# 『ストリング図で学ぶ圏論の基礎』勉強会

## §1.3 自然変換

山田鈴太

電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程 1 年

# 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ は圏，$F,G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ は関手

**定義 1.66 (自然変換)**

$\alpha$ が $F$ から $G$ への**自然変換** (natural transformation) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の条件を満たす

(1) $\alpha$ は各 $a\in\mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{Fa\xrightarrow{\alpha_a}Ga\right\}_{a\in\mathcal{C}}$

(2) 任意の $a,b\in\mathcal{C}$ と $f\colon a\to b$ に対して $Gf\circ\alpha_a=\alpha_b\circ Ff$ （**自然性**, naturality）

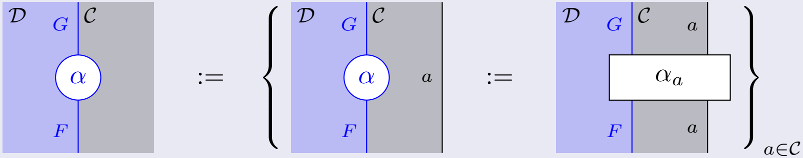
- $\alpha$ が $F$ から $G$ への自然変換であることを $\alpha\colon F\Rightarrow G$ と書く

# 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

## 定義 1.66 (自然変換)

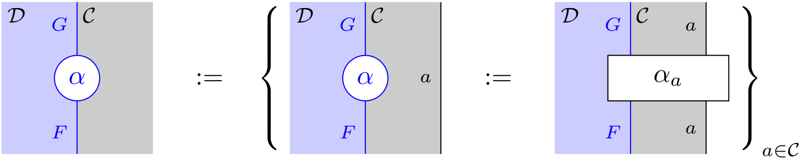
(1) $\alpha$ は各 $a \in \mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$




(1.67)

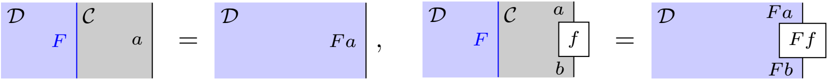
- $\alpha$ を構成する各射 $\alpha_a$ を $\alpha$ の**成分** (component) と呼ぶ

# 1.3.1 自然変換の定義



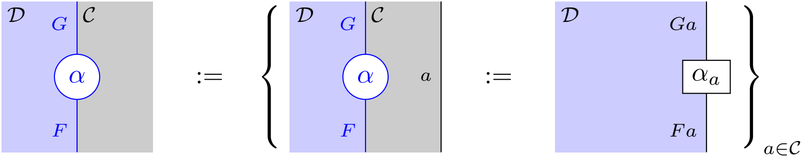

(1.67)

- 一番右の図は少しわかりづらい気がする……
- 我々は既に関手の適用をストリング図として導入したのだった




(1.40)

- ならばこうしてしまってもよいのでは？



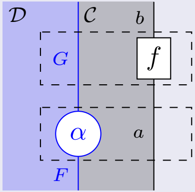

(1.67')

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

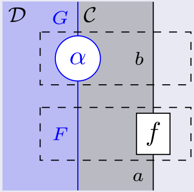
**定義 1.66 (自然変換)**

(2) 任意の $a, b \in \mathcal{C}$ と $f \colon a \to b$ に対して $\underline{Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff}$（自然性, naturality）

$$Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff \quad \rightleftarrows$$




$=$

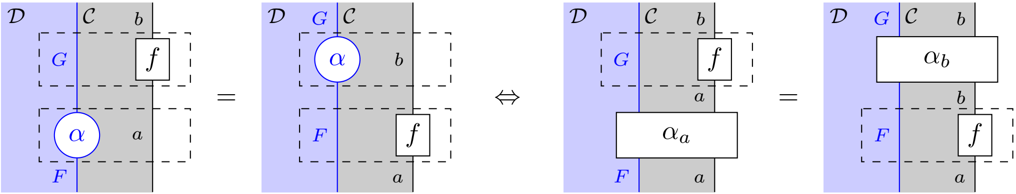



(1.68)

# 1.3.1 自然変換の定義

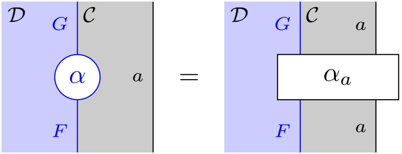
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手，$\alpha \colon F \Rightarrow G$ は自然変換

- 自然性 $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$ は次のようにも表せる




(nat)

ただし

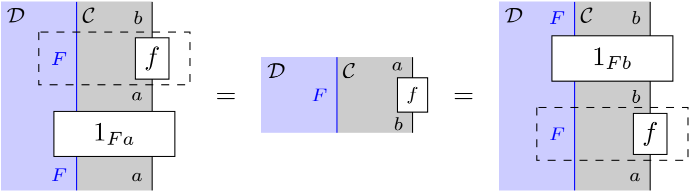



を思い出す

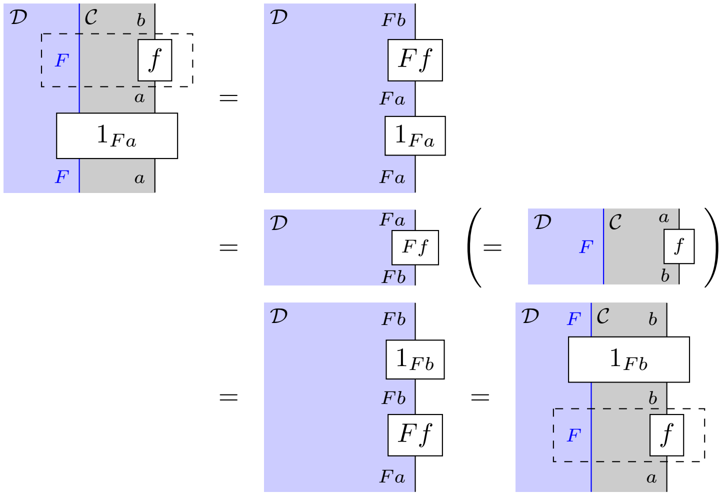
- $f$ が $\alpha$ を素通りして縦方向に動ける
  - スライディング則

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

- 各 $a \in \mathcal{C}$ に対して $Fa$ の恒等射 $1_{Fa}$ を集めると，$1_F := \left\{ Fa \xrightarrow{1_{Fa}} Fa \right\}_{a \in \mathcal{C}}$ は $F$ の恒等自然変換
  - 実際，以下の通り各 $a \in \mathcal{C}$ について自然性の条件を満たす



# 1.3.1 自然変換の定義



# 1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手，$\alpha \colon F \Rightarrow G$ は自然変換

- $\alpha = \{\alpha_a\}_{a \in \mathcal{C}}$ を，$\mathcal{C}$ の対象と射への作用と見なせる

対象への作用: $\mathcal{C}$ の対象を対応する $\alpha$ の成分に写す

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{ob}\,\mathcal{C} & \to & \mathcal{D}(Fa, Ga) & \subseteq \mathrm{mor}\,\mathcal{D} \\ a & \mapsto & \alpha_a & \end{array}$$

射への作用: $\alpha$ と射 $f$ を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{mor}\,\mathcal{C} \supseteq & \mathcal{C}(a, b) & \to & \mathcal{D}(Fa, Gb) & \subseteq \mathrm{mor}\,\mathcal{D} \\ & f & \mapsto & \alpha \bullet f & \end{array}$$

# 1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ は圏，$F,G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ は関手，$\alpha\colon F\Rightarrow G$ は自然変換

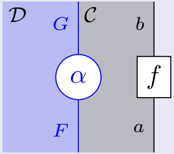
射への作用: $\alpha$ と射 $f$ を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{mor}\mathcal{C}\supseteq & \mathcal{C}(a,b) & \to & \mathcal{D}(Fa,Gb) & \subseteq\operatorname{mor}\mathcal{D} \\ & f & \mapsto & \alpha\bullet f & \end{array}$$

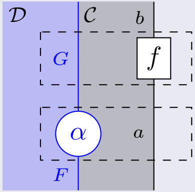
## $\alpha\bullet f$ の定義

$$\alpha\bullet f \quad := \quad Gf\circ\alpha_a \quad = \quad \alpha_b\circ Ff$$

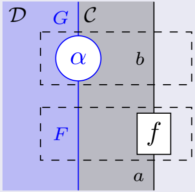
$$\downharpoonleft\!\upharpoonright$$




:=




=




- 右の等号は単に自然性の条件

# 1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手，$\alpha \colon F \Rightarrow G$ は自然変換

対象への作用: $a \mapsto \alpha_a$

射への作用: $f \mapsto \alpha \bullet f := Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$

- 自然変換 $\alpha$ は各 $a \in \mathcal{C}$ に対する要素の集まり $\{\alpha_a\}_{a \in \mathcal{C}}$
  - 対象への作用が定まれば，そこから自然変換を一意に得られる
- よって射への作用は冗長な情報とも言える
- 自然変換の射への作用は，関手のそれと対応するものと考えてもよい

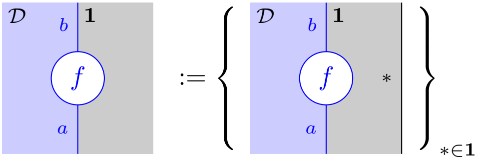
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

| 入力 | $F$ の出力 | $\alpha$ の出力 |
| --- | --- | --- |
| $a \in \mathcal{C}$ | $Fa \in \mathcal{D}$ | $Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga$ |
| $a \xrightarrow{f} b$ | $Fa \xrightarrow{Ff} Fb$ | $Fa \xrightarrow{\alpha \bullet f} Gb$ |

例 1.49 任意の対象は関手とみなせる：各 $a \in \mathcal{D}$ に対して $\Delta_{\mathbf{1}} a \colon \mathbf{1} \to \mathcal{D};\ * \mapsto a$

## 例 1.72 任意の射は自然変換とみなせる

$a, b \in \mathcal{D}$ をともに関手 $\mathbf{1} \to \mathcal{D}$ とみる．
任意の射 $f \in \mathcal{D}(a, b)$ に対して，$\{f\}_{* \in \mathbf{1}}$ は自然変換 $a \Rightarrow b$ である．




以下のことに注意

- 対象 $a$ と $b$ は，関手 $\Delta_{\mathbf{1}} a, \Delta_{\mathbf{1}} b \colon \mathbf{1} \to \mathcal{D}$ と同一視されている
- 厳密には $f$ でなく集合 $\{f\}$ が自然変換である
  - とはいえ $\{f\}$ はただ 1 つの元 $f$ しか持たないので，こちらも同一視できる

# 1.3.3 自然変換の例

$\mathcal{C}$ は離散圏，$\mathcal{D}$ は一般の圏

**例 1.73　任意の射の集まりは自然変換とみなせる**

各 $c \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{D}$ の対象 $a_c, b_c \in \mathcal{D}$ を任意に選び，射の集まり $\alpha := \left\{ a_c \xrightarrow{\alpha_c} b_c \right\}$ も任意に選ぶ．このとき関手 $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が

$$Fc := a_c, \quad Gc := b_c$$

で一意に定まり，$\alpha$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ となる．

自然性の確認：

1. $\mathcal{C}$ の射は各 $c \in \mathcal{C}$ の恒等射 $1_c$ のみ
2. 各 $1_c$ に対して，$G1_c \circ \alpha_c = \alpha_c \circ F1_c$ が成立

$$G1_c \circ \alpha_c = 1_{Gc} \circ \alpha_c = \alpha_c = \alpha_c \circ 1_{Fc} = \alpha_c \circ F1_c$$

例 1.65 双関手 $F\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ と対象 $c\in\mathcal{C}$ に対し，$F(c,-)\colon \mathcal{D}\to\mathcal{E}$ を

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{ob}\,\mathcal{D}\ni & d & \mapsto & F(c,d) & \in \mathrm{ob}\,\mathcal{E}, \\ \mathrm{mor}\,\mathcal{D}\ni & g & \mapsto & F(1_c,g) & \in \mathrm{mor}\,\mathcal{E} \end{array}$$

と定めれば $F(c,-)$ は関手

**例 1.75**

$\mathcal{C}$ の任意の射 $c \xrightarrow{f} c'$ に対して，射の集まり $F(f,-) := \{F(f,1_d)\}_{d\in\mathcal{D}}$ は自然変換 $F(c,-)\Rightarrow F(c',-)$ である．