§1. 作业题（9月16日）

习题 1. 设 $T(n,k)$ 表示集合 $[n]$ 具有 k 个长度为 2 的圈, $n-2k$ 个长度为 1 的圈的排列的个数。证明：当 $n\geq 2k$ 时,

$$T(n,k)=T(n-1,k)+(n-1)T(n-2,k-1).$$

Proof. $T(n,k)$ 表示集合 $[n]$ 具有 k 个长度为 2 的圈, $n-2k$ 个长度为 1 的圈的排列的个数, 可由以下方式得到.

当 n 独立成一个圈时, 此时有 k 个长度为 2 的圈, $n-2k-1$ 个长度为 1 的圈的排列, 个数为 $T(n-1,k)$;

当 n 不单独成一个圈时, 从集合 $[n-1]$ 中任选一个元素与 n 构成长度为 2 的圈的排列, 个数为 $(n-1)T(n-2,k-1)$.

综上所述,

$$T(n,k)=T(n-1,k)+(n-1)T(n-2,k-1).$$

习题 2.

$$c(n,n-2)=2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}.$$

Proof. n元集合恰有$n-2$个圈, 则除了一个圈有三个元素或两个圈分别有两个元素, 其他圈都只有一个元素. 当一个圈有三个元素时, 设为a,b,c, 则它有(abc), (acb) 两种情形; 当两个圈各有两个元素时, 设这四个元素为 a,b,c,d, 则它可分成三种两个元素的圈: $(ab)(cd)$, $(ac)(bd)$, $(ad)(bc)$. 从而$c(n.n-2)=2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$.

习题 3. 假设有n $(n\geq 2)$个客人, k个圆桌, 每个圆桌至少坐一人, 座位未标号. 其中两个客人 *Alice* 和*Bob* 围坐在同一张桌子, 但不一定坐在相邻位置, 在这个条件限制下有多少种坐法？

解: 由题意可知, 合理的座位安排可通过计数$n-1$个不相交的有穷集合得到. 设第l 个集合, A_l $(l\geq 2)$ 表示Alice 和 Bob 围坐在具有l个座位的圆桌. 计数集合A_l:

(i) Alice 和 Bob 围坐在有l 个座位的圆桌, 则从$n-2$个客人中选择$l-2$个人坐在第l个桌子, 有$(l-1)P(n-2,l-2)$种坐法.

(ii) 余下的$n-l$个客人, 围坐在$k-1$张圆桌, 有$s(n-l,k-1)$种坐法. 其中$s(n-l,k-1)$表示$n-1$个元素放入$k-1$, $(k=1,2,\ldots,n-1)$个不交圈的个数.

根据乘法法则,

$$|A_l| = (l-1)P(n-2,\, l-2)s(n-l,\, k-1).$$

根据加法法则, 座位安排的方法为

$$|\cup_{l=2}^{n} A_l| = \sum_{l=2}^{n} |A_l| = \sum_{l=2}^{n} (l-1)P(n-2,\, l-2)s(n-l,\, k-1).$$

§ 2. 作业题（9月28日）

习题 4. 当 $r \geq n$ 时, 证明集合 $[n]$ 的 r-可重排列中每个元素都至少出现一次的排列个数为:

$$q_r(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r.$$

Proof. (利用生成函数) 考虑序列 $\{q_r(n)\}_{k\geq 0}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} q_r(n) \frac{x^r}{r!} &= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \\
&= (e^x - 1)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} e^{(n-i)x} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n-i)^r x^r}{r!} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r \frac{x^r}{r!}
\end{aligned}$$

比较$x^r/r!$两边系数可得

$$q_r(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r.$$

(利用容斥原理) 设集合 $[n]$ 的所有 r-可重排列的组成的集合为 S, 则 $|S| = n^r$. 定义集合 S 的性质集合:

$$P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\},$$

其中 P_i 表示在 r-排列中不存在元素 i, 记 A_i 为集合 S 中满足性质 P_i 的元素组成的集合, 则

$$|A_i| = (n-1)^r.$$

对任意 $1 \leq i < j \leq n$, 显然有

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)^r,$$

一般地, 对 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, 可得

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)^r.$$

由题意知 $q_r(n)$ 为 S 中不满足性质集 P 中的任意一个性质的排列的个数, 由容斥原理可得:

$$\begin{aligned} q_r(n) &= n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}0^r \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r. \end{aligned}$$

习题 5. 用容斥原理计算下列式子并用生成函数验算.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{n-k}.$$

解: 设 S 为集合 $[n]$ 的所有子集组成的集合, 则 $|S| = 2^n$. 定义集合 S 的性质集合:

$$P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\},$$

性质 P_i 表示 S 中的元素不包含 i, A_i 表示 S 中所具有性质 P_i 的元素构成的集合, 则集合 $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n$ 表示集合 $[n]$ 本身, 所以 $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = 1$. 由容斥原理可得

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| &= |S| - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\ &= 2^n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{n-k}. \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{n-k} = 1.$$

下面用生成函数检验: 因为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k} = (x-1)^n,$$

取 $x = 2$ 可得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{n-k} = 1.$$

习题 6. 多项式 $(x+y+z)^4$ 展开后共有多少个单项式？求 x^2z^2 的系数.

解: 首先列举 4 的具有 3 个部分的所有有序弱分拆，共有15个

$$(4,0,0),(0,4,0),(0,0,4),(3,1,0),(0,3,1),$$

$$(2,2,0),(2,0,2),(0,2,2),(1,0,3),(1,1,2),$$

$$(0,1,3),(3,0,1),(2,1,1),(1,2,1),(1,3,0).$$

多项式 $(x+y+z)^4$ 展开后共有 15 个单项式.

x^2z^2 的系数为 $\binom{4}{2,0,2}=6$.

习题 7. 求下面两个多重和的值:

$$\sum_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_r=n\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_r\geq 0}} \binom{n}{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}.$$

$$\sum_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_r=n\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_r\geq 0}} (-1)^{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}.$$

解: 由多项式定理知, 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$,

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_k=n\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_k\geq 0}} \binom{n}{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} x_1^{\lambda_1}\cdots x_k^{\lambda_k}.$$

因此, 令 $x_1=x_2=\ldots=x_k=1$,

$$\sum_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_r=n\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_r\geq 0}} \binom{n}{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=k^n.$$

令 $x_1=-1,x_2=\ldots=x_k=1$,

$$\sum_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_r=n\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_r\geq 0}} (-1)^{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}=(k-2)^n.$$

§ 3.　作业题（9月30日）

习题 8. 设 $a_0 = 2$, 当 $n \geq 1$ 时, $a_n = 3a_{n-1} - 1$. 求 a_n 的闭式表达式.

解: 设
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$
由上述递推关系式可得，
$$F(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1} - 1) z^n = 2 + 3z \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} - z \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}.$$
整理可得
$$F(z) = 2 + 3zF(z) - \frac{z}{1-z},$$
故
$$F(z) = \frac{2-3z}{(1-z)(1-3z)}.$$
下一步确定生成函数中 z^n 的系数便得到了 a_n 的闭式表达式. 令
$$F(z) = \frac{2-3z}{(1-z)(1-3z)} = \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1-3z},$$
解得 $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{2}$, 因此,
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = B \sum_{n=0}^{\infty} z^n + C \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} \right) z^n.$$
比较z^n两边的系数，可得
$$a_n = \frac{3^{n+1}+1}{2}.$$

习题 9. 求
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k.$$

解: 设
$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n,$$
及
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n z^n.$$

易知，

$$G(z)=\frac{F(z)}{(1-z)}$$

且幂级数 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2 2^n z^n$ 是由 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n z^n$ 经过求导, 再乘 z 重复两次得到, 即

$$z\times g'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n2^n z^n,$$

令 $h(z)=z\times g'(z)$,

$$z\times h'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2 2^n z^n=F(z).$$

因为 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n z^n=\dfrac{1}{1-2z}$,
得

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2 2^n z^n=2z(1-2z)^{-2}+8z^2(1-2z)^{-3}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}s_n z^n=\frac{F(z)}{(1-z)}=2z(1-2z)^{-2}(1-z)^{-1}+8z^2(1-2z)^{-3}(1-z)^{-1}.$$

将其分解为

$$\frac{F(z)}{(1-z)}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{1-2z}+\frac{C}{(1-2z)^2}+\frac{D}{(1-2z)^3}$$

解得 $A=-6,\ B=12,\ C=-10,\ D=4.$
则

$$\frac{F(z)}{(1-z)}=\frac{-6}{1-z}+\frac{12}{1-2z}+\frac{-10}{(1-2z)^2}+\frac{4}{(1-2z)^3}.$$

结合广义二项式系数, 比较z^n 的系数可得:

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}k^2 2^k=-6+12\times 2^n-10\binom{n+1}{1}2^n+4\binom{n+2}{2}2^n=(n^2-2n+3)2^{n+1}-6.$$

习题 10. 假设有 k 种甜甜圈, 给每个袋子中装有 n 个甜甜圈且每个品种有奇数个, 请问这样装甜甜圈有多少种方法?

解: 我们可以使用整数方程来模拟这个计数问题, 即

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

其中每个 x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ 为正奇数.

不妨用多项式

$$z + z^3 + z^5 + \cdots$$

表示 x_1 的可能取值, 同理 $x_2, \ldots, x_k$ 的取值均可用 $z + z^3 + z^5 + \cdots$ 表示. 因此不定方程的整数解的个数等于

$$(z + z^3 + z^5 + \cdots)^k = z^k(1 - z^2)^{-k}.$$

由广义二项式系数知,

$$z^k(1 - z^2)^{-k} = z^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j + k - 1}{j} z^{2j}.$$

比较z^n两边的系数，并且设 $j = \dfrac{n - k}{2}$，可得该计数问题的结果为

$$\binom{(n - k)/2 + k - 1}{k - 1},$$

且 $n - k$ 是偶数、非负的.

习题 11. 设集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 中的 k-可重排列中含有偶数个 n 的排列个数为 $a_k(n)$, 求 $a_k(n)$.

解: 设 $\{a_k(n)\}_{k \geq 0}$ 的指数型生成函数为

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \frac{x^k}{k!} &= \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^{n-1} \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{(n-1)x} \\
&= \frac{e^{nx} + e^{(n-2)x}}{2}.
\end{aligned}$$

展开比较 x^k 的系数得:

$$a_k(n) = \frac{n^k + (n - 2)^k}{2}.$$

§4. 作业题（10月09日）

习题 12. 计算

$$S_4(n) = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4.$$

并验证它是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 乘 $(2n+1)$ 的多项式.

解: 可验证 n^4 的各阶差分在 0 处的取值分别为

$$f(0) = 0,\ \ \Delta^1 f(0) = 1,\ \ \Delta^2 f(0) = 14,\ \ \Delta^3 f(0) = 36,\ \ \Delta^4 f(0) = 24,\ \ \Delta^5 f(0) = 0.$$

由

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0)$$

可得

$$n^4 = 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 14 \cdot \binom{n}{2} + 36 \cdot \binom{n}{3} + 24 \cdot \binom{n}{4}$$

所以

$$\begin{aligned}
1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 &= \sum_{j=0}^{4} \binom{n+1}{j+1} \Delta^j f(0) \\
&= \binom{n+1}{1} \Delta^0 f(0) + \binom{n+1}{2} \Delta^1 f(0) + \binom{n+1}{3} \Delta^2 f(0) \\
&\quad + \binom{n+1}{4} \Delta^3 f(0) + \binom{n+1}{5} \Delta^4 f(0) \\
&= \binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5} \\
&= \frac{(6T_n^2 - T_n)(2n+1)}{15}.
\end{aligned}$$

其中 $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

习题 13. 证明*:*

$$S(n+1, k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S(i, k-1).$$

证明: 设$S(n+1,k)$ 表示 $n+1$ 元集合划分成 k 块的方法数, 可分为下面几种情况:

选择 1 个元素放在第 k 块, 其余 n 个元素放在 $k-1$ 块,方法数为 $\binom{n}{n} S(n, k-1)$;

选择 2 个元素放在第 k 块, 其余 $n-1$ 个元素放在 $k-1$ 块, 方法数为

$\binom{n}{n-1}S(n-1,k-1)$;

$\cdots\cdots$

选择 $n-k+1$ 个元素放在第 k 块, 其余 $k-1$ 个元素放在 $k-1$ 块, 方法数为 $\binom{n}{k-1}S(k-1,k-1)$,

$\cdots\cdots$

选择 $n+1$ 个元素放在第 k 块, 其余 0 个元素放在 $k-1$ 块, 方法数为 $\binom{n}{0}S(0,k-1)$.

因此, 将 $n+1$ 元集合划分成 k 块的个数为:

$$S(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S(i,k-1).$$

习题 14. 证明当 $n \geq 0$ 时, *Bell* 数 B_n 满足下面恒等式

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

证明: 由 Bell 数的组合定义可知: B_{n+1} 表示集合 $\{1,2,\ldots,n+1\}$ 所有划分的个数. 若 $n+1$ 单独为一块时, 这个划分的个数为 B_n; 若 $n+1$ 所在块为 $k+1(1 \leq k \leq n)$ 时, 则这样的划分个数为: $\binom{n}{k}B_{n-k}$. 所以

$$B_{n+1} = B_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

§5. 作业题（10月19日）

习题 15. 用组合方法证明下面等式.

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \tan x.$$

证明: 因为

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

所以只需证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\times\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j}}{(2j)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}E_{2k+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sin x.\end{aligned}$$

而

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

所以只需证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}E_{2k+1} = (-1)^n.$$

设 S 是 $[2n+1]$ 的 $2k$ 元子集, S^C 为集合 S 的补集. 定义有集合 S 中元素反向交错排列和集合 S^C 中元素递降的排列组成的有序对 (α,β), 并设其权重为 $(-1)^{n-k}$. 不妨设 $\alpha=a_1a_2\cdots a_{2k+1}$, $\beta=b_1b_2\cdots b_{2n-2k}$.

1. 当 $k\neq 0$ 时, 若 $k=n$ 或者 $a_{2k+1}>b_1$, 对有序对 (α,β) 作如下变换

$$(\alpha,\beta)\mapsto(\alpha_1,\beta_1),$$

其中 $\alpha_1=a_1a_2\cdots a_{2k-1}$ 是长为 $2k-1$ 的反向交错排列, $\beta_1=a_{2k}a_{2k+1}b_1b_2\cdots b_{2n-2k}$ 是长为 $2n-2k+2$ 的递减排列, (α_1,β_1) 的权重为 $(-1)^{n-k+1}$;

2. 当 $a_{2k+1}<b_1$ 时, 对有序对 (α,β) 作如下变换,

$$(\alpha,\beta)\mapsto(\alpha_2,\beta_2),$$

其中 $\alpha_2=a_1a_2\cdots a_{2k+1}b_1b_2$ 是长为 $2k+3$ 的反向交错排列, $\beta_2=b_3b_4\cdots b_{2n-2k}$ 是长为 $2n-2k-2$ 的递减排列, (α_2,β_2) 的权重为 $(-1)^{n-k-1}$;

当 $k=0$ 且 $a_1>b_1$ 时, 有序对只有 $(2n+1,2n(2n-1),\cdots 1)$, 其权重为 $(-1)^n$, 我们对其不做任何变换.

显然以上的变换是可逆的, 又 $2k+1$ 个不同元素组成的反向交错排列个数为 E_{2k+1}, 所以,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k+1}E_{2k+1}=(-1)^n$$

等式成立, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\tan x.$$

习题 16. 试给出三角恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 的组合证明.

证明: 等价于证明 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$.

因为

$$\sec\theta=\sum_{k=0}^{\infty}E_{2k}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!},\qquad \tan\theta=\sum_{k=1}^{\infty}E_{2k-1}\frac{\theta^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

所以

$$\sec^2\theta=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k}E_{2n-2k}\frac{\theta^{2n}}{(2n)!},$$

$$\tan^2\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}E_{2k-1}E_{2n-2k+1}\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}.$$

因此, 只需证明

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k}E_{2n-2k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}E_{2k-1}E_{2n-2k+1}=0.$$

由 Euler 数的定义, 我们知 $2n+1$ 长的交错排列的个数与反向交错排列的个数都是 E_{2n+1}. 在交错排列中的任意一个排列以 $2n+1$ 为界分成了一个交错排列 (或空排列) 和一个反向交错排列 (或空排列), 所以根据 $2n+1$ 在排列中的位置可知

$$E_{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k}E_{2n-2k};$$

类似地, 在反向交错排列中的任意一个排列以 $2n+1$ 为界分成了两个反向交错排列, 根据 $2n+1$ 所在的位置可得

$$E_{2n+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}E_{2k-1}E_{2n-2k+1},$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k}E_{2n-2k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}E_{2k-1}E_{2n-2k+1}=0.$$

等式成立.

习题 17. 计算$S_4(n)=1^4+2^4+\cdots+n^4$.

解: (利用Bernoulli 数)

由

$$S_m(n)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\frac{(n+1)^{m-k+1}}{m+1}B_k,$$

可知

$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}\frac{(n+1)^{4-k+1}}{5}B_k.$$

并且由 Bernoulli 数的定义知：

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{n+1}^{k}B_k,\quad B_0=1$$

进而得到

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30}.$$

所以

$$\begin{aligned}
S_4&=1^4+2^4+\cdots+n^4\\
&=\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}\frac{(n+1)^{5-k}}{5}B_k\\
&=\binom{5}{0}\frac{(n+1)^5}{5}B_0+\binom{5}{1}\frac{(n+1)^4}{5}B_1+\binom{5}{2}\frac{(n+1)^3}{5}B_2\\
&\quad+\binom{5}{3}\frac{(n+1)^2}{5}B_3+\binom{5}{4}\frac{(n+1)^1}{5}B_4\\
&=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}(n+1).\\
&=\frac{(6T_n^2-T_n)(1+2n)}{15}
\end{aligned}$$

§ 6. 作业题（10月26日）

习题 18. 设 h_n 为集合 $[n]$ 的有序划分的个数, 计算 h_n 的指数型生成函数, 并给出 h_n指数型生成函数. *(注: 所谓的有序划分, 是指将集合划分后再对所有的块进行排列.)*

解: 规定 $h(0)=1$, 由 $h(n)$ 的定义 $n \geq 1$ 得

$$h(n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{(T_1,T_2,\ldots,T_k)}1=\sum_{k=1}^{n}k!\sum_{\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}}1$$

其中 $(T_1,T_2,\ldots,T_k)$ 为集合 $[n]$ 的 k 部有序弱划分, $\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}$ 为集合 $[n]$ 的 k 部划分. 设 E_h 是序列 $\{h(n)\}_{n\geq 0}$ 的指数型生成函数, 设 $g(k)=k!$, 则序列 $\{g(k)\}_{k\geq 0}$ 的指数型生成函数为 $E_g=\frac{1}{1-x}$. 设 $f(n)=1(n\geq 1)$, 并规定 $f(0)=0$, 它的指数型生成函数为 $E_f=e^x-1$, 由指数型生成函数的复合公式可知,

$$E_h=E_g(E_f)=\frac{1}{2-e^x}.$$

习题 19. 设 $h(n)$ 表示将集合 $[n]$ 划分成若干块, 每块中元素个数只能是 3 或 4 或 9 的划分的个数, 求 $\{h(n)\}$ 的指数型生成函数.

解: 设序列 $f(n)$满足如下条件:

$$f(n)=\begin{cases}1, & n=3,4,9\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

由定义可知

$$h(n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}}f(\#B_1)\cdots f(\#B_k)$$

所以复合公式可得

$$E_h=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\frac{x^n}{n!}\right)=\exp\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^9}{9!}\right).$$

习题 20. 设 k为任意正整数, $h(n)$ 为集合 $[n]$ 上的排列表示成圈结构后, 每个圈的长度是偶数的排列的个数, 求 $\{h(n)\}_{n\geq 0}$ 的生成函数.

解: 规定 $h(0)=1$, 由题意可得当 $n\geq 1$ 时,

$$h(n)=\sum_{\pi\in S_n}g(\#C_1)g(\#C_2)\cdots g(\#C_k),$$

其中 $C_1, C_2, \ldots, C_k$ 表示排列 π 表示成圈结构时对应的圈, 及

$$g(k) = \begin{cases} 1, & k\text{是偶数且}k \neq 0, \\ 0, & k\text{是奇数或}k = 0. \end{cases}$$

计算得

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = \ln\sqrt{\frac{1}{1-x^2}},$$

所以

$$E_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

习题 21. 设 k为任意正整数, $h_k(n)$ 为集合 $[n]$ 上的排列表示成圈结构后, 每个圈的长度是 k 的倍数的排列的个数, 求 $\{h_k(n)\}_{n\geq 0}$ 的生成函数.

解: 不妨设 $h_k(0) = 1$, 由题意可得当 $n \geq 1$ 时,

$$h_k(n) = \sum_{\pi \in S_n} f(\#C_1)f(\#C_2)\cdots f(\#C_t),$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 表示排列 π 表示成圈结构时对应的圈, 及

$$f(\#C_i) = \begin{cases} 1, & \#C_i = kd\text{且}\#C_i \neq 0, \\ 0, & \#C_i \neq kd\text{或}\#C_i = 0. \end{cases}$$

设序列 $\{h_k(n)\}_{n\geq 0}$ 的指数型生成函数为 E_{h_k}. 可计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{x^n}{n} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{x^{kd}}{kd} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{1-x^k}\right)$$

所以

$$E_{h_k} = \sum_{n=0}^{\infty} h_k(n)\frac{x^n}{n!} = \left(\frac{1}{1-x^k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

§7. 作业题（11月9日）

习题 22. 设 $c(x)$ 为 *Catalan* 数的生成函数. 证明:

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n+1}{n}x^n=\frac{c(x)}{\sqrt{1-4x}},$$

(2)

$$(n+1)C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}C_{n-k+1}.$$

证明: (1) 已知

$$c(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{c(x)}{\sqrt{1-4x}}&=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)\\&=\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}\binom{2n}{n}x^n\\&=\sum_{n\geq 0}\binom{2n+1}{n}x^n\end{aligned}$$

(2)令

$$b(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}C_{n-k+1},$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}C_{n-k+1}x^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{2k}{k}C_{n-k+1}x^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k\sum_{n=k}^{\infty}C_{n-k+1}x^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}x^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k\frac{c(x)-1}{x}.\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k=\frac{1}{\sqrt{1-4x}},$$

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x},$$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n &= \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \frac{1 - \sqrt{1-4x} - 2x}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2x^2\sqrt{1-4x}} - \frac{1}{x\sqrt{1-4x}} - \frac{1}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n - \frac{1}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{n-1} - \frac{1}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{n-2} - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{n-1} - \frac{1}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\binom{2n+3}{n+2} - \binom{2n+2}{n+1}] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n+2}{n} x^n
\end{aligned}$$

所以

$$b(n) = \binom{2n+2}{n}.$$

又

$$(n+1)C_{n+1} = \binom{2n+2}{n},$$

所以

$$(n+1)C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} C_{n-k+1}.$$

习题 23. 设 n 为正整数, 证明: n 的只有奇数部分可重复的分拆个数, 等于 n 的没有部分重复次数严格超过 3 次的分拆个数.

证明: 记 $A(n)$ 为 n 的只有奇数部分可重复的分拆个数, 则$A(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} A(n)q^n = \frac{(1+q^2)(1+q^4)\cdots}{(1-q)(1-q^3)\cdots}.$$

记 $B(n)$ 为 n 的没有部分重复次数严格超过 3 次的分拆个数, 则$B(n)$ 的生成

函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} B(n)q^n = (1+q+q^2+q^3)(1+q^2+q^4+q^6)(1+q^3+q^6+q^9)\cdots,$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots} &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots}{(1-q)(1-q^2)\cdots} \\ &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A(n)q^n &= (1+q)(1+q^2)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^3)(1+q^6)\cdots \\ &= (1+q+q^2+q^3)(1+q^2+q^4+q^6)(1+q^3+q^6+q^9)\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B(n)q^n.\end{aligned}$$

所以

$$A(n) = B(n),$$

即 n 的只有奇数部分可重复的分拆个数, 等于 n 的没有部分重复次数严格超过 3 次的分拆个数.

§8. 作业题（11月16日）

习题 24. 设 $p(n)$ 表示 n 的整数分拆的个数. 证明：对于任意 $n>1$, n 的所有分拆中部分大于等于 2 的分拆个数为 $p(n)-p(n-1)$.

证明: (生成函数的方法) 设 $t(n)$ 为 n 的部分大于等于 2 的分拆个数, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} t(n)q^n &= \frac{1}{(q^2;q)_\infty} \\ &= \frac{1-q}{(1-q)(q^2;q)_\infty} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty} - \frac{q}{(q;q)_\infty}.\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty},$$

$$\sum_{n\geq 1} p(n-1)q^n = \frac{q}{(q;q)_\infty}.$$

所以

$$\sum_{n\geq 0} t(n)q^n = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n - \sum_{n\geq 1} p(n-1)q^n.$$

即当 $n\geq 1$ 时, 比较 q^n 两边系数可得：

$$t(n) = p(n) - p(n-1).$$

(构造双射的方法) 设 S 为正整数 n 的所有分拆组成的集合, 故 $|S| = p(n)$, S 中分拆可分为两类: 第一类是各部分均为大于 1 的分拆, 第二类为分拆中至少有一个部分等于 1.

将至少有一个部分等于 1 的分拆去掉一个 1 的部分, 则变为一个正整数 $n-1$ 的分拆. 同样, 将正整数 $n-1$ 的分拆加一个部分 1, 则变为至少有一个部分等于 1 的正整数 n 分拆. 因此至少有一个部分等于 1 的分拆与正整数 $n-1$ 的所有分拆构成一一映射, 所以至少有一个部分等于 1 的分拆个数有 $p(n-1)$ 个.

所以 n 的各部分都大于等于 2 的分拆的个数等于 $p(n)-p(n-1)$.

习题 25. 证明*: 对于任意 $n\geq 1$, n 的自共轭分拆的个数等于 n 的各部分都是奇数且两两不同的分拆的个数.*

证明: 对于 n 的自共轭分拆, 它的 Ferrers 图是对称的, 设它的 Ferrers 图第一行与第一列都有 n_1+1 个点, 则共有 $2n_1+1$ 个点, 除第一行第一列的点外,

第二行与第二列各有 n_2+1 个点, 共有 $2n_2+1$ 个点, 依此类推, 除前 $k-1$ 行 $k-1$ 列的点外, 第 k 行与第 k 列各有 n_k+1 个点, 共有 $2n_k+1$ 个点, 且$2n_1+1>2n_2+1>\cdots>2n_k+1\geq 1$, 所以 n 可以变为部分均为奇数且两两不同的分拆.

设 n 的部分均为奇数且两两互不相同的分拆 $n=(2n_1+1)+(2n_2+1)+\cdots+(2n_k+1)$, 其中 $n_1>n_2>\cdots>n_k\geq 0$, 由这个分拆可构造 n 的自共轭分拆的 Ferrers 图, 在第一行与第一列各画 n_1+1 个点, 共有 $2n_1+1$ 个点, 再在第二行与第二列各添加 n_2+1 个点, 共有 $2n_2+1$ 个点, 依此类推, 在第 k 行与第 k 列各添加 n_k+1 个点, 共有 $2n_k+1$ 个点, 因为 $n_1>n_2>\cdots>n_k\geq 0$, 所以是 n 的一个分拆的 Ferrers 图, 且是对称的, 以及对应的分拆是自共轭的.

因此, 自共轭分拆与部分均为奇数且两两互不相同的分拆形成双射, 所以 n 的自共轭分拆的个数等于 n 的各部分都是奇数且两两互不相同的分拆个数.

习题 26. 利用归纳法证明：当 M,N 是正整数, 且 $M\leq N$. *Gauss* 多项式 $\begin{bmatrix}N\\M\end{bmatrix}$ 是关于 q 的次数为 $M(N-M)$ 的对称整系数多项式, 即

$$\begin{bmatrix}N\\M\end{bmatrix}=a_0+a_1q+\cdots+a_dq^d,$$

其中$d=M(N-M)$, $a_d\neq 0$, a_i 是非负整数且 $a_i=a_{d-i}$.

证明: 先用归纳法证明Gauss 多项式 $\begin{bmatrix}N\\M\end{bmatrix}$ 是关于 q 的次数为 $M(N-M)$ 的整系数多项式. 对N进行归纳. 当$N=1$时, $M=0$和1时,

$$\begin{bmatrix}N\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N\\1\end{bmatrix}=1,$$

成立.

假设该命题对$N-1$成立, 也就是当$0\leq M\leq N-1$, Gauss 多项式 $\begin{bmatrix}N-1\\M\end{bmatrix}$ 是关于 q 的次数为 $M(N-M-1)$ 的整系数多项式, 即

$$\begin{bmatrix}N-1\\M\end{bmatrix}=a_0(M,N-M-1)+a_1(M,N-M-1)q+\cdots+a_d(M,N-M-1)q^{d(M,N-M-1)},$$

其中$d(M,N-M-1)=M(N-M-1)$, $a_d(M,N-M-1)\neq 0$, $a_i(M,N-M-1)$ 是非负整数.

现在证明该命题对N成立, 也就是当$0 \le M \le N$,

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = a_0(M, N-M) + a_1(M, N-M)q + \cdots + a_d(M, N-M)q^{d(M,N-M)},$$

其中$d(M, N-M) = M(N-M)$, $a_d(M, N-M) \neq 0$, $a_i(M, N-M)$ 是非负整数. 当$M = N$, 由高斯多项式的代数定义可知

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = 1.$$

显然成立. 当$0 \le M \le N-1$, 由下面递推关系可知

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = q^M \begin{bmatrix} N-1 \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N-1 \\ M-1 \end{bmatrix}.$$

当

$$\begin{aligned} & a_i(M, N-M) \\ & = \begin{cases} a_i(M-1, N-M), & 0 \le i < M, \\ a_{i-M}(M, N-M-1) + a_i(M-1, N-M), & M \le i \le (M-1)(N-M), \\ a_{i-M}(M, N-M-1), & (M-1)(N-M) < i \le M(N-M), \end{cases} \end{aligned}$$

由假设基础可知, $d(M, N-M) = M(N-M)$, $a_d(M, N-M) \neq 0$, $a_i(M, N-M)$ 是非负整数. 所以Gauss 多项式 $\left[\begin{smallmatrix} N \\ M \end{smallmatrix}\right]$ 是度为 $M(N-M)$ 的整系数多项式.

下面证明Gauss 多项式是对称多项式, 即证明

$$q^{M(N-M)} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_{q^{-1}} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}.$$

在Gauss多项式中用q^{-1} 代替 q 可得, $(q^{-1}; q^{-1})_n = (1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots(1-q^{-n})$, 则

$$\begin{aligned} & q^{M(N-M)} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_{q^{-1}} \\ & = q^{M(N-M)} \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots(1-q^{-N})}{(1-q^{-1})\cdots(1-q^{-N+M})(1-q^{-1})\cdots(1-q^{-M})} \\ & = \frac{q^{M(N-M)-\binom{N+1}{2}+\binom{N-M+1}{2}+\binom{M+1}{2}}(q;q)_N}{(q;q)_{N-M}(q;q)_M} \\ & = \frac{(q;q)_N}{(q;q)_{N-M}(q;q)_M}. \end{aligned}$$

因此, Gauss 多项式 $\left[{N \atop M}\right]$ 是对称的.

习题 27. 证明:

$$\begin{bmatrix} n+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix} \tag{1}$$

等式左边表示整数 T 至多划分成 $m+1$ 个部分, 并且每部分至多是 n 的分拆数的生成函数. 整数 T 至多划分成 $m+1$ 个部分, 并且每部分至多是 n 的分拆数由如下方法构成:

(1). 整数 T 至多划分成 m 个部分, 并且每部分至多是 n, 再在第一行添加一部分数为 n, 得到至多划分成 $m+1$ 个部分, 并且每部分至多是 n 的分拆, 个数为 $p(n, m, T)$,

(2). 整数 T 至多划分成 m 个部分, 并且每部分至多是 $n-1$, 再在第一行添加一部分数为 $n-1$, 得到至多划分成 $m+1$ 个部分, 个数为 $p(n-1, m, T)$,

$\cdots\cdots$

(m+1). 整数 T 至多划分成 m 个部分, 并且每部分至多是 0, 再在第一行添加一部分数为 0, 得到至多划分成 $m+1$ 个部分,个数为 $p(0, m, T)$.

因此, Guass 多项式有下面恒等式:

$$\begin{bmatrix} n+m+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} q^j \begin{bmatrix} m+j \\ m \end{bmatrix}.$$