Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Отчет по курсу "Введение в Численные методы" Вариант 1-1

Яшагина Юлия
Группа 214

Москва 2024

Содержание

1 Постановка задачи

Решить СЛАУ $A_i x = b_i$ методом Гаусса для следующих пар A_i и b_i:

1.

$$A_1 = \left\{ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n} \right\} \in \mathbb{R}^{(n)\times(n)}$$

$$b_1 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ..., \frac{1}{2n-1} \right)^T \in \mathbb{R}^n, \quad n = 8$$

2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -2^2 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n^2 & -(n-1)^2 & -(n-2)^2 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

$$b_2 = (0.1, 0.1, ..., 0.1)^T \in \mathbb{R}^n, \quad n = 50$$

Провести сравнение решений двух задач на основе следующих критериев:
Норма невязки

$$\| r_i \|_2 = \| A_i x - b_i \|_2$$

Оценить количество операций (умножений и делений) относительно размерности матриц.
Подобрать более эффективный численный метод решения СЛАУ для второй задачи.
Бонусный вопрос: Где на практике может возникнуть СЛАУ с матрицей А1?

2 Выбор численного метода

Для решения первой задачи был использован метод Гаусса. Для решения второй задачи был использован метод Гаусса с выбором ведущих элементов по строкам. Этот метод эффективен для численных вычислений и анализа. Метод Гаусса используется в различных областях, включая:

1. Математика: Решение систем линейных уравнений.
2. Физика: Моделирование физических процессов и решение задач механики.
3. Экономика: Оптимизация ресурсов и анализ данных.
4. Инженерия: Проектирование и анализ электрических цепей.
5. Компьютерные науки: Алгоритмы для обработки данных и графов.

3 Обзор численных методов решения СЛАУ

3.1 Метод Гаусса

Метод Гаусса удобно условно разделить на два этапа. На первом этапе (прямой ход) система (1) приводится к треугольному виду. Затем на втором этапе (обратный ход) осуществляется последовательное отыскание неизвестных x_1,...,x_n из этой треугольной системы.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = f_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = f_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = f_n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Не ограничивая общности, будем считать, что коэффициент a_{11}, который называют ведущим элементом первого шага, отличен от нуля (в случае a_{11} поменяем местами уравнения с номерами 1 и i , при котором $a_{i1} \neq 0$; поскольку система предполагается невырожденной, то такой номер i заведомо найдется).
Разделим все члены первого уравнения на a_11 и введем в качестве новых коэффициентов c_{1i}, i=2,...n и правой части y_1 отношения

$$
c_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \;\; c_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, ... \;\; c_{1n} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \;\; y_1 = \frac{f_1}{a_{11}} \tag{2}
$$

Вычтем из каждого i-го уравнения системы (i = 2,..,n) первое уравнение умноженное на a_{11}. Проделав это, мы исключим неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Преобразованная таким образом система (1) примет эквивалентный вид:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + ... + c_{1n}x_n = y_1 \\
&a^{(1)}_{22}x_2 + a^{(1)}_{23}x_3 + ... + a^{(1)}_{2n}x_n = f^{(1)}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a^{(1)}_{n2}x_2 + a^{(1)}_{n3}x_3 + ... + a^{(1)}_{nn}x_n = f^{(1)}_n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Значения новых коэффициентов и правых частей системы (3) вычисляются по формулам:

$$
a^{(1)}_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}, \;\; f^{(1)}_i = f_i - a_{i1}\frac{f_1}{a_{11}} \tag{4}
$$

Продолжая далее процесс исключения, после $(n-1)$ шага редуцируем исходную систему к виду:

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + ... + c_{1n}x_n &= y_1 \\
x_2 + c_{23}x_3 + ... + c_{2n}x_n &= y_2
\end{aligned}
$$

$$.. \tag{5}$$

$$x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = y_{n-1}$$

$$x_n = y_{n-1}$$

Обратный ход состоит в последовательном определении неизвестных из системы (5) в обратном порядке:

$$x_n = y_n$$

$$x_{n-1} = y_{n-1} - c_{n-1,n}x_n$$

$$x_{n-2} = y_{n-2} - c_{n-2,n-1}x_{n-1} - c_{n-2,n}x_n \tag{6}$$

$$..$$

$$x_1 = y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - ... - c_{1n}x_n$$

3.2 Число операций

Первый шаг прямого хода, согласно формулам (2) и (4), требует n делений и $n(n-1)$ сложений и умножений. Мы учитываем деления отдельно, поскольку для компьютера это более сложная операция. Переходя последовательно от n к $(n-1)$, потом от $(n-1)$ к $(n-2)$ и т.д. подсчитаем общее число арифметических операций на стадии прямого хода. Оно включает делений

$$Q_1 = n + (n+1) + ... + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{7}$$

Сложений и умножений

$$Q_2 = n(n-1) + (n-1)(n-2) + ... + 2 \cdot 1 = \frac{1}{3}n(n^2-1) \tag{8}$$

Обратный ход, согласно формулам (6), вообще не требует деления, а необходимое число сложений и умножений подсчитывается по формуле

$$Q_3 = 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \tag{9}$$

Таким образом, общее число сложений и умножений:

$$Q = Q_2 + Q_3 = \frac{1}{3}n(n-1)(n_{\frac{5}{2}}) = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2) \tag{10}$$

3.3 Выбор ведущего элемента в строке

Предположим, что в процессе приведения системы (1) к треугольному виду у матрицы Собразовались большие по модулю элементы: $|c_{ij}| > 1$

Тогда при вычислении неизвестных во время обратного хода умножение найденных с ошибками округления чиселx_i на большие по модулю элементы матрицы приведет к увеличению этих ошибок. Наоборот, если матрица оказалась такой, что все ее элементы удовлетворяют условию $|c_{ij}| < 1$, то роль ошибок округления в процессе вычислений будет нивелироваться. Приступая к первому шагу прямого хода метода Гаусса, рассмотрим элементы a_{ij} первой строки матрицы А и найдем среди них элемент наибольший по модулю. Пусть он имеет номер j_1. Поменяем в системе (1) первый столбец и столбец с номером j_1 местами, изменив соответствующим образом нумерацию неизвестных. В результате такой процедуры наибольший по модулю элемент первой строки станет ведущим элементом первого шага. Благодаря этому элементы первой строки матрицы будут удовлетворять неравенству $|c_{ij}| < 1$

Процедуру выделения наибольшего по модулю элемента в очередной строке и превращения его в ведущий элемент нужно затем повторять во время каждого шага прямого хода метода Гаусса. В этом случае все элементы треугольной матрицы c_{ij} будут удовлетворять неравенствам $|c_{ij}| < 1$, обеспечивая устойчивость метода по отношению к ошибкам округления.

4 Программная реализации метода Гаусса

Реализация решения СЛАУ методом Гаусса представлена в файле mg1.c. Реализация решения СЛАУ методом Гаусса с выбором ведущего элемента по строкам представлена в файле mg2.c.

4.1 Анализ реализации метода Гаусса

Результат работы первой программы:

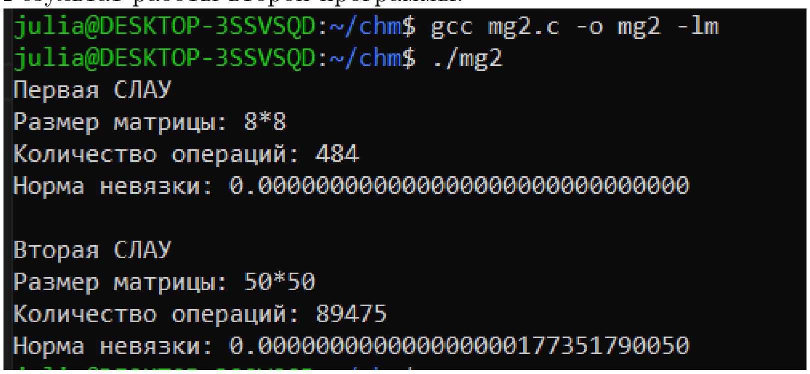
```
julia@DESKTOP-3SSVSQD:~/chm$ gcc mg1.c -o mg1 -lm
julia@DESKTOP-3SSVSQD:~/chm$ ./mg1
Первая СЛАУ
Размер матрицы: 8*8
Количество операций 484
Норма невязки: 0.000000000000000000000000000000

Вторая СЛАУ
Размер матрицы: 50*50
Количество операций 89475
Норма невязки: 475325.218799710622988641262054443359
```

Выводы: С повышением порядка матрицы количество операций увеличивается, точность становится ниже. Для второй матрицы программа выдает неверный ответ. Следовательно, следует выбрать другой способ решения.

4.2 Анализ реализации метода Гаусса с выбором ведущего элемента

Результат работы второй программы:

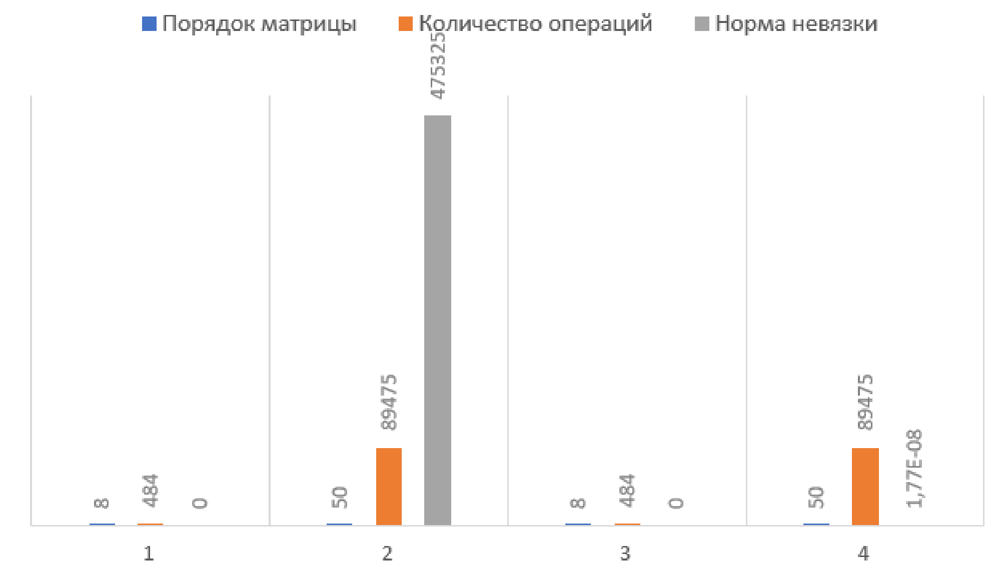


```
julia@DESKTOP-3SSVSQD:~/chm$ gcc mg2.c -o mg2 -lm
julia@DESKTOP-3SSVSQD:~/chm$ ./mg2
Первая СЛАУ
Размер матрицы: 8*8
Количество операций: 484
Норма невязки: 0.000000000000000000000000000000

Вторая СЛАУ
Размер матрицы: 50*50
Количество операций: 89475
Норма невязки: 0.000000000000000000177351790050
```

Выводы: По сравнению с первым методом второй выдает более точный результат, норма невязки второй программы примерна равна нулю. Количество операций оценивается так же.

5 Графическое представление результатов



6 Бонусный вопрос

Вторая матрица - это матрица Гильберта. Она используется для построения интерполяционных полиномов и в задачах наименьших квадратов.
История: Гильберт (1894) ввёл матрицу Гильберта при изучении следующего вопроса: «Предположим, что I = [a, b] — вещественный интервал. Возможно ли тогда найти ненулевой многочлен P с целочисленными коэффициентами, такой что интеграл

$$\int_a^b P(x)^2 \, dx \tag{11}$$

был бы меньше любого заданного числа $\varepsilon > 0$» Для ответа на данный вопрос Гильберт вывел точную формулу для определителя матриц Гильберта и исследовал их асимптотику.

7 Выводы

Метод Гаусса и его модификация с выбором ведущего элемента являются важными алгоритмами для решения систем линейных уравнений. Анализируя полученные данные, можно сделать следующие выводы. Метод Гаусса достаточно прост в понимании и реализации, особенно для небольших систем уравнений, для небольших матриц метод работает быстро и эффективно. Однако, метод может быть неустойчивым, особенно когда элементы матрицы имеют большие различия в величинах или когда матрица близка к вырожденной. Для больших матриц метод может потребовать значительных вычислительных ресурсов и времени. Без выбора ведущего элемента могут возникнуть проблемы с делением на ноль или потерей точности.

Выбор ведущего элемента помогает избежать деления на маленькие числа, что снижает вероятность ошибок округления и увеличивает точность вычислений. Метод Гаусса с выбором ведущего элемента лучше справляется с системами, где матрица может быть близка к вырожденной. Стоит отметить, что алгоритм становится более сложным из-за необходимости отслеживания и выбора ведущих элементов, что может усложнить код. Кроме того, Выбор ведущего элемента требует дополнительных операций (поиск максимума в столбце), что может увеличить общее время выполнения для очень больших систем. В некоторых реализациях может потребоваться дополнительная память для хранения индексов строк или столбцов, что может быть критично для больших задач.

8 Литература

1. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк «Линейная алгебра: Учебник для вузов»
2. В.С.Панферов Лекции по линейной алгебре
3. Е.Е.Тыртышников «Матричный анализ и линейная алгебра»
4. Д.П.Костомаров, А.П.Фаворский «Вводные лекции по численным методам»
5. Компьютерные науки: Алгоритмы для обработки данных и графов.