

# 『ストリング図で学ぶ圏論の基礎』勉強会

## §1.3 自然変換

山田鈴太

電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程 1 年

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

### 定義 1.66 (自然変換)

$\alpha$  が  $F$  から  $G$  への自然変換 (natural transformation)  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  以下の条件を満たす

- (1)  $\alpha$  は各  $a \in \mathcal{C}$  で添字付けられた射の集まり  $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$
- (2) 任意の  $a, b \in \mathcal{C}$  と  $f: a \rightarrow b$  に対して  $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$  (自然性, naturality)

▶  $\alpha$  が  $F$  から  $G$  への自然変換であることを  $\alpha: F \Rightarrow G$  と書く

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

### 定義 1.66 (自然変換)

(1)  $\alpha$  は各  $a \in \mathcal{C}$  で添字付けられた射の集まり  $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \quad G \quad \mathcal{C} \\ \text{---} \alpha \text{---} \\ F \end{array} := \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad G \quad \mathcal{C} \\ \text{---} \alpha \text{---} a \\ F \end{array} \right\}_{a \in \mathcal{C}} := \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad G \quad \mathcal{C} \quad a \\ \text{---} \alpha_a \text{---} \\ F \quad a \end{array} \right\}_{a \in \mathcal{C}} \quad (1.67)$$

►  $\alpha$  を構成する各射  $\alpha_a$  を  $\alpha$  の成分 (component) と呼ぶ

## 1.3.1 自然変換の定義

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & \\ \hline F & \\ \hline \end{array} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & a \\ \hline F & \\ \hline \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \quad a \\ \hline \alpha_a & \\ \hline F & a \\ \hline \end{array} \right\}_{a \in C} \quad (1.67)$$

- ▶ 一番右の図は少しわかりづらい気がする……
- ▶ 我々は既に関手の適用をstring図として導入したのであった

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & C \\ \hline F & a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Fa \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & C \quad a \\ \hline F & f \\ \hline & b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Fa \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline Ff \\ \hline Fb \\ \hline \end{array} \quad (1.40)$$

- ▶ ならばこうしてしまってもよいのでは？

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & \\ \hline F & \\ \hline \end{array} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & a \\ \hline F & \\ \hline \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Ga \\ \hline \alpha_a \\ \hline Fa \\ \hline \end{array} \right\}_{a \in C} \quad (1.67')$$

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

### 定義 1.66 (自然変換)

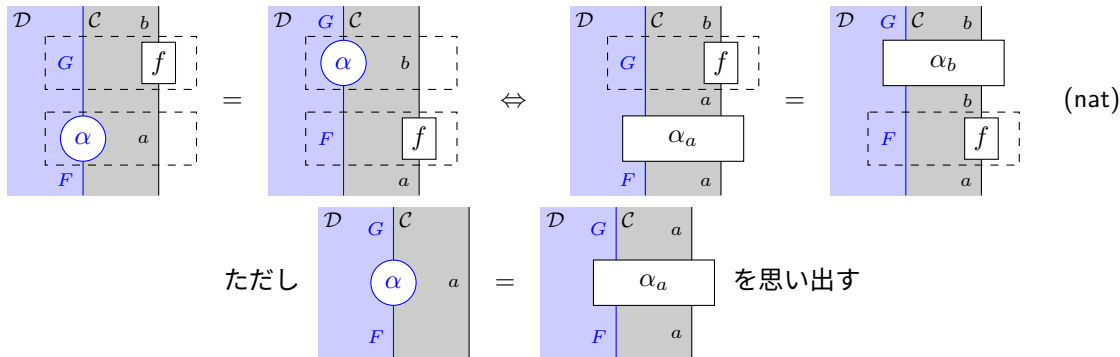
(2) 任意の  $a, b \in \mathcal{C}$  と  $f: a \rightarrow b$  に対して  $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$  (自然性, naturality)

$$Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \quad b \\ \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad a \\ \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \quad b \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \quad a \end{array} \quad (1.68)$$

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手,  $\alpha: F \Rightarrow G$  は自然変換

- ▶ 自然性  $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$  は次のようにも表せる

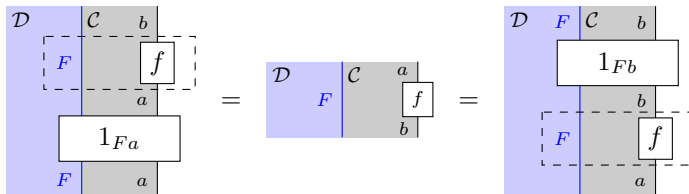


- ▶  $f$  が  $\alpha$  を素通りして縦方向に動ける
  - ▶ スライディング則

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

- ▶ 各  $a \in \mathcal{C}$  に対して  $Fa$  の恒等射  $1_{Fa}$  を集めると,  $1_F := \left\{ Fa \xrightarrow{1_{Fa}} Fa \right\}_{a \in \mathcal{C}}$  は  $F$  の **恒等自然変換**
- ▶ 実際, 以下の通り各  $a \in \mathcal{C}$  について自然性の条件を満たす



## 1.3.1 自然変換の定義

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{D} & \mathcal{C} & b \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} & \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 1_{Fa} \\ \hline \end{array} & & \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline F & & a \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & Fb \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Ff \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fa \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1_{Fa} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fa \\ \hline \end{array}
 \\
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & Fa \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Ff \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fb \\ \hline \end{array}
 \left( = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{D} & \mathcal{C} & a \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}
 \right)
 \\
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & Fb \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1_{Fb} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fb \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Ff \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fa \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{D} & F & \mathcal{C} & b \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1_{Fb} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$



## 1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手,  $\alpha: F \Rightarrow G$  は自然変換

▶  $\alpha = \{\alpha_a\}_{a \in \mathcal{C}}$  を,  $\mathcal{C}$  の対象と射への作用と見なせる

対象への作用:  $\mathcal{C}$  の対象を対応する  $\alpha$  の成分に写す

$$\begin{array}{ccc} \text{ob } \mathcal{C} & \rightarrow & \mathcal{D}(Fa, Ga) \subseteq \text{mor } \mathcal{D} \\ a & \mapsto & \alpha_a \end{array}$$

射への作用:  $\alpha$  と射  $f$  を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccc} \text{mor } \mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}(a, b) & \rightarrow & \mathcal{D}(Fa, Gb) & \subseteq & \text{mor } \mathcal{D} \\ f & \mapsto & \alpha \bullet f & & \end{array}$$

## 1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手,  $\alpha: F \Rightarrow G$  は自然変換

射への作用:  $\alpha$  と射  $f$  を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccc} \text{mor } \mathcal{C} \supseteq & \mathcal{C}(a, b) & \rightarrow & \mathcal{D}(Fa, Gb) & \subseteq \text{mor } \mathcal{D} \\ & f & \mapsto & \alpha \bullet f & \end{array}$$

### $\alpha \bullet f$ の定義

$$\alpha \bullet f \quad := \quad Gf \circ \alpha_a \quad = \quad \alpha_b \circ Ff$$

$\downarrow \uparrow$

$:=$        $=$

▶ 右の等号は単に自然性の条件

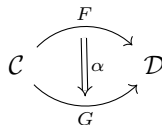
## 1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手,  $\alpha: F \Rightarrow G$  は自然変換

対象への作用:  $a \mapsto \alpha_a$

射への作用:  $f \mapsto \alpha \bullet f := Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$

- ▶ 自然変換  $\alpha$  は各  $a \in \mathcal{C}$  に対する要素の集まり  $\{\alpha_a\}_{a \in \mathcal{C}}$ 
  - ▶ 対象への作用が定まれば, そこから自然変換を一意に得られる
- ▶ よって射への作用は冗長な情報とも言える
- ▶ 自然変換の射への作用は, 関手のそれと対応するものと考えてもよい



入力	$F$ の出力	$\alpha$ の出力
$a \in \mathcal{C}$	$Fa \in \mathcal{D}$	$Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga$
$a \xrightarrow{f} b$	$Fa \xrightarrow{Ff} Fb$	$Fa \xrightarrow{\alpha \bullet f} Gb$

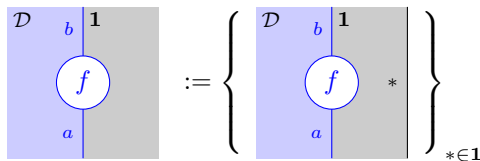
### 1.3.3 自然変換の例

例 1.49 任意の対象は関手とみなせる：各  $a \in \mathcal{D}$  に対して  $\Delta_1 a: 1 \rightarrow \mathcal{D}; * \mapsto a$

例 1.72 任意の射は自然変換とみなせる

$a, b \in \mathcal{D}$  をともに関手  $1 \rightarrow \mathcal{D}$  とみる。

任意の射  $f \in \mathcal{D}(a, b)$  に対して,  $\{f\}_{* \in 1}$  は自然変換  $a \Rightarrow b$  である。


$$\left( \begin{array}{c|c} \mathcal{D} & 1 \\ \hline b & a \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ f \\ \circlearrowright \end{array} \right) := \left\{ \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{D} & 1 \\ \hline b & a \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ f \\ \circlearrowright \end{array} \right)_{* \in 1} \right\}$$

以下のことに注意

- ▶ 対象  $a$  と  $b$  は, 関手  $\Delta_1 a, \Delta_1 b: 1 \rightarrow \mathcal{D}$  と同一視されている
- ▶ 厳密には  $f$  でなく集合  $\{f\}$  が自然変換である
  - ▶ とはいえ  $\{f\}$  はただ 1 つの元  $f$  しか持たないので, こちらも同一視できる

### 1.3.3 自然変換の例

$\mathcal{C}$  は離散圏,  $\mathcal{D}$  は一般の圏

#### 例 1.73 任意の射の集まりは自然変換とみなせる

各  $c \in \mathcal{C}$  に対して  $\mathcal{D}$  の対象  $a_c, b_c \in \mathcal{D}$  を任意に選び, 射の集まり  $\alpha := \left\{ a_c \xrightarrow{\alpha_c} b_c \right\}$  も任意に選ぶ.  
このとき関手  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が

$$Fc := a_c, \quad Gc := b_c$$

で一意に定まり,  $\alpha$  は自然変換  $F \Rightarrow G$  となる.

自然性の確認:

1.  $\mathcal{C}$  の射は各  $c \in \mathcal{C}$  の恒等射  $1_c$  のみ
2. 各  $1_c$  に対して,  $G1_c \circ \alpha_c = \alpha_c \circ F1_c$  が成立

$$G1_c \circ \alpha_c = 1_{Gc} \circ \alpha_c = \alpha_c = \alpha_c \circ 1_{Fc} = \alpha_c \circ F1_c$$

### 1.3.3 自然変換の例

例 1.65 双関手  $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  と対象  $c \in \mathcal{C}$  に対し,  $F(c, -): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  を

$$\begin{aligned} \text{ob } \mathcal{D} \ni d &\mapsto F(c, d) \in \text{ob } \mathcal{E}, \\ \text{mor } \mathcal{D} \ni g &\mapsto F(1_c, g) \in \text{mor } \mathcal{E} \end{aligned}$$

と定めれば  $F(c, -)$  は関手

例 1.75

$\mathcal{C}$  の任意の射  $c \xrightarrow{f} c'$  に対して, 射の集まり  $F(f, -) := \{F(f, 1_d)\}_{d \in \mathcal{D}}$  は自然変換  $F(c, -) \Rightarrow F(c', -)$  である.