I. Linear Maps

1. Linear Maps on Vector Space

Definition : Linear Map, Linear Operator

Vector space V 에서 vector space W 에 대해 $T : V \to W$ 가 다음 성질을 만족할 때 T 를 **linear map** from V to W 라 한다. 같은 vector space에서의 linear map을 **linear operator** 가 한다.

(a) For all $u,\, v \in V$, $T(u+v) = Tu + Tv$;

(b) For all $v \in V$ and $c \in \mathbb{F}$, $T(cv) = cTv$.

V 에서 W 로의 모든 linear map 의 집합을 $\mathcal{L}(V,\, W)$ 라 하며 $\mathcal{L}(V,\, V)$ 는 $\mathcal{L}(V)$ 로 쓸 수 있다.

Theorem 1.1

$v_1, \ldots, v_n$ 이 V 의 basis 이고 $w_1, \ldots, w_n$ 이 W 의 elements 일 때 $Tv_j = w_j$ for all $j = 1, \ldots, m$ 인 $T \in \mathcal{L}(V,\, w)$ 가 존재한다.

(Proof) (1) Define $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ as $T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n$ for arbitrary $c_i \in \mathbb{F}$. $v_1, \ldots, v_n$ 이 V 의 basis 이므로 $T : V \to W$ 를 잘 정의한다. 각각의 c_j 를 1로 놓으면 우리가 원하는 T 와 같다.

(2) For any $v,\, v' \in V$, $c \in \mathbb{F}$ 에 대해 $T(v + cv') = Tv + cTv'$ 임은 쉽게 보일 수 있다. 따라서 주어진 T 는 linear map from V to W 이다. $\square$

Definition : Addition and scalar multiplication on linear operator

Let $T,\, S \in \mathcal{L}(V,\, W)$ and V is defined on scalar field $\mathbb{F}$. For $v \in V$ and $c \in \mathbb{F}$, $S + T$ is defined by $(S+T)(v) = Sv + Tv$ and (cT) is defined $(cT)(v) = c(Tv)$.

Theorem 1.2

$\mathcal{L}(V,\, W)$ is a vector space.

Proof is trivial

Definition : Product of Linear map

$T \in \mathcal{L}(U,\, V)$ and $S \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 일 때 $ST \in \mathcal{L}(U,\, W)$ 는 $ST(u) = S(T(u))$ 로 정의된다.

Properties of Product of linear maps

(1) Identity map $I \in \mathcal{L}(V)$ 는 $Iv = v$ for all $v \in V$.

(2) $T,\, T_1,\, T_2 \in \mathcal{L}(U,\, V)$ ans $S,\, S_1,\, S_2 \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 일 때 $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$, $S(T_1,\, T_2) = ST_1 + ST_2$ 로 정의된다.

(3) $T_1 \in \mathcal{L}(U,\, V)$, $T_2 \in \mathcal{L}(V,\, W)$, $T_3 \in \mathcal{L}(W,\, Z)$ 일 때 $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$ 이다.

Theorem 1.3

For $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 에 대해 $T0 = 0$.

(Proof) $T(0) = T(0+0) = T0 + T0$.

Exercise (Chap. 3.A)

4. $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 이고 $v_1, \ldots,\, v_m \in V$ 라 하자. $v_1, \ldots,\, v_m \in V$ 이 $Tv_1, \ldots,\, Tv_m$ 을 linearly independent 하게 한다면 $v_1, \ldots,\, v_m$ 도 linearly independent 함을 보이시오.

Let $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$. $0 = T(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m$. $Tv_1, \ldots,\, Tv_m$ 이 linearly independent 하므로 $a_1 = \cdots = a_m = 0$. 따라서 $v_1, \ldots,\, v_m$ 은 linearly independent.

10. U 가 V 의 proper subspace 이고 $S \in \mathcal{L}(U,\, W)$ 이며 $S \neq 0$ 이라 하자. $T : V \to W$ 를 아래와 같이 정의하면 T 가 linear map on V 가 아님을 보이시오.

$$Tv = \begin{cases} Sv & \text{if } v \in U\,, \\ 0 & \text{if } v \in V \text{ and } v \notin U\,. \end{cases}$$

Let $u \in U$ where $Tu \neq 0$, and $w \in V - U$. Then $u + w \in V - U$ and $T(u + w) = 0$. If T is a linear map, $T(u + w) = Tu \neq 0$. Contradiction.

11. U 가 V 의 proper subspace 이고 $S \in \mathcal{L}(U,\, W)$ 라 하자. 이 때 S 를 V 에서 작용하도록 확장시킨 linear map $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 가 존재함을 보이시오. 즉 $Tu = Su$ for all $u \in U$ 이어야 한다.

$v \in V$ 는 어떤 $u \in U$, $w \notin U$ 에 대해 $v = u + w$ 이다. $T(v) = S(u)$ 로 정의하면 $Tu = Su$ 이며 T 는 linear map 이다.

12. V 가 finite dimensional vector space 이고 W 가 infinite dimensional vector space 일 때 $\mathcal{L}(V,\, W)$ 는 infinite dimensional 임을 보이시오.

---

(1) Let $v_1, \ldots,\, v_n$ be a basis of V. W 에서 임의의 n 개의 linearly independent vector $w_1, \ldots,\, w_n$ 을 선택하자. $Tv_i = w_i$ 가 되도록 하는 $T : V \to W$ 는 linear map 이다. (Theorem 1.1)

(2) $w'_1, \ldots, w'_n \notin \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_n)$ 이 되는 independents vectors 를 선택 할 수 있다. $T'v_i = w'_i$ 가 되도록 하는 $T : V \to W$ 역시 independent map 이다.

(3) T 와 T' 이 independent 함을 보이자. $0 = c_1T + c_2T'$ 이라 하자.
$c_1Tv_1 + c_2Tv_1 = c_1w_1 + c_2w'_1 = 0$ 이며 w_1 과 w_2 가 linearly independent 하므로 $c_1 = c_2 = 0$

(4) W 가 infinite dimensional 이므로 이런 T, T' 같은 linear map을 무한히 행성할 수 있으며 이들은 서로 linearly independent 하다. 따라서 $\mathcal{L}(V, W)$ 는 infinite dimensional 이다.

13. V, W 가 vector space 라 하자. $v_1, \ldots, v_m$ 이 linearly dependent in V 이고 $W \neq \{0\}$ 이라 하자. Prove that there exist $w_1, \ldots, w_m \in W$ such that no $T \in \mathcal{L}(V, W)$ satisfies $Tv_k = w_k$ for each $k = 1, \ldots, m$.

---

(1) $v_1, \ldots, v_m$ 이 linearly dependent. $c_1v_1 + \cdots + c_mv_m = 0$ for some nonzero c_i. $c_1 \neq 0$ 으로 놓아도 no loss of generality.

(2) Let $w_1 \neq 0$ and $w_j = 0$ for all $j > 1$. $0 = T(c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = c_1w_1 \neq 0$. Contradiction!.

14. V 가 finite dimensional with $\dim V \geq 2$ 일 때, 어떤 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 에 대해 $ST \neq TS$ 임을 보이시오.

Let v_1, v_2 be independent vectors in V. Define $Sv_1 = v_2, Sv_2 = v_1, Tv_1 = v_1 + v_2$ $Tv_2 = v_2$.

Then $ST(v_1 + v_2) = S(v_1 + 2v_2) = 2v_1 + v_2$ and $TS(v_1 + v_2) = T(v_1 + v_2) = v_1 + 2v_2$.

Definition : Kernel and Range of Linear map

For $T \in \mathcal{L}(V, W)$, **kernel** of T, denoted $\ker T$ is defined as $\ker T = \{v \in V : Tv = 0\}$. **Range** of T, denoted $\operatorname{range} T$ is defined as $\operatorname{range} T = \{Tv : v \in V\}$.

Theorem 1.4

For $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\ker T$ is a subspace of V and $\operatorname{range} T$ is a subspace of W.

Proof is trivial

Theorem 1.5

For $T \in \mathcal{L}(V, W)$, T is injective iff $\ker T = \{0\}$.

Proof is trivial

Theorem 1.6 (Fundamental Theorem of Linear Maps)

For finite dimensional vector space V and $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{range} T)$.

(Proof) (1) $\ker T$ 가 V 의 subspace 이므로 finite dimensional 이며 $u_1, \ldots, u_m$ 을 $\ker T$ 의 basis 라 하자. 즉 $m = \dim(\ker T)$. V 의 나머지 basis 를 $w_1, \ldots, w_n$ 이라 하자. 즉 $\dim V = n + m$ 이다.

(2) $v = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$. 이며 $T(v) = b_1 T w_1 + \cdots b_n T w_n$ 이다. $Tw_1, \ldots, Tw_n$ 은 linearly independent 하며(it can be easily shown) $\operatorname{range} T$ 를 span 하므로 $\dim(\operatorname{range} T) = n$ 이다. $\square$

Corollary 1.7

$\dim V > \dim W$ 이면 $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 는 injective 할 수 없다. $\dim V < \dim W$ 이면 $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 는 surjective 할 수 없다.

Exercises (Chap. 3.B)

7. $V,\, W$ 가 finite dimensional vector space 이고 $2 \leq \dim V \leq \dim W$ 라 하자. 이 때 $\{T \in \mathcal{L}(V,\, W) : T \text{ is not injective}\}$ 는 $\mathcal{L}(V,\, W)$ 의 subspace 가 되지 않음을 보이시오.

Let $V = \mathbb{R}^2$ and $W = \mathbb{R}^3$ and $T,\, S \in \mathcal{L}(V,\, W)$ defined as $T(x,\, y) = (x,\, 0,\, 0)$ and $S(x,\, y) = (0,\, y,\, 0)$. Then it can be easily shown that T and S are not injective. However, $(T + S)(x,\, y) = (x,\, y,\, 0)$ is injective.

8. $V,\, W$ 가 finite dimensional vector space 이고 $2 \leq \dim W \leq \dim V$ 라 하자. 이 때 $\{T \in \mathcal{L}(V,\, W) : T \text{ is not surjective}\}$ 는. $\mathcal{L}(V,\,W)의 subspace가 되지 않음을 보이시오.

Let $V = \mathbb{R}^3$ and $W = \mathbb{R}^2$. Define $T,\, S \in \mathcal{L}(V,\, W)$ by $T(x,\, y,\, z) = (x,\, 0)$ and $T(x,\, y,\, z) = (y,\, 0)$. The it can be easily shown that T and S are not surjective. However $(T + S)(x,\, y,\, z) = (x,\, y)$ is surjective.

9. $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 가 injective 이고 $v_1, \ldots, v_n$ 이 linearly independent in V 일 때 $Tv_1, \ldots, Tv_n$ 도 linearly independent 함을 보이시오.

Suppose $c_1 T v_1 + \cdots + c_n T v_n = 0$. Then $T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = 0$. T is injective 이므로 $c_1 v_1 + \cdots c_n v_n = 0$ 이며 linearly independent 조건으로부터 $c_1 = \cdots = c_n = 0$. 따라서 $Tv_1, \ldots, Tv_n$ 도 linearly independent.

12. V 가 finite dimensional vector space 이고 $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 이다. 어떤 subspace of V 인 U 가 존재하여 $U \cap \ker T = \{0\}$ 이며 $\operatorname{range} T = \{Tu : u \in U\}$ 임을 보이시오.

---

(1) Let $v_1, \ldots, v_m$ be a basis of $\ker T$ and $u_1, \ldots, u_n$ be a linearly independent elements of V which are not spanned by $v_1, \ldots, v_m$. Then $v_1, \ldots, v_m,\, u_1, \ldots, u_n$ are basis of V and $\dim V = n + m$.

(2) Let $U = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_n)$ then U is the subspace of V and $V = (\ker T) \oplus U$. It is obvious that $\operatorname{range} T = \{Tu : u \in U\}$.

20. W 가 finite dimensional vector space 이고 $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 일 때 다음을 보이시오: T is injective iff $\exists S \in \mathcal{L}(W,\, V)$ s.t. ST is identity map on V.

---

(1) Suppose T is injective. T 가 injection 이므로 $\dim V = \dim(\text{range}\, T) \le \dim W$. 따라서 V is finite dimensional. Let $v_i, \dots,\, v_n$ be a basis of V and $w_i = Tv_i$. Then $w_1, \dots,\, w_n$ is linearly independent (Exercise 9). Define $Sw_i = v_i$ for and $Sw = 0$ for all $w \notin \text{span}(w_1, \dots,\, w_n)$. Then ST is identity map on V.

(3) Suppose ST is identity map on V. If T is not injection, ST cannot be identity on V. 따라서 T is injection.

21. V가 finite dimensional 이고 $T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 라 할 때 다음을 보이시오 : T is surjective iff $\exists S \in \mathcal{L}(W,\, V)$ s.t. TS is the identity map on W.

---

(1) Suppose T is surjective. $\dim W = \dim(\text{range }T) = \dim V - \dim(\ker T) \le \dim V$ 이므로 W is finite dimensional. Let $u_1, \dots,\, u_n$ be basis of $\ker T$ and $v_1, \dots,\, v_m$ be linearly independent vectors which are not spanned by $u_1, \dots,\, u_n$. Then $\dim V = m + n$ and $m = \dim W$. Let $V' = \text{span}(v_1, \dots,\, v_m)$ then V' is a subspace of V and there is $T|_{V'} \in \mathcal{L}(V',\, W)$ defined as $T_{V'}(u + v) = Tv$ for $u = U$ and $v = V'$. Because any $v \in V$ is uniquely represented as $v = u + v$ for $u \in U$ and $v \in V'$, $T|_{V'}$ is well defined. In addition, because $\dim W = \dim V'$, we can make isomorphism by defining $T|_{V'}|v_i = w_i$ for all $i = 1, \dots,\, m$ for any basis of $W = w_1, \dots,\, w_m$. Let S be inverse mapping of $T|_{V'}$. Then TSw_i = $Tv_i = w_i$. Therefore TS is identity map on W.

(b) Suppose $S \in \mathcal{L}(W,\, V)$ which makes TS be an identity map on W. If T is not surjective, TS cannot be identity. 따라서 T 는 surjection.

22. U, V 가 finite dimensional vector space 이고 $S \in \mathcal{L}(V,\, W)$, $T \in \mathcal{L}(U,\, V)$ 일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\dim(\ker ST) \le \dim(\ker S) + \dim(\ker T)\ .$$

---

(1) Let $u_1, \dots,\, u_m$ be a basis of $\ker T$ and $\mu_1, \dots,\, \mu_m$ be a linearly independents basis of $(\ker T)^\perp$. Then $\{u_i \text{ and } \mu_j\}$ become basis of V. $T\mu_1, \dots,\, T\mu_m$ are linearly independent vectors of V. Then we can constitute with additional linearly independent vectors $v_1, \dots,\, v_k$ in V and basis of $\ker S$ with r vectors in $T\mu_1, \dots,\, T\mu_m$ and s vectors in $v_1, \dots,\, v_k$ with $r \le m$ and $s \le k$.

(2) $\dim(\ker ST) = m + r$ 이며 , $\dim(\ker S) = r + s$, $\dim(\ker T) = m$ 임은 쉽게 알 수 있다. 따라서 $\dim(\ker ST) = m + r \le m + (r + s) = \dim(\ker S) + \dim(\ker T)$.

23. U, V 가 finite dimensional vector space 이고 $S \in \mathcal{L}(V,\, W)$, $T \in \mathcal{L}(V,\, U)$ 일 때 다음이 성립함을 보이시오.

$$\dim(\text{range}\, ST) \le \min\{\dim(\text{range}\, S),\, \dim(\text{range}\, T)\}\ .$$

---

(1) From the argument in exercise 22, $\dim(\text{range}\, S) = k$ and $\dim(\text{range}\, T) = (m - r) + (k - s)$. In addition, $\dim(\text{range}\, ST) = \dim V - \dim(\ker ST) = m + k - (m + r) = k - r$

(2) $\dim(\text{range } ST) - \dim(\text{range } S) = -r \le 0$ and $\dim(\text{range } ST) - \dim(\text{range } T) = s - r \le 0$. 따라서 , $\dim(\text{range } ST) \le \min\{\dim(\text{range } S), \dim(\text{range } T)\}$

24. W 이 finite dimensional 이고 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 다음을 보이시오.: $\ker T_1 \subset \ker T_2$ iff $\exists S \in \mathcal{L}(W)$ s.t. $T_2 = ST_1$.

---

(1) Suppose $\ker T_1 \subset \ker T_2$. Let $u_1, \ldots, u_m$ be a basis of $\ker T_1$ and $u'_1, \ldots, u'_k$ be additional linear independents vector to be a basis of $\ker T_2$. In addition let $v_1, \ldots, v_n$ be additional linearly independent vectors to be a basis of V. $\{T_1 u'_1, \ldots, T_1 u'_k, T_1 v_1, \ldots, T_1 v_n\}$ are linearly independent in W and $\{T_2 v_1, \ldots, T_2 v_n\}$ are linearly independent also. Let's define $S(T_1 v_1) = T_2 v_1$ for all $i = 1, \ldots, n$ and $S(T_1 u'_j) = 0$ for all $j = 1, \ldots, k$. Then $ST_1 v = T_2 v$ for all $v \in V$.

(2) Suppose $T_2 = ST_1$. $v \in \ker T_1 \implies T_2 v = ST_1 v = 0 \implies v \in \ker T_2$. Then $\ker T_1 \subset \ker T_2$.

25. V 이 finite dimensional 이고 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 다음을 보이시오.: $\text{range } T_1 \subset \text{range } T_2$ iff $\exists S \in \mathcal{L}(V)$ s.t. $T_1 = T_2 S$.

---

(1) Suppose $\text{range } T_1 \subset \text{range } T_2$. Let $w_1, \ldots, w_m$ be a basis of $\text{range } T_1$ and $w_{m+1}, \ldots, w_{m+k}$ be a necessary elements of basis to span $\text{range } T_2$. Then there is $v_1, \ldots, v_m$ which satisfies $w_i = T_1 v_i$ for all $i = 1, \ldots, m$ and $v'_1, \ldots, v'_{m+k}$ which satisfies $w_j = T_2 v'_j$ for all $j = 1, \ldots, m+k$. Define $S : V \to V$ by $Sv_i = v'_i$ for all $i = 1, \ldots, m$ and $Sv = 0$ for all $v \notin \text{span}\,(v_1, \ldots, v_m)$. We can show that $S \in \mathcal{L}(V)$ and satisfies $T_1 = T_2 S$.

(2) Suppose $T_1 = T_2 S$. $w \in \text{range } T_1 \implies w = T_1 v$ for some $v \in V$ and $w = T_2 S v'$ for some $v' \in V \implies w \in \text{range } T_2$. 따라서 $\text{range } T_1 \subset \text{range } T_2$.

28. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 이고 $w_1, \ldots, w_m$ 이 $\text{range } T$ 의 basis 라 하자. 이 때 어떤 $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ 이 존재하여 모든 $v \in V$에 대해 $Tv = \varphi_1(v)w_1 + \cdots + \varphi_m(v)w_m$ 임을 보이시오.

---

(1) Let $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of V. Define $\varphi_j : V \to \mathbb{F}$ by $\varphi_j(cv_k) = c\delta_{jk}$. Let $u = \sum_i a_i v_i$, $v = \sum_i b_i v_i$. Then $\varphi_j(u + cv) = a_j + cb_j = \varphi_j(u) + c\varphi_j(v)$. 따라서 $\varphi_j \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$.

(2) For w_i, we can find v_i satisfying $w_i = Tv_i$. And we can find $v_{m+1}, \ldots, v_n$ linearly independent vectors in $\ker T$. Then any $v \in V$ can be represented as $v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ and $c_i = \varphi_i(v)$

(3) $T(v) = \sum_{i}^{n} \varphi_i(v) T v_i = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(v) w_i$.

29. Suppose $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ and $u \in V - \ker \varphi$. 이 때 $V = \ker \varphi \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$ 임을 보이시오.

Let $A = \{au : a \in \mathbb{F}\}$ and $v \in \ker \varphi \cap A$. Since $v \in A$, the $v = cu$ for some $c \in \mathbb{F}$. Also $v \in \ker \varphi$, $u \in \ker \varphi$ if $c \neq 0$, which is contradict to $u \in V - \ker \varphi$. Therefore $\ker \varphi \cap A = \{0\}$. 따라서 $V = \ker \varphi \oplus A$.

30. Suppose $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$. 만약 $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$ 이면 어떤 $c \in \mathbb{F}$ 에 대해 $\varphi_1 = c\varphi_2$ 임을 보이시오.

From 29, $V = \ker \varphi_1 \oplus \{au_1 : a \in \mathbb{F}\} = \ker \varphi_2 \oplus \{bu_2 : b \in \mathbb{F}\}$ for a $u_1 \in V - \ker \varphi_1$ and a $u_2 \in V - \ker \varphi_2$. It is obvious that $\{au_1\} = \{bu_2\}$ and they are 1-dimensional. 따라서 $\varphi_1 = c\varphi_2$.

2. Isomorphic Vector Space and Matrices

Definition : Matrix

For positive integer n and m and scalar field $\mathbb{F}$, m by n (or $m \times n$) matrix A over $\mathbb{F}$는 m개의 rows와 n개의 column상에 $\mathbb{F}$의 원소를 배치한 것을 말한다. 즉,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

형태이며 모든 $A_{i,j} \in \mathbb{F}$이다. 여기서 , i는 row index, j 는 column index 이다.

Definition : Matrix of Linear map

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 이고 $v_1, \dots, v_n$ 은 V 의 basis, $w_1, \dots, w_m$ 을 W의 basis 라 하자. Matrix of T, denoted by $m \times n$ matrix $\mathcal{M}(T)$ 은 그 entries $A_{i,j}$ 가 다음과 같이 정의된 행렬을 말한다.

$$Tv_k = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m \ .$$

Definition : Addition, Scalar Multiplication of Matrix

Let A, B be a $n \times m$ matrix over $\mathbb{F}$. Then $A + B$ is defined as $n \times m$ matrix of which entries are $(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$. For $c \in \mathbb{F}$, scalar multiplication cA is defined as $n \times m$ matrix of which entries are $(cA)_{i,j} = cA_{i,j}$.

Notation : $\mathbb{F}^{m,n}$

Field $\mathbb{F}$ 에 대해 $\mathbb{F}^{m,n}$ or $\mathbb{F}^{m \times n}$ 은 $\mathbb{F}$ 에서의 모든 $m \times n$ 행렬의 집합을 의미한다.

Theorem 2.1

$\mathbb{F}^{m,n}$ 은 mn dimensional vector space over $\mathbb{F}$ 이다.

Proof is trivial

Matrix Multiplication

Vector space $U,\, V,\, W$ 의 basis 가 각각 $(u_1, \ldots, u_p)$, $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ 이며 $T \in \mathcal{L}(U,\, V)$, and $S = \mathcal{L}(V,\, W)$ 라 하자. 이 때 주어진 basis 에 대한 T 와 S 의 행렬표현 $\mathcal{M}(T)$ 와 $\mathcal{M}(S)$ 를 생각 할 수 있다. 우리는 $ST \in \mathcal{L}(U,\, W)$ 임을 알고 있다. 그렇다면 $\mathcal{M}(ST)$ 는 어떻게 될까?

$A = \mathcal{M}(S)$, $B = \mathcal{M}(T)$, $C = \mathcal{L}(ST)$ 라 하자. 그렇다면,

$$STu_i = \sum_{j=1}^{n} C_{i,\,j} v_j = S(\sum_{j=1}^{n} B_{k,\,j} u_j) = \sum_{k=1}^{m} A_{i,\,k} (\sum_{j=1}^{n} B_{k,\,j} u_j) = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} A_{i,\,k} B_{k,\,j} \right] u_j \ .$$

따라서 $C_{i,\,j} = \sum_{k=1}^{m} A_{i,\,k} B_{k,\,j}$ 로 정의된다. 이것으로부터 Matrix multiplication $C = AB$를 정의 할 수 있다.

Notation : $A_{j,\cdot},\ A_{\cdot,\,k}$

A가 $m \times n$ 행렬 일 때, $A_{j,\,\cdot}$ 은 A의 j-th row로 구성된 $1 \times n$ matrix를 의미한다. $A_{\cdot,\,k}$ 는 k-th column 으로 구성된 $m \times 1$ matrix를 의미한다.

이 때 $m \times n$ 행렬 A와 $n \times l$ 행렬 B의 곱 AB에 대해 $(AB)_{i,\,j} = A_{i,\,\cdot} B_{\cdot,\,j}$ 이다. 또한 $(AB)_{\cdot,\,k} = AB_{\cdot,\,k}$ 이며 $(AB)_{j,\,\cdot} = A_{j,\,\cdot} B$ 이다. (See exercise 10.)

$n \times 1$ 행렬 $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ 에 대해 $Ac = c_1 A_{\cdot,\,1} + \cdots + c_n A_{\cdot,\,n}$ 이다. 즉 A는 linear combination of the columns of A 이다.

Exercise (Chap. 3.C)

10. A가 $m \times n$ 행렬이고 C 가 $n \times p$ 행렬일 때 $(AC)_{j,\,\cdot} = A_{j,\cdot} C$ 임을 보이시오.

$(AC)_{j,\,k} = \sum_{i=1}^{n} A_{j,\,i} C_{i,\,k} = \sum_{i=1}^{n} (A_{j,\,\cdot})_i C_{i,\,k}$. 따라서 $(AC)_{j,\,\cdot} = A_{j,\,\cdot} C$.

Definition : Invertible Linear Map, Inverse Linear Map

$T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 가 어떤 $S \in \mathcal{L}(W,\, V)$ 에 대해 $TS = I_W$ 이고 $ST = I_V$ 이면 T 를 **invertible linear map** 이라 하며, S를 T의 **inverse linear map** 이라 한다. 이 때 $S = T^{-1}$ 로 쓴다. (여기서 $I_W \in \mathcal{L}(W)$, $I_V = \mathcal{L}(V)$ 는 identity map on W and V respectively.)

Theorem 2.1

$T \in \mathcal{L}(V,\, W)$ 가 invertible 일 경우 T의 inverse linear map은 unique 하다.

(Proof) Let $S_1,\, S_2 \in \mathcal{L}(W,\, V)$ are two inverse linear map of T. Then, $S_1 = S_1 I_W = S_1 T S_2 = I_V S_2 = S_2$.

Theorem 2.2

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 다음이 성립한다. T is invertible $\iff$ T is bijective.

(Proof) (1) Suppose T is invertible. Assume $Tu = Tv$. Then $u = T^{-1}Tu = T^{-1}Tv = v$. 따라서 T is injective. $w \in W$ 이면 $w = TT^{-1}w = T(T^{-1}w)$ 이므로 $w \in \operatorname{range} T$. 따라서 T is surjective.

(b) Suppose T is bijective. T가 $V \to W$ 함수이므로 어쨌든 역함수 $S : W \to V$ 가 존재한다. 이제 S가 linear map 임을 보이자. Let $w_1, w_2 \in W$ and $c \in \mathbb{F}$. T가 bijection 이므로 $w_1 = Tv_1$, $w_2 = Tv_2$ 인 $v_1, v_2 \in V$ 가 unique 하게 존재한다.
$S(w_1 + cw_2) = S(Tv_1 + cTv_2) = ST(v_1 + cv_2) = v_1 + cv_2 = Sw_1 + cSw_2$. 따라서 S는 linear map 이며 $TS = I_W$, $ST = I_V$ 임은 쉽게 보일 수 있다. 따라서 T 는 invertible 이다.

Definition : Isomorphism

Vector spaces V, W 사이에 invertible linear map $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 가 존재하면 T를 **isomorphism** 이라 하며 V와 W가 서로 **isomorphic** 하다고 한다.

Lemma 2.3

Finite dimensional vector spaces V and W are isomorphic iff $\dim V = \dim W$.

Proof is trivial

Theorem 2.4

Finite dimensional vector spaces V, W over field $\mathbb{F}$ 에 대해 $m = \dim V$, $n = \dim W$ 라 하자. 이 때 $\mathcal{L}(V, W)$ 는 $\mathbb{F}^{m,n}$ 과 isomorphic 하다.

Proof is trivial

Corollary 2.5

$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \times \dim W$.

Definition : Matrix of a vector

V가 n-dim finite dimensional vector space over $\mathbb{F}$ 이고 $(v_1, \dots, v_n)$ 이 basis of V 라 하자. 이 때 $v \in V$는 $n \times 1$ 행렬$\mathcal{M}(v)$ 로 표현될 수 있으며 $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ where $c_i \in \mathbb{F}$ 일 때,

$$\mathcal{M}(v) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_2 \end{bmatrix}$$

이다.

Theorem 2.6

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 이고 $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ 이 각각 V, W의 basis 일 때 $\mathcal{M}(T)_{\cdot, k} = \mathcal{M}(v_k)$ 이다.

(Proof) (1) Let $Tv_k = c_{1, k}w_1 + \cdots + c_{m, k}w_k$ for $k = 1, \ldots, n$. Then $\mathcal{M}(T)_{i, j} = c_{i, j}$.

(2) $\mathcal{M}(v_k) = [c_{1, k}, \ldots, c_{m, k}]^T = [\mathcal{M}(T)_{\cdot\, k}]^T$.

Theorem 2.7

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 이고 $v \in V$ 라 하자. $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ 이 basis of V and W 일 때 $\mathcal{M}(Tv) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$ 이다.

(Proof) (1) Let $v = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i$, and $Tv_i = \sum\limits_{j=1}^{m} A_{j, i} w_j$. Then $Tv = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} c_i A_{j, i} w_j$.

(2) $\mathcal{M}(Tv) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1, i}c_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_{m, i}c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1, 1} & \cdots & A_{1, n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m, 1} & \cdots & A_{m, n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$

Theorem 2.8

Finite dimensional vector space V에서의 $T \in \mathcal{L}(V)$ 에 대해 다음이 성립한다.: T is invertible $\iff$ T is injective $\iff$ T is surjective

---

(Proof) From the fundamental theorem of linear map, $\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{range} T)$. From Theorem 2.2, T is invertible $\iff$ T is bijective. And $T \in \mathcal{L}(V)$ is injective $\iff$ $\ker T = \{0\}$ $\iff$ $\dim V = \dim(\operatorname{range} T)$ and $\operatorname{range} T \subset V$ $\iff$ $V = \operatorname{range} T$ $\iff$ T is surjective. $\square$

Exercise (Chap. 3.D)

1. $T \in \mathcal{L}(V, W)$와 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 가 모두 invertible linear map 일 때 $ST \in \mathcal{L}(V, V)$ 도 invertible 임을 보이고 $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ 임을 보이시오.

---

(1) For $v_1, v_2 \in V$ and $c \in \mathbb{F}$, $ST(v_1 + cv_2) = S(Tv_1 + cTv_2) = (ST)v_1 + c(ST)v_2$; ST is a linear map.

(2) ST bijection 임은 자명하다. 따라서 ST 는 invertible linear map.

(3) $ST(T^{-1}S^{-1}) = I_V = T^{-1}S^{-1}ST$.

2. V가 finite dimensional vector space 이고 $\dim V > 1$ 일 때 V에서의 non invertible operator의 집함은 $\mathcal{L}(V)$ 의 subspace가 아님을 보이시오.

---

(1) Let S, $T \in \mathcal{L}(V)$ and $(v_1, \ldots, v_n)$ be a basis of V. Put $Sv_1 = v_1$ and $Sv_i = 0$ for all $i = 2, \ldots, n$. Again, $Tv_1 = 0$ and $Tv_j = v_j$ for all $j = 2, \ldots, n$. Then $S + T$ is a invertible linear operator.

3. V가 finite dimensional vector space 이고 U는 V의 subspace 이며 $S \in \mathcal{L}(U, V)$ 일 때 다음을 보이시오. : $Tu = Su$ for all $u \in U$ 인 invertible operator $T \in \mathcal{L}(V)$ 가 존재한다 $\iff$ S is injective.

---

(1) Suppose S is injection. $u_1, \ldots, u_n$을 U의 basis라 하자. S가 injection이므로 $Su_1, \ldots, Su_n$ 은 linearly independent 하다. $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$ 이 V의 basis 가 되도록 하는 $v_1, \ldots, v_m$을 선택할 수 있으며, $(Su_1, \ldots, Su_n, v'_1, \ldots, v'_m)$ 이 V의 basis가 되도록 하는 $v'_1, \ldots, v'_m$ 을 선택 할 수 있다. $Tu_i = Su_i$, $Tv_i = v'_i$ 가 되도록 T를 정의 할 수 있으며 T는 invertible 이다.

(2) Suppose S is not injection. 따라서 $Tu = Su$ 가 되도록 하는 어떤 $T \in \mathcal{L}(V)$ 도 injection 이 아니므로 invertible $T \in \mathcal{L}(V)$ 가 존재하지 않는다.

4. W가 finite dimensional vector space 이고 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 다음을 보이시오. : $\ker T_1 = \ker T_2 \iff T_1 = ST_2$가 되게 하는 invertible $S \in \mathcal{L}(W)$ 가 존재한다.

---

(1) Suppose $\ker T_1 = \ker T_2 = U$. W가 finite dimensional vector space 이고 $\operatorname{range} T_1$, $\operatorname{range} T_2$ 가 subspace of W 이므로 finite dimensional 이다. $\operatorname{range} T_1$의 basis를 $w_1, \ldots, w_m$, $\operatorname{range} T_2$의 basis를 $w'_1, \ldots, w'_m$ 이라 하고 $(w_1, \ldots, w_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(w'_1, \ldots, w'_m, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ 을 W의 basis라 하자. $Sw'_i = w_i$, $S\alpha'_j = \alpha_j$ 가 되도록 S를 정의하면 $T_1 = ST_2$ 이며 $S \in \mathcal{L}(W)$ 이다.

(2) $T_1 = ST_2$ 인 invertible $S \in \mathcal{L}(W)$ 가 존재한다고 가정하자. $\dim(\ker T_1) = \dim(\ker ST_2)$ 이며, $\dim(\ker ST_2) \le \dim \ker S + \dim \ker T_2$ 이다 (Exercise 3.B. 22). S 가 invertible 이므로 $\dim \ker S = 0$, 따라서 $\dim(\ker T_1) = \dim(\ker ST_2) \le \dim(\ker T_2)$. If $v \in \ker T_2$, $ST_2 v = T_1 v = 0$. 따라서 $v \in \ker T_1$ 이며 $\ker T_2 \subset \ker T_1$. 즉 $\ker T_1 = \ker T_2$.

5. V 가 finite dimensional vector space 이고 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 다음을 보이시오 : $\operatorname{range} T_1 = \operatorname{range} T_2 \iff T_1 = T_2 S$ 가 되도록 하는 invertible $S \in \mathcal{L}(V)$가 존재한다.

---

(1) Suppose $\operatorname{range} T_1 = \operatorname{range} T_2$. Let the $w_1, \ldots, w_m$ be the basis of $\operatorname{range} T_1$ (and also $\operatorname{range} T_2$). Choose v_i and v'_i to satisfies $w_i = T_1 v_i$ and $w_i = T_2 v'_2$ respectively. $v_1, \ldots, v_m$을 포함하는 V의 basis $(v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_n)$ 과 $v'_1, \ldots, v'_m$을 포함하는 V의 basis $(v'_1, \ldots, v'_m, u'_1, \ldots, u'_n)$ 을 얻을 수 있다. Define $Sv_i = v'_i$ for $i = 1, \ldots, m$ and $Su_j = u'_j$ for $j = 1, \ldots, n$ 이라 하면 S는 invertible 이며 $T_1 = T_2 S$. 이다.

(2) $T_1 = T_2 S$ 인 invertible $S \in \mathcal{L}(V)$ 가 존재한다고 가정하자. $\dim(\operatorname{range} T_1) = \dim(\operatorname{range} T_2 S)$, $\dim(\operatorname{range} T_2 S) \le \min\{\dim(\operatorname{range} T_2), \dim(\operatorname{range} S))\}$ (Exercise 3.B. 23) , $\dim(\operatorname{range} S) = \dim V$, $\dim(\operatorname{range} T_2) \le \dim V$ 임을 알 고 있다. 따라서 $\dim(\operatorname{range} T_2 S) = \dim(\operatorname{range} T_2)$ 이므로 $\dim(\operatorname{range} T_1) = \dim(\operatorname{range} T_2)$ 이다. $\operatorname{range} T_1 = \operatorname{range} T_2 S \subset \operatorname{range} T_2$ 이고 $\operatorname{range} T_1$ 이 finite dimensional vector space 이므로 $\operatorname{range} T_1 = \operatorname{range} T_2$.

6. V, W가 finite dimensional vector space 이고$T_1, T_2 = \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 다음을 보이시오:

$\dim(\ker T_1) = \dim(\ker T_2) \iff T_1 = ST_2R$ 이 되도록 하는 invertible $S \in \mathcal{L}(W)$ 와 invertible $R \in \mathcal{L}(V)$ 가 존재한다.

---

(1) Suppose $\dim(\ker T_1) = \dim(\ker T_2)$. $v_1, \ldots, v_n$ 와 $u_1, \ldots u_n$가 각각 $\ker T_1$, $\ker T_2$의 basis 일 때 $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}$ 와 $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k}$ 가 각각 V의 basis 가 되도록 하는 v_{n+i}, u_{n+i} 를 구할 수 있다. $Rv_i = u_i$가 되도록 하는 invertible $R \in \mathcal{L}(V)$ 가 존재하며 $\ker T_1 = \ker T_2 R$ 이다. Exercise 4 에 의해 $T_1 = ST_2R$ 이 되도록 하는 invertible $S \in \mathcal{L}(W)$ 가 존재.

(2) $T_1 = ST_2R$ 이 되도록 하는 invertible $S \in \mathcal{L}(W)$ 와 invertible $R \in \mathcal{L}(V)$ 가 존재함을 가정한다. 이 때 Exercise 4에 의해 $\ker T_1 = \ker T_2 R$ 이며, Exercise 2.B. 22에 의해

$$\dim(\ker T_1) = \dim(\ker T_2 R) \leq \dim(\ker T_2) + \dim(\ker R) = \dim(\ker T_2)\ .$$

$T_2 = S^{-1}T_1R^{-1}$ 이므로 같은 이유로 $\dim(\ker T_2) \leq \dim(\ker T_1)$. 따라서 $\dim(\ker T_1) = \dim(\ker T_2)$.

7. V, W가 finite dimensional vector space 이고$v \in V$ 에 대해 $E = \{T \in \mathcal{L}(V, W) : Tv = 0\}$ 일 때, E는 subspace of $\mathcal{L}(V, W)$ 임을 보이고, $v \neq 0$ 일 때의 $\dim E$를 구하시오.

---

(1) $0 \in E$. For $T, S \in E$ and $c \in \mathbb{F}$, $(T + cS)(v) = Tv + cSv = 0$. 따라서 E 는 subspace of $\mathcal{L}(V, W)$.

(2) Let $m = \dim V$, $n = \dim W$. Then $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$. Let $v, v_1, \ldots, v_{m-1}$ be basis of V and $w_1, \ldots, w_n$ be basis of W. $\mathcal{L}(V, W)$ is isomorphic to $\mathbb{F}^{m,n}$. $Tv = 0$ and $Tv_i = \sum_{j=1}^{n} c_{j,i} w_j$ for all $i = 1, \ldots, m-1$. 따라서 $\dim E = (m-1)n$.

8. V 가 finite dimensional vector space 이고 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 는 surjection 이라 하자. 어떤 V의 subspace U 에서 $T|_U$ 는 isomorphism of U onto W 가 됨을 보이시오.

---

(1) Let $v_1, \ldots, v_m$ be a basis of $\ker T$ and $u_1, \ldots, u_n$ be linearly independent vectors of V all of which cannot be spanned by $v_1, \ldots, v_m$. Let the vector space spanned by $u_1, \ldots, u_n$. By the fundtamental theorem of linear map,
$\dim W = \dim(\operatorname{range} T) = \dim V - \dim(\ker T) = n = \dim U$. 따라서 U 와 W 사이에 isomorphism이 존재한다.

9. V가 finite dimensional 이고 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 일 때 다음을 보이시오.: ST is invertible $\iff$ Both S and T are invertible.

---

(1) Suppose ST is invertible. Then
$\dim V = \dim(\operatorname{range} ST) \leq \min\{\dim(\operatorname{range} S), \dim(\operatorname{range} T)\} \leq \dim V$. 따라서
$\dim(\operatorname{range} S) = \dim(\operatorname{range} T) = \dim V$. S and T are invertible.

(2) Suppose both S and T are invertible. $0 \leq \dim(\ker ST) \leq \dim(\ker S) + \dim(\ker T) = 0$. 따라서 $\dim(\ker ST) = 0$ and ST is invertible.

10. V가 finite dimensional vector space 이고 $S,\, T \in \mathcal{L}(V)$ 일 때 $ST = I_V \iff TS = I_V$ 임을 보이시오.

From exercise 9, I_V 가 invertible 이므로 $S,\, T$ 모두 Invertible. 따라서

$ST = I_V \iff TST = T \iff TS = TSTT^{-1} = TT^{-1} = I_V$

11. V가 finite dimensional vector space 이고 $S,\, T,\, U \in \mathcal{L}(V)$ 라 하자. $STU = I_V$ 이면 $T^{-1} = US$ 임을 보이시오.

$TUS = (TU)S = S^{-1}S = I_V$. $UST = U(ST) = UU^{-1} = I_V$.

12. V 가 finite dimensional 이 아닌 경우 exercise 11의 결론이 성립하지 않을 수 있음을 보이시오.

Consider $\mathbb{R}^{\infty}$. Let $T(x_1,\, x_2,\, x_3, \ldots,) = (0,\, x_1,\, x_2, \ldots,)$, $S(x_1,\, x_2,\, x_3, \ldots) = (x_2,\, x_3, \ldots)$ and $U = I$. Then $STU = I$ but T is not surjection. 따라서 T^{-1} 은 존재하지 않음.

13. V가 finite dimensional vector space 이고 $R,\, S,\, T \in \mathcal{L}(V)$ 이며 RST 가 surjective 라 하자. 이 때 S가 injection 임을 보이시오.

Let $n = \dim V$. RST is surjection 이므로 bijection 이며 따라서 모든 $R,\, S,\, T$가 bijection 이어야 한다.

14. $v_1, \ldots,\, v_n$ 이 vector space V의 basis 이고 $T : V \to \mathbb{F}^{n,\,1}$ 이 $Tv = \mathcal{M}(v)$ 로 정의되었을 때 T 는 isomorphism 임을 보이시오.

---

(1) $v = \sum_i c_i v_i$ 일 때 $Tv = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ 이다. $v_1,\, v_2 \in V$ 가 $v_1 = \sum_i a_i v_i$, $v_2 = \sum_i b_i v_i$ 이고 $c \in \mathbb{F}$ 일 때 $T(v_1 + cv_2) = Tv_1 + cTv_2$ 임은 쉽게 보일 수 있다. 따라서 $T \in \mathcal{L}(V,\, \mathbb{F}^{n,\,1})$ 이다.

(2) $v_1 = \sum_i a_i v_i$, $v_2 = \sum_i b_i v_i$ 일 때 $Tv_1 = Tv_2 \implies a_i = b_i$ for all $i = 1, \ldots, n \implies v_1 = v_2$. 따라서 T는 injection.

(3) For any $u = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, $v = \sum_i c_i v_i \in V$ and $Tv = u$. 따라서 T는 surjection 이며 (2)와 함께 bijection. 따라서 T는 isomorphism.

16. V가 finite dimensional vector space 이고 $T \in \mathcal{L}(V)$ 일 때 다음을 보이시오. : $Tv = cv$ for some $c \in \mathbb{F} \iff ST = TS$ for all $S \in \mathcal{L}(V)$.

---

(1) $Tv = cv$ for some $c \in \mathbb{F}$ 일 때 $ST = TS$ for all $S \in \mathcal{L}(V)$ 임은 자명하다.

(2) Suppose $ST = TS$ for all $S \in \mathcal{L}(V)$. $v_1, \ldots, v_n$ 이 base of V 라 하자. Let $S_i v_j = \delta_{i,j} v_i$, and $Tv_i = \sum_j c_{j,i} v_j$. $S_k T v_i = T S_k v_i$ for all i, k 이어야 한다.

(3) $S_k T v_i = S_k(\sum_j c_{j,i} v_j) = c_{k,i} v_k$.

(4) $TS_k v_i = T(\delta_{k,i} v_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq i \\ \sum_j c_{j,k} v_j & \text{if } k = i \end{cases}$. 따라서 $c_{k,j} = \delta_{k,j} c_j$ 이며 $c_k = c_j$ for all k, j. 따라서 $Tv = cv$ for some $c \in \mathbb{F}$.

17. V가 finite dimensional vector space 이고 $\mathcal{E}$가 $\mathcal{L}(V)$의 subspace 라 하자. $\forall T \in \mathcal{E}$, $\forall S \in \mathcal{L}(V)$ 에 대해 $ST \in \mathcal{E}$ and $TS \in \mathcal{E}$ 이면 $\mathcal{E} = \{0\}$ 이거나 $\mathcal{E} = \mathcal{L}(V)$ 임을 보이시오.

---

(1) $\mathcal{E}$가 $\{0\}$ 이거나 $\mathcal{L}(V)$ 일 때 $ST \in \mathcal{E}$ and $TS \in \mathcal{E}$ for all $T \in \mathcal{E}$ and $S \in \mathcal{L}(V)$ 임은 자명하다.

(2) $T \in \mathcal{E}$ defined by $T(v_i) = \sum_j c_{j,i} v_j$ 라 하자. $c_{k,i} \neq 0$ 인 k 에 대해 $T'(v_i) = (c_{k,i})^{-1} \sum_j c_{j,i} v_j \in \mathcal{E}$ 이다. $\phi_k(v_i) = \delta_{i,k} v_k$는 $\phi_i \in \mathcal{L}(V)$ 이다. $\phi_k(T'(v_i)) = (c_{k,i})^{-1} \sum_j c_{j,i} \delta_{k,j} v_j = v_k$ 이며 $\phi_k T' \in \mathcal{E}$ 이다.

(3) $\phi_l(\phi_k T')(v_m) = \delta_{l,k} v_k \in \mathcal{E}$. 따라서 $T \in \mathcal{E}$ with $c_{k,i} \neq 0$ 에 대해 $\phi_k \in \mathcal{E}$ 이다.

(4) Exchange operator $\psi_{i,j}$를 생각하자. $v = c_1 v_1 + \cdots + c_i v_i + \cdots c_j v_j + \cdots + c_n v_n$ 에 대해 $\psi_{i,j} = c_1 v_1 + \cdots + c_j v_i + \cdots_+ c_i v_j + \cdots + c_n v_n$ 이다. $\psi_{i,j} \in \mathcal{L}(V)$ 임은 쉽게 보일 수 있다. (2), (3) 과 같이 생각하면 $n = \dim(V)$ 일 때 $\phi_j \in \mathcal{E}$ for all $j = 1, \ldots, n$.

(5) 모든 $S \in \mathcal{L}(V)$ 는 linear combination of $\phi_j(v_k)$ 이므로 $\mathcal{E} = \mathcal{L}(V)$.

18. V와 $\mathcal{L}(\mathbb{F}, V)$가 isomorphic 함을 보이시오.

---

(1) Let $(v_1, v_2, \ldots)$ be basis of V. For $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, V)$, $S(1) = \sum_j c_j v_j$. 1 is a basis of $\mathbb{F}$ in vector space concept. Therefore $\phi_j(1) = v_j$ is a basis of $\mathcal{L}(\mathbb{F}, V)$. 따라서 V와 $\mathcal{L}(\mathbb{F}, V)$ is isomorphic.

19. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 에 대해 T는 injective 이며 $\deg Tp \leq \deg p$ for every nonzero polynomial $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 이라 하자. 이 때 다음을 보이시오.

(a) T is surjective

(b) $\deg Tp = \deg p$ for every nonzero $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

---

(1) Let $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ a set of polynomials of which degree is less then n. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$이 finite dimensional vector space 임은 자명하다. $\deg Tp \leq \deg p$ 이므로 $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ 에 대해 $Tp \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ 이다. Restriction of T over $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ 를 T_n 이라 하자. T_n 은 injective 이며 $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n$ 이므로 $\dim(\text{range}\, T) = n$. 따라서 T_n is bijective.

(2) (1)로부터 임의의 p에 대해 $\deg p = m$ 일 때, $Tp' = p$ 인 $p' \in \mathcal{P}_{m+1}(\mathbb{R})$ 이 존재한다. 따라서 T is surjective.

(3) $\deg Tp = \deg p$ 임은 (1)로부터 자명하다.

3. Products and Quotients of Vector Spaces

Definition : Product of vector spaces

$V_1, \ldots, V_m$ 이 모두 vector space over $\mathbb{F}$ 일 때 the **product space** $V_1 \times \cdots \times V_m$는 다음과 같이 정의된다.

$$V_1 \times \cdots \times V_m = \{(v_1, \ldots, v_m) : v_1 \in V_1, \ldots, v_m \in V_m\}$$

$u, v \in V_1 \times \cdots \times V_m$ 일 때 $u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m)$ 으로 정의되며 $\lambda \in \mathbb{F}$ 에 대해 $\lambda u = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_m)$ 으로 정의된다.

Theorem 3.1

$V_1, \ldots, V_m$ 이 vector spaces over $\mathbb{F}$ 일 때 $V_1 \times \cdots \times V_m$ 역시 vector space over $\mathbb{F}$ 이다.

Proof is trivial

Theorem 3.2

$V_1, \ldots, V_m$ 이 각각 finite dimensional vector space 일 때 $\dim(V_1 \times \cdots \times V_m) = \sum_{k=1}^{m} \dim(V_k)$ 이다.

Proof is trivial

Theorem 3.3

$U_1, \ldots, U_m$ 이 subspaces of V 일 때 Linear map $\Gamma \in \mathcal{L}(U_1 \times \cdots \times U_m, U_1 + \cdots + U_m)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$\Gamma(u_1, \ldots, u_m) = u_1 + \ldots + u_m \ .$$

이 때 다음이 성립한다. $U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum iff Γ is injective.

(Proof) Γ is injective $\iff \ker \Gamma = \{(0, \ldots, 0)\} \iff u_i = 0$ for all $i = 1, \ldots, m \iff$ $U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum. $\square$

Lemma 3.4

V가 finite dimensional vector space 이고 $U_1, \ldots, U_m$ 이 subspaces of V 일 때 다음이 성립한다.

$U_1 + \cdots + U_m$ is a direct sum iff $\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \sum_{k=1}^{m} \dim(U_k)$.

(Proof) $U_1 + \cdots U_m$ is a direct sum $\iff$ Γ is injective (theorem 3.3) $\iff$
$\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \dim(U_1 \times \cdots \times U_m) = \sum_{k=1}^{m} \dim(U_k) \quad \square$

Definition : Affine subset, parallel, Quotient space

V 가 vector space 이고 U는 subspace of V 라 하자. $v \in V$ 에 대해 $v + U$를
$v + U = \{v + u : u \in U\}$ 로 정의한다. 이렇게 $v + U$ 형식의 subset of V 를 **affine subset** of V 라 하며 **parallel** to U 라 한다.

Quotient space of V/U 는 이렇게 U 에 parallel 한 affine subsets의 집합이다. 즉
$V/U = \{v + U : v \in V\}$.

Theorem 3.5

U 가 vector space V의 subspace 라 하자. $v,\ w \in V$ 일 때, 다음 (a), (b), (c) 는 equivalent 하다.

(a) $v - w \in U$;

(b) $v + U = w + U$;

(c) $(v + U) \cap (w + U) \neq \varnothing$.

(Proof) (1) Suppose (a) holds. $v = w + u$ for some $u \in U$. Therefore $w + U = v + U$.

(2) (b) $\implies$ (c) is trivial.

(3) Suppose (c) holds. Let $z \in (v + U) \cap (w + U)$. Then $z = v + u_1 = w + u_2$ for some $u_1,\ u_2 \in U$. Then $v - w = u_2 - u_1 \in U$. $\square$

Definition : Addition and scalar multiplication of Quotient Space

Suppose U be a subspace of vector space V over $\mathbb{F}$. Let $v_1,\ v_2 \in V$ and $\lambda \in \mathbb{F}$. Then the **addition** and **scalar multiplication** on V/U is defined by

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U\ ,$$
$$\lambda(v_1 + U) = (\lambda v_1) + U\ .$$

Theorem 3.6

U 가 vector space V의 subspace 이고 addition과 scalar multiplication이 위와 같이 정의되었을 때 V/U도 vector space 이다.

(Proof) $0 + U = U$ is a zero vector of V/U. V/U가 모든 vector space의 조건을 만족함을 쉽게 보일 수 있다.

Definition : Quotient map

U가 V의 subspace 일 때 **quotient map** $\pi : V \to V/U$ 를 $\pi(v) = v + U$ 로 정의한다.

Theorem 3.7

위의 quotient map π 는 linear map 이다.

(proof) For $v_1, v_2 \in V$ and $c \in \mathbb{F}$,
$\pi(v_1 + cv_2) = v_1 + cv_2 + U = (v_1 + U) + (cv_2 + U) = \pi(v_1) + c\pi(v_2)$.□

Theorem 3.8

V가 finite dimensional vector space 이고 U가 V의 subspace 일 때
$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$ 이다.

(proof) Quotient map $\pi \in \mathcal{L}(V, V/U)$ 에서 $\dim(V) = \dim(\ker \pi) + \dim(\operatorname{range} \pi)$. 여기서 $\ker \pi = U$ 이며 $\operatorname{range} \pi = V/U$ 이므로 증명 끝. □

Definition

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 map $\widetilde{T} : V/(\ker T) \to W$ 를 $\widetilde{T}(v + \ker T) = Tv$ 로 정의하자.

Theorem 3.9

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 다음이 성립한다.

(a) $\widetilde{T}$ 는 $V/(\ker T) \to W$ linear map 이다;

(b) $\widetilde{T}$ 는 injection 이다;

(c) $\operatorname{range} \widetilde{T} = \operatorname{range} T$ 이다.

(d) $V/(\ker T)$ 는 $\operatorname{range} T$와 isomorphic 하다.

(Proof) (a) Let $K = \ker T$, $v_1, v_2 \in V$, and $c \in \mathbb{F}$. $\widetilde{T}(v_1 + K + c(v_2 + K)) =\widetilde{T}(v_1 + cv_2 + K) = T(v_1 + cv_2) =T(v_1) + cT(v_2)= \widetilde{T}(v_1 + K) + c\widetilde{T}(v_2 + K)$. 따라서 $\widetilde{T}$ 는 linear map.

(b) $v + K \in \ker \widetilde{T} \iff \widetilde{T}(v + K) = Tv = 0 \iff v \in \ker T$. 따라서 $\ker \widetilde{T} = 0$ 이며 $\widetilde{T}$ 는 injection.

(c) Obvious from definition

(d) Obvious from (b) and (c) □

Exercise (Chap. 3. E)

1. $T : V \to W$ 일 때 **graph** of T 는 $\{(v, Tv) \in V \times W : v \in V\}$ 로 정의된다. 이 때 다음을 보이시오 : T is a linear map iff graph of T is a subspace of $V \times W$.

---

(1) Suppose $v_1, v_2 \in V$ and $c \in \mathbb{F}$. Let $\mathcal{T}$ be a graph of T.

(2) Suppose T is a linear map. Then $(0, T0) = (0, 0) \in \mathcal{T}$,
$(v_1, Tv_1) + (cv_2, T(cv_2)) = (v_1 + cv_2, T(v_1 + cv_2)) \in \mathcal{T}$. Then $\mathcal{T}$ is a subspace of $V \times W$.

(3) Suppose $\mathcal{T}$ is a subspace of $V \times W$. Then $(0, 0) \in \mathcal{T}$ and
$(v_1, Tv_1) + c(v_2, Tv_2) = (v_1 + cv_2, T(v_1) + cT(v_2)) \in \mathcal{T}$. 따라서
$T(v_1 + c_v 2) = T(v_1) + cT(v_2)$. 즉 T is a linear map.

3. U_1, U_2 가 subspace of V 일 때 $U_1 \times U_2$ 가 $U_1 + U_2$ 와 isomorphic 하지만 $U_1 + U_2$ 가 direct sum 이 아닌 예를 드시오.

Let $U_1 = \mathbb{R}$ and $U_2 = \mathbb{R}^\infty$. Let $u \in U$ and $(u_1, u_2, \ldots) \in U_2$. Then $(u, u_1, u_2, \ldots) \in U_2$. 따라서 $U_1 \times U_2$ is isomorphic to U_2 and then $U_1 + U_2$. 그러나 $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ 이므로 $U_1 + U_2$ 는 direct sum이 아니다.

4. $V_1, \ldots, V_m$ 이 vector space 일 때 $\mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_m, W)$ 와 $\mathcal{L}(V_1, W) \times \cdots \times \mathcal{L}(V_m, W)$ 가 isomorphic 함을 보이시오.

---

(1) Let $\phi \in \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_m, W)$. Because
$(v_1, v_2, \ldots, v_m) = (v_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, v_m)$,
$\phi(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \phi(v_1, 0, \ldots, 0) + \phi(0, v_2, \ldots, 0) + \cdots + \phi(0, \ldots, 0, v_m)$.

(2) Define $\phi_i \in \mathcal{L}(V_i, W)$ by $\phi_i(v_i) = \phi(0, \ldots, 0, v_i, 0, \ldots, 0)$. Then any $\phi \in \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_m, W)$ can be represented as $\phi(v_1, \ldots, v_m) = \phi_1(v_1) + \cdots + \phi_m(v_m)$.

(3) Define $\psi : \mathcal{L}(V_1, W) \times \cdots \times \mathcal{L}(V_m, W) \to \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_m, W)$ by $\psi(\phi_1, \ldots, \phi_m) = \phi_1 + \cdots + \phi_m$. Let $K = \ker \psi$. If $(\phi_1, \ldots, \phi_m) \in K$, $\phi_1(v_1) + \cdots + \phi_m(v_m) = 0$ for any $v_1 \in V_1, \ldots, v_m \in V_m$. 이로부터 $\phi_1 = \cdots = \phi_m = 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 $K = (0, \ldots, 0)$ 이므로 ψ는 injection 이다.

(4) (2)로부터 ψ가 surjection 임을 알 수 있다. 따라서 증명 끝.

5. $W_1, \ldots, W_m$ 이 vector space 일 때 $\mathcal{L}(V, W_1 \times \cdots \times W_m)$ 과 $\mathcal{L}(V, W_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(V, W_m)$ 은 isomorphic 함을 보이시오.

---

(1) For $\phi_i \in \mathcal{L}(V, W_i)$, define $\phi \in \mathcal{L}(V, W_1 \times \cdots \times W_m)$ by $\phi(v) = (\phi_1(v), \ldots, \phi_m(v))$. Then it is obvious that given twos are isomorphic

6. Vector space V에 대해 V^n 과 $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, V)$ 가 isomorphic 함을 보이시오.

V is isomorphic to $\mathcal{L}(\mathbb{F}, V)$. V^n is isomorphic to $\mathcal{L}(\mathbb{F}, V)^n$. $\mathcal{L}(\mathbb{F}, V)^n$ is isomorphic to $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, V)$. (exercise 4.)

7. V가 vector space, U, W는 V의 subspace 이다. 어떤 $v_1, v_2 \in V$에 대해 $v_1 + U = v_2 + W$ 이면 $U = W$ 임을 보이시오.

---

(1) $v_1 = v_2 + w$ for some $w \in W$. 따라서 $v_1 - v_2 \in W$ 이며 당연히 $v_2 - v_1 \in W$ 이다. 같은 이유로 $v_1 - v_2 \in U$.

(2) $w \in W$ 이면 어떤 $u \in U$ 가 존재하여 $w = v_1 - v_2 + u \in U$. 따라서 $W \subset U$. 같은 방법으로 $U \subset W$ 임을 보일 수 있으므로 $U = W$.

8. Vector space V의 nonempty subset A 에 대해 다음이 성립함을 보이시오 : A is an affine subset of V iff for all $a_1,\ a_2 \in A$ and for all $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$.

---

(1) Suppose A is a affine subset of V. 어떤 V의 subspace U와 $v \in V$에 대해 $A = \{v + u : u \in U\}$. Let $a_1 = v + u_1$ and $a_2 = v + u_2$. Then $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 = v + \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in A$.

(2) Suppose for all $a_1,\ a_2 \in A$ and for all $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$. Nonzero element $x \in A$ 를 선택하여 $A - x = \{a - x : a \in A\}$를 생각하자. 우리는 $A - x$가 vector space임을 보이고자 한다.

(2-1) $x \in A$ 이므로 $0 \in A - x$.

(2-2) For any $a \in A$, $\lambda x + (1-\lambda)a \in A$. Then $(1-\lambda)(a - x) \in A - x$ for any $\lambda \in \mathbb{F}$. 따라서 $a - x \in A - x \implies c(a-x) \in A - x$ for any $c \in \mathbb{F}$.

(2-3) Let $u_1,\ u_2 \in A - x$ be $u_1 = a_1 - x$ and $u_2 = a_2 - x$ for some arbitrary $a_1,\ a_2 \in A$. From (2-2), $1/2u_1,\ 1/2u_2 \in A$ and $1/2u_1 + 1/2u_2 = 1/2a_1 + 1/2a_2 - x \in A - x$. 따라서 $u_1 + u_2 \in A - x$.

(2-4) From (2-1), (2-2), and (2-3), $U = A - x$ is vector space, and therefore $A = x + U$ for some vector space U and elements $x \in U$.

9. $A_1,\ A_2$ 가 affine subsets of vector space V 일 때 $A_1 \cap A_2$는 공집합 이거나 affine subset of V 임을 보이시오.

---

(1) Let $A_1 = x_1 + U_1$ and $A_2 = x_2 + U_2$ for some $x_,\ x_2 \in V$ and $U_1,\ U_2$ for some subspace of V.

(2) If $U_1 = U_2$ and $x_1 \notin U_1,\ x_2 \notin U_1$ $x_2 = -x_1$ 라 하자. $x \in A_1 \cap A_2$ 이면 $x = x_1 + u_1 = x_2 + u_2$ for some $u_1,\ u_2 \in U_1 = U_2$ 이며 $x_1 - x_2 = 2x_1 = u_2 - u_1 \in U$ 인데 $x_1 \notin U$ 임에 모순. 따라서 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

(3) 이제 $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ 이라 가정하자. Problem 8을 이용하여 $A_1 \cap A_2$이 affine subset of V임을 보인다. $x,\ x' \in A_1 \cap A_2$ 라 하자. $x = x_1 + u_1 = x_2 + u_2,\ x' = x_1 + u_1' = x_2 + u_2'$ for some $u_1,\ u_1' \in U_1$ and $u_2,\ u_2' \in U_2$ 이다. $\lambda x + (1-\lambda)x' = x_1 + \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in x_1 + U_1 = A_1$ 이며 같은 방법으로 $\lambda x + (1-\lambda)x' \in A_2$ 임을 보일 수 있다. 즉 $A_1 \cap A_2$ 는 affine subset of V 이다.

11. $v_1, \ldots, v_m \in V$ 에 대해 $A = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m : \lambda_i \in \mathbb{F},\ \sum_i \lambda_i = 1\}$ 라 하고 다음을 증명하라.

(a) A는 affine subset of V 이다.

(b) $v_1, \ldots, v_m$을 포함하는 모든 affine subset of V는 A를 포함한다.

(c) $A = v + U$ for some $v \in V$ and some subspace U of V with $\dim U < \dim V$.

(a) Let $a,\ a' \in A$ be $a = \sum \lambda_i v_i$ and $a' = \sum \mu_i v_i$. $ca + (1-c)a' = \sum(c\lambda_i + (1-c)\mu_i)v_i$. $\sum_i c\lambda_i + (1-c)\mu_i = c + 1 - c = 1$ 따라서 임의의 $a,\ a' \in A$, $c \in \mathbb{F}$ 에 대해 $ca + (1-c)a' \in A$ 이므로 problem 8에 의해 A는 affine subset of V 이다.

(b) Let B the affine subset of V which contains $v_1, \ldots, v_m$. Show it by induction. By Problem 8, $c_1 v_1 + c_2 v_2 \in B$ if $c_1 + c_2 = 1$. Assume that for any $k = m - 1$, $\sum_{i=1}^{k} c_i v_i \in B$ if $\sum_{i=1}^{k} = 1$. Then $\lambda v_m + \sum_{i=1}^{k}(1-\lambda)(c_i v_i) \in B$ because $\lambda + \sum_{i=1}^{k}(1-\lambda)c_i = 1$. 따라서 $A \subset B$

(c) A는 affine subset 이므로 $A = v + U$ for some $v \in V$ and some subset U of V. 만약 $\dim U = \dim V$ 이면 $v \in U$ 이므로 $A = V$ 이므로 문제의 조건에 모순. 왜냐면 $v_1 + \cdots + v_m \notin A$ 이므로 $A \neq V$ 이어야 하기 때문.

12. U가 subspace of V 이고 V/U가 finite dimensional 일 때 V와 $U \times (V/U)$ 가 isomorphic 함을 보이시오.

---

(1) V/U가 finite dimensional 이므로 V/U의 basis 는 $v_1 + U, \dots, v_m + U$ where every $v_i \in V$, $v_i \notin U$ and $v_1, \dots, v_m$ is linearly independent 이다. U의 basis를 $u_1, u_2, \dots$ 라 하면 $v_1, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots$는 linearly independent 함은 잘 알 수 있다.

(2) $v \in V$가 linear combination of $v_1, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots$ 로 표현 될 수 없다고 하자. 그렇다면 $v + U \notin V/U$ 이므로 모순. 따라서 모든 $v \in V$ 는 linear combination of $v_1, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots$.

(3) 즉 (V/U) 는 $U^\perp$ 와 isomorphic 하다. V는 $U \times U^\perp$ 이므로 V는 $U \times (V/U)$ 와 isomorphic 하다.

14. $U = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{F}^\infty : x_j \neq 0 \text{ for only finitely many } j\}$ 일 때 다음을 보이시오.

(a) U는 subspace of $\mathbb{F}^\infty$.

(b) $\mathbb{F}^\infty/U$ is infinite dimensional.

(a) It's trivial.

(b) also trivial.

15. $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, $\varphi \neq 0$ 일 때, $\dim V/(\ker \varphi) = 1$ 임을 보이시오.

From Theorem 3.9 (d), $V/\ker \varphi$ is isomorphic to $\operatorname{range} \varphi$ of which dimension is 1.

16. U가 V의 subspace 이고 $\dim V/U = 1$ 일 때 $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ s.t. $\ker \varphi = U$ 인 φ가 존재함을 보이시오.

$\dim V/U = 1$ 이므로 V/U의 basis v 를 선택하자. v를 제외한 V의 basis를 $v_1, v_2, \dots,$라 하고 $\varphi(v) = 1$, $\varphi(v_i) = 0$ for all $i = 1, 2, \dots$ 라 하면 $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ 이며 $\ker \varphi = U$ 이다.

17. U가 V의 subspace 이고 V/U라 finite dimensional 일 때 어떤 subspace W of V에 대해 $\dim W = \dim(V/U)$ 이고 $V = U \otimes W$ 가 됨을 보이시오.

Let $v_1 + U, \dots, v_m + U$ be basis of V/U. Then $v_1, \dots, v_m$ are linearly independent vectors of V. Let $W = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$, then W is a subspace of V. Then $V = U \otimes W$.

18. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 이고 U가 subspace of V이며, π가 $V \to V/U$ quotient map 일 때 다음을 보이시오: 어떤 $S \in \mathcal{L}(V/U, W)$ s.t. $T = S \circ \pi$ 이 존재한다. $\iff$ $U \subset \ker T$.

---

(1) 어떤 $S \in \mathcal{L}(V/U, W)$ s.t. $T = S \circ \pi$ 가 존재함을 가정하자. $u \in U$ 이면 $\pi(u) = U = 0_{V/U}$ 이므로 $T(u) = 0_W$. 따라서 $U \subset \ker T$.

(2) $U \subset \ker T$ 임을 가정한다. U의 basis를 $u_1, u_2, \dots$ 라 하자. 이로부터 V의 basis를 구축한다. $U^\perp$의 basis를 $v_1, v_2, \dots$ 라 하자. $V = U \oplus U^\perp$ 이다. $Tu_i = 0_W$ 임은 자명하다. $v_1, v_2, \dots$ 중 $\ker T$에 포함되는 것을 $v_1^0, v_2^0, \dots$ $\ker T$에 포함되지 않는 것을 $v_1^1, v_2^1, \dots$ 라 하자.

(3) $S(v_i^0 + U) = 0_W$, $S(v_j^1 + U) = Tv_j^1$ 이라 하면 $S \in \mathcal{L}(V/U, W)$ 이며 $T = S \circ \pi$ 이다.

20. U가 subspace of V 일 때 $\Gamma : \mathcal{L}(V/U, W) \to \mathcal{L}(V, W)$ 를 $\Gamma(S) = S \circ \pi$ 로 정의하자. 다음을 보이시오.

(a) Γ is a linear map.

(b) Γ is injective.

(c) $\operatorname{range}\Gamma = \{T \in \mathcal{L}(V, W) : Tu = 0 \text{ for every } u \in U\}$

(a) Let $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V/U, W)$ and $c \in \mathbb{F}$. $\Gamma(S_1 + cS_2) = (S_1 + cS_2) \circ \pi = \Gamma(S_1) + c\Gamma(S_2)$.

(b) $S \in \ker\Gamma \implies S \circ \pi = 0 \implies (S \circ \pi)(v) = 0$ for all $v \in V \implies S(v + U) = 0$ for all $v \in V$ $\implies S = 0$. 따라서 Γ is injective.

(c) Let $\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{L}(V, W) : Tu = 0 \text{ for every } u \in U\}$.

$T \in \operatorname{range}\Gamma \implies T = S \circ \pi$ 인 $S \in \mathcal{L}(V/U, W)$ 가 존재. By problem 18, $U \subset \ker T$ 이므로 $Tu = 0$ for all $u \in U$. 따라서 $T \in \mathcal{T}$ 이므로 $\operatorname{range}\Gamma \subset \mathcal{T}$.

$T \in \mathcal{T} \implies U \in \ker T \implies T = S \circ \pi$ 인 $S \in \mathcal{L}(V/U, W)$ 가 존재 (Problem 18) $\implies T \in \operatorname{range}\Gamma$. 따라서 $\mathcal{T} \subset \operatorname{range}\Gamma$ 이며 앞서의 결론과 함께 $\mathcal{T} = \operatorname{range}\Gamma$.

4. Duality

Definition : Linear Functional, Dual Space

Vector space V와 scalar field $\mathbb{F}$에 대해 $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ 를 **linear functional** from V to $\mathbb{F}$라 한다.
$\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ 를 **dual space** of V 라 하며 V' 으로 쓴다.

Theorem 4.1

V가 finite dimensional 일 때 $\dim V = \dim V'$ 이다.

Proof is trivial

Definition : Dual Basis

$v_1, \dots, v_m$ 이 V의 basis 일 때 $\varphi_j \in V'$ defined by $\varphi_j(v_i) = \delta_{i,j}$ 인 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$을 $v_1, \dots, v_m$에 대한 **dual basis** 라 한다.

Theorem 4.2

V가 finite dimensional vector space이고 $v_1, \ldots, v_m$이 basis of V 일 때 이에 대한 dual basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ 은 V'의 basis 이다.

(Proof) Let $\varphi = a_1\varphi_1 + \cdots a_m\varphi_m = 0$. $\varphi(v_i) = a_i = 0$ 이므로 모든 $a_i = 0$. 따라서 $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$은 linearly independent 하며 $\dim V' = m$ 이므로 $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$은 V'의 basis 이다. □

Definition : Dual Map

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ 일 때 $\varphi \in W'$ 에 대해 $T'(\varphi) = \varphi \circ T$ 로 정의되는 $T' \in \mathcal{L}(W', V')$ 을 **dual map** of T라 한다.

Lemma 4.3

Dual map은 linear map이다.

(Proof) Let $\varphi_1, \varphi_2 \in W'$ and $c \in \mathbb{F}$.
$T'(\varphi_1 + c\varphi_2) = (\varphi_1 + c\varphi_2) \circ T = \varphi \circ T + c\varphi \circ T = T'(\varphi_1) + cT'(\varphi_2)$. 따라서 T'은 linear map.

Example

$D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ defined by $Dp \in p'$ 을 생각하자.

1. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ defined by $\varphi(p) = p(3)$. Then $(D'(\varphi))(p) = (\varphi \circ D)(p) = p'(3)$.
2. $\varphi \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ defined by $\varphi(p) = \displaystyle\int_0^1 p'$. Then $(D'(\varphi))(p) = (\varphi \circ D)(p) = p(1) - p(0)$.

Theorem 4.4

(a) $(S+T)' = S' + T'$ for all $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$.

(b) $(cT)' = cT'$ for all $T \in \mathcal{L}(V, W)$ and $c \in \mathbb{F}$.

(c) $(ST)' = T'S'$ for all $T \in \mathcal{L}(U, V)$ and $S \in \mathcal{L}(V, W)$.

(Proof) (a) For $\varphi \in W'$, $(S+T)' = \varphi \circ (S+T) = \varphi \circ S + \varphi \circ T = S' + T'$

(b) $(cT)' = \varphi \circ (cT) = c\varphi c \circ T = cT'$

(c) For $\varphi \in W'$, $(ST)' = \varphi \circ (ST) = (\varphi \circ S) \circ T = T'(\varphi \circ S) = T'S'$

Definition : Annihilator of subspace

U가 vector space V의 subspace 일 때 **annihilator** of U는 $\{\varphi \in V' : \varphi(u) = 0 \text{ for all } u \in U\}$ 로 정의되며 U^0 로 쓴다.

Theorem 4.5

U가 V의 subspace 일 때 U^0는 V'의 subspace 이다.

Proof is trivial

Theorem 4.6

V가 finite dimensional vector space 이고 U가 V의 subspace 일 때 $\dim V = \dim U + \dim U^0$ 이다.

(Proof) Define $i \in \mathcal{L}(U,\, V)$ by $i(u) = u$. For $i' \in \mathcal{L}(V',\, U')$, $\dim V' = \dim(\ker i') + \dim(\operatorname{range} i')$. $\ker i' = U^0$ 이며 $\dim(\operatorname{range} i') = \dim U$ 이므로 $\dim V = \dim U + \dim U^0$.