『ストリング図で学ぶ圏論の基礎』勉強会

§1.3 自然変換

山田鈴太

電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程 1 年

1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

定義 1.66 (自然変換)

α が F から G への自然変換 (natural transformation) $\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下の条件を満たす

(1) α は各 $a \in \mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$

(2) 任意の $a, b \in \mathcal{C}$ と $f \colon a \to b$ に対して $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$（自然性, naturality）

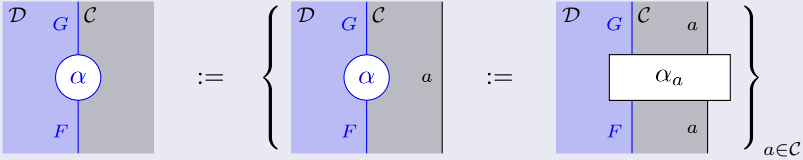
- α が F から G への自然変換であることを $\alpha \colon F \Rightarrow G$ と書く

1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

定義 1.66 (自然変換)

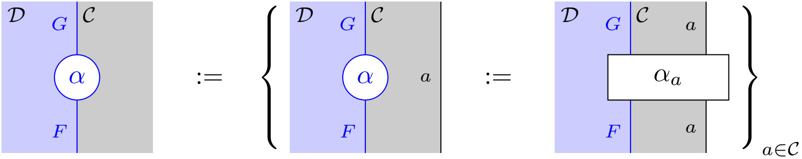
(1) α は各 $a \in \mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$



(1.67)

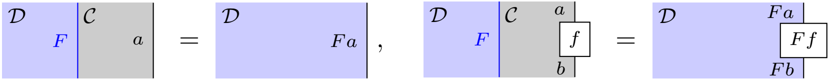
- α を構成する各射 α_a を α の成分 (component) と呼ぶ

1.3.1 自然変換の定義



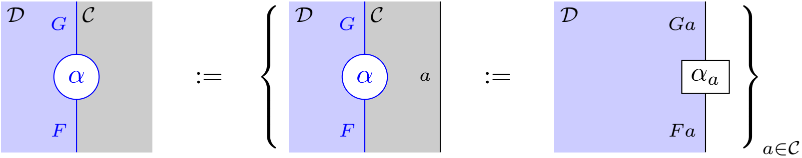
(1.67)

- 一番右の図は少しわかりづらい気がする……
- 我々は既に関手の適用をストリング図として導入したのだった



(1.40)

- ならばこうしてしまってもよいのでは？



(1.67')

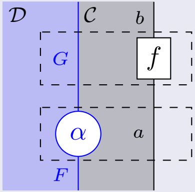
1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ は圏，$F,G\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ は関手

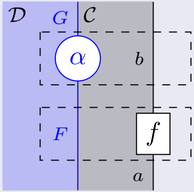
定義 1.66 (自然変換)

(2) 任意の $a,b\in\mathcal{C}$ と $f\colon a\to b$ に対して $\underline{Gf\circ\alpha_a=\alpha_b\circ Ff}$（自然性, naturality）

$$Gf\circ\alpha_a=\alpha_b\circ Ff \quad \rightleftarrows$$



$=$

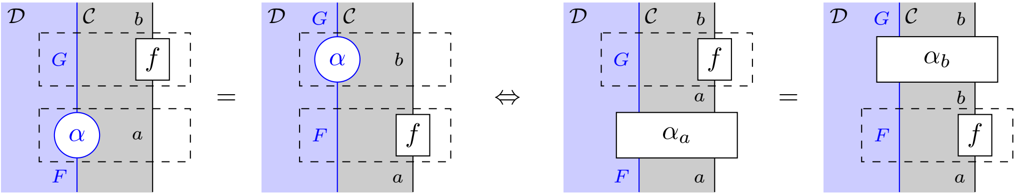


(1.68)

1.3.1 自然変換の定義

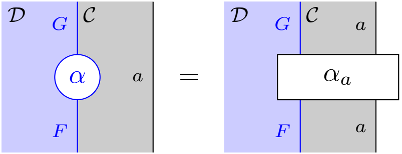
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手，$\alpha\colon F \Rightarrow G$ は自然変換

- 自然性 $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$ は次のようにも表せる



(nat)

ただし



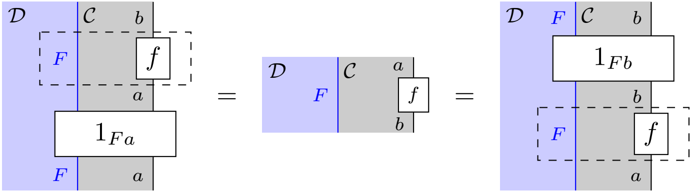
を思い出す

- f が α を素通りして縦方向に動ける
  - スライディング則

1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

- 各 $a \in \mathcal{C}$ に対して Fa の恒等射 1_{Fa} を集めると，$1_F := \left\{ Fa \xrightarrow{1_{Fa}} Fa \right\}_{a \in \mathcal{C}}$ は F の恒等自然変換
  - 実際，以下の通り各 $a \in \mathcal{C}$ について自然性の条件を満たす



1.3.1 自然変換の定義