The Integral Over a Bounded Set

Definition

S가 bounded set in $\mathbb{R}^n$ 이고 $f : S \to \mathbb{R}$ 이 bounded function 일 때 $f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의한다.

$$f_S = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in S, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

S늘 포함하는 closed rectangle Q 에 대해 $\int_S f = \int_Q f_S$로 정의한다.

Lemma 1.

Q와 Q'이 $\mathbb{R}^n$ 에서의 두 rectangle이라 하자. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$이 bounded function 이고 $Q \cap Q'$ 밖에서 0 이면 1) $\int_Q f = \int_{Q'} f$, 2) $\int_Q f$ exists iff $\int_{Q'} f$ exists.

---

proof

$Q \subset Q'$일 경우를 생각하자. $E = \{x \in \text{int}(Q) : f \text{ is discontinuous at}\}$이라 하면 $\int_Q f$ exists iff E has measure 0. 따라서 $\int_{Q'} f$ exists iff E has measure 0.

$\int_Q f$와 $\int_{Q'} f$가 존재한다고 가정하자. Q'의 partition P_0'에 대해 Q의 end points를 포함시킨 Q'의 partition을 P라 하자. $R \in P$는 Q에 포함되어 있거나 disjoint 한데 후자의 경우 $f(x) = 0$ for $\forall x \in R$. 따라서 $\int_Q f = \int_{Q'} f$.

$Q \not\subset Q'$ 일 경우는 $\int_{Q \cap Q'} f = \int_Q f = \int_{Q'} f$. $\square$

Lemma 2.

$f,\, g : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이고 $F,\, G : S \to \mathbb{R}^n$ 이 $F(x) = \max\{f(x),\, g(x)\}$, $G(x) = \min\{f(x),\, g(x)\}$ 일 때 다음이 성립한다.

1. $f,\, g$가 x_0에서 연속이면 $F,\, G$도 x_0에서 연속이다.
2. $f,\, g$가 S에서 integrable 이면 $F,\, G$도 integrable 이다.

Proof is trivial

Theorem 3. (Properties of the integral)

S가 bounded set in $\mathbb{R}^n$ 이고 $f,\, g : S \to \mathbb{R}$ 가 bounded functions 일 때 다음이 성립한다.

1. $f,\, g$가 integrable over S 이면 $af + bg$도 integrable over S 이며, $\int_S (af + bg) = a \int_S f + b \int_S g$ 이다.

2. f, g가 integrable over S이고 $f(x) \le g(x)$ for all $x \in S$ 이면 $\int_S f \le \int_S g$ 이다. 또한 $|f|$도 integrable 이며 $|\int_S f| \le \int_S |f|$ 이다.
3. $T \subset S$이고 f가 non-negative on S 이며 integrable over T and S 이면 $\int_T f \le \int_S f$ 이다.
4. f가 integrable over S_1 and S_2 이면 f is integrable over $S_1 \cup S_2$ and $S_1 \cap S_2$ 이며 $\int_{S_1 \cup S_2} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f - \int_{S_1 \cap S_2} f$ 이다.

Proof is trivial

Conventions

앞으로는 연속 함수의 적분에 대해서만 생각하기로 하자.

Theorem 4.

S가 bounded set, $f : S \to \mathbb{R}$이 bounded continuous function,
$E = \{x \in \mathrm{Bd}(S) : \lim_{y \to x} f(y) \ne 0 \text{ or not defined.}\}$라 하자. E가 measure zero iff f is integrable over S 이다.

(Proof) S를 포함하는 closed rectangle Q를 생각하고 f를 Q로 확장한 f_S 와 D를 다음과 같이 정의한다.

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in S, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$D = \{x \in Q : f_S \text{ is discontinuous at}\} .$$

이 때 $D = E$ 임을 알고 있다. E가 measure zero 이면 f_S is integrable over Q 이고, 정의에 의해 $\int_S f = \int_Q f_S$ 이므로 f is integrable over S. 역으로 f is integrable over S 이면 f_S is integrable over Q 이므로 $D = E$ has measure zero. $\square$

Theorem 5.

Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be bounded, $f : S \to \mathbb{R}$ be bounded and continuous. 만약 f is integrable over S 이면 f is integrable over $\mathrm{int}(S)$ 이며 $\int_S f = \int_{\mathrm{int}(S)} f$ 이다.

Proof

Let $A = \mathrm{int}(S)$. Then $f_A = f_S$ for $x \in \mathrm{int}(S) \cup \mathrm{ext}(S)$.

Let $D = \{x \in \mathrm{Bd}(S) : f \text{ is discontinuous at }\}$. f is integrable if D has measure 0. 따라서 f is integrable over A. f_A와 f_S 는 D에서만 그 값이 다르며 $f_S - f_A = 0$ for all $x \notin D$ 이므로 $\int_A f = \int_S f$. $\square$

Definition : Volume of rectifiable set

S가 bounded set in $\mathbb{R}^n$ 일 때 S에서의 constant function 1 이 integrable over S이면 S를 **rectifiable** 이라 하며 S의 volume을 $v(S) = \int_S 1$로 정의한다.

Theorem 6.

$S \subset \mathbb{R}^n$ is rectifiable iff $\mathrm{Bd}(S)$ has measure zero.

$S,\, S_1,\, S_2$가 rectifiable 일 때 다음이 성립한다.

1. $v(S) \geq 0$.
2. $S_1 \subset S_2$ 이면 $v(S_1) \leq v(S_2)$.
3. $S_1 \cap S_2$ 와 $S_1 \cup S_2$도 rectifiable 이며 $v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2) - v(S_1 \cap S_2)$ 이다.

Proof is trivial

Definition : Graph and simple region

C가 compact rectifiable set in $\mathbb{R}^{n-1}$ 이고 함수 $\phi : C \to \mathbb{R}$ 에 대해 $G_\phi = \{(x,\, t) : x \in C \ \text{ and } \ t = \phi(x)\}$ 를 **graph** of ϕ라 한다. C에서의 연속함수 $\phi,\, \psi : C \to \mathbb{R}$ with $\phi(x) \leq \psi(x)$ for all $x \in C$ 에 대해 다음과 같이 정의된 집합 S 을 **simple region** in $\mathbb{R}^n$ 이라 한다.

$$S = \{(x,\, t) : x \in C \text{ and } \phi(x) \leq t \leq \psi(x)\}\ .$$

Lemma 7.

S가 simple region in $\mathbb{R}^n$ 이면 S는 compact and rectifiable set 이다.

(Proof) $\phi,\, \psi$에 대한 graph를 각각 $G_\phi,\, G_\psi$ 라 하고 $D = \{(x,\, t) : x \in \mathrm{Bd}(C) \ \text{ and } \ \phi(x) \leq t \leq \psi(x)\}$ 라 하자. $\mathrm{Bd}(S) = D \cup G_\phi \cup G_\psi$ 이다. $\mathrm{Bd}(S) \subset S$ 이고 S는 bounded 이므로 S는 compact set 이다.

이제 G_ϕ 와 G_ψ가 measure zero 임을 보이자. $\mathbb{R}^{n-1}$에서의 C를 포함하는 rectangle Q 를 생각한다. C 가 compact set 이므로 $\phi,\, \psi$ are uniformly continuous on C. $\varepsilon > 0$ 이 주어졌고 $\varepsilon' = \varepsilon/(2\, v(Q))$라 하자. Uniformly continuity of ϕ 에 의해 모든 $x,\, y \in C$ with $|x - y| < \delta$ 에 대해 $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon'$ 인 $\delta > 0$ 이 존재한다. Q 를 그 mesh가 δ 보다 작은 cubes 로 분할한 partition을 P 라 하자.

$R \in P$ 이고 $R \cap C \neq \varnothing$ 이면 모든 $x,\, y \in R \cap C$ 에 대해 $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon'$ 이다. 모든 $R \in P$ with $R \cup C \neq \varnothing$ 에서 임의의 $x_R \in R \cap C$ 에 대해 $\mathbb{R}^n$ 에서의 rectangle $Q_R = R \times [\phi(x_R) - \varepsilon',\, \phi(x_R) + \varepsilon']$ 을 생각하자. 이 Q_R 은 모든 $x \in R$ 에서의 $(x,\, \phi(x))$ 를 포함하며, 이러한 Q_R의 set의 부피의 합은 $2\varepsilon' \times v(Q) = \epsilon$ 보다 작다. 따라서 G_ϕ 는 measure zero 이며 같은 이유로 G_ψ도 measure zero 이다.

이제 남은것은 D가 measure zero 임을 보이는 것이다. $\phi,\, \psi$가 C에서 연속이므로 모든 $x \in C$에서 $-M \leq \phi(x) \leq \psi(x) \leq M$ 인 $M \geq 0$ 이 존재한다. C가 rectifiable 이므로 given $\varepsilon > 0$ 에 대해 $\mathrm{Bd}(C)$를 cover 하며 총 부피의 합이 $\varepsilon/2M$보다 작은 rectangles in $\mathbb{R}^{n-1}$의 집합 $\{Q_1,\, Q_2, \ldots\}$ 가 존재한다. 따라서 $\{Q_i \times [-M,\, M]\}$ 는 D를 cover 하며 총 부피의 합은 ε보다 작다. 즉 D는 measure zero 이다. $\square$

지금까지 적분을 $\int_S f$를 다룸에 있어 bounded S와 bounded f만을 생각해 왔다. 이제 적분개념을 확장시켜 unbounded S and/or unbounded f 조건에서의 적분을 생각하자.

Definition

$\mathbb{R}^n$ 에서의 open set A와 연속함수 $f: A \to \mathbb{R}$ 를 생각하자. f 가 non-negative 이고 D를 set of all compact rectifiable subsets of A 라 하자. $\sup\left\{\int_C f : C \in D\right\}$ 가 존재 할 때 이 값을 **extended integral** of f over A 로 정의하며 $\int_A f$로 쓴다. 일반적인 f 에 대해 $f_+ = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = \max\{-f(x), 0\}$ 로 정의하고, f_+와 f_- 가 integrable over A 이면 f를 integable over A라 하고 $\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-$ 로 정의한다. 여기서 $\int_A$ 는 extended integral 이다.

Convention

앞으로 A가 open in $\mathbb{R}^n$ 일 경우 $\int_A$는 extended integral을 의미한다.

Lemma 8.

A가 open in $\mathbb{R}^n$ 일 경우 다음을 만족하는 compact rectifiable subset of A 의 sequence $C_1, C_2, \ldots$ 가 존재한다.

1. $\bigcup_{i=1} C_i = A$.
2. $C_N \subset \mathrm{Int}(C_{N+1})$ for each N.

(Proof) $d(x, y)$를 sup metric $|x-y|$ 로 정의하자. $B \subset \mathbb{R}^n$ 일 때 $d(x, B) = \inf\{d(x, b) : b \in B\}$ 로 정의한다. $B = \mathbb{R}^n - A$ 일 때 $D_N = \{x \in A : d(x, B) \geq 1/N \text{ and } d(x, 0) \leq N\}$ 을 정의하면 각각의 N에 대해 D_N 은 compact and bounded subset of A 이다. $\mathcal{D} = \{D_N : N \in \mathbb{Z}\}$ 일 때 $\mathcal{D}$ 가 A를 cover 함을 보이자. $x \in A$ 에 대해 $(x, B) = d_x > 0$ 이다. $N_0 > 1/d_x$ 이면 $x \in D_{N_0}$.

$A_{N+1} = \{x \in A : d(x, B) > 1/(N+1) \text{ and } d(x, 0) < N+1\}$ 을 정의하면 $D_N \subset A_{N+1} \subset \mathrm{Int}(D_{N+1})$ 이므로 $D_N \subset \mathrm{Int}(D_{N+1})$ 임을 알 수 있다.

모든 $x \in D_N$에 대해 x를 중심으로 하며 $\mathrm{Int}(D_{N+1})$ 에 포함되는 open cube 들을 모으자. D_N은 compact set 이므로 finite open cubes로 D_N을 cover 할 수 있으며 이 finite open cubes 각각의 closure의 union을 C_N 이라 하자. 그렇다면 $D_N \subset \mathrm{Int}(C_N) \subset C_N \subset \mathrm{Int}(D_{N+1})$ 이다. 이 C_N의 union은 A 이며 for each N, $C_N \subset \mathrm{Int}(C_{N+1})$ 이다. $\square$

Theorem 9.

A가 open in $\mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$ 이 연속함수라 하자. Sequence of compact rectifiable subsets of A, $\{C_1, C_2, \ldots\}$ 가 (1) $\bigcup_i C_i = A$ 이고 (2) $C_i \subset \mathrm{Int}(C_{i+1})$ for each i 일 때 다음이 성립한다 : f is integrable over A iff the sequence $\int_{C_i} |f|$ is bounded. 이 경우 다음이 성립한다.

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f \ .$$

(Proof) 우선 f 가 non-negative 라 가정한다. $S_n = \int_{C_n} f$ 이라 하면 S_n은 monotonically increasing sequence 이므로 S_n이 bounded 이면 수렴한다. f 가 integrable over A 라 가정하자. D 를 set of all compact rectifiable subset of A 라 하면 $S_n = \int_{C_n} f \leq \sup_D\{\int_D f\} = \int_A f$ 이므로 S_n은 bounded 이고 $\lim_{n\to\infty} S_n \leq \int_A f$ 이다.

역으로 S_n이 bounded 라 가정하자. K가 compact subsets of A 이면 $\{\mathrm{Int}(C_i)\}$ 에 의해 cover 되며 compactness 에 의해 finite elements of $\{\mathrm{Int}(C_i)\}$ 로 cover 된다. $\mathrm{Int}(C_i) \subset C_i \subset \mathrm{Int}(C_{i+1})$ 이므로 $K \subset \mathrm{Int}(C_M)$ 인 M 이 존재한다. 따라서 $\int_K f \leq \int_{C_M} f \leq \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f$. K가 임의의 compact subset of A 이므로 extended integral의 정의에 의해 f is integrable over A 이고 $\int_A = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f$ 이다.

이제 f가 non-negative 라는 조건을 없에자. 우리는 f is integrable over A iff f_+ and f_- are integrable over A 임을 알고 있다. 따라서 f is integrable over A iff $\int_{C_n} f_+$ and $\int_{C_n} f_-$ are bounded 이다. 우리는 $\{\int_{C_n} f_+\}$ and $\{\int_{C_n} f_-\}$ are both bounded 임을 알고 있으므로 f는 integrable over A 이다. $\int_{C_n} f = \int_{C_n} f_+ - \int_{C_n} f_-$ by definition 이므로 $\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_- = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f$. $\square$

Corollary 10.

$A \subset \mathbb{R}^n$ 에서 $f : A \to \mathbb{R}$ 이 연속함수 일 때, f is integrable over A iff $|f|$ is integrable over A 이다.

(Proof) Theorem 9의 증명에서 $0 \leq f_+,\ f_- \leq |f|$ 이고 $|f| = f_+ + f_-$ 이므로 $\int_{C_n} f_+$ and $\int_{C_n} f_-$ are bounded iff $\int_{C_n} |f|$ is bounded. $\square$

Theorem 11.

$A,\ B$ 가 open in $\mathbb{R}^n$ 이고 $f,\ g : A \to \mathbb{R}^n$ 이 연속함수 일 때 다음이 성립한다.

(a) f 와 g가 integrable over A 이면 $af + bg$ 도 integrable over A 이며, $\int_A (af + bg) = a\int_A f + b\int_A g$ 이다.

(b) f와 g가 integrable over A 이고 $f(x) \leq g(x)$ 이면 $\int_A f \leq \int_A g$ 이다. 특히 $|\int_A f| \leq \int_A |f|$ 이다.

(c) $B \subset A$ 이고 f가 integrable over A 이면 f 는 integrable over B 이고 $\int_B f \leq \int_A f$ 이다.

(d) f가 $A \cup B$에서 연속이고 integrable over A and over B 이면 f is integrable over $A \cup B$ and $A \cap B$ 이며 다음이 성립한다.

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f\ .$$

(Proof) A 에 대해 Lemma 8을 만족하는 sequence $\{C_n\}$ 을 생각하자. 각각의 C_n은 compact rectifiable subset of A 이며 $\bigcup_n C_n = A$ 이고 $C_n \subset \mathrm{Int}(C_{n+1})$ 이다.

(a) $|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|$ 이므로 $\int_{C_n} |af + bg| \leq |a| \int_{C_n} |f| + |b| \int_{C_n} |g|$ 이다. 따라서, $f,\ g$ are integrable over $C_n \implies |f|,\ |g|$ are integrable over $C_n \implies |af + bg|$ is integrable over $C_n \implies (af + bg)$ is integrable over C_n. Linearity에 의해 $\int_{C_n} (af + bg) = a\int_{C_n} f + b\int_{C_n} g$ 이므로 (a)가 성립한다.

(b) $\int_{C_n} f \leq \int_{C_n} g$ 이므로 $\int_A f \leq \int_A g$.

(c) 임의의 compact rectifiable subset of B, D에 대해 $\int_D f \leq \int_A f$ 이다. $\int_B f = \sup_D\{\int_D f\}$ 이므로 (c) 성립.

(d) B에 대해 Lemma 8을 만족하는 sequence $\{D_n\}$ 을 생각하고 $\{E_n = C_n \cup D_n\}$, $\{F_n = C_n \cap D_n\}$ 으로 정의하면 $\{E_n\}$, $\{F_n\}$ 은 각각 $A \cup B$, $A \cap B$ 에 대해 Lemma 8을 만족하는 sequence 이다(이것을 쉽게 보일 수 있다). 따라서 $\int_{E_n} f = \int_{C_n} f + \int_{D_n} f - \int_{F_n} f$ 이다.

$f \to |f|$ 하면 $\int_{E_n} |f| + \int_{F_n} |f| = \int_{C_n} |f| + \int_{D_n} |f|$ 이므로 $\int_{E_n} |f|$ 와 $\int_{F_n} |f|$ 는 bounded above. 따라서 f is integrable over $A \cup B$ and $A \cap B$ 이며 주어진 적분에 관한 식이 성립한다. $\square$

Theorem 12.

A가 bounded open set in $\mathbb{R}^n$ 이고 $f : A \to \mathbb{R}$ 이 bounded continuous funtion이면 extended integral of f over A 가 존재한다. 만약 ordinary integral of f over A가 존재하면 두 값은 같다.

(Proof) Extended integral of f over A를 $\int_A' f$ 로, ordinary integral of f over A를 $\int_A f$로 쓰기로 하자. A를 포함하는 closed rectangle Q를 생각하자. f가 bounded 이므로 $|f| < M$ 인 $M > 0$이 존재한다. 또한 f_A를 다음과 같이 정의한다.

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in A \ , \\ 0 & \text{otherwise} \ . \end{cases}$$

(1) 우선 $\int_A' f$가 존재함을 보이자. D 가 compact rectifiable subset of A 이면 $\int_D |f| \le \int_D M \le M \cdot v(Q)$ 이다. 따라서 $\int_A' f$는 존재한다.

(2) f 가 non-negative 라 가정하자. $\int_A f$가 존재한다면 $\int_A f = \int_Q f_A$ 이다. D가 compact rectifiable subset of A 이면 $\int_D f = \int_D f_A \le \int_Q f_A = \int_A f$ 이므로 $\int_A' f \le \int_A f$ 임을 알 수 있다.

(3) Q에 대한 partition P를 생각하자. $R_1, R_2, \ldots, R_k$는 P에 속한 rectangle 중 A에 포함되는 것들이라 하고 $D = \bigcup_{i=1}^k R_i$ 라 하자. $L(f_A, P) = \sum_{i=1}^k m_{R_i}(f) \cdot v(R_i) \le \sum_{i=1}^k \int_{R_i} f = \int_D f \le \int_A' f$ 이다. 따라서 $\int_A f$ 가 존재한다면 $\int_A f \le \int_A' f$ 이다. (2)와 함께 생각하면 $\int_A f$가 존재한다면 $\int_A f = \int_A' f$.

(4) 이제 일반적인 f에 대해 생각하자. 앞에서 처럼 $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ 로 정의하면 f is integrable over A iff f_+ and f_- are integrable over A 이다. (2), (3) 을 이용하면

$$\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_- = \int_A' f_+ - \int_A' f_- = \int_A' f \ .$$

$\square$

Corollary 13.

S가 $\mathbb{R}^n$의 bounded set 이고 $f : S \to \mathbb{R}$ 이 bounded continuous function 이라 하자. f가 integrable over S in the ordinary sense 이면 $\int_S f = \int_{\text{Int}(S)}' f$ 이다.

Proof is trivial

Theorem 14.

A가 open in $\mathbb{R}^n$ 이고 $f : A \to \mathbb{R}$ 이 연속함수라 하자. Sequence of open sets $\{U_1, U_2, \ldots\}$ 가 $U_n \subset U_{n+1}$ for each $n \in \mathbb{Z}$ 이며 $\bigcup U_n = A$ 일 때 다음이 성립힌다. $\int_A f$ exists iff the sequence $\{\int_{U_n} |f|\}$ exists and bounded. 이 경우

$$\int_A f = \lim_{n \to \infty} \int_{U_n} f$$

이다.

(Proof) f 가 non-negative 일 경우에 증명하면 일반적인 경우는 앞서와 같이 증명되므로 f가 non-negative 라 가정하자. $\int_A f$가 존재한다면 Theorem 11. (3)에 의해 $\int_{U_n} f \leq \int_A f$ 이므로 sequence $\{\int_{U_n} f\} = \{\int_{U_n} |f|\}$ 가 존재하며 bounded 이다. 따라서 $\lim_{n \to \infty} \int_{U_n} f \leq \int_A f$ 이다.

이제 $\{\int_{U_n} f\}$ 가 존재하며 bounded 라 하자. D 를 임의의 compact rectifiable subset of A 라 하면 D는 $\{U_n\}$ 에 의해 cover 되며 D가 compact set 이므로 $D \subset U_M$ 인 $U_M \in \{U_n\}$ 이 존재한다. $\int_D f \leq \int_{U_M} \leq \lim_{n \to \infty} \int_{U_n} f$ 이고 $\int_A f = \sup_D \{\int_D f\}$ 이므로 (in the extended sense) $\int_A f \leq \lim_{n \to \infty} \int_{U_n} f$. 따라서 Theorem이 성립한다. □