

# Inverse Function Theorem and Implicit Function Theorem

---

## Notation.

1.  $I_n = n \times n$  identity matrix.
2. For  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\mathbf{x}| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$  and  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .
3. For a  $n \times n$  matrix  $A$ ,  $|A| = \max\{|A_{i,j}|\}$ .
4.  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  이라 하자.  $f$  미분 가능하며 각각의  $i, j$ 에 대해  $D_j f_i$ 가 연속이면  $f \in C^1$  **class** function 이라 한다. For each  $i, j$ , and  $\mathbf{x} \in A$ ,  $D_j f_i(\mathbf{x})$  가  $r - 1$ 번 미분 가능하며 그  $r - 1$ 번째 도함수가 연속이면  $f$ 를  $C^r$  **class** function 이라 한다.

## Lemma 1.

$n \times m$  행렬  $A$ 와  $m \times p$  행렬  $B$ 에 대해  $|A \cdot B| \leq m|A||B|$  이다.

## Lemma 2.

$A$  가 open in  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  가 open in  $\mathbb{R}^m$  이며  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m, g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ , and  $f(A) \subset B$ 라 하자.  $f, g$ 가  $C^r$  class function 이면 그 합성함수  $g \circ f$ 도  $C^r$  class function 이다.

---

(Proof) Induction을 통해 증명한다.  $f, g \in C^1$  이라 하자. 우리는  $D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \cdot Df(\mathbf{x})$  임을 알고 있다.  $g \in C^1$  이므로  $Dg$  는 연속함수이다.  $f$ 가 연속함수 이므로  $Dg(f)$ 는 연속함수이다.  $f \in C^1$  이므로  $D(g \circ f)$  는 연속함수이다. 따라서  $D(g \circ f) \in C^1$  이다.

이제  $f, g \in C^{r-1}$  이면  $g \circ f \in C^{r-1}$  이라 가정하자. 즉  $D_j g_i(f(\mathbf{x})) \in C^{r-1}$  이다.  $f, g \in C^r$  이라 하자.  $Dg(\mathbf{y})$  와  $Df(\mathbf{x})$  가  $r - 1$  번 미분 가능 하며 따라서  $D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \cdot Df(\mathbf{x})$  도  $r - 1$  번 미분 가능 하므로  $g \circ f$ 도  $C^r$  class function 이다.

## Theorem 3. (Mean value theorem for $\mathbb{R}^n$ )

Let  $A$  be open in  $\mathbb{R}^n$  and  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable on  $A$ . 만약  $\mathbf{a}$  에서  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$  로의 line segment가  $A$ 에 포함된 다면 어떤  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t_0 \mathbf{h}$  with  $0 < t_0 < 1$  에서  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{h}$  이다.

---

*Proof is trivial*

**Comment :**  $\mathbf{a} \in A$  를 중심으로  $A$ 에 포함되는 open cube나 open ball 형태의 neighborhood  $N_a$ 를 잡으면 모든  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_a$ 를 잇는 line segment가  $N_a$ 의 subset이므로 mean value theorem이 성립한다.

## Lemma 4.

$A$  is open in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a  $C^1$  class function 이라 하자.  $Df(\mathbf{a})$  가 non singular 이면  $\exists \alpha > 0$  s.t  $|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_1)| \geq \alpha |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|$  holds for all  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$  in some open cube  $C(\mathbf{a}, \varepsilon)$  centered at  $\mathbf{a}$ . 즉  $f(\mathbf{x})$  is injective in  $C(\mathbf{a}, \varepsilon)$ .

(Proof)  $E = Df(\mathbf{a})$  라 하자.  $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| = |E^{-1} \cdot E \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)| \leq n|E^{-1}| \cdot |E \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)|$ .

Let  $2\alpha = 1/(n|E^{-1}|)$ , then  $|E \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)| \geq 2\alpha |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|$ .

Consider function  $H(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - E \cdot \mathbf{x}$ , then  $DH(\mathbf{a}) = 0$ .  $H$ 가  $C^1$  함수이므로  $DH(\mathbf{x}) < \alpha/n$  for all  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \varepsilon) = C$  이 되도록 하는  $\varepsilon > 0$ 이 존재한다. Mean value theorem에 의해  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$  이면  $\exists \mathbf{c} \in C$  such that  $|H_i(\mathbf{x}_0) - H_i(\mathbf{x}_1)| = |DH_i(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)| \leq n(\alpha/n)|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|$ .

따라서, 모든  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$  에 대해

$$\begin{aligned} \alpha |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| &\geq |H(\mathbf{x}_0) - H(\mathbf{x}_1)| \\ &= |f(\mathbf{x}_0) - E \cdot \mathbf{x}_0 - f(\mathbf{x}_1) + E \cdot \mathbf{x}_1| \\ &\geq |E \cdot \mathbf{x}_1 - E \cdot \mathbf{x}_0| - |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)| \\ &\geq 2\alpha |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| - |f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)|. \end{aligned}$$

이므로 Lemma가 성립한다.  $\square$ .

## Lemma 5.

Let  $A$  be an open in  $\mathbb{R}^n$  and  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  be differentiable. 만약  $\phi$ 가  $\mathbf{x}_0 \in A$ 에서 local minimum을 가지면  $D\phi(\mathbf{x}_0) = 0$  이다.

*Proof is trivial*

## Theorem 6.

Let  $A$  be open in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  be of class  $C^r$ , and  $B = f(A)$ . 만약  $f$ 가 one-to-one on  $A$  이고  $Df(\mathbf{x})$  가 non singular for  $\mathbf{x} \in A$  이면  $B$ 는 open in  $\mathbb{R}^n$  이며  $f^{-1} = g$  는  $C^r$  class 함수이다.

(Proof) (Step 1) 우선  $B$ 가 open 임을 보이자. 임의의  $\mathbf{b} \in B$  에 대해 open ball  $B(\mathbf{b}, \delta) \subset B$ 가 존재함을 보이고자 한다.  $\mathbf{a} = f^{-1}(\mathbf{b})$  를 내부에 포함하며  $A$ 에 포함되는 closed rectangle  $Q$ 를 생각하자. ( $\mathbf{a} \in \text{Int}(Q)$  and  $Q \subset A$ ).  $\text{Bd}(Q)$ 는 compact set 이고  $f$ 는 연속이므로  $f(\text{Bd}(Q))$ 도 compact set 이다.  $f$ 가 injection 이므로  $\mathbf{b} \notin \text{Bd}(Q)$  이다.  $f(\text{Bd}(Q))$ 가 closed set 이므로 이것과 disjoint 한 open ball around  $\mathbf{b}$ ,  $B(\mathbf{b}, 2\delta)$  가 존재한다. 이제 임의의  $\mathbf{c} \in B(\mathbf{b}, \delta)$ 에 대해  $\mathbf{c} = f(\mathbf{x})$  for some  $\mathbf{x} \in A$  임을 보이자.

이를 위해  $C^r$  class 함수  $\phi(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\|^2$  를 생각하자.  $Q$ 가 compact 하므로  $\phi$ 는  $Q$ 에서 최대값과 최소값을 가진다.  $\mathbf{c} \in B(\mathbf{b}, \delta)$  이므로  $\phi(\mathbf{a}) = \|f(\mathbf{a}) - \mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 < \delta^2$  이다. 따라서 minimum value of  $\phi$  on  $Q$  는  $\delta^2$  보다 작아야 한다. 그런데  $\mathbf{y} \in \text{Bd}(Q)$  이면  $f(\mathbf{y})$  는  $B(\mathbf{b}, 2\delta)$  밖에 있으므로  $\phi(\mathbf{y}) \geq \delta^2$ . 따라서  $\phi$ 를 minimum 이 되도록 하는 값  $\mathbf{x}$  는  $\text{Int}(Q)$ 에 존재한다.

$f$  는  $\mathbf{x} \in \text{Int}(Q)$  에서 local minimum을 가지므로  $D\phi(\mathbf{x}) = 0$ . (Lemma 4.)  $D_j \phi(\mathbf{x}) = 0$  for all  $j$ .  $D_j \phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n 2(f_k(\mathbf{x}) - c_k) D_j f_k(\mathbf{x})$  이므로  $D\phi(\mathbf{x}) = 0$  을 행렬방정식으로 쓰면

$$2Df(\mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) - c_1 \\ \vdots \\ (f_n \mathbf{x}) - c_n \end{bmatrix} = 0$$

이 된다.  $Df(\mathbf{x})$ 가 non-singular 이므로  $f(\mathbf{x}) - \mathbf{c} = 0$ 인  $x$ 가  $B(\mathbf{b}, \delta)$ 에 존재한다.

(Step 2) 이제  $g = f^{-1}$ 이 연속임을 보이자.  $g$ 가 연속인 것은 임의의 open  $U \subset A$ 에 대해  $f(U)$ 가 open in  $B$  임을 보이면 되는데 이는 step 1에서 보인것이다. 따라서  $g = f^{-1}$ 는 연속이다.

(Step 3)  $g$ 가 임의의  $\mathbf{b} \in B$ 에서 differentiable 임을 보이자.  $\mathbf{a} = g(\mathbf{b})$  이고  $E = Df(\mathbf{a})$  라 하자.

$N_0 = \{\mathbf{x} \in A : 0 < \|\mathbf{x}\| < r, \text{ for some } r\}$  라 하면  $N_0$  는 open in  $A$  이다.  $G : N_0 \rightarrow B$  를 다음과 같이 정의한다.

$$G(\mathbf{k}) = \frac{[g(\mathbf{b} + \mathbf{k}) - g(\mathbf{b}) - E^{-1} \cdot \mathbf{k}]}{|\mathbf{k}|}.$$

$g$  는  $\mathbf{b}$  에서 미분가능하며  $Dg(\mathbf{b}) = E^{-1}$  이다.  $\Delta(\mathbf{k}) = g(\mathbf{b} + \mathbf{k}) - g(\mathbf{b})$  라 정의한다.

Lemma 4로부터  $\mathbf{a}$ 의 cubic neighborhood  $C$ 와  $\alpha > 0$  such that  $|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_1)| \geq \alpha \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|$  for all  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$  이 존재함을 알고 있다.  $f(C)$ 가  $\mathbf{b}$ 의 neighborhood 이다.  $|\mathbf{k}| < \varepsilon$  일 때  $f(\mathbf{b} + \mathbf{k}) \in f(C)$  이도록  $\varepsilon$ 을 작게 잡자. 그렇다면  $g(\mathbf{b} + \mathbf{k}) = \mathbf{x}_0, g(\mathbf{b}) = \mathbf{x}_1$  가 되도록 할 수 있으며 다음이 성립한다.

$$\|(\mathbf{b} + \mathbf{k}) - \mathbf{b}\| \geq \alpha \|g(\mathbf{b} + \mathbf{k}) - g(\mathbf{b})\|.$$

따라서  $1/\alpha \geq \|\Delta(\mathbf{k})\|/|\mathbf{k}|$  이다. 즉 우리는  $\|\Delta(\mathbf{k})\|/|\mathbf{k}|$  가 bounded 되도록 하는  $|\mathbf{k}| < \varepsilon$ 을 생각 할 수 있다.

이제  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  implies  $G(\mathbf{k}) \rightarrow 0$  임을 보이자. Let  $0 < |\mathbf{k}| < \varepsilon$  이라 하자.  $g$ 가 injection 이므로  $\mathbf{k} \neq 0$  이면  $\Delta(\mathbf{k}) \neq 0$  임을 이용하면

$$G(\mathbf{k}) = \frac{\Delta(\mathbf{k}) - E^{-1} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = -E \cdot \left[ \frac{\mathbf{k} - E \cdot \Delta(\mathbf{k})}{|\Delta(\mathbf{k})|} \right] \cdot \frac{|\Delta(\mathbf{k})|}{|\mathbf{k}|}.$$

$E^{-1}$ 는 constant,  $\|\Delta(\mathbf{k})\|/|\mathbf{k}|$  는 bounded 이다. 위 식의  $[\ ]$  부분이  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  일 때 0에 접근함을 보이자.  $\mathbf{b} + \mathbf{k} = f(g(\mathbf{b} + \mathbf{k})) = f(g(\mathbf{b}) + \Delta(\mathbf{k})) = f(\mathbf{a} + \Delta(\mathbf{k}))$  이므로, 위 식의  $[\ ]$  부분은 다음과 같다.

$$\frac{f(\mathbf{a} + \Delta(\mathbf{k})) - f(\mathbf{a}) - E \cdot \Delta(\mathbf{k})}{|\Delta(\mathbf{k})|}$$

$\mathbf{k} \rightarrow 0$  implies  $\Delta(\mathbf{k}) \rightarrow 0$  because  $g$  is continuous. 따라서  $f$ 는  $\mathbf{a}$  에서 미분가능 하며 그 derivative는  $E$  이다.

(Step 5) 이제  $f$ 가  $C^r$  class function 이면  $g = f^{-1}$  도  $C^r$  class function 임을 induction을 통해 보인다.  $f$ 는  $C^1$  함수 이므로  $Df$ 는 연속이다.  $Dg(\mathbf{y}) = [Df(g(\mathbf{y}))]^{-1}$  이며  $g, Df$ 와  $I_n$ 이 연속이므로  $Dg(\mathbf{y})$ 도 연속이다. 따라서  $g \in C^1$ . 이제  $f$ 가  $C^{r-1}$  이면  $g = f^{-1} \in C^{r-1}$  이라 가정하자.  $Df(g(\mathbf{y}))$  도  $C^{r-1}$  class function 이므로  $g \in C^r$  이다.

## Theorem 7 (Inverse Function Theorem)

$A$  가 open in  $\mathbb{R}^n$  이며  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  이  $C^r$  class 함수라 하자.  $Df(\mathbf{x})$  가 non-singular at  $\mathbf{a} \in A$  이면  $\mathbf{a}$  의 어떤 neighborhood  $N_a$ 에서  $f|_{N_a} : N_a \rightarrow \mathbb{R}^n$ 은 injection 이며  $g : f(N_a) \rightarrow N_a$  defined by  $g = (f|_{N_a})^{-1}$  은  $C^r$  class function 이다.

(Proof) Lemma 4에 의해  $f$ 가 injection 인  $\mathbf{a}$ 의 neighborhood  $U_1$  이 존재한다.  $Df(\mathbf{a})$  가 non singular and continuous at  $\mathbf{a}$  이므로  $Df(\mathbf{x})$ 가 nonsingular 한  $\mathbf{a}$  의 neighborhood  $U_2$ 가 존재한다.  $N_a = U_1 \cap U_2$  라 하면 Theorem 6으로 부터 Inverse function theorem 이 성립함을 알 수 있다.  $\square$

## Definition.

$A$ 가 open in  $\mathbb{R}^m$  이고  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  이 differentiable 이며  $f_1, \dots, f_n$  이  $f$  의 component function 이라 하자. 이 때  $Df$ 를 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$Df = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$$

이 때  $(Df)_{i,j} = \partial f_i / \partial x_j$  이다.

## Theorem 8.

$A$  가 open in  $\mathbb{R}^{k+n}$  이고  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  이 differentiable이라 하자.  $f$ 를  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  에 대해  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  로 쓰기로 하자. 그렇다면  $Df = [\partial f / \partial \mathbf{x}, \partial f / \partial \mathbf{y}]$  로 쓸 수 있다. Open  $B$  in  $\mathbb{R}^k$  에 대해 differentiable function  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  이 존재하여  $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$  for all  $\mathbf{x} \in B$  라 하자. 그렇다면  $\mathbf{x} \in B$ 에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \cdot Dg(\mathbf{x}) = 0 .$$

(Proof) Define  $h : B \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$  and  $H : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  by  $h(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ ,  $H(\mathbf{x}) = f(h(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ .

From chain rule

$$0 = DH(\mathbf{x}) = Df(h(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))) = \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(h(\mathbf{x})) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(h(\mathbf{x})) \right] \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ Dg(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(h(\mathbf{x})) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(h(\mathbf{x})) \cdot Dg$$

$\square$ .

## Theorem 9. (Implicit Function Theorem)

$A$ 가 open in  $\mathbb{R}^{k+n}$  이고  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  이  $C^r$  class function이라 하자. 앞서와 같이  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  에 대해  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  로 쓰기로 하자.  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A$  이며  $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  이고  $\det(\partial f / \partial \mathbf{y})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$  이면  $\mathbf{a}$ 의 어떤 neighborhood  $U \subset \mathbb{R}^k$  에서  $C^r$  함수  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  이 존재하여  $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$  for all  $\mathbf{x} \in U$  이다. 이  $g$ 는 unique 하다.

(Proof) Define  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$  by  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ . Then,

$$DF = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ \partial f / \partial \mathbf{x} & \partial f / \partial \mathbf{y} \end{bmatrix} .$$

여기서  $\det(DF) = \det \partial f / \partial \mathbf{y}$  이므로  $DF$ 는 non-singular at  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  이다.

$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, 0)$  이므로 inverse function theorem 을 사용하면  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 의 neighborhood  $U \times V \subset \mathbb{R}^{k+n}$  이 존재 하여  $F(U \times V)$  는  $(\mathbf{a}, 0)$  의 neighborhood 이며(Let it  $W$ ),  $F|_{U \times V}$  는 injection이다. 또한  $(F|_{U \times V})^{-1} = G : W \rightarrow U \times V$  가 존재하며  $C^r$  class function 이다. 따라서  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  이다.  $G$ 는  $F$  처럼 첫번째  $k$  coordinate를 보존하며 따라서  $G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, \mathbf{z}))$  로 쓸 수 있다. Inverse function theorem에 의해  $G \in C^r$  이므로  $h : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  은  $C^r$  함수이다.

$\mathbf{a}$ 의 connected neighborhood  $B$ 를  $B \times \mathbf{0} \in W$  가 되도록 잡을 수 있다.  $\mathbf{x} \in B$  라면,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{0}) &= ((x), h(\mathbf{x}, \mathbf{0})) , \\ (\mathbf{x}, \mathbf{0}) &= F(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, \mathbf{0}))) , \\ \mathbf{0} &= f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, \mathbf{0})) . \end{aligned}$$

$g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, 0)$ 으로 정의하면 우리는  $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ 이므로 우리가 원하는 함수임을 알 수 있다. 더우기  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = G(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = (\mathbf{a}, h(\mathbf{a}, \mathbf{0}))$  이므로  $\mathbf{b} = h(\mathbf{a})$  이다.

이제  $g$ 의 uniqueness를 보이자.  $g_0 : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 주어진 조건을 만족하는 다른 함수라 하자.  $g(\mathbf{a}) = g_0(\mathbf{a})$  이다.  $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \in V$  이며  $V$  는 open,  $g_0$ 은 연속 이므로  $(g_0)^{-1}(V) = B_0$  는  $\mathbf{a}$ 의 neighborhood 이다.  $f(\mathbf{x}, g_0(\mathbf{x})) = 0$  for all  $\mathbf{x} \in B_0$  이므로

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, g_0(\mathbf{x})) &= (\mathbf{x}, 0) , \text{ so} \\ (\mathbf{x}, g_0(\mathbf{x})) &= G(\mathbf{x}, 0) = (\mathbf{x}, h(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

이므로  $g = g_0$  on  $B_0$ .