Примерный перечень вопросов к экзамену по математическому анализу (группы М3101-М3106)

1 семестр

1. Вещественные числа. Аксиомы вещественных чисел. Непрерывность вещественных чисел.

def Рациональные: $q \in Q \Leftrightarrow \exists z \in Z, \exists n \in N : q = z/n$ (несократимая дробь)

def Иррациональные: $i \in I \Leftrightarrow \forall z \in Z, \forall n \in N : i \neq z/n$

(i - непериодическая десятичная дробь!)

def Бесконечная десятичная дробь есть число, представляемое в виде $\pm \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$

Свойства порядка

- $\forall a, b \in R : (a < b)$ xor $(a > b)$ xor $(a = b)$
- $\forall a, b \in R,\ a < b,\ \exists c \in R : a < c < b$
- $\forall a, b, c \in R : (a < b)$ and $(b < c) \Rightarrow (a < c)$ (транзитивность)

Свойства операции сложения и вычитания ($\forall a, b, c \in R$)

- $a + b = b + a$ (коммутативность)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
- $a + 0 = a$ (существует единственный 0 - нейтральный элемент для сложения)
- $a + (-a) = 0$
- $a - b = a + (-b)$
- $a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c)$

Свойства умножения и деления ($\forall a, b, c \in R$)

- $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность)-
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность)
- $\exists 1! : a \cdot 1 = a$ (1 - нейтральный элемент для умножения)
- $a \cdot 0 = 0$
- $-a = (-1) \cdot a$
- $a \cdot (1/a) = 1$ $(a \neq 0)$
- $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность)
- $a < b \Rightarrow \forall c > 0 : (a \cdot c) < (b \cdot c)$

Свойство Архимеда

$\forall a \in R\ \exists n \in N: a < n$

Свойство непрерывности: Пусть заданы два непустых множества $A \subset R$ и $B \subset R$, причем для любых двух чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$. Тогда существует число $\xi \in R$, такое, что для всех чисел $a \in A$ и $b \in B$ справедливо соотношение $a \leq \xi \leq b$

(доказывается леммой о вложенных сегментах)

2. 🙂**Стабилизация последовательности.**

def $\{x_n\}$ - стабилизируется к C $\Leftrightarrow \exists n_0\ \forall n > n_0 : x_n = C$

(обозначается двумя стрелочками к C)

def для целых чисел: последовательность целых чисел a_n стабилизируется к числу a, если начиная с некоторого номера все члены последовательности равны этому числу.

def для вещественных чисел: пусть дана неотрицательная последовательность $a_n = a_{0n}$, $a_{1n}a_{2n}$... Она стабилизируется $a = a_0, a_1a_2$... если a_{0n} стабилизируется к a_0, a_{1n}

стабилизируется к a_1 и т.д. То есть каждый разряд члена последовательности стабилизируется к соответствующему разряду числа, к которому стабилизируется вся последовательность.

N.B.: если последовательность монотонна и ограничена сверху, то она стабилизируется.

3. 🙂**Ограниченные множества. Точная верхняя и точная нижняя грани множества. Теорема о существовании точной верхней грани.** **Доказательство.**

def Числовое множество X называется ограниченным сверху, если существует число M такое, что $x \leq M$ для всякого элемента x из множества X . $\exists M\ \forall x \in X : x \leq M$

def Числовое множество X называется ограниченным снизу, если существует число m такое, что $x \geq m$ для всякого элемента x из множества X . $\exists m\ \forall x \in X : x \geq m$

def Числовое множество X называется ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу. $\exists M, m\ \forall x \in X : m \leq x \leq M$

NB: Пустое множество будем считать ограниченным по определению

Th Числовое множество X ограничено тогда и только тогда, когда существует число C такое, что для всех элементов x из этого множества выполняется неравенство $|x| \leq C$

def *Точная верхняя грань* ($\sup\{x_n\}$) - наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество сверху. sup - “supremum”

def *Точная нижняя грань* ($\inf\{x_n\}$) - наибольшее из всех чисел, ограничивающих множество снизу. inf - “infimum”

Th Непустое мн-во X - ограничено сверху $\Rightarrow\ \exists \sup X$

Доказательство:

- Пусть Y - множество всех чисел, ограничивающих X, тогда
  $\forall x \in X,\ \forall y \in Y : x \leq y$
- В силу непрерывности действительных чисел:
  $\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ \exists \alpha \in R: x \leq \alpha \leq y$
  $\forall x \in X : x \leq \alpha \Rightarrow \alpha$ ограничивает множество X сверху
  $\forall y \in Y : \alpha \leq y \Rightarrow \alpha$ - наименьшее из всех чисел, ограничивающих X

Значит, по определению, $\alpha = \sup X$. Теорема доказана.

4. **Числовая последовательность. Предел. Необходимое условие сходимости. Утверждение об ограниченности сходящейся последовательности.**

def $\{x_n\}$ называется *числовой последовательностью*, если каждому натуральному числу n ставится во взаимно однозначное соответствие (биекцию) согласно определенному правилу число x_n.

def (*предел*) $x_n \to a \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$

Словами: Число a - предел последовательности, если ее значения отличаются от a сколь угодно мало, начиная с некоторого индекса

def $\{x_n\}$ - *сходящаяся* $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ имеет конечный предел.

Необходимое условие сходимости: $\{x_n\}$ должна быть ограниченной!

Необходимое и достаточное условие сходимости: $\{x_n\}$ должна быть монотонной и ограниченной

Доказательство:

- Имеем: $a_{n+1} > a_n$, так как $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists \sup\{a_n\} = a$, что значит:
  $\forall n$: $a_n \leq a$, также $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : a_n > a - \varepsilon$
- $a > a_n > a - \varepsilon$
  $a - \varepsilon < a_n < a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \to a$
  Теорема доказана!

- + критерий

  Расстояние между двумя элементами последовательности, после какого-то элемента, меньше эпсилон

<u>Утверждение:</u>

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена

<u>Доказательство:</u>

Так как $\{x_n\} \to a$, то $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $|x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| - |a| < |x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1 \Rightarrow \exists M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |a| + 1) \Rightarrow x_n$ - ограничена

Доказано!

5. Теорема о сохранении знака сходящейся последовательности. Предельный переход в неравенствах (доказательство). Теорема о трех последовательностях.

<u>Th</u>(*Сохранение знака*) $\{a_n\} \to a,\ a > 0\ (a < 0) \Rightarrow \exists n_0\ \forall n > n_0 : a_n > 0\ (a_n < 0)$

Доказательство:

- Возьмем $\varepsilon = a/2 > 0$, тогда по определению предела:

  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < a/2$

  $0 < a - a/2 < a_n < a + a/2 \Rightarrow a_n > 0$. Теорема доказана.

<u>Th</u>(*Предельный переход*) $\{a_n\} \to a,\ \{b_n\} \to b,\ \exists N\ \forall n > N : a_n < b_n \Rightarrow a <= b$

Пример для a=b:

$\{a_n\} = 1/n$

$\{b_n\} = -1/n$

Доказательство:

- Предположим обратное: $a > b$
- По определению предела: $\forall \varepsilon > 0$

  $\exists N_1(\varepsilon)\ \forall n_1 > N_1 : |a_{n1} - a| < \varepsilon$

  $\exists N_2(\varepsilon)\ \forall n_2 > N_2 : |b_{n2} - b| < \varepsilon,\ n = \max(n_1, n_2)$.

  Возьмём $\varepsilon = (a - b)/2$.
- $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - (a - b)/2 < a_n < a + (a - b)/2 \Rightarrow (a + b)/2 < a_n < (3a - b)/2$
- $-\varepsilon < b_n - b < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \Rightarrow b - (a - b)/2 < b_n < b + (a - b)/2 \Rightarrow (3b - a)/2 < b_n < (a + b)/2$
- Итак, $a_n > (a + b)/2 > b_n \Rightarrow a_n > b_n$, что противоречит условию $(a_n < b_n) \Rightarrow$ Наше предположение неверно $\Rightarrow a <= b$. Теорема доказана.

<u>Th</u>(*О трех последовательностях*) x_n □ y_n □ z_n, $\{x_n\} \to a \neq \infty,\ \{z_n\} \to a \Rightarrow \{y_n\} \to a$

Доказательство:

- По определению предела: $\forall \varepsilon > 0$

  $\exists N_x(\varepsilon)\ \forall n > N_x : |x_n - a| < \varepsilon$

  $\exists N_z(\varepsilon)\ \forall n > N_z : |z_n - a| < \varepsilon$

  Из условия: $\exists n_0\ \forall n > n_0 : x_n$ □ y_n □ z_n
- Возьмем $N = \max(N_x, N_z, n_0)$, тогда для $\forall n > N$ имеем:

  $|x_n - a| < \varepsilon$ (1)

  $|z_n - a| < \varepsilon$ (2)

  x_n □ y_n □ z_n (3)
- Поиграем с неравенствами:

  (1) $\Rightarrow a - \varepsilon < x_n$

  (2) $\Rightarrow z_n < a + \varepsilon$

  Учитывая (3): $a - \varepsilon < x_n$ □ y_n □ $z_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$

  То есть $\{y_n\} \to a$. Теорема доказана.

6. Теорема об арифметических действиях с пределами последовательностей.

Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то справедливо следующее

Доказательства по Фихтенгольцу:

Данные доказательства опираются на второе определение предела последовательности по Фихтенгольцу: *постоянное число* a *есть предел* x_n*, если разность между ними есть бесконечно малая величина.*

Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, тогда x_n и y_n можно представить как $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n - бесконечно малые.

$\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$

- $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$
- α_n и β_n - б.м. => $(\alpha_n \pm \beta_n)$ - б.м. => $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$.
  Доказано

$\lim (x_n ` y_n) = ab$

- $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n\beta_n)$
- $(a\beta_n + \alpha_n b + \alpha_n\beta_n)$ - б.м. => $\lim (x_n ` y_n) = ab$.
  Доказано.

$\lim (x_n / y_n) = a / b$

- $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}$
- α_n и β_n - б.м. => $\dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}$ - б.м. => $\lim (x_n / y_n) = a / b$

  Доказано.

7. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Теорема о сумме бесконечно малых. Теорема о произведении ограниченной и бесконечно малой величины

def α - *бесконечно малая* ⇔ $\forall \varepsilon > 0 : \alpha < \varepsilon$

def β - *бесконечно большая* ⇔ $\forall \varepsilon > 0 : \beta > \varepsilon$

Справедливо следующее утверждение:

Если x - б.м., то 1/x - б.б

Th 1 Алгебраическая сумма беск. мал. величин есть беск. мал. величина

Доказательство:

Пусть $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ (сумма бесконечно малых) n - конечное число

$\forall \varepsilon > 0$ $|x_1| < \varepsilon/n$, $|x_2| < \varepsilon/n$, $\ldots$, $|x_n| < \varepsilon/n$

$T = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| < n * \varepsilon/n = \varepsilon$

$S \le T < \varepsilon \Rightarrow S \to 0$ Доказано.

NB Когда речь идет о беск. мал. величине, то ее знак нам не важен

Th 2 Произведение беск. мал. величины и ограниченной величины есть беск. мал. величина

Доказательство:

x - б.м.

y - огранич. ⇒ $\exists M > 0$ $|y| < M$

$\forall \varepsilon > 0$ $|x| < \varepsilon/M$

$|x*y| = |x| * |y| < \varepsilon/M * M = \varepsilon$

$x * y <= |x*y| < \varepsilon \Rightarrow x * y \to 0$ Доказано

Следствие 1 Если беск. мал. величину умножить на число, то получится беск. мал. величина

Следствие 2 Произведение двух беск. мал. величин есть беск. мал. величина

Следствие 3 Произведение конечного числа беск. мал. величин есть беск. мал. величина (обобщение предыдущего следствия)

Следствие 4 Любая целая положительная степень беск. мал. величины есть беск. мал. величина

Сравнение бесконечно малых величин:

Пусть $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$. Обозначим за A следующее: $\frac{\alpha}{\beta} \to A$. Если:

A = 1, то $\alpha \sim \beta$ (являются эквивалентными бесконечно малыми)

$A \neq 0$, $A \neq \infty$, то α и β одного порядка малости

$\alpha/(\beta^k) \to A \neq 0$, $A \neq \infty$, то α порядка малости k относительно β

A = 0, то α является бесконечно малой более высокого порядка чем β

A = ∞, то α является бесконечно малой более низкого порядка чем β

8. Теорема о существовании *предела* монотонно возрастающей последовательности.

Th $\{a_n\}$ монотонно возрастает и $\{a_n\}$ - ограничена сверху $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}(a_n) = \sup\{a_n\}$

Доказательство:

- Имеем: $a_{n+1} > a_n$, так как $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists \sup\{a_n\} = a$, что значит: $\forall n$: a_n □ a, также $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ $\forall n > N : a_n > a - \varepsilon$
- $a > a_n > a - \varepsilon$

  $a - \varepsilon < a_n < a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \to a$

  Теорема доказана!

9. Предел функции. Три определения (эквивалентность). Единственность предела.

9.1. $\lim_{x\to x0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon): \forall x \in E: 0<|x - x_0|<\delta \Rightarrow |f(x) - A|<\varepsilon$ - Коши

9.2. $\lim_{x\to x0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$ (Тоже определение по Коши)

9.3. $\lim_{x\to x0}(f(x)) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, $x_n \neq x_0$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A (Определение по Гейне)

9.4. Эквивалентность

Пусть число A является пределом функции f(x) в точке x_0, выберем произвольную последовательность xn, $n \in \mathbb{N}$, такую что $\lim xn = x_0$ $(n \to \infty)$

Покажем что A является пределом по Гейне:

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, и $\delta > 0$, $= \delta(\varepsilon)$, такое что $\forall x\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. В силу того, что $\lim xn = x_0$ $(n \to \infty)$ для $\delta > 0$ найдется такое $n^\delta \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq n^\delta$ будет выполняться

$|f(x) = A| < \varepsilon \Rightarrow \lim f(xn) = A\ (n \to \infty)$

Теперь предположим что $\lim f(x) = A\ (x \to x_0)$ по Гейне, и покажем что число A является пределом f(x) в точке x_0 по Коши.

Докажем от обратного: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), 0 < |x^{\delta} - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x\delta) - A| \geq \varepsilon$

В качестве δ возьмём $1/n$, а значения $x^{\delta} = x_n$.

Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$, выполняется что $|x_n - x_0| < 1/n$ и $|f(x) - A| \geq \varepsilon$, отсюда следует что A не является пределом функции в точке x_0, получили противоречие.

10. Односторонние пределы. Критерий существования предела. Критерий Коши.

def Под односторонним пределом числовой функции подразумевают «приближение» к предельной точке с одной стороны. Такие пределы называют соответственно левосторонним пределом и правосторонним пределом.

Критерий Коши существования предела: Для того, чтобы функция f(x), определенная на некоторой проколотой окрестности конечной или бесконечно удаленной точки x_0, имела в этой точке конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x', x'' \in \mathring{U}(x_0, \delta_\varepsilon) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Условие коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x', x'' \in \mathring{U}(x_0, \delta_\varepsilon) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Доказательство и более подробное объяснение тут:

[Критерий Коши существования предела функции (доказательство)]

11. Первый замечательный предел (тригонометрический предел).

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

Как первый, так и второй замечательные пределы прекрасно доказаны на [wikipedia]

12. Второй замечательный предел (число e).

$$\lim_{x\to 0}(1 + \tfrac{1}{x})^x = e$$

Как первый, так и второй замечательные пределы прекрасно доказаны на [wikipedia]

Также, вывод числа *e* есть в гугл диске Возиановой для вашей группы, в материалах для студентов

13. Непрерывность функции. Арифметические операции. Примеры.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* ***н е п р е р ы в н о й*** *в точке a, если предельное значение этой функции в точке a существует и равно частному значению $f(a)$.*

Таким образом, условие непрерывности функции $f(x)$ в точке a символически можно выразить следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Так как $a = \lim\limits_{x \to a} x$, то предыдущему равенству можно придать следующую форму:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right).$$

Определение 1*. *Функция $f(x)$ называется* ***н е п р е р ы в н о й*** *в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значений аргумента x соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ значений этой функции сходится к числу $f(a)$.*

2. Арифметические операции над непрерывными функциями. Убедимся, что арифметические операции над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям.

Докажем следующую *основную* теорему.

Теорема 4.2. *Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке a (частное при условии $g(a) \neq 0$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как непрерывные в точке a функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке предельные значения $f(a)$ и $g(a)$, то в силу теоремы 4.1 предельные значения функций $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ существуют и равны соответственно $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a) \cdot g(a)$, $\dfrac{f(a)}{g(a)}$. Но эти величины как раз и равны частным значениям перечисленных функций в точке a. Теорема доказана.

Учебник: Ильин, Позняк

14. **Односторонняя непрерывность. Критерий непрерывности монотонной функции. Точки разрыва.**

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется* ***н е п р е р ы в н о й с п р а в а (с л е в а)*** *в точке a, если правое (левое) предельное значение этой функции в точке a существует и равно частному значению $f(a)$.*

Символические обозначения непрерывности справа (слева):

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{или} \quad f(a+0) = f(a)$$

$$\Big(\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{или} \quad f(a-0) = f(a)\Big).$$

Учебник: Ильин, Позняк

Теорема. Для того, чтобы монотонная функция f(x) определенная на [a,b] была непрерывна на [a,b] необходимо и достаточно, чтобы множество значений f(x) заполняло целиком отрезок с концами f(a), f(b) (либо [f(a), f(b)] либо [f(b), f(a)]).

Точки разрыва функции, еще простым языком о точках разрыва написано в учебнике (Ильин, Позняк) на странице 143.

15. Свойства непрерывных функций на сегменте.
Свойства непрерывных на отрезке функций

16. Теорема Больцано-Вейерштрасса о достижении супремума и инфимума

Больцано тут не причем, речь о второй теореме Вейерштрасса

Если функция f(x) определена и непрерывна в замкнутом промежутке [a, b], то она достигает в этом промежутке своих точных верхней и нижней границы.

Док-во:

Пусть M = sup{ f(x)}, по первой теореме Вейерштрасса *(если функция f(x) определена и непрерывна в замкнутом промежутке [a, b], то она ограничена и снизу, и сверху, т.е. существуют такие постоянные и конечные числа m и M, что* $m \le f(x) \le M$ при $a \le x \le b$*)* *это число-конечное. Предположим (вопреки тому, что нужно доказать), что f(x) < M, т.е. граница M не достигается. В таком случае, можно рассмотреть вспомогательную функцию* $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$.

Так как, по предположению, знаменатель в нуль не обращается, то эта функция будет непрерывна, а следовательно (по первой теореме Вейерштрасса), ограничена, следовательно $\exists \mu$*:* $\varphi(x) \le \mu$ -> $\frac{1}{M - f(x)} \le \mu$ -> $f(x) \le M - \frac{1}{\mu}$*,*

то есть число $M - \frac{1}{\mu}$*, меньшее чем M, оказывается верхней границей для значения функции f(x), чего быть не может, ибо M есть точная верхняя граница этих значений. Полученное* противоречие доказывает теорему.

17. Теорема о непрерывности обратной функции (доказательство)
Метка: непрерывность обратной функции

18. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора (доказательство)

19. Определение производной. Непрерывность функции, имеющей производную.
Определение.
Если область определения функции f(x) содержит в своей области определения некоторый открытый интервал вокруг точки x_0, тогда функция f(x) является дифференцируемой в точке x_0 и её производная определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

Доказательство. Пусть аргумент x получает в точке x_0 приращение Δx, не равное нулю. Ему соответствует некоторое приращение функции Δy. Рассмотрим очевидное тождество $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$. Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

откуда и следует, согласно п. 2, непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

(пояснение про непрерывность)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δy_0 в этой точке стремилось к 0 вместе с приращением Δx_0 независимой переменной. Иными словами: *непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции.*

20. Таблица производных. Правила дифференцирования. Формула Лейбница-Бернулли.

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

5. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x \in R$

6. $(e^x)' = e^x$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9. $(\sin x)' = \cos x$

10. $(\cos x)' = -\sin x$

11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

16. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

$(u+v)' = u' + v'$

$(cu)' = cu',\ c = const$

$(u-v)' = u' - v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{u^2}$

$(f(u(x)))'_x = f'_u(u(x)) \cdot u'(x)$

е

Формула Лейбница-Бернулли

y = U^ɣ, U(x), ɣ(x)

*ln y = ln U^ɣ = ɣ * ln U*

*1/y * y`(x) = ɣ` * ln U + ɣ * (1/U) * U`(x)*

*y`(x) = y * (ɣ` * ln U + ɣ * (1/U) * U`(x))*

y`(x) = U^ɣ * (ɣ` * ln U + ɣ * (1/U) * U`(x))

21. Дифференциал. Дифференцируемость функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

$f(x)$ называется дифференцируемой, если $\exists A = const : \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \overline{o}(\Delta x)$ (1)

Член $A\Delta x$ называется дифференциалом.

Теорема:

Для того, чтобы функция y = f(x) в точке x0 была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для неё в этой точке существовала конечная производная y' = f'(x0) и параметр $A\Delta x$ в равенстве (1) будет равен именно ей: $\Delta y = f'(x0)\Delta x + \overline{o}(\Delta x)$

Доказательство:

1) Необходимость:

Необходимость. Если выполняется (1), то отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

так что, устремляя Δx к нулю, действительно получаем

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x.$$

2) Достаточность:

$\exists f'(x) \Rightarrow \Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + \overline{o}(\Delta x) \Rightarrow A = f'(x_0)$

(5) dF(x0) = F`(x0) * dx

106. Инвариантность формы дифференциала. Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному замечательному и важному свойству дифференциала.

Пусть функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y=f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t, то – по правилу V [98] – существует и производная

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t. \tag{7}$$

Дифференциал dy, если x считать независимой переменной, выразится по формуле (5). Перейдем теперь к независимой переменной t; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy=y'_t\cdot dt.$$

Заменяя, однако, производную y'_t ее выражением (7) и замечая, что $x'_t\cdot dt$ есть дифференциал x как функции от t, окончательно получим:

$$dy=y'_x\cdot x'_t\,dt=y'_x\cdot dx,$$

т. е. вернемся к прежней форме дифференциала!

Таким образом, мы видим, что *форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.* Мы всегда имеем право писать дифференциал y в форме (5), будет ли x независимой переменной или нет; разница лишь в том, что, если за независимую переменную выбрано t, то dx означает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t. Это свойство и называют инвариантностью формы дифференциала.

22. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.

Неявно:

Берём производную от обеих частей уравнения

Не забываем, зависимые переменные - функции, производная от функций с их участием - производная сложной функции

Параметрически:

допустим есть две функции заданные параметрически

$x = f(t)$

$y = g(t)$

для подстановки х в у нам надо выразить t через х, для этого нужна обратная функция $f^{-1} = t(x)$ (производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции)

получаем

$y = g(t(x))$

$y`_x = g`_t * t`_x = y`_t / x`_t$

$df(x_0) = dF(x_0)$

$\boxed{22}$ Билет

Рассмотрим пример.

$3x^2y^2 - 5x + \sin y = 3y - 1$

$(3x^2y^2 - 5x + \sin y)' = (3y-1)'$

$3(x^2y^2)' - 5(x)' + (\sin y)' = 3(y)' - (1)'$

$(y)' = y'$

$(\sin y)' = \cos y \cdot y'$

$(x^2y^2)' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' = 2xy^2 + 2x^2yy'$

$3(2xy^2 + 2x^2yy') - 5 + y'\cos y = 3y'$

$6xy^2 + 6x^2yy' - 5 + y'\cos y - 3y' = 0.$

$6x^2yy' + y'\cos y - 3y' = 5 - 6xy^2$

$$y' = \frac{5 - 6xy^2}{6x^2y + \cos y - 3}$$

Также $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$

Для параметрически заданной функции верно.

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}$$

121. Параметрическое дифференцирование. Можно, впрочем, написать выражения производных по x и через дифференциалы, взятые по любой переменной t, но они будут гораздо сложнее. Именно, считая все ниже написанные дифференциалы взятыми по t, имеем последовательно

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^2}}{dx},$$

т. е.

$$y''_{x^2} = \frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}; \tag{5}$$

затем,

$$y'''_{x^3} = \left(\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\frac{dx^3(dx\, d^3y - d^3x dy) - 3dx^2 d^2x(dx\, d^2y - d^2x dy)}{dx^6}}{dx}$$

и окончательно:

$$y'''_{x^3} = \frac{dx(dx\, d^3y - d^3x\, dy) - 3d^2x\,(dx\, d^2y - d^2x\, dy)}{dx^5} \tag{6}$$

и т. д. Формулы (5), (6), ... являются наиболее общими; если в них считать x независимой переменной, то $d^2x, d^3x, \ldots$ обратятся в нуль – и мы вернемся к формулам (4).

Полученные нами формулы для производных y по x осуществляют так называемое параметрическое дифференцирование. Если x и y заданы в функции от параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то, как мы видели в **106**, при известных условиях этим определяется и y как функция от x: $y = f(x)$. При наличии последовательных производных от x и y по t существуют соответствующие производные от y по x и выражаются выведенными выше формулами.

Иногда удобнее иметь выражение производных y по x через производные же (а не дифференциалы) от x и y по t. Их легко получить из дифференциальных выражений, разделив числитель и знаменатель, соответственно, на $dt, dt^3, dt^5, \ldots$ Таким путем придем к формулам:

$$y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'_t)^3};$$

аналогично:

$$y'''_{x^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{(x'_t)^5},$$

и т. д.

Также для общего понимания происходящего советую почитать:
Производная функции, заданной неявно.
Производная параметрически заданной функции
Производная неявной функции

23. Теорема (лемма) Ферма (доказательство). Теорема Ролля (доказательство).

Теорема (лемма) Ферма: Если функция f(x) имеет локальный экстремум в точке x0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$

(Теорема с лекции) Пусть $f(x)$ определена на интервале (a,b) и $\exists\, c \in (a,b) : f(c) = max\,(f(x)) \Rightarrow$ существует двусторонняя конечная производная f′(x)=0

Доказательство (от обратного):

Пусть $f(x0) = max(f(x))$ на (a,b), $f'(x0) \neq 0 \rightarrow f'(x0) > 0$ или $f'(x0) < 0$

Рассмотрим случай, где $f'(x0) > 0$: ($f'(x0) < 0$)

$\forall x \in \ \circ U_{\delta+}(x0),\ f(x) \geq f(x0)$; $\forall x \in \ \circ U_{\delta-}(x0),\ f(x) \leq f(x0)$

($\forall x \in \ \circ U_{\delta+}(x0),\ f(x) \leq f(x0)$; $\forall x \in \ \circ U_{\delta-}(x0),\ f(x) \geq f(x0)$)

Но тогда $f(x0) \neq max(f(x))$

Значит наше предположение неверно и $f'(x0) = 0$

Теорема Ролля:

Теорема Ролля. *Пусть* 1) *функция* $f(x)$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$; 2) *существует конечная производная* $f'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* (a, b); 3) *на концах промежутка функция принимает равные значения:* $f(a) = f(b)$.

Тогда между a *и* b *найдется такая точка,* c $(a < c < b)$, *что* $f'(c) = 0$.

Доказательство. $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и потому, по 2-й теореме Вейерштрасса [85], принимает в этом промежутке как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m.

Рассмотрим два случая:

1. $M = m$. Тогда $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение: в самом деле, неравенство $m \leq f(x) \leq M$ в этом случае дает $f(x) = M$ при всех x; поэтому $f'(x) = 0$ во всем промежутке, так что в качестве c можно взять любую точку из (a, b).

2. $M > m$. Мы знаем, что оба эти значения функцией достигаются, но, так как $f(a) = f(b)$, то хоть одно из них достигается в некоторой точке c между a и b. В таком случае из теоремы Ферма

следует, что производная в этой точке обращается в нуль. Теорема доказана!

24. Теорема Дарбу (доказательство).

Теорема 7.12 (теорема Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$. Тогда, каково бы ни было число C, заключенное между $A=f'(a+0)$ и $B=f'(b-0)$, на этом сегменте найдется точка ξ такая, что $f'(\xi)=C$.*

Итак, производная при одном только условии существования на сегменте $[a, b]$ принимает любое промежуточное значение.

Доказательство. Сначала докажем следующее утверждение: *если $F(x)$ имеет конечную производную на $[a, b]$ и если $F'(a+0)$ и $F'(b-0)$ — числа разных знаков, то на сегменте $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что $F'(\xi)=0$.*

Пусть ради определенности $F'(a+0)<0$, $F'(b-0)>0$. Тогда функция $F(x)$ имеет краевой максимум на обоих концах сегмента $[a, b]$. Но это означает, что минимальное значение $F(x)$ на сегменте $[a, b]$ достигается в некоторой внутренней точке ξ этого сегмента (функция $F(x)$ имеет производную, а значит, и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и поэтому достигает на этом сегменте своего минимального значения). В указанной точке ξ функция $F(x)$ имеет локальный минимум, и поэтому $F'(\xi)=0$.

Для доказательства теоремы 7.12 остается положить $F(x)=f(x)-Cx$*** и применить к $F(x)$ только что доказанное утверждение.

Заметим, что непрерывность производной $f'(x)$ мы не предполагали.

25. Теорема Лагранжа (доказательство). Теорема Коши (доказательство).

Теорема Лагранжа:

3

Теорема Лагранжа. *Пусть* 1) $f(x)$ *определена и непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$, 2) *существует конечная производная* $f'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* (a, b) *). *Тогда между* a *и* b *найдется такая точка* c $(a<c<b)$, *что для нее выполняется равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (1)$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию, определив ее в промежутке $[a, b]$ равенством:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна в $[a, b]$, так как представляет собой разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией. В промежутке (a, b) она имеет определенную конечную производную, равную

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Наконец, непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $F(a)=F(b)=0$, т. е. $F(x)$ принимает равные значения на концах промежутка.

Следовательно, к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля и утверждать существование в (a, b) такой точки c, что $F'(c)=0$. Таким образом,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

откуда

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ч. и тр. д.

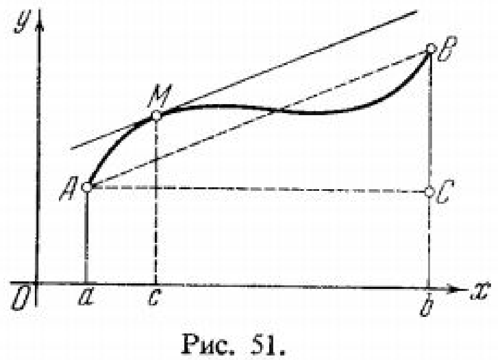


Рис. 51.

Доказанную теорему называют также теоремой о среднем значении (в дифференциальном исчислении).

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа; замечания относительно условий 1) и 2) теоремы, сделанные выше, сохраняют свою силу и здесь.

Теорема Коши:

Теорема Коши. *Пусть* 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в замкнутом промежутке* $[a, b]$; 2) *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *по крайней мере, в открытом промежутке* (a, b); 3) $g'(x) \neq 0$ *в промежутке* (a, b).

Тогда между a *и* b *найдется такая точка* c $(a < c < b)$, *что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (3)$$

Эта формула носит название формулы Коши.

Доказательство. Установим сперва, что знаменатель левой части нашего равенства не равен нулю, так как в противном случае выражение это не имело бы смысла. Если бы было $g(b) = g(a)$, то, по теореме Ролля, производная $g'(x)$ в некоторой промежуточной точке была бы равна нулю, что противоречит условию 3); значит $g(b) \neq g(a)$.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна в $[a, b]$, так как непрерывны $f(x)$ и $g(x)$; производная $F'(x)$ существует в (a, b), именно, она равна

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x).$$

Наконец, прямой подстановкой убеждаемся, что $F(a) = F(b) = 0$. Вследствие этого в промежутке (a, b) существует такая точка c, что $F'(c) = 0$. Иначе говоря,

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

или

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c).$$

Разделив на $g'(c)$ (это возможно, так как $g'(c) \neq 0$), получаем требуемое равенство.

26. П р а в и л а Л о п и т а л я.

Если: $f(x)$, $g(x)$ — действительнозначные функции, дифференцируемые в проколотой окрестности U точки a, где a — действительное число или один из символов $+\infty, -\infty, \infty$, причём

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или ∞;
2. $g'(x) \neq 0$ в U;
3. существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

тогда существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пределы также могут быть односторонними.

--

Теорема 1. *Пусть:* 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в промежутке* $(a, b]$, 2) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, 3) *существуют в промежутке* $(a, b]$ *конечные производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$, *причем* $g'(x) \neq 0$, *и, наконец,* 4) *существует (конечный или нет) предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Дополним определение функций $f(x)$ и $g(x)$, положив их при $x = a$ равными нулю: $f(a) = g(a) = 0$ **). Тогда эти функции окажутся непрерывными во всем замкнутом промежутке $[a, b]$: их значения в точке a совпадают с пределами при $x \to a$ [ввиду 2)], а в прочих точках непрерывность вытекает из существования конечных производных [см. 3)]. Применяя теорему Коши [n° **104**], получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $a < c < x$. То обстоятельство, что $g(x) \neq 0$, т. е. $g(x) \neq g(a)$, есть следствие предположения: $g'(x) \neq 0$, как это было установлено при выводе формулы Коши.

Когда $x \to a$, очевидно, и $c \to a$, так что, в силу 4),

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

что и требовалось доказать.

27. П р о и з в о д н ы е в ы с ш и х п о р я д к о в. Д и ф ф е р е н ц и а л ы в ы с ш и х п о р я д к о в. Н а р у ш е н и е и н в а р и а н т н о с т и ф о р м ы в т о р о г о д и ф ф е р е н ц и а л а.

Производные и дифференциалы высших порядков вводятся индуктивно:

- $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$
- $f^{(0)} = f$

$$d^{n+1} f = d(d^n f).$$

Инвариантность формы записи дифференциалов второго порядка

Однако, уже для второго порядка, это не верно: $df = f'(x)\phi'(t)dt$
$d^2F = [f'(x)\phi'(t)dt]'dt =$
$[f''(x)(\phi'(t))^2 + f'(x)\phi''(t)]dt^2 =$
$f''(x)[\phi'(t)dt]^2 + f''(x)\phi''(t)dt^2 =$
$f''(x)dx^2 + f''_x(x)d^2x \neq d^2f$

Упс! Инвариантности нет.

28. Ф о р м у л а Л е й б н и ц а
Д о к а з а т е л ь с т в о к а к н а л е к ц и и (м е т о д о м м а т. и н д у к ц и и):

\\

Далее замечаем, что

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1;$$

$$C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1;$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} =$$

$$\frac{n!\,(n-k+1)}{(n-k+1)!\,k!} + \frac{n!\,k}{(n-k+1)!\,k!} = \frac{n!\,(n+1)}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = C_{n+1}^k.$$

Подставим в (5) и учтем, что $1 = C_n^0 = C_{n+1}^0 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$:

$$(uv)^{(n+1)} = C_{n+1}^0 u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + C_{n+1}^{n+1} u^{(0)} v^{(n+1)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}.$$

Отсюда видно, что формула (4) имеет тот же вид и для производной $n+1$-го порядка.

Итак, формула (4) справедлива при $n = 1$. Из предположения, что она выполняется, для некоторого числа $n = m$ следует, что она выполняется для $n = m + 1$.
Формула Лейбница доказана.

29. Ф о р м у л а Т е й л о р а . Ф о р м у л а М а к л о р е н а

Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка, то ее можно разложить в степенной ряд по *формуле Тейлора*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n,$$

где R_n − *остаточный член* в форме Лагранжа определяется выражением

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},\quad a<\xi<x.$$

Если приведенное разложение сходится в некотором интервале x, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, то оно называется *рядом Тейлора*, представляющим разложение функции $f(x)$ в точке a.

Если $a=0$, то такое разложение называется *рядом Маклорена*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n.$$

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

- $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

30. Ф о р м у л ы М а к л о р е н а д л я *e*^x, *sin*x , *cos*x (в ы в о д).
http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/p1/m1402.html

П р и м е р ы.

1. Н а п и ш е м ф о р м у л у М а к л о р е н а д л я ф у н к ц и и $f(x) = \sin x$.

Т а к к а к $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$ (с м . п . 11.1), т о

$k = 0, 1, 2,\ldots$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ (-1)^k, & \text{если } n=2k+1,\end{cases}$$

П о э т о м у

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),\quad x\to 0. \qquad (14.19)$$

2. Д л я ф у н к ц и и $f(x) = \cos x$ и м е е м а н а л о г и ч н о $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$,

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases}$$

поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0. \quad (14.20)$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как $(e^x)^{(n)} = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1$ и, следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

31. Формулы Маклорена для (1 + x)^μ, *ln*(1 + x) (вывод). http://nuclphys.sinp.msu.ru/mathan/p1/m1402.html

4. Если $f(x) = (1+x)^a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a \notin \boldsymbol{N}$, то

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}.$$

Поэтому

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad f(0) = 1;$$

отсюда

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0. \quad (14.25)$$

Если $a = m$ - натуральное число, то при $n \geq m$ будем иметь $(1+x)^m = P_m(x)$, где $P_m(x)$ - многочлен степени m. Отсюда, согласно теореме единственности, следует, что $P_m(x)$ является многочленом Тейлора, и, следовательно, в силу (14.25)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots + x^m,$$

т.е. в этом случае формула (14.25) превращается в формулу бинома Ньютона.

5. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$; тогда

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

вообще, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, поэтому

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!, \qquad + O(x^{2n+3})$$

и так как $f(0) = 0$, то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

32. Исследование функции. Монотонность. Экстремумы. Выпуклость. Точки перегиба.

Лучше целиком прочитать 7 главу у Фихтенгольца

Этапы исследования функции и построения графика:

1) Найти область определения функции
2) Найти корни (решить уравнение f(x) = 0)
3) Найти интервалы знакопостоянства
4) Определить четность\нечетность
5) Найти асимптоты
   a) Вертикальные (в точках бесконечного разрыва, $\lim\limits_{x\to x0+0}$ f(x) = ∞)
   b) Наклонные (y = kx + b, где k = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - kx$. Асимптота существует, если оба предела конечны)
6) Найти первую производную, и соответственно интервалы монотонности и экстремумы
7) Найти вторую производную, и определить интервалы выпуклости и точки перегиба ($f''(x) > 0 \Rightarrow$ выпукла вниз, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ выпукла вверх)
   a)

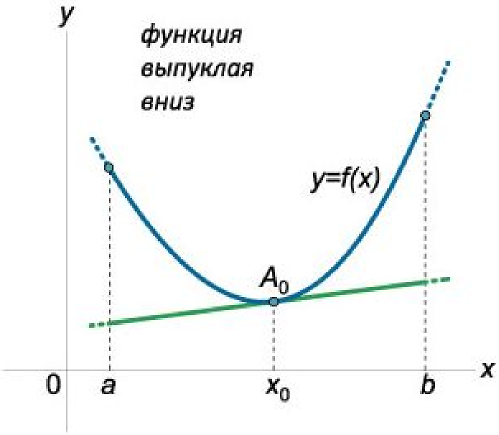


Рис.3

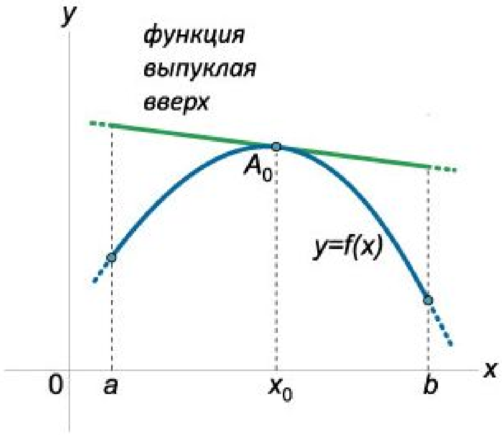


Рис.4

8)

33. А с и м п т о т ы. П о с т р о е н и е г р а ф и к а ф у н к ц и и.

Определение 1. Асимптотами называются такие прямые, к которым сколь угодно близко приближается график функции, когда переменная стремится к плюс бесконечности или к минус бесконечности.

Определение 2. Прямая называется асимптотой графика функции, если расстояние от переменной точки *M* графика функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки *M* от начала координат по какой-либо ветви графика функции.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты

Первое, что нужно узнать о вертикальных асимптотах: они параллельны оси Oy.

Определение. Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой графика функции***, если точка $x = a$ является **точкой разрыва второго рода** для этой функции.

Из определения следует, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

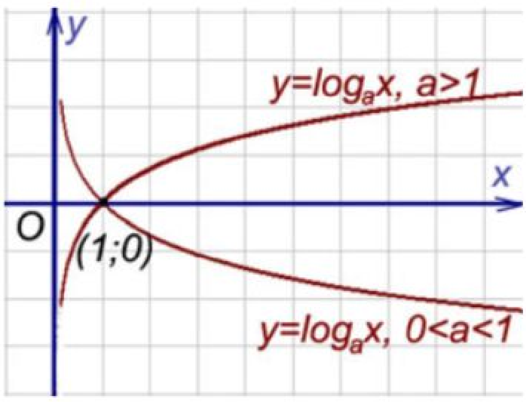
- $\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ (***предел функции** при значении аргумента, стремящимся к некоторому значению a слева, равен плюс или минус бесконечности*)
- $\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ (***предел функции при значении аргумента, стремящимся к некоторому значению a справа, равен плюс или минус бесконечности***).

При этом функция $f(x)$ может быть вообще не определена соответственно при $x \geq a$ и $x \leq a$.

Замечание:

- символом $x \to a+0$ обозначается стремление *x* к ***a*** справа, причём *x* остаётся больше ***a***;
- символом $x \to a-0-$ обозначается стремление *x* к ***a*** слева, причём *x* остаётся меньше ***a***.

Из сказанного следует, что вертикальные асимптоты графика функции можно искать не только в **точках разрыва**, но и на границах **области определения**. График функции, **непрерывной** на всей числовой прямой, вертикальных асимптот не имеет.



Пример 1. График функции $y=\ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (т.е. совпадающую с осью Oy) на границе области определения, так как предел функции при стремлении икса к нулю справа равен минус бесконечности:

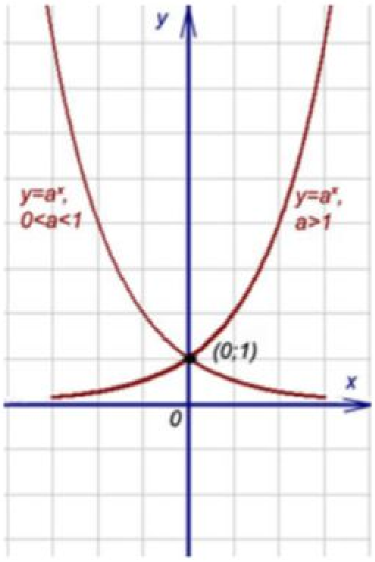
$$\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$$

(рис. сверху).

Горизонтальные асимптоты

Первое, что нужно узнать о горизонтальных асимптотах: они параллельны оси Ox.

Если $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ (предел функции при стремлении аргумента к плюс или минус бесконечности равен некоторому значению *b*), то $y = b$ – ***горизонтальная асимптота*** кривой $y = f(x)$ (правая при иксе, стремящимся к плюс бесконечности, левая при иксе, стремящимся к минус бесконечности, и двусторонняя, если пределы при стремлении икса к плюс или минус бесконечности равны).



Пример 5. График функции

$$y = a^x$$

при $a > 1$ имеет левую горизонтальную асимпототу $y = 0$ (т.е. совпадающую с осью Ox), так как предел функции при стремлении "икса" к минус бесконечности равен нулю:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

Правой горизонтальной асимптоты у кривой нет, поскольку предел функции при стремлении "икса" к плюс бесконечности равен бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$$

Наклонные асимптоты

Вертикальные и горизонтальные асимптоты, которые мы рассмотрели выше, параллельны осям координат, поэтому для их построения нам требовалось лишь определённое число - точка на оси абсцисс или ординат, через которую проходит асимптота. Для наклонной асимптоты необходимо больше - угловой коэффициент *k*, который показывает угол наклона прямой, и свободный член *b*, который показывает, насколько прямая находится выше или ниже начала координат. Не успевшие забыть аналитическую геометрию, а из неё - уравнения прямой, заметят, что для наклонной асимптоты находят **уравнение прямой с угловым коэффициентом**. Существование наклонной асимптоты определяется следующей теоремой, на основании которой и находят названные только что коэффициенты.

Теорема. Для того, чтобы кривая $y = f(x)$ имела асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы *k* и *b* рассматриваемой функции при стремлении переменной *x* к плюс бесконечности и минус бесконечности:

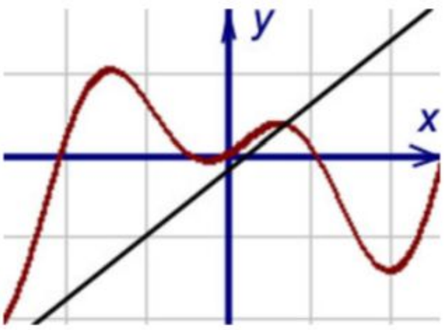
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] \qquad (1)$$

и

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx\right]. \qquad (2)$$

Найденные таким образом числа *k* и *b* и являются коэффициентами наклонной асимптоты.

В первом случае (при стремлении икса к плюс бесконечности) получается правая наклонная асимптота, во втором (при стремлении икса к минус бесконечности) – левая. Правая наклонная асимптота изображена на рис. снизу.



При нахождении уравнения наклонной асимптоты необходимо учитывать стремление икса и к плюс бесконечности, и к минус бесконечности. У некоторых функций, например, у дробно-рациональных, эти пределы совпадают, однако у многих функций эти пределы различны а также может существовать только один из них.

При совпадении пределов при иксе, стремящемся к плюс бесконечности и к минус бесконечности прямая $y = kx + b$ является двусторонней асимптотой кривой.

Если хотя бы один из пределов, определяющих асимптоту $y = kx + b$, не существует, то график функции не имеет наклонной асимптоты (но может иметь вертикальную).

Нетрудно видеть, что горизонтальная асимптота $y = b$ является частным случаем наклонной $y = kx + b$ при $k = 0$.

Поэтому если в каком-либо направлении кривая имеет горизонтальную асимптоту, то в этом направлении нет наклонной, и наоборот.

34. Функция многих переменных. Основные понятия.

Определение

Если каждой паре (x, y) значений двух переменных x, y из некоторого множества D соответствует одно определенное значение переменной z, то говорят, что z – функция двух переменных x, y, определенная в области D.

Окрестностью точки на плоскости называется любой круг с центром в этой точке, а окрестностью точки в пространстве – любой шар с центром в этой точке.

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Частное приращение - приращение функции по одной из переменных
Частная производная - производная по приращению одной переменной

Полное приращение - приращение функции по всем переменным
Полный дифференциал - главная часть полного приращения, если функция имеет непрерывные частные производные, то $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, (сумма частных дифференциалов)

Не дописано, полный билет здесь:
http://dl.khadi.kharkov.ua/mod/book/tool/print/index.php?id=21784#:~:text=1.-,Определение%20функции%20нескольких%20переменных,называется%20областью%20определения%20функции%20z

35. Функция многих переменных. Полный дифференциал.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Предположим, что ее аргументы x и y получают соответственно приращения Δx и Δy. Тогда функция $z = f(x, y)$ получает полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функция $z=f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x,y), если ее полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z = A(x,y)\cdot\Delta x + B(x,y)\cdot\Delta y + o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, а $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ. Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в данной точке, то ее *полным дифференциалом* (или просто *дифференциалом*) называется главная часть полного приращения этой функции, линейная относительно Δx и Δy, т. е.

$$dz = A(x,y)\cdot\Delta x + B(x,y)\cdot\Delta y.$$

Легко доказать, что справедливы равенства

$$A(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=f'_x(x,y),$$

$$B(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=f'_y(x,y).$$

Отсюда следует, что для дифференциала функции $z=f(x,y)$ справедлива формула

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Доказательство. В равенстве (*) положим $\Delta y = 0$. В левой части получим частное приращение функции по переменной x.

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$$

Разделим обе части на Δx

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A$$

Аналогично, полагая в равенстве (*) $\Delta x = 0$, имеем

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = B$$

Подставляя выражения для A и B в (*) и учитывая, что $\Delta x = dx,\ \ \Delta y = dy$ получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

что и требовалось доказать. Доказательство для случая функции n переменных $y=f(x_1,x_2,..x_n)$ проводится аналогично

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n.$$

36.

37. Функция многих переменных. Производные и дифференциалы старших порядков. Теорема о смешанных производных.

146. Производные высших порядков. Если функция $u = f(x, y, z)$ *) имеет в некоторой (открытой) области $\mathscr{D}$ частную производную по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от x, y, z, может, в свою очередь, в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) иметь частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции $u = f(x, y, z)$ эти последние производные будут частными производными в т о р о г о п о р я д к а (или в т о р ы м и частными производными).

Если первая производная была взята, например, по x, то ее производные по x, y, z обозначаются так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\, \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0 z_0)}{\partial x\, \partial z},$$

или

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$

$$u''_{xz} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0) \text{ **)}.$$

Теорема. *Предположим, что:* 1) *функция* $f(x, y)$ *определена в (открытой) области* $\mathscr{D}$, 2) *в этой области существуют первые производные* f'_x *и* f'_y, *а также вторые с м е ш а н н ы е производные* f''_{xy} *и* f''_{yx}, *и, наконец,* 3) *эти последние производные* f''_{xy} *и* f''_{yx}, *как функции* x *и* y, *н е п р е р ы в н ы в некоторой точке* (x_0, y_0) *области* $\mathscr{D}$. *Тогда в этой точке*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$W = \frac{f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0 + h,\ y_0) - f(x,\ y_0 + k) + f(x_0,\ y_0)}{hk},$$

где h, k отличны от нуля, например положительны, и притом настолько малы, что в $\mathscr{D}$ содержится весь прямоугольник $[x_0,\ x_0 + h;\ y_0,\ y_0 + k]$; такими мы их фиксируем до конца рассуждения.

Введем теперь вспомогательную функцию от x:

$$\varphi(x) = \frac{f(x,\ y_0 + k) - f(x,\ y_0)}{k},$$

которая в промежутке $[x_0,\ x_0 + h]$, в силу 2), имеет производную

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x,\ y_0 + k) - f'_x(x,\ y_0)}{k}$$

и, следовательно, непрерывна. С помощью этой функции выражение W, которое равно

$$W = \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0 + h,\ y_0)}{k} - \frac{f(x_0,\ y_0 + k) - f(x_0,\ y_0)}{k}\right],$$

можно переписать в виде:

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Так как для функции $\varphi(x)$ в промежутке $[x_0,\ x_0 + h]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа [n° **102**], то мы можем, по формуле конечных приращений, преобразовать выражение W так:

$$W = \varphi'(x_0 + \theta h) = \frac{f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0)}{k}$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Пользуясь существованием второй производной $f''_{xy}(x, y)$, снова применим формулу конечных приращений, на этот раз — к функции от y: $f'_x(x_0+\theta h, y)$ в промежутке $[y_0, y_0+k]$. Окончательно получим:

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) \qquad (0<\theta, \theta_1<1). \tag{2}$$

Но выражение W содержит x и h, с одной стороны, и y и k, с другой, одинаковым образом. Поэтому можно поменять их роли и, введя вспомогательную функцию

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h, y)-f(x_0, y)}{h},$$

путем аналогичных рассуждений получить результат:

$$W=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_2, \theta_3<1). \tag{3}$$

Из сопоставления (2) и (3) находим:

$$f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k)=f''_{yx}(y_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k).$$

Устремив теперь h и k к нулю, перейдем в этом равенстве к пределу. Ввиду ограниченности множителей $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, аргументы и справа и слева стремятся, соответственно, к x_0, y_0. А тогда, в силу 3), окончательно и получим:

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0),$$

что и требовалось доказать.

Имеет место и общая теорема о смешанных производных:

Теорема. *Пусть функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от m переменных определена в открытой m-мерной области $\mathcal{D}$ и имеет в этой области всевозможные частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно и смешанные производные n-го порядка, причем все эти производные непрерывны в $\mathcal{D}$.*

При этих условиях значение любой n-й смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Мы не будем останавливаться на ее доказательстве, которое проводится на основе предыдущей теоремы.

и т. д. Вообще, если дифференциал $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}u$ уже определен, то дифференциал n-го порядка $d^n u$ определяется как (полный) дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^n u=d\,(d^{n-1}u).$$

38. Функция многих переменных. Формула Тейлора.

Формула Тейлора для функции двух переменных [править | править код]

Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Введём дифференциальный оператор

$$\mathrm{T} = (x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда разложение (формула Тейлора) функции $f(x,y)$ по степеням $(x-x_0)^p(y-y_0)^q$ для $p+q \le n$ в окрестности точки (x_0,y_0) будет иметь вид

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{T}^k f(x_0,y_0)}{k!} + R_n(x,y),$$

где $R_n(x,y)$ — остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n(x,y) = \frac{\mathrm{T}^{(n+1)} f(\xi,\zeta)}{(n+1)!},\ \xi \in [x_0,x],\ \zeta \in [y_0,y]$$

Следует иметь в виду, что операторы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ в T^k действуют только на функцию $f(x,y)$, но не на $(x-x_0)$ и/или $(y-y_0)$.

Аналогичным образом формула строится для функций любого числа переменных, меняется только число слагаемых в операторе T.

В случае функции одной переменной $\mathrm{T} = (x-x_0)\frac{d}{dx}$.

Формула Тейлора многих переменных [править | править код]

Для получения формулы Тейлора функции n переменных $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, которая в некоторой окрестности точки $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ имеет непрерывные производные до $(m+1)$-го порядка включительно, введём дифференциальный оператор

$$\mathrm{T} = (x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2-a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Тогда разложение (формула Тейлора) функции по степеням $(x_i-a_i)^{k_i}$ в окрестности точки $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ имеет вид

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{T}^k f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{k!} + R_m(x_1,x_2,\ldots x_n),$$

где $R_m(x_1,x_2,\ldots x_n)$ — остаточный член порядка $(m+1)$.

Для функции n переменных, бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, ряд Тейлора имеет вид

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty} C_{k_1,k_2,\ldots k_n}(x_1-a_1)^{k_1}(x_2-a_2)^{k_2}\ldots(x_n-a_n)^{k_n},$$

где

$$C_{k_1,k_2,\ldots k_n} = \frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}} f(x_1,x_2,\ldots x_n)|_{x_1=a_1,x_2=a_2,\ldots,x_n=a_n}$$

39. Ф у н к ц и я м н о г и х п е р е м е н н ы х . П р о и з в о д н ы е с л о ж н о й ф у н к ц и и . П р о и з в о д н ы е н е я в н о й ф у н к ц и и .

Случай одной независимой переменной

Пусть $z = f(x, y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y, причем аргументы этой функции являются дифференцируемыми функциями одной независимой переменной t, т. е. $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Тогда сложная функция

$$z = f\left(\varphi(t),\ \psi(t)\right)$$

тоже дифференцируема, и ее производная $\frac{dz}{dt}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Пусть теперь $z = f(x, y)$, а $y = \varphi(x)$. Тогда $z = f(x,\ \varphi(x))$, т. е. функция z есть функция одной переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, где роль переменной t играет x. *Полная производная* функции z по переменной x равна

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Случай нескольких независимых переменных

Предположим теперь, что $z=f\left(x, y\right)$, где $x=\varphi\left(u, v\right)$ и $y=\psi\left(u, v\right)$. Тогда z есть сложная функция двух независимых переменных u и v. Частные производные этой сложной функции находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Эти формулы обобщаются на случай сложной функции любого конечного числа аргументов.

Пример 8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=y^x$, $x=\frac{u}{v}$, $y=u\cdot v$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$,

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}=v, \quad \frac{\partial y}{\partial v}=u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=y^x \ln y\cdot\frac{1}{v}+xy^{x-1}\cdot v=\frac{\left(1+\ln(uv)\right)}{v}\cdot\left(uv\right)^{\frac{u}{v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=y^x \ln y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)+xy^{x-1}\cdot u=\frac{u\left(1-\ln(uv)\right)}{v^2}\cdot\left(uv\right)^{\frac{u}{v}}.$$

1.5. Неявные функции и их дифференцирование

Пусть $F(x, y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y, и пусть уравнение $F(x, y)=0$ определяет y как функцию x. Первая производная этой неявной функции $y=y(x)$ в точке x_0 может быть вычислена по формуле

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

при условии, что $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, где $y_0 = y(x_0)$ и $F(x_0, y_0)=0$. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием этой формулы.

Пусть теперь $F(x, y, z)$ — дифференцируемая функция трех переменных x, y и z, и пусть уравнение $F(x, y, z)=0$ определяет z как функцию независимых переменных x и y. Частные производные этой неявной функции $z=z(x, y)$ в точке (x_0, y_0) могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

при условии, что $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, где $z_0 = z(x_0, y_0)$ и $F(x_0, y_0, z_0)=0$.

40. Функция многих переменных. Экстремум. Условный экстремум.

Говорят, что *функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *в точке* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ *имеет* *максимум* (*минимум*), *если ее можно окружить такой окрестностью*

$$(x_1^0 - \delta_1,\ x_1^0 + \delta_1;\ x_2^0 - \delta_2,\ x_2^0 + \delta_2;\ \ldots;\ x_m^0 - \delta_m,\ x_m^0 + \delta_m),$$

чтобы для всех точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0).$$

Для обозначения максимума и минимума употребляется и общий термин — экстремум.

Предположим, что наша функция в некоторой точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ имеет экстремум.

Покажем, что если в этой точке существуют конечные частные производные

$$f'_{x_1}(x_1^0, \ldots, x_m^0), \ldots, f'_{x_m}(x_1^0, \ldots, x_m^0),$$

то все эти частные производные равны нулю, так что *обращение в нуль частных производных первого порядка является* *необходимым* *условием существования экстремума*.

С этой целью положим $x_2 = x_2^0, \ldots, x_m = x_m^0$, сохраняя x_1 переменным; тогда у нас получится функция от одной переменной x_1:

$$u = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0).$$

Так как мы предположили, что в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ существует экстремум (для определенности — пусть это будет максимум), то, в частности, отсюда следует, что в некоторой окрестности $(x_1^0 - \delta_1,\ x_1^0 + \delta_1)$ точки $x_1 = x_1^0$ необходимо должно выполняться неравенство

$$f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0),$$

так что упомянутая выше функция одной переменной в точке $x_1 = x_1^0$ будет иметь максимум, а отсюда по теореме Ферма [n° 100] следует, что

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = 0.$$

Таким же образом можно показать, что в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ и остальные частные производные также равны нулю.

Для начала рассмотрим случай функции двух переменных. Условным экстремумом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y в окрестности данной точки удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y) = 0$.

41. Производная по направлению. Градиент.
[Производная по направлению и градиент функций двух и трёх переменных]

8. Производная по направлению. Градиент. Начнем с рассмотрения функции трех независимых переменных $u=f(x, y, z)$. Предположим, что эта функция определена в некоторой окрестности точки $M_0(x^0, y^0, z^0)$ пространства E^3 и дифференцируема в точке M_0.

Рассмотрим всевозможные лучи, выходящие из точки M_0. Каждый такой луч задается единичным вектором **e** с координатами $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ * и определяет некоторое направление.

Фиксируем некоторый луч, выходящий из точки M_0 и определяемый единичным вектором **e** с координатами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Взяв на прямой, содержащей этот луч, произвольную отличную от M_0 точку M, рассмотрим вектор или направленный отрезок $\overline{M_0M}$ и обозначим через l величину этого направленного отрезка на оси, определяемой единичным вектором $\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *.

Ясно, что вектор $\overline{M_0M}$ имеет координаты

$$(l\cos\alpha,\ l\cos\beta,\ l\cos\gamma).$$

С другой стороны, если координаты точки M равны (x, y, z), то вектор $\overline{M_0M}$ имеет координаты, равные $(x-x^0,\ y-y^0,\ z-z^0)$.

Сопоставляя два полученных нами соотношения для координат вектора $\overline{M_0M}$, мы приходим к равенствам

$$x=x^0+l\cos\alpha,\quad y=y^0+l\cos\beta,\quad z=z^0+l\cos\gamma. \tag{12.34}$$

Равенства (12.34) показывают, что на прямой, проходящей через точку M_0 и определяемой единичным вектором $\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, функция $u=f(x, y, z)$ представляет собой сложную функцию одной независимой переменной l вида $u=f(x^0+l\cos\alpha,\ y^0+l\cos\beta,\ z_0+l\cos\gamma)$.

Определение 1. *Производную указанной сложной функции по переменной l, взятую в точке $l=0$, назовем* ***производной функции*** $u=f(x, y, z)$ ***в точке*** M_0 ***по направлению,*** *определяемому единичным вектором* **e**, *и будем обозначать символом $\partial u/\partial e$.*

Итак, по определению

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \tag{12.35}$$

Введем понятие градиента дифференцируемой в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функции $u=f(x, y, z)$.

Определение 2. ***Градиентом*** *функции $u=f(x, y, z)$ в данной точке $M_0(x^0, y^0, z^0)$ называется вектор, координаты которого имеют вид*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial z}(M_0).$$

Для обозначения градиента функции $u=f(x, y, z)$ обычно используют символ

$$\operatorname{grad} u.$$

42. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. Точка M_0 называется *точкой касания*. *Нормалью* к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z)=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности имеет вид

$$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0,$$

где x, y, z — координаты текущей точки касательной плоскости, x_0, y_0, z_0 — координаты точки касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Нормаль к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}.$$

В случае задания поверхности в явной форме $z=f(x, y)$ уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z-z_0=f_x'(x_0, y_0)\cdot(x-x_0)+f_y'(x_0, y_0)\cdot(y-y_0),$$

а уравнения нормали —

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример 10. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=e^{x\cos y}$ в точке $M_0\left(1,\ \pi,\ 1/e\right)$.

Решение. Начнем с нахождения частных производных функции $f\left(x, y\right)=e^{x\cos y}$ и их значений в точке M_0:

$$f_x^/=e^{x\cos y}\cdot\cos y, \qquad f_x^/\left(1,\ \pi\right)=e^{\cos\pi}\cdot\cos\pi=-e^{-1},$$

$$f_y^/=-e^{x\cos y}\cdot x\cdot\sin y, \qquad f_y^/\left(1,\ \pi\right)=-e^{\cos\pi}\cdot 1\cdot\sin\pi=0.$$

Напишем уравнение касательной плоскости:

$$z-e^{-1}=-e^{-1}\cdot\left(x-1\right)+0\cdot\left(y-\pi\right)$$

или

$$x+ez-2=0.$$

Теперь напишем уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{-e^{-1}}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-e^{-1}}{-1}$$

или

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-1/e}{e}.$$

43. Векторная функция скалярного аргумента. Основные понятия.

Пусть некоторая кривая в пространстве задана параметрически уравнениями (80)

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\}$$

Как мы видели, каждому значению параметра t, принадлежащему области определения функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, соответствует определенная точка $M(x;\ y;\ z)$, координаты которой находятся по формулам (80). Но каждой точке M соответствует ее радиус-вектор $\mathbf{r} = \overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец с точкой M (рис. 141). Проекции этого вектора на координатные оси совпадают с координатами точки M и, следовательно, определяются по формулам (80). Таким образом, *каждому значению пара-*

метра t из области определения функций (80) соответствует определенный вектор

$$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \tag{82}$$

Этот вектор $\mathbf{r}$ *мы будем называть векторной функцией (или вектор-функцией) скалярного аргумента* t *и обозначать символом* $\mathbf{r}(t)$.

Линия L, описываемая концом радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$, называется *годографом*.

Задание векторной функции $\mathbf{r}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций — его проекций на координатные оси $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

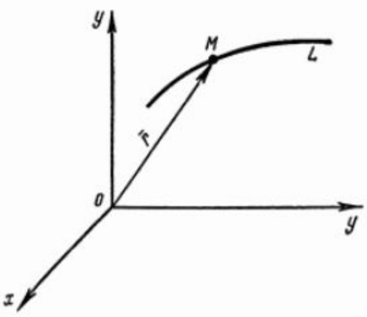


Рис. 141

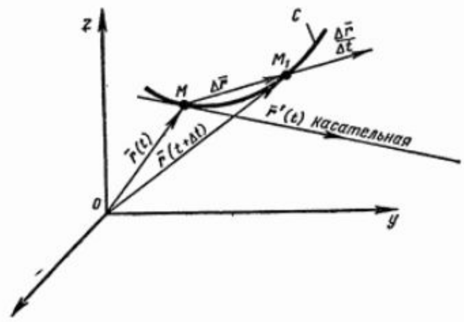


Рис. 142

Введем для вектор-функции понятия предела, непрерывности и производной.

Определение. *Вектор* $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ *называется пределом вектор-функции* $\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ *при* $t \to t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z_0$.

Условимся писать при этом $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$.

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена при $t = t_0$ и в некотором интервале, содержащем t_0.

Определение. *Вектор-функция* $\mathbf{r}(t)$ *называется непрерывной в точке* t_0, *если*

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

и назовем его приращением вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t. Рассмотрим отношение $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$. Оно представляет собой вектор, коллинеарный вектору $\Delta\mathbf{r}$, так как отличается от него скалярным множителем $\frac{1}{\Delta t}$.

Определение. *Производной вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ *по скалярному аргументу* t *называется новый вектор, равный пределу отношения приращения вектор-функции* $\Delta\mathbf{r}$ *к соответствующему приращению аргумента* Δt *при условии, что* Δt *стремится к нулю.*

Производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ будем обозначать символом $\mathbf{r}'(t)$, или $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Таким образом, по определению

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{83}$$

Выразим производную вектор-функции $\mathbf{r}'(t)$ через ее проекции на оси координат.

Так как

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\,\mathbf{i} + y(t+\Delta t)\,\mathbf{j} + z(t+\Delta t)\,\mathbf{k},$$

то

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) = [x(t+\Delta t) - x(t)]\,\mathbf{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\,\mathbf{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\,\mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\mathbf{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\mathbf{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\,\mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{i}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \mathbf{j}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \mathbf{k}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}. \tag{84}$$

44. К а с а т е л ь н а я п р я м а я и н о р м а л ь к п р о с т р а н с т в е н н о й к р и в о й.

Выясним направление вектора $\mathbf{r}'(t)$. Вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, коллинеарный вектору $\Delta\mathbf{r}$, направлен по секущей MM_1 (рис. 142). *Когда $\Delta t \to 0$, точка M_1 неограниченно приближается к точке M, а секущая MM_1 неограниченно приближается к касательной L к кривой C в точке M.*

Отсюда следует, *что вектор $\mathbf{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу радиуса-вектора $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$.*

Найдем уравнения касательной к пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями (80), в некоторой ее точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

Эта касательная есть прямая, проходящая через точку M_0. Поэтому ее уравнения можно записать в следующей форме (см. гл. IV, § 2, п. 4):

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

где m, n и p — проекции направляющего вектора прямой. Так как вектор

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + z'(t_0)\,\mathbf{k}$$

направлен по касательной к кривой в точке M_0, то его проекции могут быть приняты за проекции направляющего вектора:

$$m = x'(t_0),\quad n = y'(t_0),\quad p = z'(t_0).$$

Тогда искомое уравнение касательной примет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \qquad (85)$$

О п р е д е л е н и е. *Нормальной плоскостью к пространственной кривой называется плоскость, перпендикулярная к касательной прямой и проходящая через точку касания.*

Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка касания. Выведем уравнение нормальной плоскости, проходящей через эту точку. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, имеет вид

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

где A, B и C — проекции вектора $\mathbf{N}\{A;\ B;\ C\}$ — нормального к этой плоскости (см. гл. IV, § 1, п. 2). Но из определения нормальной плоскости вытекает, что за вектор $\mathbf{N}$ можно принять вектор $\mathbf{r}'(t_0)\{x'(t_0);\ y'(t_0);\ z'(t_0)\}$. Поэтому $A = x'(t_0)$, $B = y'(t_0)$, $C = z'(t_0)$. В таком случае искомое уравнение нормальной плоскости запишется в следующей форме:

$$x'(t_0)\cdot(x-x_0) + y'(t_0)\cdot(y-y_0) + z'(t_0)\cdot(z-z_0) = 0. \qquad (86)$$

45. Пространственная кривая. Длина дуги как параметр.

Пусть пространственная кривая задана уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Длина пространственного отрезка описывается формулой

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Преобразуем это выражение, умножив и поделив его на dt:

$$dL = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}}\,dt.$$

Затем разделим каждое слагаемое в числителе на знаменатель и представим результат в виде

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \quad \Rightarrow$$

$$dL = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt,$$

где x', y' и z' – производные функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ по переменной t.

46. Плоская кривая. Эволюта и эвольвента.

Плоская кривая - кривая, все точки которой лежат в одной плоскости.
x = φ(t), y = ψ(t) - параметрический вид плоской кривой;
Параметризация - некоторая вектор-функция $\overline{r} = \overline{r}(t), t \in [a, b]$ **, которая определяет положение кривой** $L \subset R^2$ **на плоскости**
Сама кривая вида $L \subset R^2$ **и заданная вектор-функцией** $\overline{r} = \overline{r}(t), t \in [a, b]$ **называется плоской кривой**
Кривизна плоской кривой - производная касательной к кривой в некоторой точке M

Пусть на плоскости имеется некоторая кривая (L) и скалярный параметр t определяет положение переменной точки M на этой кривой. Мы можем охарактеризовать нашу кривую радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$

из некоторой постоянной точки O в переменную точку кривой (рис. 96). Как мы видели [119], производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ дает вектор, направленный по касательной к кривой, а если за параметр принять длину дуги s кривой, отсчитываемую от определенной точки кривой в определенном направлении, то производная $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ даст *единичный вектор касательной* $\mathbf{t}$, направление которого совпадает с направлением увеличения параметра s вдоль кривой:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}. \tag{1}$$

Производная от единичного вектора-касательной по s называется *вектором кривизны*:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}. \tag{2}$$

Длина этого вектора характеризует быстроту изменения направления вектора $\mathbf{t}$ и называется *кривизной кривой*.

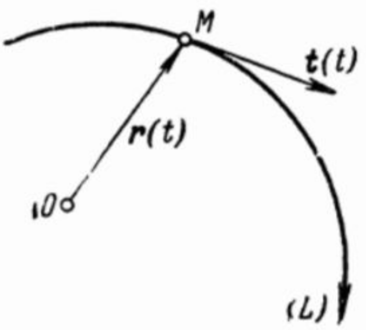


Рис. 96.

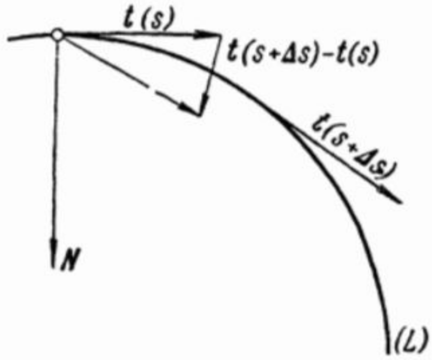


Рис. 97.

В силу доказанной леммы вектор кривизны перпендикулярен касательной, т. е. направлен по нормали.

Длина вектора **N**, как мы уже указали, называется кривизной кривой, и если ввести обозначение

$$|\mathbf{N}| = \frac{1}{\rho}, \tag{3}$$

то величина ρ, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны*. Введем в рассмотрение единичный вектор кривизны **n**, то есть вектор длины единица, по направлению совпадающий с **N**.

Если длина $|\mathbf{N}| = 0$, то надо считать $\rho = \infty$, и вектор **n** не определен. Если, например, (L) — прямая, то во всех ее точках $|\mathbf{N}| = 0$, и мы можем выбирать любое из двух направлений нормали к прямой в той плоскости, в которой мы рассматриваем прямую. В дальнейшем будем считать, что $|\mathbf{N}| \neq 0$.

В силу (3) имеем

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}. \tag{4}$$

Отложим на направлении **n**, т. е. на направлении нормали кривой в сторону вогнутости, отрезок MC, равный радиусу кривизны ρ в точке M (рис. 98). Его конец C называется *центром кривизны* кривой в точке M. Если M двигается вдоль кривой (L), то C меняется и описывает некоторую кривую (L_1), которая называется *эволютой кривой* (L), т. е. эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны.

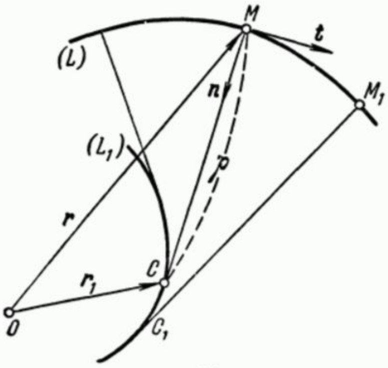


Рис. 98.

Для дальнейшего нам необходимо определить производную $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. Вектор **n** есть единичный вектор, и, следовательно, $\frac{d\mathbf{n}}{ds} \perp \mathbf{n}$, то есть $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$

4°. Эволюта и эвольвента плоской кривой

Пусть L — C^2-регулярная плоская кривая, кривизна $k_1(M)$ которой отлична от нуля в каждой точке M.

Определение. *Эволютой* кривой L называется множество ее центров кривизны. Сама кривая L по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой* (рис. 30).

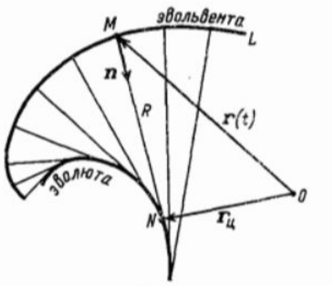


Рис. 30. Эволюта — множество центров кривизны N кривой L (эвольвенты). Радиус R кривизны кривой L равен $\frac{1}{k_1(M)}$

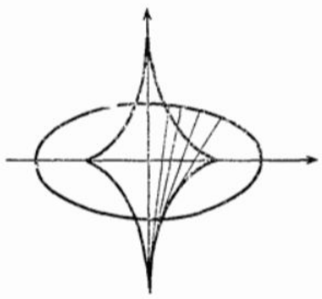


Рис. 31. Эволюта эллипса

Если $\mathbf{r}(t)$ — вектор кривой L, k_1 — кривизна кривой L, то согласно формуле (11) ее эволюта определяется формулой

$$\mathbf{r}_{\text{ц}} = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{k_1(M)}\mathbf{n},$$

где **n** — вектор главной нормали кривой L.

47. Оператор «набла». Дивергенция. Ротор. Оператор Лапласа.

http://www.math24.ru/%D0%BE%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D1%8B%D0%B5-%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5-%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B.html

https://www.youtube.com/watch?v=FS6FcaX1O0U