Traitement d'Image et du Signal - TP3

Laurent Cetinsoy, Karim Kouki, Aris Tritas

8 octobre 2016

1 Rotation d'image

1.1 Introduction

Pour chaque point (x, y) de l'image originale nous souhaitons utiliser la TFD pour calculer le point (x', y') résultant d'une rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$. On peut définir la rotation par la matrice $\mathbf{M}$ ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{M}$ peut être ré-exprimée comme suit (e.g. [3]) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'idée de [1] [2] est d'utiliser trois convolutions linéaires (et donc séparables) qui distordent l'image successivement selon les axes x, y et x. Chacune s'écrit comme une translation dans le domaine de Fourier. La distortion $u_{dx}(x, y) = u(x + ay, y)$ pour l'axe x (où a contrôle l'angle) s'exprime par l'opérateur suivant :

$$D_x(\xi) = \mathcal{F}\{u_d(x, y)\} = \mathcal{F}\{u(x, y)\}e^{-2i\pi\xi ay}$$

Si l'on répête cette opération pour y et encore une fois pour x l'on retrouve le signal réel pivoté. L'image originale est insérée dans une image plus grande afin de ne pas être tronquée.

1.2 Experimentations

Les expériences suivantes ont été menées :

— Rotations d'images avec des images bruitées et non bruitées.

— N rotations d'angle $\frac{2\pi}{N}$ successives d'une même image.

1.2.1 Rotations simples

L'algorithme a été testé pour plusieurs valeurs d'angles sur des images bruitées ou non. Dans le cas général il donne fonctionne correctement en conservant la qualité de l'image initiale. Néanmoins pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ les bords de l'image se détachent. Il n'a pas été possible de trouver la cause du problème. pour $\theta = \pi$ l'algorithme ne fonctionne pas comme cela a été annoncé dans le cours.

FIGURE 1 – De gauche à droite : $\theta = \frac{2\pi}{8}$, $\theta = \frac{2\pi}{7}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = \pi$.

1.2.2 Rotation multiple d'une image

Une succession de rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{N}$ a été effectuée sur une image afin de pouvoir comparer l'image originale et l'image après N rotations.

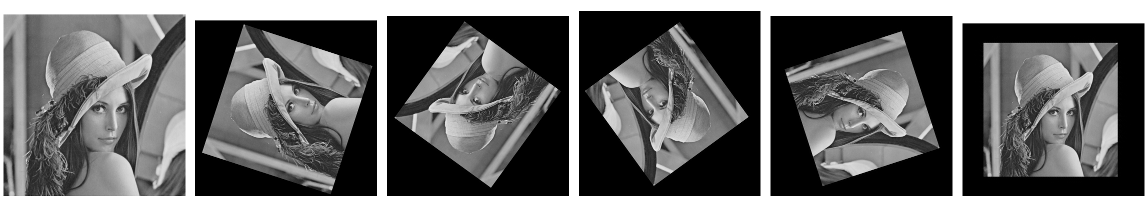

FIGURE 2 – A gauche l'image originale, à droite les rotations successives d'angle $\theta = \frac{2\pi}{5}$.

On constate que l'image a une qualité sembable à celle de l'originale.

1.3 Discussion

L'implémentation de l'algorithme souffre des limites suivantes :

- Il ne gère pas les angles $\frac{k\pi}{2}$ où serait en fait possible de se passer de la transformée de fourier et éviter le problème de rotation de $theta = k\pi$.
- Le zero-padding utilisé inclut l'image originale dans une image aggrandie par un facteur constant. Il y a donc bien plus de zero que nécessaire : il serait avantageux de raboter l'image afin que la taille de l'image soit définie par les coin de l'image originale. En effet dans l'expérience de rotation successive, la taille de l'image à

l'étape i est zoom^i ce qui rend l'expérience impossible à pratiquer pour de grandes valeurs de N.

— Le problème de l'angle de $\frac{k\pi}{3}$ où deux des coins de l'image se détachent.

2 Exercices

Notons le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$.

Définition Système linéaire : pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Si $e_1(t) \to s_1(t)$ et $e_2(t) \to s_2(t)$, alors $\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \to \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$

Définition Système invariant : pour $\tau \in \mathbb{R}$

Si $e(t) \to s(t)$ alors $e(t-\tau) \to s(t-\tau)$, τ étant une constante de décalalage.

Définition Produit de convolution de deux suites u_n et h_n :

$$(u \otimes h)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} h_k$$

Définition Réponse impulsionnelle :

La sortie d'un système linéaire invariant est égale au produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle h, $\;e(t) \longrightarrow s(t) = (e \otimes h)(t)$

Exercice 1

Pour les questions (1)-(4), l'entrée est la suite u_n et la sortie la suite v_n pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour les questions (5) et (6) l'entrée est une fonction $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et la sortie est une fonction $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $v_n = u_n - u_{n-1} + 3u_{n+1}$:
   La relation est une somme de termes décalés et comporte des produits avec des scalaires, elle est donc linéaire. $\alpha(u_n - u_{n-1} + 3u_{n+1}) \to \alpha v_n$
   La relation est invariante car $u_{n-\tau} - u_{n-1-\tau} + 3u_{n+1-\tau} \to v_{n-\tau}$
   La réponse impulsionnelle peut être donnée par identification des termes de la somme du produit de convolution : $h_{-1} = 3, h_0 = 1, h_1 = -1$

2. $v_n = u_{2n}$:
   La relation impulsionnelle est un sous échantillonnage qui est linéaire. En effet $\alpha u_{2n} \to \alpha v_n$. De plus, sous-échantillonner la somme de deux signaux revient à sommer les sous-échantillons de ces signaux. La relation est non-invariante par translation car $u_{2n-\tau} \not\to v_{n-\tau} (= u_{2(n-\tau)})$

3. $v_n = \max(u_n, u_{n-1}, u_{n+1})$:
   L'opérateur max n'est pas linéaire. Considérons les suites u_n et u'_n définies par :

   — $u_k = u'_k = 0 \;\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$
   — $u_0 = -1, u_1 = -1, u_2 = -10$

— $u'_0 = -1, u'_1 = 1, u'_2 = 10$
Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} v_n + v'_n &= \max(u_0, u_1, u_2) + \max(u'_0, u'_1, u'_2) \\ &= \max(-1, -1, -10) + \max(-1, 1, 10) \\ &= 9 \\ &\neq \max(-1-1, -1+1, -10+10) = 1 \end{aligned}$$

4. $v_n = u_{n-1}$:
La réponse est linéaire car $\alpha u_{n-1} \to \alpha v_n$ et invariante par translation car $u_{n-1-\tau} \to v_{n-\tau}$
De même que pour la question 1, la réponse impulsionnelle peut être donnée par identification du terme non-nul du produit de convolution : $h_{-1} = 1$

5. $g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$:
La relation est linéaire par linéarité de l'intégration :

$$\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(t) + f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

La relation est invariante par translation : soit l'entrée $f(t-\tau)$,
en posant $t' = t - \tau \implies \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$

$$\int_{x-\frac{1}{2}-\tau}^{x+\frac{1}{2}-\tau} f(t')\,\mathrm{d}t' \to g(x-\tau)$$

Afin de calculer la réponse impulsionnelle, considérons la fonction porte suivante :
$\Pi(t) = \mathbb{1}\{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$: $\Pi(t-x) = 1$ si $t - x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et 0 sinon.

$$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Pi(t-x)\,\mathrm{d}t = (f \otimes \Pi(t-x))(x).$$

Donc la réponse impulsionnelle s'écrit $h(t) = \mathbb{1}\{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$

6. $g(x) = \max\{f(t), t \in [x-1, x+1]\}$:
La réponse n'est pas linéaire car l'opérateur max n'est pas linéaire.

Exercice 2

1. $u_0 = 1,\ u_n = 0\ \forall n \neq 0$:
$w_1(n) = (u \otimes v)(n) = (v \otimes u)(n) = v_n = \sqrt{\log(\cos(3n) + 2)}$

2. $u_0 = 2, u_1 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$
L'on donne les termes de $w(n)$ non-nuls ci-dessous :

— $w_2(0) = u_0 v_0 = 10$
— $w_2(1) = u_0 v_1 + u_1 v_0 = 3.5$
— $w_2(2) = u_1 v_1 + u_0 v_2 = 6.5$
— $w_2(3) = u_1 v_1 + u_1 v_2 = -3.5$

3. $u_{-1} = 2, u_0 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$
   De même, les termes non-nuls sont :
   — $w_3(-1) = u_0 v_1 + u_{-1} v_0 = 8.5$
   — $w_3(0) = u_0 v_0 + u_{-1} v_1 = 2.5$
   — $w_3(1) = u_{-1} v_2 + u_0 v_1 = 6.5$
   — $w_3(2) = u_0 v_2 = -2$
4. $u_{-1} = 2, u_0 = \frac{3}{2}, u_1 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$
   En remarquant que les termes des suites u sont la somme des termes des suites des deux question précédentes, la distributivité du produit de convolution donne : $w_4(n) = w_2(n) + w_3(n),\ \forall n \in \mathcal{D}(w_2) \cup \mathcal{D}(w_3)$ où $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de chaque suite.
5. $u_n = (-\frac{1}{2})^n,\ n \in \mathbb{N}$, sinon $u_n = 0$ et $v_0 = 1, v_1 = \frac{1}{2}$:
   En ne gardant que les termes non-nuls du produit de convolution et en factorisant par $(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$$\begin{aligned}
(u \otimes v)(n) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} v_k \\
w(n) &= (-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= (-\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Références

[1] Unser, Michael, Philippe Thevenaz, and Leonid Yaroslavsky. ”Convolution-based interpolation for fast, high-quality rotation of images.” IEEE Transactions on Image Processing 4.10 (1995) : 1371-1381.

[2] Larkin, Kieran G., Michael A. Oldfield, and Hanno Klemm. ”Fast Fourier method for the accurate rotation of sampled images.” Optics communications 139.1 (1997) : 99-106.

[3] Paeth, Alan W. ”A fast algorithm for general raster rotation.” Graphics Interface. Vol. 86. 1986.