Билет № 12 Чепурин

Постановка выборочной стат. модели

Дано вероятностное пространство (Ω, P)

Случайная величина $\xi \in \Omega$ находится n раз в каждом независимом ~~опыте~~ измерении.

Образуется выборочная стат. модель

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in \Omega$ - является сл. величиной ξ из i-го ~~эл~~ измерения.

Кол-во элементов в выборке наз-ся объёмом выборки. n - объём выборки.

При $n \to \infty$ доля каждого значения в выборке стремится к значению своей вер-сти.

$k(x)$ - кол-во x_i $(i = 1..n)$, равных x, в выборке, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k(x)}{n} = P(x), \forall x \in \Omega$$

Точечная оценка параметра и хар-ки.

Точечная оценка хар. генеральной совокупности хар-ся одним числом, отражающим некоторое св-во выборки,

например, мат ожидание или дисперсия.

$M(x)$ $E(X)$ хар-ся $\overline{X}$, т.к. для всего множества значений вероятность обнаружения каждого из них равна $\frac{k(x)}{n}$, соответственно $EX = \sum_{x \in \{x_n\}} \frac{k(x)}{n} \cdot x =$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

$$D(x) = E(x - Ex)^2 = E(x - \overline{x})^2 = \sum_{x \in \{x_n\}} \frac{k(x) \cdot (x - \overline{x})^2}{n} \cdot x$$

$= \frac{\sum_{i=0}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$, но тогда оценка дисперсии смещена, поэтому $D(x)$ берут как $\frac{\sum_{i=0}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Оценка даётся с учётом самого вероятного значения для самой вероятностной модели.

Функции потерь и функции риска.

Функция потерь является мерой расхождения м/у ист. значением оцениваемого параметра и оценкой параметра на основе выборки.

Например, для мат ожидания это будет $|EX - \bar{x}|$

где EX хар-ет мат. ожидание сл. величин на основе известного вер-пр-ва, а $\bar{X}$ это всего лишь оценка на основе выборки.

Соответственно, по выборке можно определить риск, оценив вероятность потери, как мат ожидание ф-ции потерь для каждого значения

$$\cancel{C(E_x) = |Ex - \bar{x}|} \qquad C(E,x) = |Ex - \bar{x}|$$

$$\cancel{R(E_x) = E(C} \qquad \cancel{R(E,x) = E(C(E,x) \cdot P}$$

$$R(E,x) = E(C(E,x) \cdot P(C(E,x) = |Ex - \bar{x}|))$$

Состоятельность оценки хар-ки, достаточное условие для состоятельности оценки

$\exists \{X_1, \dots X_n\}$ - выборка для распред., зависящего от параметра $\theta \in \Theta$

тогда оценка наз-ся состоятельной, если

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$$

$\hat{\theta} \to \theta$, $\forall \theta \in \Theta$ по вер-сти при $n \to \infty$.

Сходимость по вер-сти обозначает, что

$$\frac{K(x)}{X} \xrightarrow[n \to \infty]{} P(x), \ \forall x \in \Omega$$

Достаточное условие:

Если при $n \to \infty$

$E(\hat{\theta}(X_1, \dots X_n)) \to \theta$ и $D(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) \to 0$

то оценка $\hat{\theta}$ состоятельна.