n-ビンゴの臨界盤面数問題

以下，$\mathbb{B} := \{0, 1\}$ は通常のブール代数としての構造を持つものとする．また行ベクトルと列ベクトルは自然に同一視し，特に断りのない限り行ベクトルで表現する．

定義 1. 0 でない自然数 n に対して，**n-ビンゴ** (n-Bingo) とは以下に定義されるような対象の総称である．

(1) **n-ビンゴ盤** (n-Bingo board) ないし単に**盤面** (board) とは，$\mathbb{B}$ 上の $n \times n$ 行列のことである．n-ビンゴ盤の全体がなす集合を $\mathcal{B}_n := \mathbb{B}^{n \times n}$ とも表す．

(2) 盤面 $B = [b_{i,j}] \in \mathcal{B}_n$ と自然数 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して，
- B の第 i **ヨコ列** (horizontal) $R_i(B)$ とはいわゆる第 i 行，すなわちベクトル $(b_{i,1}, \dots, b_{i,n}) \in \mathbb{B}^n$ のことである．
- B の第 i **タテ列** (vertical) $C_i(B)$ とはいわゆる第 i 列，すなわちベクトル $(b_{1,i}, \dots, b_{n,i}) \in \mathbb{B}^n$ のことである．
- B の**左ナナメ列** (left-diagnal) とは $D_l(B) := (b_{1,1}, \dots, b_{i,i}, \dots, b_{n,n})$ で表されるベクトル $D_l(B) \in \mathbb{B}^n$ のことである．
- B の**右ナナメ列** (right-diagnal) とは $D_r(B) := (b_{1,n}, \dots, b_{i,n-i+1}, \dots, b_{n,1})$ で表されるベクトル $D_r(B) \in \mathbb{B}^n$ のことである．
- B の各ヨコ列，タテ列，左右ナナメ列を総じて B の**列** (line) といい，その集合を $L(B)$ で表す．

(3) 盤面 $B \in \mathcal{B}_n$ について，ある列 $l \in L(B)$ が存在して $l = (1, \dots, 1)$ が成り立つとき，またそのときに限り，B は**ビンゴ** (bingo) であるという．

記法 1. 盤面 $B \in \mathcal{B}_n$ の (r, c) 成分を $a \in \mathbb{B}$ に置き換えた盤面を $B_{[(r,c) \mapsto a]}$ で表す．すなわち $B = [b_{i,j}]$ とすれば，

$$B_{[(r,c) \mapsto a]} = [a_{i,j}], \quad a_{i,j} = \begin{cases} a & \text{if } (i,j) = (r,c) \\ b_{i,j} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と書くことができる．

定義 2. 盤面 $B = [b_{i,j}] \in \mathcal{B}_n$ が**臨界** (critical) であるとは，B が次の条件をどちらも満たすことをいう．

- B はビンゴでない．
- $b_{i,j} = 0$ であるような任意の i, j $(1 \leq i, j \leq n)$ に対して，$B_{[(i,j) \mapsto 1]}$ がビンゴになる

このとき，次のような問題を考えることができる．

問題 1 (Kuwada, 2024)**.** n-ビンゴの臨界盤面はいくつあるか．

なお問題 1（臨界盤面数問題）は未解決である．

定義 3. 各 0 でない自然数 n に対して，$\mathcal{B}_n$ 上の順序 $\preceq$ を次で定義する．

$A, B \in \mathcal{B}_n$ に対して 0 個以上の組 $(i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)$ が存在（ただし各 $1 \le k \le m$ について $1 \le i_k, j_k \le n$）して