Traitement d'Image et du Signal - TP3

Laurent Cetinsoy, Karim Kouki, Aris Tritas

8 octobre 2016

Résumé

L'objectif de ce TP est de calculer des convolutions, vérifier la validité de filtres linéaires, extraire leur réponse impulsionnelle. Par ailleus nous mettons en pratique la méthode de rotation par distortion de L.Yarolavsky.

Introduction

Nous avons donné, lors du TP précédent, l'idée d'algorithme faisant une rotation efficace dans l'espace réel par succession de translations dans le domaine de Fourier. Par souçis de complétude, nous la ré-écrivons ci-suit.

Rotation d'image

Pour chaque point (x, y) de l'image originale nous souhaitons utiliser la TFD pour calculer le point (x', y') résultant d'une rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$. L'on peut définir la rotation par la matrice $\mathbf{M}$ ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{M}$ peut être ré-exprimée comme suit (e.g. [3]) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'idée de [1] [2] est d'utiliser trois convolutions linéaires (et donc séparables) qui distordent l'image successivement selon les axes x, y et x. Chacune s'écrit comme une translation dans le domaine de Fourier. La distortion $u_{dx}(x, y) = u(x + ay, y)$ pour l'axe x (où a contrôle l'angle) s'exprime par l'opérateur suivant :

$$D_x(\xi) = \mathcal{F}\{u_d(x, y)\} = \mathcal{F}\{u(x, y)\}e^{-2i\pi\xi a y}$$

Le signal réel distordu sur x par la transformée inverse : $u_{dx}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{D_x(\xi)\}$
Si l'on répête cette opération pour y et encore une fois pour x l'on retrouve le signal réel pivoté. Il s'agit bien de trois translations, donc un algorithme efficace qui les effectue peut être donné. A noter que cette méthode induit une perte d'information près des bords, il convient donc d'insérer l'image originale dans un cadre.

Exercices

Notons le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$.

Définition Système linéaire : pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
Si $e_1(t) \to s_1(t)$ et $e_2(t) \to s_2(t)$, alors $\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \to \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$

Définition Système invariant : pour $\tau \in \mathbb{R}$
Si $e(t) \to s(t)$ alors $e(t-\tau) \to s(t-\tau)$, τ étant une constante de décalalage.

Définition Produit de convolution de deux suites u_n et h_n :

$$(u \otimes h)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} h_k$$

Définition Réponse impulsionnelle :
La sortie d'un système linéaire invariant est égale au produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle h, $\; e(t) \longrightarrow s(t) = (e \otimes h)(t)$

Exercice 1

Pour les questions (1)-(4), l'entrée est la suite u_n et la sortie la suite v_n pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour les questions (5) et (6) l'entrée est une fonction $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et la sortie est une fonction $g(x) :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $v_n = u_n - u_{n-1} + 3u_{n+1}$:
   La relation est une somme de termes décalés et comporte des produits avec des scalaires, elle est donc linéaire. $\alpha(u_n - u_{n-1} + 3u_{n+1}) \to \alpha v_n$
   La relation est invariante car $u_{n-\tau} - u_{n-1-\tau} + 3u_{n+1-\tau} \to v_{n-\tau}$
   La réponse impulsionnelle peut être donnée par identification des termes de la somme du produit de convolution : $h_{-1} = 3, h_0 = 1, h_1 = -1$
2. $v_n = u_{2n}$:
   La relation impulsionnelle est un sous échantillonnage qui est linéaire. En effet $\alpha u_{2n} \to \alpha v_n$. De plus, sous-échantillonner la somme de deux signaux revient à sommer les sous-échantillons de ces signaux. La relation est non-invariante par translation car $u_{2n-\tau} \not\to v_{n-\tau} (= u_{2(n-\tau)})$
3. $v_n = \max(u_n, u_{n-1}, u_{n+1})$:
   L'opérateur max n'est pas linéaire. Considérons les suites u_n et u'_n définies par :

— $u_k = u'_k = 0 \; \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$
— $u_0 = -1, u_1 = -1, u_2 = -10$
— $u'_0 = -1, u'_1 = 1, u'_2 = 10$
Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} v_n + v'_n &= \max(u_0, u_1, u_2) + \max(u'_0, u'_1, u'_2) \\ &= \max(-1, -1, -10) + \max(-1, 1, 10) \\ &= 9 \\ &\neq \max(-1 - 1, -1 + 1, -10 + 10) = 1 \end{aligned}$$

4. $v_n = u_{n-1}$:
La réponse est linéaire car $\alpha u_{n-1} \to \alpha v_n$ et invariante par translation car $u_{n-1-\tau} \to v_{n-\tau}$
De même que pour la question 1, la réponse impulsionnelle peut être donnée par identification du terme non-nul du produit de convolution : $h_{-1} = 1$
5. $g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t) \,\mathrm{d}t$:
La relation est linéaire par linéarité de l'intégration :

$$\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(t) + f_2(t) \,\mathrm{d}t = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(t) \,\mathrm{d}t + \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_2(t) \,\mathrm{d}t$$

La relation est invariante par translation : soit l'entrée $f(t - \tau)$,
en posant $t' = t - \tau \implies \mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$

$$\int_{x-\frac{1}{2}-\tau}^{x+\frac{1}{2}-\tau} f(t') \,\mathrm{d}t' \to g(x - \tau)$$

Afin de calculer la réponse impulsionnelle, considérons la fonction porte suivante : $\Pi(t) = \mathbb{1}\{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$

$$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Pi(x - t) \,\mathrm{d}t = (f \otimes \Pi(x - t))(x).$$

Donc la réponse impulsionnelle s'écrit $h(t) = \mathbb{1}\{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$
6. $g(x) = \max\{f(t), t \in [x - 1, x + 1]\}$:
La réponse n'est pas linéaire, en effet

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) &\longrightarrow \max(\alpha_1 f_1(t), \alpha_2 f_2(t)) \\ &\not\longrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) \max(f_1(t), f_2(t)) \end{aligned}$$

De plus la réponse n'est pas invariante par translation.

$$f(t - \tau) \not\to \max\{f(t), t \in [x - 1 - \tau, x + 1 - \tau]\}$$

Exercice 2

1. $u_0 = 1,\ u_n = 0\ \forall n \neq 0$:
   $w_1(n) = (u \otimes v)(n) = (v \otimes u)(n) = v_n = \sqrt{\log(\cos(3n) + 2)}$
2. $u_0 = 2, u_1 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$
   L'on donne les termes de $w(n)$ non-nuls ci-dessous :
   — $w_2(0) = u_0 v_0 = 10$
   — $w_2(1) = u_0 v_1 + u_1 v_0 = 3.5$
   — $w_2(2) = u_1 v_1 + u_0 v_2 = 6.5$
   — $w_2(3) = u_1 v_1 + u_1 v_2 = -3.5$
3. $u_{-1} = 2, u_0 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$
   De même, les termes non-nuls sont :
   — $w_3(-1) = u_0 v_1 + u_{-1} v_0 = 8.5$
   — $w_3(0) = u_0 v_0 + u_{-1} v_1 = 2.5$
   — $w_3(1) = u_{-1} v_2 + u_0 v_1 = 6.5$
   — $w_3(2) = u_0 v_2 = -2$
4. $u_{-1} = 2, u_0 = \frac{3}{2}, u_1 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$
   En remarquant que les termes des suites u sont la somme des termes des suites des deux question précédentes, la distributivité du produit de convolution donne : $w_4(n) = w_2(n) + w_3(n),\ \forall n \in \mathcal{D}(w_2) \cup \mathcal{D}(w_3)$ où $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de chaque suite.
5. $u_n = (-\frac{1}{2})^n,\ n \in \mathbb{N},$ sinon $u_n = 0$ et $v_0 = 1, v_1 = \frac{1}{2}$:
   En ne gardant que les termes non-nuls du produit de convolution et en factorisant par $(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$$\begin{aligned}
(u \otimes v)(n) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} v_k \\
w(n) &= (-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= (-\frac{1}{2})^{n-1}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Résultats de rotation

Ci-dessous de gauche à droite se trouvent : l'image originale de dimension 502px $\times$ 502px, la même image après une rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

FIGURE 1 – Image originale, image après rotation

Références

[1] Unser, Michael, Philippe Thevenaz, and Leonid Yaroslavsky. ”Convolution-based interpolation for fast, high-quality rotation of images.” IEEE Transactions on Image Processing 4.10 (1995) : 1371-1381.

[2] Larkin, Kieran G., Michael A. Oldfield, and Hanno Klemm. ”Fast Fourier method for the accurate rotation of sampled images.” Optics communications 139.1 (1997) : 99-106.

[3] Paeth, Alan W. ”A fast algorithm for general raster rotation.” Graphics Interface. Vol. 86. 1986.