

Лабораторная работа №6

Вариант 4

Фадеев Артём, Войнов Лев

17 мая 2022 г.

1 Задание

- Построить ОМП
- Вычислить квадратичный риск оценок
- Найти информацию Фишера
- Выяснить вопрос об эффективности оценок

Для неизвестной дисперсии d нормального распределения $N(0, d)$

$d = \sigma^2$ при известном среднем $a = 0$

2 Решение

2.1

$$N(a, d) = N(a, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = f(a, \sigma^2)$$

$$f(a, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma_i^2}\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$L(a, x_1, \dots, x_n) = \ln(f(a, x_1, \dots, x_n)) = n \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{dL}{d\sigma} = -\frac{n}{2\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

2.2

$$E_x \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n} n \sigma^2 = \sigma^2$$

$$R_2(\hat{\sigma}, \sigma) = D_x \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D x_i^2 = \frac{1}{n} n (3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

2.3

$$I_n(\sigma^2) = nI(\sigma^2) = nE_{\sigma^2}\left(\frac{d}{d\sigma^2} \ln(f_{\sigma}(x))\right)^2 = nE_{\sigma^2}\left(\frac{x^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^2}\right)^2 = \frac{nE_{\sigma^2}}{4\sigma^8} (x^2 - \sigma^2)^2 = \frac{n}{4\sigma^8} D_{\sigma^2}(x^2) = \frac{n}{4\sigma^8} 2\sigma^4 = \frac{n}{2\sigma^4}$$

2.4

$$R_2(\hat{\sigma}, \sigma) = D_x(\hat{\sigma}) = \frac{2\sigma^4}{n} = \frac{1}{I_n(\sigma^2)}$$

Согласно неравенству Рао-Крамера оценка является эффективной