$f \in C^1[0;1]$

Док-ть $\exists\ c = const$, что для $\forall n \in N$

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{c}{n}$$

Док-во:

Мы можем рассмотреть посл-ть

$$\left\{ a_n = \left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \cdot n \right\}.$$

Нам нужно доказать ограниченность этой последовательности сверху, но для начала немного упростим запись.

Распишем интеграл, как $\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx$

Теперь

$$a_n = n \cdot \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{f(\frac{k}{n})}{n} \right) \right|$$

Т.к. модуль суммы некоторых чисел ~~меньше~~ $\leq$ суммы их модулей, какие бы мы числа не выбрали, тогда достаточно будет ограничить сверху

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{f(\frac{k}{n})}{n} \right|.$$

Распишем интеграл по определению:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{m}\cdot f\left(a+\frac{l}{m}\right)\cdot(b-a)\right)$$

В данном случае мы его раскрываем, выбирая на каждом из равных m промежутков самое правое значение, как высоту прямоугольника. Значит наше выражение преобразуется в такое:

$$n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{mn}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}+\frac{l}{mn}\right)\right)-\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}\right| =$$

$$= n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{f\left(\frac{k-1}{n}+\frac{l}{mn}\right)}{mn}-\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{mn}\right)\right)\right|$$

$f\in C^1[0;1] \Rightarrow \exists M = const$, что

$$|f'(x)| < M$$

Значит, для

$$\forall a, b:\ 0\le a<b\le 1$$

$$|f(b)-f(a)| < M\cdot(b-a)$$ по т. о среднем

Значит наше выражение можно вновь огра-ничить сверху, получаем, что

$$a_n < n \cdot \sum_{k=1}^{n} \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \left| \frac{\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n} + \frac{l}{mn}}{mn}^{L^{\frac{1}{n}}} \cdot M \right| \right) <$$

$$< n \cdot \sum_{k=1}^{n} \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{l=1}^{m} M \cdot \frac{\left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right|}{mn} \right) =$$

$$= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \lim_{m \to \infty} \left(M \cdot \frac{2}{n^2} \right) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2M}{n^2} \right) =$$

$$= 2M$$

Если возьмём $c = 2M$, то наше условие удачно выполняется.