definition : Diffeomorphism

$A,\, B$ 가 $\mathbb{R}^n$의 open set 이고 $g : A \to B$ 가 bijection 이며 $g,\, g^{-1}$ 이 C^r class 함수 일 때 g를 **diffeomorphism** (of class C^r) 이라 한다.

Lemma 8.

Let A be open in $\mathbb{R}^n$ and $g : A \to \mathbb{R}^n$ be a C^1 class function. 만약 $E \subset A$가 measure 0 이면 $g(E)$ 도 measure zero 이다.

Proof $S \subset \mathbb{R}^n$ 이 measure 0 이면 전체 volume이 ε 보다 작고 개개의 width가 δ 보다 작은 closed cubes 로 cover 됨은 쉽게 보일 수 있다.

$C \subset A$ 가 $\mathbf{a}$를 중심으로 하는 width w 의 cube라 하자. $g \in C^1$ 이므로 $^\exists M > 0$ s. t. $|Dg(\mathbf{x})| \leq M$ for all $\mathbf{x} \in C$ 이다. $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < w/2$ 고 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{a}$를 잇는 line segments가 C 안에 존재하므로 mean value theorem을 쓰면 $g_j(\mathbf{x}) - g_j(\mathbf{a}) = Dg_j(\mathbf{c_j}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ 를 만족하는 $\mathbf{c_j} \in C$ 이다. 따라서

$$|g_j(\mathbf{x}) - g_j(\mathbf{a})| \leq n|Dg_j(\mathbf{c}_j)||\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq nM\left(\frac{w}{2}\right) .$$

for all $j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ and $\mathbf{x} \in C$ 이며 따라서 모든 $\mathbf{x} \in C$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a})| \leq nM(w/2) .$$

($|\mathbf{a}| = \sup\{|a_1|,\, |a_2|, \ldots,\, |a_n|\}$ 이며 $|\mathbf{A}| = \sup\{|A_{ij}|\}$ 임에 유의하라.)

이제 $g(E)$가 measure 0임을 보이자. $\{C_i\}$ 가 $C_i \subset \mathrm{Int}(C_{i+1})$ 를 만족하며 $\bigcup_i \{C_i\} = A$ 를 만족하는 compact subset의 sequence라 하자(우리는 이런 sequence가 항상 존재함을 안다.). $E_k = C_k \cap E$라 하자. C_k가 compact set 이므로 C_k의 δ-neighborhood가 $\mathrm{int}(C_{k+1})$ 에 포함되도록 하는 $\delta > 0$을 선택 할 수 있다. $g \in C^1$ 이므로 $|Dg(\mathbf{x})| \leq M$ for $\mathbf{x} \in C_{k+1}$ 이 되는 M을 선택 할 수 있다.

$E_k \subset E$ 이므로 E_k는 measure 0 이고 따라서, E_k 를 그 폭이 δ보다 작고 총 부피가 $\varepsilon' = \varepsilon/(nM)^n$ 보다 작은 cube로 cover 할 수 있음을 알고 있다. $D_1, D_2, \ldots$를 E_k와 intersect 하는 이 cubes라 하자. D_i의 width는 δ보다 작고 $D_i \subset \mathrm{Int}(C_{k+1})$ 이므로 $|Dg(\mathbf{x})| \le M$ for $\mathbf{x} \in D_i$ 이다. 따라서 $g(D_i)$ 는 width가 $nM \cdot (\mathrm{width}\, D_i)$ 인 cube D_i'에 포함된다. D_i'의 부피는 다음과 같다.

$$v(D_i') = (nM)^n (\text{width } D_i)^n = (nM)^n v(D_i) \ .$$

Cubes $\{D_i'\}$ 가 $g(E_k)$를 cover 하므로 total volume of $g(E)$ 는 $\varepsilon = \varepsilon'(nM)^n$ 보다 작다고 할 수 있다. □.

Theorem 9.

$\mathbb{R}^n$ 에서의 open set $A,\ B$ 에 대해 $g : A \to B$가 diffeomorphism of class C^r 이라 하자. D가 compact subset of A 이고 $E = g(D)$ 일 때 다음이 성립한다.

1. $g(\mathrm{Int}(D)) = \mathrm{Int}(E)$ and $g(\mathrm{Bd}(D)) = \mathrm{Bd}(E)$.
2. D가 rectifiable 이면 E도 rectifiable이다.

Proof g^{-1}이 연속이므로 $g(\mathrm{Int}(D))$ 는 open subset of E, i.e., $g(\mathrm{Int}(D)) \subset \mathrm{Int}(E)$. 마찬가지로 $g(\mathrm{Ext}(D) \cap A)$는 open in B and disjoint with $E = g(D)$, i.e., $g(\mathrm{Ext}(D) \cap A) \subset \mathrm{Ext}(D)$. g가 bijection 이므로 $\mathrm{Bd}(E) \subset g(\mathrm{Bd}(D))$ 이다.

더 자세히 말하면, Let $\mathbf{y} \in \mathrm{Bd}(E)$ 라 하자. $E = g(D)$, g is continuous and D is compact 이므로 E는 compact. 따라서 E is closed 이므로 $\mathbf{y} \in E$. Let $\mathbf{x} \in A$ s. t. $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$. $\mathbf{x} \in \mathrm{Int}(D)$ 이면 $\mathbf{y} \in \mathrm{Int}(E)$ 이고 $\mathbf{x} \in \mathrm{Ext}(D)$ 이면 $\mathbf{y} \in \mathrm{Ext}(E)$ 이어야 하므로 모순. 따라서 $\mathbf{x} \in \mathrm{Bd}(D)$ 이며 $\mathrm{Bd}(E) \subset g(\mathrm{Bd}(D))$ 이다.

위와 같은 이유료 g가 연속이므로 $g^{-1}(\mathrm{Int}(E)) \subset \mathrm{Int}(D)$ 이고 $\mathrm{Bd}(D) \subset g^{-1}(\mathrm{Bd}(E))$ 이다.

$\mathrm{Int}(E) = g \circ g^{-1}(\mathrm{Int}(E)) \subset g(\mathrm{Int}(D)) \subset \mathrm{Int}(E)$ 이므로 $g(\mathrm{Int}(D)) = \mathrm{Int}(E)$ 이다. (1. 증명)

$g(\mathrm{Bd}(D)) \subset g \circ g^{-1}(\mathrm{Bd}(E)) \subset \mathrm{Bd}(E) \subset g(\mathrm{Bd}(D))$ 이므로 $\mathrm{Bd}(E) = g(\mathrm{Bd}(D))$ 이다. (2. 증명)

D가 rectifiable 이면 E도 rectifiable 임은 Lemma 1.에 의해 자명하다. □.

Definition : Primitive Diffeomorphism

Diffeomorphism $h : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ 가 $h(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_n(\mathbf{x}))$ 로 주어졌고 하자. 어떤 i 에서 $h_i(\mathbf{x}) = x_i$ 일 때 h는 i-th coordinate를 보존한다고 한다. h가 어떤 i-th coordinate를 보존한다면 h를 **primitive diffeomorphism** 이라 한다.

Theorem 10.

$g : A \to B$가 diffeomorphism of open sets in $\mathbb{R}^n$ 이라 하자. $\mathbf{a} \in A$ 이면 어떤 neighborhood of $\mathbf{a}$, $U_{\mathbf{a}}$ 가 존재하여 $g|_{U_{\mathbf{a}}}$ 가 composite of primitive diffeomorphism $h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_1$ 과 같다.

Proof (Step 1) Linear algebra로 부터 다음 두 사실을 알고 있다.

1. Non-singular linear transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = C \cdot \mathbf{x}$ 일 경우 행렬 C는 elementary row operation matrix의 product 이므로 C는 primitive diffeomorphism 의 composite 이다.

2. $t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 이 translation $t(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{c}$ 일 경우 $t_1(\mathbf{x})=(x_1+c_1, x_2, \dots, x_n)$,
$t_2=(x_1, x_2+c_2, \dots, x_n+c_n)$ 으로 정의하면 t_1, t_2 는 primitive diffeomorphism 이며 $t=t_1\circ t_2$.

(Step 2) $\mathbf{a}=0$, $g(0)=0$, $Dg(0)=I_n$ 인 경우 g 가 locally composite of two primitive diffeomorphism 임을 보이자. $g(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x})\hat{e}_i$ 이며 $h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n-1} g_i(\mathbf{x})\hat{e}_i+x_n\hat{e}_n$ 이라 하자. $h(0)=0$ 이며 $Dh(0)=I_n$ 임을 알 수 있다. Inverse function theorem에 의해 h는 0 의 neighborhood V_0, V_1 사이의 diffeomorphism임을 알 수 있다.

이제 $k(\mathbf{y})=(y_1, \dots, y_{n-1}, g_n(h^{-1}(\mathbf{y})))$ 라 정의하자. $k(0)=0$ 이며

$$Dk(\mathbf{y})=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ D(g_n\circ h^{-1})(\mathbf{y}) & \end{bmatrix}$$

이다. Chain rule에 의해 $D(g_n\circ h^{-1})(\mathbf{y})=Dg_n(0)\cdot Dh^{-1}(0)=[0,\dots,0,1]\cdot I_n=[0,\dots,0,1]$. 따라서 $Dk(0)=I_n$ 이며 k는 0 의 neighborhood W_1, W_2 사이의 diffeomorphism이다. $k(W_1)=W_2$, $W_0=h^{-1}(W_1)$ 이라 하면 k, h 는 primitive diffeomorphism 이며 $k\circ h=g|_{W_0}$ 임을 알 수 있다.

$$W_0\xrightarrow{h}W_1\xrightarrow{k}W_2$$

(Step 3) 이제 일반적인 경우에 대해 생각해보자. 주어진 $g:A\to B$ 에 대해 $\mathbf{a}\in A$ 이고 $C=Dg(\mathbf{a})$ 라 하자. Diffeomorphism t_1, $t_2, T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{x})&=\mathbf{x}+\mathbf{a}\ , \\ t_2(\mathbf{x})&=\mathbf{x}-g(\mathbf{a})\ , \\ T(\mathbf{x})&=C^{-1}\cdot\mathbf{x}\ . \end{aligned}$$

$\tilde{g}=T\circ t_2\circ g\circ t_1$이라 하면 $\tilde{g}$ 는 open sets $t_1^{-1}(A)$, $T(t_2(B))$ 사이의 diffeomorphism 이다. 여기서 $\tilde{g}(0)=0$, $D\tilde{g}(0)=I_n$ 임은 쉽게 보일 수 있다. Step 2에서 보았듯이 0의 어떤 neighborhood $W_0\subset t_1^{-1}(A)$ 에 대해 $g|_{W_0}$ 는 two primitive diffeomorphism의 composite 이다. $W_2=\tilde{g}(W_0)$, $A_0=t_1(W_0)$, $B_0=t_2^{-1}T^{-1}(W_2)$ 라 하면,

$$A_0\xrightarrow{t_1^{-1}}W_0\xrightarrow{\tilde{g}}W_2\xrightarrow{T^{-1}}T^{-1}(W_2)\xrightarrow{t_2^{-1}}B_0\ .$$

각각의 t_1^{-1}, t_2^{-1}, T^{-1} 이 primitive transformation 이거나 primitive transformation으로 factorize 될 수 있으므로 증명 끝. □

Definition

An open $A\subset\mathbb{R}^n$ 에 대해 C^r class injective function $g:A\to\mathbb{R}^n$ 이 $\det Dg\neq 0$ for all $\mathbf{x}\in A$ 이면 g 를 **change of variables** in $\mathbb{R}^n$ 이라 한다.

Theorem 11. (Change of Variables Theorem)

$g:A\to B$는 $\mathbb{R}^n$ 에서의 open sets에서의 diffeomorphism 이고 $f:B\to\mathbf{R}$ 은 연속함수라 하자. 이 때 f가 integrable over B iff $(f\circ g)|\det Dg|$ is integrable 이며 이 경우

$$\int_B f=\int_A (f\circ g)|\det Dg|$$

이다.

(Proof) 우선 f is integrable $\implies$ $(f\circ g)|\det Dg|$ is integrable을 보인다(Lemma 6). 이후 $(f\circ g)|\det Dg|$ is integrable $\implies$ f is integrable 을 보인다(Lemma 13).

Lemma 12.

$g: A\subset\mathbb{R}^n\to B$, $h: B\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$이 differentiable 일 때 $\det(D(h\circ g))(\mathbf{x}) = \det(Dh(g(\mathbf{x})))\cdot\det(Dg)(\mathbf{x})$ 이다. 따라서 $|\det(D(h\circ g))| = |\det(Dh)\circ g|\cdot|\det(Dg)|$ 이다.

Proof is trivial

Lemma 13.

$g: A\to B$가 open sets $A,\ B$ in $\mathbb{R}^n$에 대한 diffeomorphism 이라 하자. B에서 integrable한 연속 함수 $f: B\to\mathbb{R}$에 대해 $(f\circ g)|\det Dg|$ 는 integrable 하며,

$$\int_B f = \int_A (f\circ g)|\det Dg|$$

이다.

Proof (Step 1) 임의의 $\mathbf{x}\in A$에 대해 위의 Lemma가 성립하는 $\mathbf{x}$의 neighborhood $U\subset A$가 존재함을 가정하자. 즉 일단 locally 성립하면 globally 성립함을 보인다. 그리고 난 후 이러한 U가 항상 존재함을 induction을 통해 보이기로 하자.

(Step 2) Collection of open sets $\{U_\alpha\}$ s. t. $\bigcup_\alpha U_\alpha = A$ 이고, $V_\alpha = g(U_\alpha)$ 이면 $B=\bigcup_\alpha V_\alpha$ 이다. B에 대한 partition of unity $\{\phi_i\}$ having compact support, that is dominated by $\{V_\alpha\}$ 를 생각하자. 우리는 $\{\phi_i\circ g\}$ 가 partition of unity on A having comact support 임을 보일것이다.

1. $\phi_i(g(\mathbf{x}))\ge 0$ for all $\mathbf{x}\in A$ 이다.
2. $T_i = \text{Supp }(\phi_i)$ 라 하자. $g(T_i)$ 는 compact 이며 $\phi_i\circ g(\mathbf{x}) = 0$ if $\mathbf{x}\notin g^{-1}(T_i)$ 이다. 따라서 $S_i = \text{Supp }(\phi_i\circ g)\subset g^{-1}(T_i)$ 이며 S_i는 compact set 이다.
3. $\mathbf{x}\in A$, $\mathbf{y}=g(\mathbf{x})$ 라 하자. $\mathbf{y}$ 는 finitly many T_i 와 intersect 하는 neighborhood $N_\mathbf{y}$ 를 가지며 $g^{-1}(N_\mathbf{y})$ 는 $\mathbf{x}$의 neighborhood로 이 T_i에 상응하는 S_i와만 intersect 한다.
4. $\sum\phi_i(g(\mathbf{x})) = \sum\phi_i(\mathbf{y}) = 1$.

따라서 $\{\phi_i\circ g\}$는 partition of unity on A 이다.

이제 $f: B\to\mathbb{R}$ 이 연속함수이고 f가 B에서 integrable 이라 하자. 우리는 $\int_B f = \sum_{i=1}^\infty\left[\int_B\phi_i f\right]$ 임을 알고 있다. Given i에 대해 $T_i\subset V_\alpha$ 가 되도록 α를 선택하자. $\phi_i f$는 B에서 연속이므로

$$\int_B \phi_i f = \int_{T_i}\phi_i f = \int_{V_\alpha}\phi_i f\ ,$$

이다. $g: U_\alpha\to V_\alpha$ 를 생각하면 다음이 성립한다.

$$\int_{V_\alpha}\phi_i f = \int_{U_\alpha}(\phi_i\circ g)(f\circ g)|\det Dg|\ \ .$$

우변의 적분은 S_i 밖에서 0 이므로 다음이 성립한다.

$$\int_B \phi_i f = \int_A (\phi_i \circ g)(f \circ g)|\det Dg\,| \ , \text{ and}$$
$$\int_B f = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_B \phi_i f \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_A (\phi_i \circ g)(f \circ g)|\det Dg\,| \right] \ .$$

$\phi_i \circ g$가 A의 partition of unity 이고 $|f|$가 integrable 이므로 $(f \circ g)|\det Dg|$ 도 integrable 하다. 따라서

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|\det Dg\,|$$

이다.

<u>(Step 3)</u> 임의의 $\mathbf{x} \in A$에 대해 위의 Lemma가 성립하는 $\mathbf{x}$의 neighborhood $U \subset A$가 존재함을 induction을 통해 보인다. 일단 $n = 1$ 일 때 즉 $\mathbb{R}^1$에서 보이자. $A,\ B$ 가 open in $\mathbb{R}$ 이라 하자. $x \in A$에 대해 I는 $x \in \operatorname{int}(I)$ 인 closed interval 이며 $J = g(I)$ 라 하자. g가 diffeomorphism 이므로 $g(x) \in \operatorname{Int}(J)$ 이다.

이제 $\operatorname{int}(J)$에서 정의된 연속함수 f에 대해 $\int_{\operatorname{Int}(J)} f = \int_{\operatorname{Int}(I)} (f \circ g)|g'\,|$ 임을 보이면 되는데 $I,\ J$가 closed interval 이므로 자명하다.

<u>(Step 4)</u> 이제 $n - 1$일때 성립함을 가정하고 n에서 성립함을 보이자. Lemma 4를 생각하면 우리는 primitive diffeomorphism에서 성립함을 보이면 된다. $h : U \to V$를 $\mathbb{R}^n$의 open set $U,\ V$에서 정의된 primitive diffeomorphism 이라 하자. 편의를 위해 h를 마지막 components를 보존하는 primitive diffeomorphism 이라고 가정한다.

$\mathbf{p} \in U,\ \mathbf{q} = h(\mathbf{p})$ 이며 Q는 $\mathbf{q}$를 내부에 포함하는 V의 subset 이라 하고 $S = h^{-1}(Q)$라 하자. h는 $\operatorname{Int}(S)$ 와 $\operatorname{Int}(Q)$ 사이의 diffeomorphism이다. 이제 h와 임의의 연속함수 $f : \operatorname{Int}(Q) \to \mathbb{R}$ whose support is compact subset of $\operatorname{Int}(Q)$ 에 대해 lemma가 성립함을 보이자.

$(f \circ h)|\det Dh\,|$ 가 compact subset of $\operatorname{Int}(S)$ 이므로 $(f \circ h)|\det Dh\,|$ 는 integrable over $\operatorname{Int}(S)$ 이다. 이제 우리는 다음을 보여야 한다.

$$\int_{\operatorname{Int}(Q)} f = \int_{\operatorname{Int}(S)} (f \circ h)|\det Dh\,| \ .$$

이제 f를 확장시킨 $f_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 을 다음과 같이 정의하면 f_e와 F는 $\mathbb{R}^n$에서 연속이다.

$$f_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{if } \mathbf{x} \in \operatorname{Int}(Q) \ , \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} (f_e \circ h)|\det Dh\,| & \text{if } \mathbf{x} \in \operatorname{Int}(Q) \ , \\ 0 & \text{oterwise .} \end{cases}$$

Q는 closed rectangle in $\mathbb{R}^n$ 이므로 $\mathbb{R}^{n-1}$ 에서의 closed rectengle D와 closed interval I 에 대해 $Q = D \times I$로 쓸 수 있다. S가 compact 이므로 $\mathbb{R}^{n-1} \times 0$으로의 projection S_0 도 compact 하며 어떤 $\mathbb{R}^{n-1}$의 rectangle E 에 대해 $S_0 \subset E \times 0$ 이다. h가 last coordinate를 preserve 하는 primitive diffeomorphism 이므로 $S \subset E \times I$ 이다.

$F(\mathbf{x}) = 0$ when $\mathbf{x} \notin S$ 이므로 $\int_Q f = \int_{E \times I} F$ 이다. Fubini's theorem 에 의해 다음과 같다.

$$\int_{t \in I} \int_{\mathbf{y} \in D} f(\mathbf{y},\ t) = \int_{t \in I} \int_{\mathbf{x} \in E} F(\mathbf{x},\ t) \ .$$

이제 $\mathrm{Int}(D\times I)$ 와 $\mathrm{Int}(E\times I)$ 에 대해 위의 등식이성립함을 보이면 된다.

앞의 $\mathbb{R}^n$에서의 open $U,\, V$와 $\mathbb{R}^{n-1}\times t$ 와의 각각의 intersections는 $\mathbb{R}^{n-1}$ 에서의 open $U_t,\, V_t$에 대해 $U_t\times t,\, V_t\times t$ 로 쓸 수 있다. 비슷하게 S 와 $\mathbb{R}^{n-1}\times t$ 와의 intersection도 $S_t\times t$ for some compact set S_t in $\mathbb{R}^{n-1}$로 쓸 수 있다. F가 S 밖에서 0 이므로 $\int_{\mathbf{y}\in D} f(\mathbf{y},\, t) = \int_{\mathbf{x}\in S_t} F(\mathbf{x},\, t)$ 이며 이는 아래와 같다.

$$\int_{\mathbf{y}\in V_t} f(\mathbf{y},\, t) = \int_{\mathbf{x}\in U_t} F(\mathbf{x},\, t)\ .$$

앞서 가정한 diffeomorphism $h: U\to V$는 $h(\mathbf{x},\, t) = (k(\mathbf{x},\, t),\, t)$ for some $k: U\to\mathbb{R}^{n-1}$ of C^1 class function 이다. $\det Dh = \det \partial k/\partial\mathbf{x}$ 이며 non zero for $\mathbf{x}\in U$ 이므로 map $\sigma:\mathbf{x}\to k(\mathbf{x},\, t)$ for fixed t 는 U_t와 V_t 사이의 diffeomorphism이다.

Induction의 가정을 fixed t 에 대해 적용하면

$$\int_{\mathbf{y}\in V_t} f(\mathbf{y},\, t) = \int_{\mathbf{x}\in U_t} f(k(\mathbf{x},\, t),\, t) |\det \partial k/\partial \mathbf{x}\,|$$

이다. $\square$