1. Рекуррентные соотношения:

a.

$A[n] = A[n-1] + 1$

$A[1] = 3$

$A[n] – A[n-1] = 1$

$A[n-1] – A[n-2] = 1$

…

$A[2] – A[1] = 1$

Значит, просуммировав все эти выражения, мы получим:

$A[n] – A[1] = n-1 \Rightarrow A[n] = A[1] + n-1 = 3 + n-1 = n+2$

$A[1] = 1+2 = 3$ – верно.

$A[n] = (n-1)+2+1 = n+2$. Верно!

b.

$A[n] = A[n-1] + n$

$A[0] = 2$

$A[n] – A[n-1] = n$

$A[n-1] – A[n-2] = n-1$

…

$A[2] – A[1] = 2$

$A[1] – A[0] = 1$

Значит, просуммировав все эти выражения, мы получим:

$A[n] – A[0] = 1 + 2 + 3 + … + n = n*(n+1)/2$

$A[n] = n*(n+1)/2 + 2$

$A[0] = 0*1/2 + 2 = 2$ – верно.

$A[n] = (n-1)*n/2 + 2 + n = (n+1)*n/2 + 2$. Верно!

c.

$A[n] = 2*A[n-1] + 2$

$A[0] = 1$

$A[n] – 2*A[n-1] = 2$

$2*A[n-1] – 4*A[n-2] = 4$

…

$2^{(n-2)}*A[2] – 2^{(n-1)}*A[1] = 2^{(n-1)}$

$2^{(n-1)}*A[1] – 2^n*A[0] = 2^n$

Значит, просуммировав все эти выражения, мы получим:

$A[n] – 2^n * A[0] = 2 + 4 + 8 + … + 2^n = 2^{(n+1)} – 2 \Rightarrow A[n] = 2^n + 2^{(n+1)}-2 = 3*2^n - 2$

$A[0] = 3*2^1-2 = 3-2 = 1$ – верно.

$A[n] = 2*A[n-1] + 2 = 2 * (3 * 2^{(n-1)}-2) + 2 = 3 * 2^n – 2$. Верно!

d.

A[n] = 4*A[n-1] + 5*A[n-2]

A[0] = 1

A[1] = 17

Будем искать производящую функцию G(z) = A[0] + z*A[1] + z^2*A[2] + …

Для этого умножим каждый из A[k] на z^k

A[0] = 1*1

A[1] = 17*z

…

A[k] = 4*A[k-1]*z^k + 5*A[k-2]*z^k

Теперь сложим все уравнения:

$$A[0] + A[1]*z + \sum_{i=2}^{\infty}(z^\wedge i)*A[i] = 1 + 17z + \sum_{i=2}^{\infty}(z^\wedge i)*4A[i-1] + \sum_{i=2}^{\infty}(z^\wedge i)*5A[i-2]$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(z^\wedge i)*A[i] = 1 + 17z + \sum_{i=2}^{\infty}(z^\wedge i)*4A[i-1] + \sum_{i=2}^{\infty}(z^\wedge i)*5A[i-2]$$

$$G(z) = 1 + 17z + 4z*\sum_{i=2}^{\infty}\left(z^{(i-1)}\right)*A[i-1] + 5z^2*\sum_{i=2}^{\infty}\left(z^{(i-2)}\right)*A[i-2]$$

$$G(z) = 1 + 17z + 4z * \left(\sum_{i=1}^{\infty}((z^\wedge i)*A[i]) + A[0] - A[0]\right) + 5z^\wedge 2*\sum_{i=2}^{\infty}\left(z^{(i-2)}*A[i-2]\right)$$

$$G(z) = 1 + 13z + 4z*\sum_{i=0}^{\infty}((z^\wedge i)*A[i]) + 5z^\wedge 2*\sum_{i=0}^{\infty}\left(z^i*A[i]\right)$$

$$G(z) = 1 + 13z + 4z*G(z) + 5z^\wedge 2 * G(z)$$

$$G(z) = \frac{13z+1}{1-4z-5z^2} = \frac{13z+1}{(1-5z)(1+z)} = \frac{3}{1-5z} - \frac{2}{1+z}$$

$$\frac{3}{1-5z} = 3*\frac{1}{1-5z} = 3*\sum_{i=0}^{\infty}(5z)^i$$

$$\frac{2}{1+z} = 2*\frac{1}{1+z} = 2*\sum_{i=0}^{\infty}(-z)^i$$

Значит $G(z) = 3*\sum_{i=0}^{\infty}(5z)^i - 2*\sum_{i=0}^{\infty}(-z)^i = \sum_{i=0}^{\infty}z^i*(3*5^i - 2*(-1)^i)$

Также $G(z) = \sum_{i=0}^{\infty}z^i * A[i]$

Значит A[n] = $3*5^n - 2*(-1)^n$

A[0] = 3 – 2 = 1 – верно.

A[1] = 3*5 – 2*(-1) = 15+2 = 17 – верно.

A[n] = 4*A[n-1] + 5*A[n-2] = 12*5^(n-1) - 8*(-1)^(n-1) + 15*5^(n-2) – 10*(-1)^(n-2) =

= (5^(n-2))*(60+15) + ((-1)^(n-2))*(8–10) = 5^2 * 5^(n-2) * 3 + (-1)^2 * (-1)^(n-2) * (-2) =

= 3*5^n – 2*(-1)^n. Верно!

e.
A[n] = 6*A[n-1] - 9*A[n-2]
A[0] = 2
A[1] = 3

Будем искать производящую функцию G(z) = A[0] + z*A[1] + z^2*A[2] + …
Для этого умножим каждый из A[k] на z^k
A[0] = 2*1
A[1] = 3*z
…
A[k] = 6*A[k-1]*z^k - 9*A[k-2]*z^k

Теперь сложим все уравнения:

$$A[0] + A[1]*z + \sum_{i=2}^{\infty}(z\hat{}i)*A[i] = 2 + 3z + \sum_{i=2}^{\infty}(z\hat{}i)*6A[i-1] - \sum_{i=2}^{\infty}(z\hat{}i)*9A[i-2]$$

$$G(z) = 2+3z+6z*\sum_{i=2}^{\infty}\left(z^{(i-1)}\right)*A[i-1] - 9z^2*\sum_{i=2}^{\infty}\left(z^{(i-2)}\right)*A[i-2]$$

$$G(z) = 2 + 3z + 6z*\left(\sum_{i=1}^{\infty}((z\hat{}i)*A[i]) + A[0] - A[0]\right) - 9z\hat{}2*\sum_{i=2}^{\infty}\left(z^{(i-2)}*A[i-2]\right)$$

$$G(z) = 2 - 9z + 6z*\sum_{i=0}^{\infty}((z\hat{}i)*A[i]) - 9z\hat{}2*\sum_{i=0}^{\infty}\left(z^{i}*A[i]\right)$$

$$G(z) = 2 - 9z + 6z*G(z) - 9z\hat{}2 * G(z)$$

$$G(z) = \frac{2-9z}{1-6z+9z^2} = \frac{2-9z}{(1-3z)^2} = \frac{3}{1-3z} - \frac{1}{(1-3z)^2}$$

$$\frac{3}{1-5z} = 3*\frac{1}{1-3z} = 3*\sum_{i=0}^{\infty}(3z)^i$$

$$\frac{1}{(1-3z)^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)*(3z)^i$$

Значит $G(z) = 3*\sum_{i=0}^{\infty}(3z)^i - \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(3z)^i = \sum_{i=0}^{\infty}(2-i)(3z)^i = \sum_{i=0}^{\infty}z^i*((2-i)*3^i)$

Также $G(z) = \sum_{i=0}^{\infty}z^i * A[i]$

Значит A[n] = $(2-n)*3^n$

A[0] = 2*1 = 2 – верно.
A[1] = 1*3 = 3 – верно.
A[n] = 6*A[n-1] – 9*A[n-2] = (12-6n) * 3^(n-1) – (18-9n) * 3^(n-2) = (4-2n)*3^n – (2-n)*3^n =
= (2-n)*3^n. Верно!

f.

$A[n] = 2*A[n-1] + A[n-2] - 2*A[n-3]$

$A[0] = 3$

$A[1] = 2$

$A[2] = 6$

Получим характеристическое уравнение, путём подставления r^k вместо $A[k]$ в уравнении рекурсивного перехода:

$r^n = 2*r^{(n-1)} + r^{(n-2)} - 2*r^{(n-3)}$

$r^{(n-3)} * (r^3 - 2r^2 - r + 2) = 0$

$r^{(n-3)} * (r^2*(r-2) - (r-2)) = 0$

$r^{(n-3)} * (r^2 - 1) * (r-2) = 0$

$r^{(n-3)} * (r+1)*(r-1) *(r-2)) = 0$

Нас интересуют ненулевые корни этого уравнения, то есть

$r = -1$

$r = 1$

$r = 2$

Значит $A[n] = a*(-1)^n + b*1^n + c*2^n$

Найдём a, b и c:

$A[0] = a + b + c = 3$

$A[1] = -a + b + 2c = 2$

$A[2] = a + b + 4c = 6$

Значит a = 1, b = 1, c = 1. То есть $A[n] = (-1)^n + 2^n + 1$

Проверка:

$A[0] = 1 + 1 + 1 = 3$ – верно.

$A[1] = -1 + 1 + 2 = 2$ – верно.

$A[2] = 1 + 1 + 4 = 6$ – верно.

$A[n] = 2*A[n-1] + A[n-2] - 2*A[n-3] = 2*(-1)^{(n-1)} + 2*2^{(n-1)} + 2 + (-1)^{(n-2)} + 2^{(n-2)} + 1 -$
$- 2*(-1)^{(n-3)} - 2*2^{(n-3)} - 2 = (-1)^n*(-2+1+2) + 2^n*(1 + ½ - ½) + 2 + 1 - 2 =$
$= (-1)^n + 2^n + 1$. Верно!

В пунктах a, b, c мы решали рекуррентные соотношения, путём нахождения суммы разностей между парами соседних элементов.

В пунктах d и e использовалась производящая функция последовательности, с помощью которой и получилось найти искомое выражение.

В пункте f использовался упрощённый метод предыдущего, при помощи характеристических уравнений.

2. Подсчёты асимптотики в рекурсивных формулах.

a) T(n) = 2T(n/2) + n

   Используем 2a case) мастер-теоремы, т. к.

   c_crit = logb(a) = log2(2) = 1

   c = 1 => c = c_crit

   k = 0 > -1

   Значит итоговая асимптотика будет: θ(n^c * log2(n)^k) = θ(n*log2(n))

b) T(n) = T(3n/4) + T(n/4) + n
   Воспользуемся Akra–Bazzi методом, для этого решим такое уравнение:
   (3/4)^p + (1/4)^p = 1
   Левая часть уравнения – монотонно убывающая функция, соответственно равна константе она может быть максимум при одном аргументе. Этот аргумент p = 1.

$$T(n)\ \epsilon\ \theta(n^p(1+\int_1^n \frac{u\ *\ du}{u^{(p+1)}}))\ =\ \theta(n(1+ln(n)))\ =\ \theta(n\ *\ ln(n))$$

c) T(n) = 3T(n/2) + n
   c_crit = log2(3) > c = 1
   Значит используем 1 case) мастер-теоремы.
   Значит итоговая асимптотика будет: θ(n^c_crit) = θ(n^log2(3))

d) T(n) = 2T(n/2) +n/log2(n)
   Используем 2b case) мастер-теоремы, т. к.
   c_crit = logb(a) = log2(2) = 1
   c = 1 => c = c_crit
   k = -1
   Значит итоговая асимптотика будет: θ(n^c * log2(log2(n))) = θ(n*log2(log2(n)))

e) T(n) = 6T(n/3) + n^2 * log2(n)
   c_crit = log3(6) < c = 2
   Значит используем 3 case) мастер-теоремы.
   Значит итоговая асимптотика будет: θ(f(n)) = θ(n^2 * log2(n))

f) T(n) = T(3n/4) + n*log2(n)

c_crit = log4/3(1) = 0 < c = 1

Значит используем 3 case) мастер-теоремы.

Значит итоговая асимптотика будет: θ(f(n)) = θ(n * log2(n))

g) $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$

(1/2)^p + (1/2)^p = 1

Левая часть уравнения – монотонно убывающая функция, соответственно равна константе она может быть максимум при одном аргументе. Этот аргумент p = 1.

$$T(n) \epsilon\, \theta(n^p(1+\int_1^n \frac{u * du}{u^{(p+1)}})) = \theta(n(1+ln(n))) = \theta(n * ln(n))$$

h) T(n) = T(n/2) + T(n/4) + 1

(1/2)^p + (1/4)^p = 1

Сделаем замену (1/2)^p = t > 0.

t^2 + t – 1 = 0

D = 1 + 4*1 = 5

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Т. к. t > 0, то подходящий корень только

$$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

2^(-p) = $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

p = $-\,log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ => 0 < p < 1 => $\theta(n^{-p}) \in \theta(1) \in \theta(n^p)$

$$T(n) \epsilon\, \theta\left(n^p\left(1+\int_1^n \frac{du}{u^{(p+1)}}\right)\right) = \theta\left(n^p\left(1-\frac{1}{p} * \left(\frac{1}{n^p}-1\right)\right)\right) =$$

$$= \theta\left(n^{-\,log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) * n^{-\,log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}}\right)\right)$$

$$= \theta\left(n^{-\,log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right) + \theta\left(\frac{1}{CONST}\right) = \theta\left(n^{-\,log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right)$$

i) T(n) = T(n/2) + T(n/3) + T(n/6) + n

(1/2)^p + (1/3)^p + (1/6)^p = 1

Левая часть уравнения – монотонно убывающая функция, соответственно равна константе она может быть максимум при одном аргументе. Этот аргумент p = 1.

$$T(n) \epsilon\, \theta(n^p(1+\int_1^n \frac{u * du}{u^{(p+1)}})) = \theta(n(1+ln(n))) = \theta(n * ln(n))$$

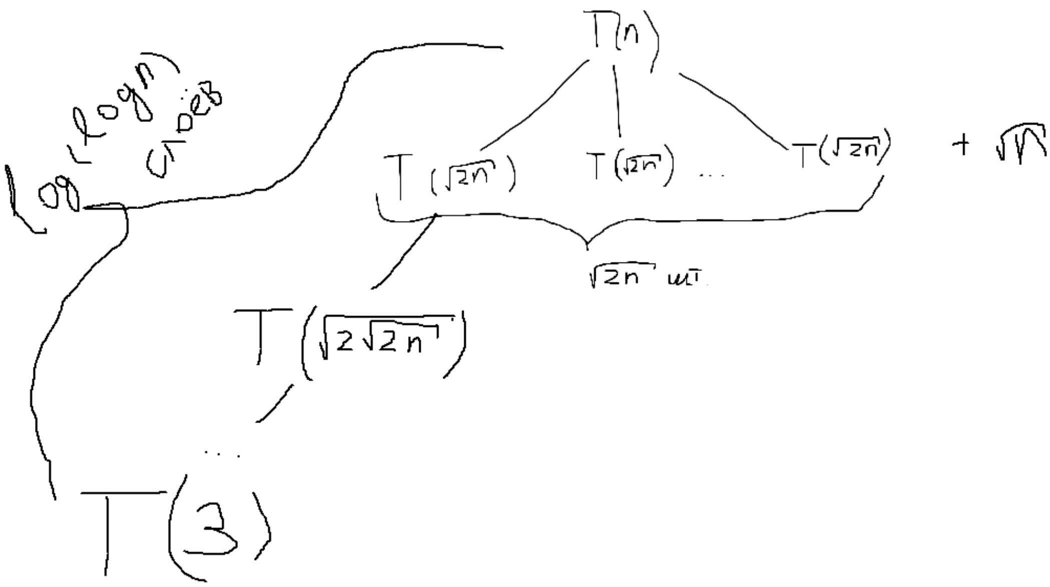
j) T (n) = 2T(n/3) + 2T(2n/3) + n

2*(1/3)^p + 2*(2/3)^p = 1

p ≈ 2.196291818 > 1

$$T(n)\,\epsilon\,\theta\left(n^p\left(1+\int_1^n \frac{du}{u^{(p+1)}}\right)\right)=\theta\left(n^p\left(1-\frac{1}{p}*\left(\frac{1}{n^p}-1\right)\right)\right)=\theta\left(n^p\left(1-\frac{1}{n^p}\right)\right)=$$
$$=\theta(n^{\mathrm{p}})=\theta(n^{2.196291818\ldots})$$

k) $T(n)=\sqrt{2n}T(\sqrt{2n})+\sqrt{n}$



Дерево рекурсии будет таким:

Возможно непонятно, почему такое кол-во слоёв?

Каждый переход из n к sqrt(2n) делает уменьшение степени для n в 2 раза.

Мы должны остановиться на 3, потому что рекурсия должна где-то останавливаться, а меньше 3 уже некуда, т. к. там будет зацикливание.

3 = n ^ logn(3) = n ^ (1/log3(n))

3 – константа, поэтому всё норм.

Соответственно такие деления должны уменьшить степень при n в log3(n) раз, а т. к. с каждым слоем степень уменьшается в 2 раза, то таких слоёв будет log2(log3(n)).

Теперь осталось понять, какая суммарная затрата на возврат функций.

На k-м слое кол-во функций составляет

l) $T(n) = \sqrt{2n}T(\sqrt{2n}) + n$

3.

3.