

# 复变函数 21 级试卷

日期: July 8, 2023

问题 1: 用留数定理阐述柯西定理。

问题 2: 极点的两个等价定义。

问题 3: 写出一个无穷为二阶极点,  $a$  是一阶极点,  $b$  为本性奇点的通式。

问题 4: 给出  $\sin z$  的定义, 用  $e^z$  级数证明  $\sin z$  的级数。计算出  $|\sin z|$ 。

问题 5: 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{(x+1)(x+2)} dx$$

。

问题 6: 把  $z+i=2$ , 虚轴以上的部分映射到单位圆。

问题 7: 用鲁歇定理计算半径 1 和 2 圆盘的根的个数,  $z^5 - 5z^2 + 1$ 。

问题 8: 如果  $f$  在  $D$  上是解析函数,  $|f|$  有界, 证明  $f$  是常数。

问题 9: 在单位圆内证明  $f$  的  $n$  阶导数小于等于

$$(n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

问题 10: 可去奇点的积分为零

问题 11: 证明一般域上的柯西定理

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int f \frac{dz}{z-a}$$

如果  $f(0) = 0$ , 且在单位圆内解析, 且  $\operatorname{Re} f > 0$ , 证明

$$|f| \leq 2 \operatorname{Re} f \frac{|z|}{(1-|z|)}$$

.