

# Traitement d'Image et du Signal - TP3

Laurent Cetinsoy, Karim Kouki, Aris Tritas

8 octobre 2016

## Résumé

L'objectif de ce TP est de calculer des convolutions, vérifier la validité de filtres linéaires, extraire leur réponse impulsionnelle. Par ailleurs nous mettons en pratique la méthode de rotation par distortion de L.Yaroslavsky.

## Introduction

Nous avons donné, lors du TP précédent, l'idée d'algorithme faisant une rotation efficace dans l'espace réel par succession de translations dans le domaine de Fourier. Par soucis de complétude, nous la ré-écrivons ci-suit.

## Rotation d'image

Pour chaque point  $(x, y)$  de l'image originale nous souhaitons utiliser la TFD pour calculer le point  $(x', y')$  résultant d'une rotation d'angle  $\theta \in [0, 2\pi]$ . L'on peut définir la rotation par la matrice  $\mathbf{M}$  ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{M}$  peut être ré-exprimée comme suit (e.g. [3]) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\tan \frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tan \frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'idée de [1] [2] est d'utiliser trois convolutions linéaires (et donc séparables) qui distordent l'image successivement selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $x$ . Chacune s'écrit comme une translation dans le domaine de Fourier. La distortion  $u_{dx}(x, y) = u(x + ay, y)$  pour l'axe  $x$  (où  $a$  contrôle l'angle) s'exprime par l'opérateur suivant :

$$D_x(\xi) = \mathcal{F}\{u_d(x, y)\}_1 = \mathcal{F}\{u(x, y)\}e^{-2i\pi\xi ay}$$

Le signal réel distordu sur  $x$  par la transformée inverse :  $u_{dx}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{D_x(\xi)\}$   
 Si l'on répète cette opération pour  $y$  et encore une fois pour  $x$  l'on retrouve le signal réel pivoté. Il s'agit bien de trois translations, donc un algorithme efficace qui les effectue peut être donné. A noter que cette méthode induit une perte d'information près des bords, il convient donc d'insérer l'image originale dans un cadre.

## Exercices

Notons le signal d'entrée  $e(t)$  et le signal de sortie  $s(t)$ .

**Définition** Système linéaire : pour  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Si  $e_1(t) \rightarrow s_1(t)$  et  $e_2(t) \rightarrow s_2(t)$ , alors  $\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \rightarrow \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$

**Définition** Système invariant : pour  $\tau \in \mathbb{R}$

Si  $e(t) \rightarrow s(t)$  alors  $e(t - \tau) \rightarrow s(t - \tau)$ ,  $\tau$  étant une constante de décalage.

**Définition** Produit de convolution de deux suites  $u_n$  et  $h_n$  :

$$(u \otimes h)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} h_k$$

**Définition** Réponse impulsionnelle :

La sortie d'un système linéaire invariant est égale au produit de convolution de l'entrée par la réponse impulsionnelle  $h$ ,  $e(t) \rightarrow s(t) = (e \otimes h)(t)$

### Exercice 1

Pour les questions (1)-(4), l'entrée est la suite  $u_n$  et la sortie la suite  $v_n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 Pour les questions (5) et (6) l'entrée est une fonction  $f \in L^1 \cap L^2$  définie sur  $\mathbb{R}$  et la sortie est une fonction  $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $v_n = u_n - u_{n-1} + 3u_{n+1}$  :

La relation est une somme de termes décalés et comporte des produits avec des scalaires, elle est donc linéaire.  $\alpha(u_n - u_{n-1} + 3u_{n+1}) \rightarrow \alpha v_n$

La relation est invariante car  $u_{n-\tau} - u_{n-1-\tau} + 3u_{n+1-\tau} \rightarrow v_{n-\tau}$

La réponse impulsionnelle peut être donnée par identification des termes de la somme du produit de convolution :  $h_{-1} = 3, h_0 = 1, h_1 = -1$

2.  $v_n = u_{2n}$  :

La relation impulsionnelle est un sous échantillonnage qui est linéaire. En effet  $\alpha u_{2n} \rightarrow \alpha v_n$ . De plus, sous-échantillonner la somme de deux signaux revient à sommer les sous-échantillons de ces signaux. La relation est non-invariante par translation car  $u_{2n-\tau} \not\rightarrow v_{n-\tau} (= u_{2(n-\tau)})$

3.  $v_n = \max(u_n, u_{n-1}, u_{n+1})$  :

L'opérateur max n'est pas linéaire. Considérons les suites  $u_n$  et  $u'_n$  définies par :

- $u_k = u'_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$
- $u_0 = -1, u_1 = -1, u_2 = -10$
- $u'_0 = -1, u'_1 = 1, u'_2 = 10$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
v_n + v'_n &= \max(u_0, u_1, u_2) + \max(u'_0, u'_1, u'_2) \\
&= \max(-1, -1, -10) + \max(-1, 1, 10) \\
&= 9 \\
&\neq \max(-1 - 1, -1 + 1, -10 + 10) = 1
\end{aligned}$$

4.  $v_n = u_{n-1}$  :

La réponse est linéaire car  $\alpha u_{n-1} \rightarrow \alpha v_n$  et invariante par translation

car  $u_{n-1-\tau} \rightarrow v_{n-\tau}$

De même que pour la question 1, la réponse impulsionnelle peut être donnée par identification du terme non-nul du produit de convolution :  $h_{-1} = 1$

5.  $g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t) dt$  :

La relation est linéaire par linéarité de l'intégration :

$$\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(t) + f_2(t) dt = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_1(t) dt + \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f_2(t) dt$$

La relation est invariante par translation : soit l'entrée  $f(t - \tau)$ ,  
en posant  $t' = t - \tau \implies dt' = dt$

$$\int_{x-\frac{1}{2}-\tau}^{x+\frac{1}{2}-\tau} f(t') dt' \rightarrow g(x - \tau)$$

Afin de calculer la réponse impulsionnelle, considérons la fonction porte suivante :

$$\Pi(x, t) = \mathbb{1}\{t - x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$$

$$g(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Pi(x, t) dt = (f \otimes \Pi(x, t))(x).$$

Donc la réponse impulsionnelle s'écrit  $h(t) = \mathbb{1}\{t - x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$

6.  $g(x) = \max\{f(t), t \in [x - 1, x + 1]\}$  :

La réponse n'est pas linéaire, en effet

$$\begin{aligned}
\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) &\longrightarrow \max(\alpha_1 f_1(t), \alpha_2 f_2(t)) \\
&\not\rightarrow \alpha_1 \max(f_1(t)) + \alpha_2 \max(f_2(t))
\end{aligned}$$

## Exercice 2

1.  $u_0 = 1, u_n = 0 \forall n \neq 0$  :  
 $w_1(n) = (u \otimes v)(n) = (v \otimes u)(n) = v_n = \sqrt{\log(\cos(3n) + 2)}$
2.  $u_0 = 2, u_1 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$   
 L'on donne les termes de  $w(n)$  non-nuls ci-dessous :
  - $w_2(0) = u_0 v_0 = 10$
  - $w_2(1) = u_0 v_1 + u_1 v_0 = 3.5$
  - $w_2(2) = u_1 v_1 + u_0 v_2 = 6.5$
  - $w_2(3) = u_1 v_1 + u_1 v_2 = -3.5$
3.  $u_{-1} = 2, u_0 = -\frac{1}{2}, v_0 = 5, v_1 = 3, v_2 = 4$   
 De même, les termes non-nuls sont :
  - $w_3(-1) = u_0 v_1 + u_{-1} v_0 = 8.5$
  - $w_3(0) = u_0 v_0 + u_{-1} v_1 = 2.5$
  - $w_3(1) = u_{-1} v_2 + u_0 v_1 = 6.5$
  - $w_3(2) = u_0 v_2 = -2$
4. En remarquant que les termes des suites  $u$  et  $v$  sont la somme des termes des suites des deux question précédentes, la distributivité du produit de convolution donne :  
 $w_4(n) = w_2(n) + w_3(n), \forall n \in \mathcal{D}(w_2) \cup \mathcal{D}(w_3)$  où  $\mathcal{D}$  est le domaine de définition de chaque suite.
5.  $u_n = (-\frac{1}{2})^n, n \in \mathbb{N}$ , sinon  $u_n = 0$  et  $v_0 = 1, v_1 = \frac{1}{2}$  :  
 En ne gardant que les termes non-nuls du produit de convolution et en factorisant par  $(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$$\begin{aligned}
 (u \otimes v)(n) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} v_k \\
 w(n) &= (-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^{n-1} \\
 &= (-\frac{1}{2})^{n-1} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

## Résultats de rotation

Ci-dessous de gauche à droite se trouvent : l'image originale de dimension 502px × 502px, la même image après une rotation d'angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

FIGURE 1 – Image originale, image après rotation

## Références

- [1] Unser, Michael, Philippe Thevenaz, and Leonid Yaroslavsky. "Convolution-based interpolation for fast, high-quality rotation of images." *IEEE Transactions on Image Processing* 4.10 (1995) : 1371-1381.
- [2] Larkin, Kieran G., Michael A. Oldfield, and Hanno Klemm. "Fast Fourier method for the accurate rotation of sampled images." *Optics communications* 139.1 (1997) : 99-106.
- [3] Paeth, Alan W. "A fast algorithm for general raster rotation." *Graphics Interface*. Vol. 86. 1986.