Diffeomorphisms and Change of Variables

Definition : Diffeomorphism

$A,\, B$ 가 $\mathbb{R}^n$의 open set 이고 $g : A \to B$ 가 bijection 이며 $g,\, g^{-1}$ 이 C^r class 함수 일 때 g를 **diffeomorphism** (of class C^r) 이라 한다.

Lemma 1.

Let A be open in $\mathbb{R}^n$ and $g : A \to \mathbb{R}^n$ be a C^1 class function. 만약 $E \subset A$가 measure 0 이면 $g(E)$ 도 measure zero 이다.

Proof $S \subset \mathbb{R}^n$ 이 measure 0 이면 전체 volume이 ε 보다 작고 개개의 width가 δ 보다 작은 closed cubes 로 cover 됨은 쉽게 보일 수 있다.

$C \subset A$ 가 $\mathbf{a}$를 중심으로 하는 width w 의 cube라 하자. $g \in C^1$ 이므로 $^\exists M > 0$ s. t. $|Dg(\mathbf{x})| \le M$ for all $\mathbf{x} \in C$ 이다. $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < w/2$ 고 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{a}$를 잇는 line segments가 C 안에 존재하므로 mean value theorem을 쓰면 $g_j(\mathbf{x}) - g_j(\mathbf{a}) = Dg_j(\mathbf{c_j}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ 를 만족하는 $\mathbf{c_j} \in C$ 이다. 따라서

$$|g_j(\mathbf{x}) - g_j(\mathbf{a})| \le n|Dg_j(\mathbf{c}_j)||\mathbf{x} - \mathbf{a}| \le nM\frac{w}{2}\ .$$

for all $j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ and $\mathbf{x} \in C$ 이며 따라서 모든 $\mathbf{x} \in C$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a})| \le nM(w/2)\ .$$

($|\mathbf{a}| = \sup\{|a_1|,\, |a_2|, \ldots,\, |a_n|\}$ 이며 $|\mathbf{A}| = \sup\{|A_{ij}|\}$ 임에 유의하라.)

이제 $g(E)$가 measure 0임을 보이자. $\{C_i\}$ 가 $C_i \subset \mathrm{int}(C_{i+1})$ 를 만족하며 $\bigcup_i \{C_i\} = A$ 를 만족하는 compact subset의 sequence라 하자(우리는 이런 sequence가 항상 존재함을 안다.). $E_k = C_k \cap E$라 하자. C_k가 compact set 이므로 C_k의 δ-neighborhood가 $\mathrm{int}(C_{k+1})$ 에 포함되도록 하는 $\delta > 0$을 선택 할 수 있다. $g \in C^1$ 이므로 $|Dg(\mathbf{x})| \le M$ for $\mathbf{x} \in C_{k+1}$ 이 되는 M을 선택 할 수 있다.

$E_k \subset E$ 이므로 E_k는 measure 0 이고 따라서, E_k 를 그 폭이 δ보다 작고 총 부피가 $\varepsilon' = \varepsilon/(nM)^n$ 보다 작은 cube 로 cover 할 수 있음을 알고 있다. $D_1,\, D_2, \ldots$를 E_k와 intersect 하는 이 cubes라 하자. D_i의 width는 δ보다 작고 $D_i \subset \mathrm{int}(C_{k+1})$ 이므로 $|Dg(\mathbf{x})| \le M$ for $\mathbf{x} \in D_i$ 이다. 따라서 $g(D_i)$ 는 width가 $nM \cdot (\mathrm{width} D_i)$ 인 cube D_i'에 포함된다. D_i'의 부피는 다음과 같다.

$$v(D_i') = (nM)^n(\mathrm{width}\ D_i)^n = (nM)^n v(D_i)\ .$$

Cubes $\{D_i'\}$ 가 $g(E_k)$를 cover 하므로 total volume of $g(E)$ 는 $\varepsilon = \varepsilon'(nM)^n$ 보다 작다고 할 수 있다. □.

Theorem 2.

$\mathbb{R}^n$ 에서의 open set $A,\, B$ 에 대해 $g : A \to B$가 diffeomorphism of class C^r 이라 하자. D가 compact subset of A 이고 $E = g(D)$ 일 때 다음이 성립한다.

1. $g(\mathrm{int}(D)) = \mathrm{int}(E)$ and $g(\mathrm{Bd}(D)) = \mathrm{Bd}(E)$.
2. D가 rectifiable 이면 E도 rectifiable이다.

Proof g^{-1}이 연속이므로 $g(\mathrm{int}(D))$ 는 open subset of E, i.e., $g(\mathrm{int}(D)) \subset \mathrm{int}(E)$. 마찬가지로 $g(\mathrm{ext}(D) \cap A)$는 open in B and disjoint with $E = g(D)$, i.e., $g(\mathrm{ext}(D) \cap A) \subset \mathrm{ext}(D)$. g가 bijection 이므로 $\mathrm{Bd}(E) \subset g(\mathrm{Bd}(D))$ 이다.

더 자세히 말하면, Let $\mathbf{y} \in \mathrm{Bd}(E)$ 라 하자. $E = g(D)$, g is continuous and D is compact 이므로 E는 compact. 따라서 E is closed 이므로 $\mathbf{y} \in E$. Let $\mathbf{x} \in A$ s. t. $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$. $\mathbf{x} \in \mathrm{int}(D)$ 이면 $\mathbf{y} \in \mathrm{int}(E)$ 이고 $\mathbf{x} \in \mathrm{ext}(D)$ 이면 $\mathbf{y} \in \mathrm{ext}(E)$ 이어야 하므로 모순. 따라서 $\mathbf{x} \in \mathrm{Bd}(D)$ 이며 $\mathrm{Bd}(E) \subset g(\mathrm{Bd}(D))$ 이다.

위와 같은 이유로 g가 연속이므로 $g^{-1}(\mathrm{int}(E)) \subset \mathrm{int}(D)$ 이고 $\mathrm{Bd}(D) \subset g^{-1}(\mathrm{Bd}(E))$ 이다.

$\mathrm{int}(E) = g \circ g^{-1}(\mathrm{int}(E)) \subset g(\mathrm{int}(D)) \subset \mathrm{int}(E)$ 이므로 $g(\mathrm{int}(D)) = \mathrm{int}(E)$ 이다. (1. 증명)

$g(\mathrm{Bd}(D)) \subset g \circ g^{-1}(\mathrm{Bd}(E)) \subset \mathrm{Bd}(E) \subset g(\mathrm{Bd}(D))$ 이므로 $\mathrm{Bd}(E) = g(\mathrm{Bd}(D))$ 이다. (2. 증명)

D가 rectifiable 이면 E도 rectifiable 임은 Lemma 1.에 의해 자명하다. □.

Definition : Primitive Diffeomorphism

Diffeomorphism $h : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ 가 $h(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_n(\mathbf{x}))$ 로 주어졌고 하자. 어떤 i 에서 $h_i(\mathbf{x}) = x_i$ 일 때 h는 i-th coordinate를 보존한다고 한다. h가 어떤 i-th coordinate를 보존한다면 h를 **primitive diffeomorphism** 이라 한다.

Theorem 3.

$g : A \to B$가 diffeomorphism of open sets in $\mathbb{R}^n$ 이라 하자. $\mathbf{a} \in A$ 이면 어떤 neighborhood of $\mathbf{a}$, $U_\mathbf{a}$ 가 존재하여 $g|_{U_\mathbf{a}}$ 가 composite of primitive diffeomorphism $h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_1$ 과 같다.

Proof (Step 1) Linear algebra로 부터 다음 두 사실을 알고 있다.

1. Non-singular linear transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = C \cdot \mathbf{x}$ 일 경우 행렬 C는 elementary row operation matrix의 product 이므로 C는 primitive diffeomorphism 의 composite 이다.
2. $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 이 translation $t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ 일 경우 $t_1(\mathbf{x}) = (x_1 + c_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t_2 = (x_1, x_2 + c_2, \ldots, x_n + c_n)$ 으로 정의하면 t_1, t_2 는 primitive diffeomorphism 이며 $t = t_1 \circ t_2$.

(Step 2) $\mathbf{a} = 0$, $g(0) = 0$, $Dg(0) = I_n$ 인 경우 g 가 locally composite of two primitive diffeomorphism 임을 보이자. $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{x})\hat{e}_i$ 이며 $h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} g_i(\mathbf{x})\hat{e}_i + x_n\hat{e}_n$ 이라 하자. $h(0) = 0$ 이며 $Dh(0) = I_n$ 임을 알 수 있다. Inverse function theorem에 의해 h는 0 의 neighborhood V_0, V_1 사이의 diffeomorphism임을 알 수 있다.

이제 $k(\mathbf{y}) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, g_n(h^{-1}(\mathbf{y})))$ 라 정의하자. $k(0) = 0$ 이며

$$Dk(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ D(g_n \circ h^{-1})(\mathbf{y}) & \end{bmatrix}$$

이다. Chain rule에 의해 $D(g_n \circ h^{-1})(\mathbf{y}) = Dg_n(0) \cdot Dh^{-1}(0) = [0, \ldots, 0, 1] \cdot I_n = [0, \ldots, 0, 1]$. 따라서 $Dk(0) = I_n$ 이며 k는 0 의 neighborhood W_1, W_2 사이의 diffeomorphism이다. $k(W_1) = W_2$, $W_0 = h^{-1}(W_1)$ 이라 하면 k, h 는 primitive diffeomorphism 이며 $k \circ h = g|_{W_0}$ 임을 알 수 있다.

$$W_0 \xrightarrow{h} W_1 \xrightarrow{k} W_2$$

(Step 3) 이제 일반적인 경우에 대해 생각해보자. 주어진 $g : A \to B$ 에 대해 $\mathbf{a} \in A$ 이고 $C = Dg(\mathbf{a})$ 라 하자. Diffeomorphism $t_1,\ t_2, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + \mathbf{a}\ , \\ t_2(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - g(\mathbf{a})\ , \\ T(\mathbf{x}) &= C^{-1} \cdot \mathbf{x}\ . \end{aligned}$$

$\tilde{g} = T \circ t_2 \circ g \circ t_1$ 이라 하면 $\tilde{g}$ 는 open sets $t_1^{-1}(A)$, $T(t_2(B))$ 사이의 diffeomorphism 이다. 여기서 $\tilde{g}(0) = 0$, $D\tilde{g}(0) = I_n$ 임은 쉽게 보일 수 있다. Step 2에서 보았듯이 0의 어떤 neighborhood $W_0 \subset t_1^{-1}(A)$ 에 대해 $g|_{W_0}$ 는 two primitive diffeomorphism의 composite 이다. $W_2 = \tilde{g}(W_0)$, $A_0 = t_1(W_0)$, $B_0 = t_2^{-1}T^{-1}(W_2)$ 라 하면,

$$A_0 \xrightarrow{t_1^{-1}} W_0 \xrightarrow{\tilde{g}} W_2 \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}(W_2) \xrightarrow{t_2^{-1}} B_0\ .$$

각각의 t_1^{-1}, t_2^{-1}, T^{-1} 이 primitive transformation 이거나 primitive transformation으로 factorize 될 수 있으므로 증명 끝. □

Definition

An open $A \subset \mathbb{R}^n$ 에 대해 C^r class injective function $g : A \to \mathbb{R}^n$ 이 $\det Dg \neq 0$ for all $\mathbf{x} \in A$ 이면 g를 **change of variables** in $\mathbb{R}^n$ 이라 한다.

Theorem 4. (Change of Variables Theorem)

$g : A \to B$는 $\mathbb{R}^n$ 에서의 open sets에서의 diffeomorphism 이고 $f : B \to \mathbf{R}$ 은 연속함수라 하자. 이 때 f가 integrable over B iff $(f \circ g)|\det Dg\,|$ is integrable 이며 이 경우

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|\det Dg\,|$$

이다.

Proof 우선 f is integrable $\implies$ $(f \circ g)|\det Dg\,|$ is integrable을 보인다(Lemma 5). 이후 $(f \circ g)|\det Dg\,|$ is integrable $\implies$ f is integrable 을 보인다(Lemma 6).

Lemma 4.

$g : A \subset \mathbb{R}^n \to B$, $h : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 differentiable 일 때 $\det(D(h \circ g))(\mathbf{x}) = \det(Dh(g(\mathbf{x}))) \cdot \det(Dg)(\mathbf{x})$ 이다. 따라서 $|\det(D(h \circ g))| = |\det(Dh) \circ g\,| \cdot |\det(Dg)\,|$ 이다.

Proof is trivial

Lemma 5.

$g : A \to B$가 open sets $A,\ B$ in $\mathbb{R}^n$에 대한 diffeomorphism 이라 하자. B에서 integrable한 연속 함수 $f : B \to \mathbb{R}$에 대해 $(f \circ g)|\det Dg|$ 는 integrable 하며,

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|\det Dg|$$

이다.

Proof (Step 1) 임의의 $\mathbf{x} \in A$에 대해 위의 Lemma가 성립하는 $\mathbf{x}$의 neighborhood $U \subset A$가 존재함을 가정하자. 즉 일단 locally 성립하면 globally 성립함을 보인다. 그리고 난 후 이러한 U가 항상 존재함을 induction을 통해 보이기로 하자.

(Step 2) Collection of open sets $\{U_\alpha\}$ s. t. $\bigcup_\alpha U_\alpha = A$ 이고, $V_\alpha = g(U_\alpha)$ 이면 $B = \bigcup_\alpha V_\alpha$ 이다. B에 대한 partition of unity $\{\phi_i\}$ having compact support, that is dominated by $\{V_\alpha\}$ 를 생각하자. 우리는 $\{\phi_i \circ g\}$ 가 partition of unity on A having comact support 임을 보일것이다.

1. $\phi_i(g(\mathbf{x})) \geq 0$ for all $\mathbf{x} \in A$ 이다.
2. $T_i = \text{support } \phi_i$ 라 하자. $g(T_i)$ 는 compact 이며 $\phi_i \circ g(\mathbf{x}) = 0$ if $\mathbf{x} \notin g^{-1}(T_i)$ 이다. 따라서 $S_i = \text{support } (\phi_i \circ g) \subset g^{-1}(T_i)$ 이며 S_i는 compact set 이다.
3. $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ 라 하자. $\mathbf{y}$ 는 finitly many T_i 와 intersect 하는 neighborhood $N_\mathbf{y}$ 를 가지며 $g^{-1}(N_\mathbf{y})$ 는 $\mathbf{x}$의 neighborhood로 이 T_i에 상응하는 S_i와만 intersect 한다.
4. $\sum \phi_i(g(\mathbf{x})) = \sum \phi_i(\mathbf{y}) = 1$.

따라서 $\{\phi_i \circ g\}$는 partition of unity on A 이다.

이제 $f : B \to \mathbb{R}$ 이 연속함수이고 f가 B에서 integrable 이라 하자. 우리는 $\int_B f = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_B \phi_i f\right]$ 임을 알고 있다. Given i에 대해 $T_i \subset V_\alpha$ 가 되도록 α를 선택하자. $\phi_i f$는 B에서 연속이므로

$$\int_B \phi_i f = \int_{T_i} \phi_i f = \int_{V_\alpha} \phi_i f\ ,$$

이다. $g : U_\alpha \to V_\alpha$ 를 생각하면 다음이 성립한다.

$$\int_{V_\alpha} \phi_i f = \int_{U_\alpha} (\phi_i \circ g)(f \circ g)|\det Dg|\ \ .$$

우변의 적분은 S_i 밖에서 0 이므로 다음이 성립한다.

$$\int_B \phi_i f = \int_A (\phi_i \circ g)(f \circ g)|\det Dg|\ ,\ \text{and}$$
$$\int_B f = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_B \phi_i f\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_A (\phi_i \circ g)(f \circ g)|\det Dg|\right]\ .$$

$\phi_i \circ g$가 A의 partition of unity 이고 $|f|$가 integrable 이므로 $(f \circ g)|\det Dg|$ 도 integrable 하다. 따라서

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|\det Dg|$$

이다.

<u>(Step 3)</u> 임의의 $\mathbf{x} \in A$에 대해 위의 Lemma가 성립하는 $\mathbf{x}$의 neighborhood $U \subset A$가 존재함을 induction을 통해 보인다. 일단 $n = 1$ 일 때 즉 $\mathbb{R}^1$ 에서 보이자. $A,\ B$ 가 open in $\mathbb{R}$ 이라 하자. $x \in A$에 대해 I는 $x \in \operatorname{int}(I)$ 인 closed interval 이며 $J = g(I)$ 라 하자. g가 diffeomorphism 이므로 $g(x) \in \operatorname{int}(J)$ 이다.

이제 $\operatorname{int}(J)$에서 정의된 연속함수 f에 대해 $\int_{\operatorname{int}(J)} f = \int_{\operatorname{int}(I)} (f \circ g)|g'|$ 임을 보이면 되는데 $I,\ J$가 closed interval 이므로 자명하다.

<u>(Step 4)</u> 이제 $n-1$일때 성립함을 가정하고 n에서 성립함을 보이자. Lemma 4를 생각하면 우리는 primitive diffeomorphism에서 성립함을 보이면 된다. $h : U \to V$를 $\mathbb{R}^n$의 open set $U,\ V$에서 정의된 primitive diffeomorphism 이라 하자. 편의를 위해 h를 마지막 components를 보존하는 primitive diffeomorphism 이라고 가정한다.

$\mathbf{p} \in U,\ \mathbf{q} = h(\mathbf{p})$ 이며 Q는 $\mathbf{q}$를 내부에 포함하는 V의 subset 이라 하고 $S = h^{-1}(\mathbf{q})$라 하자. h는 $\operatorname{int}(S)$ 와 $\operatorname{int}(Q)$ 사이의 diffeomorphism이다. 이제 h와 임의의 연속함수 $f : \operatorname{int}(Q) \to \mathbb{R}$ whose support is compact subset of $\operatorname{int}(Q)$ 에 대해 lemma가 성립함을 보이자.

$(f \circ h)|\det Dh\,|$ 가 compact subset of $\operatorname{int}(S)$ 이므로 $(f \circ h)|\det Dh\,|$ 는 integrable over $\operatorname{int}(S)$ 이다. 이제 우리는 다음을 보여야 한다.

$$\int_{\operatorname{int}(Q)} f = \int_{\operatorname{int}(S)} (f \circ h)|\det Dh\,|\ .$$

이제 f를 확장시킨 $f_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 을 다음과 같이 정의하면 f_e와 F는 $\mathbb{R}^n$에서 연속이다.

$$f_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{if } \mathbf{x} \in \operatorname{int}(Q)\ , \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} (f_e \circ h)|\det Dh\,| & \text{if } \mathbf{x} \in \operatorname{int}(Q)\ , \\ 0 & \text{oterwise}\ . \end{cases}$$

Q는 closed rectangle in $\mathbb{R}^n$ 이므로 $\mathbb{R}^{n-1}$ 에서의 closed rectengle D와 closed interval I 에 대해 $Q = D \times I$로 쓸 수 있다.