作业12

1.(10') 设复平面$\mathbb{C}$上的函数$f(z)$定义如下:

$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0, \\ 0 & z=0. \end{cases}$$

试讨论$f(z)$在$\mathbb{C}$上的复可微性.

2.(10') 确定所有满足下列条件的整函数:

$$\text{当}|z|>1\text{时}, \ |f(z)|\leq \frac{|z|}{\log|z|}.$$

3.(15') 设$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$是$\mathbb{C}$上的单位圆盘, $f(z)$是$\mathbb{D}$上全纯函数, $|f(z)|<1$, 则

(1)

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right|\leq \frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\ (z_1,z_2\in\mathbb{D},z_1\neq z_2)$$

(2)

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leq \frac{1}{1-|z|^2}\ (z\in\mathbb{D}),$$

其中等号成立当且仅当$f(z)$是$\mathbb{D}$上的全纯自同构.

4.(15') 设Ω是$\mathbb{C}$中的区域, $\{f_n(z)\}$是Ω上的全纯函数列, $\{f_n(z)\}$在Ω上内闭一致收敛于$f(z)$.

(1)证明: $f(z)$在Ω上全纯;

(2)若每个$f_n(z)$在Ω上无零点, 则$f(z)$在Ω上恒为零, 或者无零点.

5.(10') 利用留数定理计算下列实积分: (1)$\int_{x=0}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$, (2)$\int_{x=0}^{+\infty}\frac{\log x}{(x^2+1)^2}dx$.

答案: (1)$\frac{\pi}{2e}$; (2)$-\frac{\pi}{4}$.

6.(10') 设$\mathbb{D}=\{|z|<1\}$, $\beta\in\mathbb{D},\beta\neq 0$, $f(z)=\frac{z-\beta}{1-\overline{\beta}z}$, 函数族$\mathcal{F}=\{f_n\}$定义如下:

$$f_1=f,\ f_{n+1}=f\circ f_n,$$

证明: $\mathcal{F}$是正规的, 并找出极限函数.

7.(30') 设$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$ 是$\mathbb{C}$上的单位圆盘, $\overline{\mathbb{D}}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|\leq 1\}$ 是闭单位圆盘

(1)证明: 黎曼球面S^2上的亚纯函数是有理函数;

(2)若有理函数$R(z)$满足: 当$|z|=1$时$|R(z)|=1$, 求$R(z)$的一般表达式;

(3)设$f(z)$在$\mathbb{D}$上全纯, 在$\overline{\mathbb{D}}$上连续, 且当$|z|=1$时$|f(z)|=1$, $f(1)=1$,

(i)若$f(z)$在$\mathbb{D}$上无零点, 求$f(z)$的表达式;

(ii)若$f(z)$在$\mathbb{D}$上有二阶零点$z_0=0$, 求$f(z)$的表达式.