『ストリング図で学ぶ圏論の基礎』勉強会

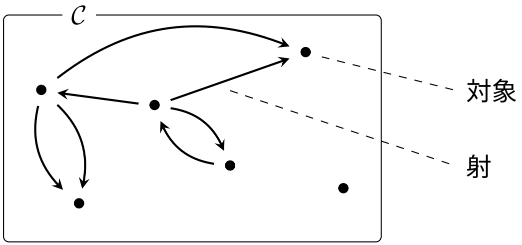
§2.3 関手圏

山田鈴太

電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程 1 年

2.3.1 関手圏の定義

- 圏：対象とその間の射の集まり



- 自然変換：関手から関手への矢印

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

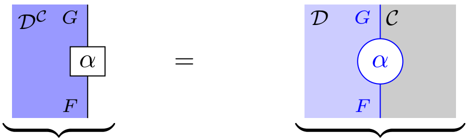
- 関手を対象，自然変換を射とする圏が作れるのでは？

2.3.1 関手圏の定義

関手圏

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とする．
次の通り定義される圏を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**関手圏**といい，$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ で表す．

- 対象は各関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$
- 対象 $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，F から G への射は各自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$
- 各射 $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ に対して，その合成 $\beta\alpha$ は自然変換の垂直合成
- 各対象 F について，その恒等射は恒等自然変換 1_F



圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ の射 $\alpha\colon F \to G$　　関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ の間の自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$

2.3.1 関手圏の定義

演習問題 2.3.1

関手圏が圏であることを示せ．

証明

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を任意の圏として，$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ が圏の性質を満たすことを確認する．

射の合成の閉性: 任意の自然変換 $F \xRightarrow{\alpha} G \xRightarrow{\beta} H$ に対して，
垂直合成 $\beta\alpha$ は再び自然変換 $F \Rightarrow H$ である (cf. §2.1.1)．

射の合成の結合律: 任意の自然変換 $F \xRightarrow{\alpha} G \xRightarrow{\beta} H \xRightarrow{\gamma} I$ に対して，
結合律が次の通り成り立つ:

$$\begin{aligned}\gamma(\beta\alpha) &= \{\gamma_a(\beta_a\alpha_a)\}_{a\in\mathcal{C}} \\ &= \{(\gamma_a\beta_a)\alpha_a\}_{a\in\mathcal{C}} \\ &= (\gamma\beta)\alpha.\end{aligned}$$

2.3.1 関手圏の定義

演習問題 2.3.1

関手圏が圏であることを示せ．

恒等射の性質: 任意の自然変換 $F \xRightarrow{\alpha} G$ に対して，$\alpha 1_F = \alpha = 1_G \alpha$ が成り立つ (cf. §2.1.1)．
したがって $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ は圏である． □

2.3.1 関手圏の定義

射 $\alpha \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F,G)$ が同型射 $\iff$ 自然変換 α が自然同型

(⇒)
- α が同型射なら，逆射 $\alpha^{-1}\colon G \to F$ が存在して $\alpha^{-1} \circ \alpha = 1_F$
- 各 $a \in \mathcal{C}$ について $\alpha_a^{-1} \circ \alpha_a = 1_{Fa}$
  - $\alpha_a \circ \alpha_a^{-1} = 1_{Ga}$ も同様
- したがって各 $a \in \mathcal{C}$ について α_a が同型射 $\overset{\text{def}}{\iff}$ α は自然同型

(⇐)
- α が自然同型なら，各 $a \in \mathcal{C}$ について α_a が同型射
- 逆射 α_a^{-1} を集めて自然変換 $\alpha^{-1} = \left\{\alpha_a^{-1}\right\}_{a \in \mathcal{C}}$ を構成
- $\alpha^{-1} \circ \alpha = 1_F$ と $\alpha \circ \alpha^{-1} = 1_G$ が成り立つ（⇒ と同じ議論）
- よって α は同型射

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が局所小圏であっても，$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ も局所小圏とは限らない．

演習問題 2.3.2

(a) 圏 $\mathbf{Cat}$ は局所小圏であることを示せ．

(b) 小圏 $\mathcal{C}$ と局所小圏 $\mathcal{D}$ について関手圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ は局所小圏であることを示せ．

(c) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が共に局所小圏であるとき，関手圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ が必ずしも局所小圏でないことを示せ．

(a) いま $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbf{Cat}$ を固定して，$\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ が集合であるか考える．各射 $F \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ は関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ であり，関手は

- 対象への作用 $\mathrm{ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$
- 射への作用 $\mathrm{mor}\,\mathcal{C} \to \mathrm{mor}\,\mathcal{D}$

から成る．$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は小圏だから，$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{mor}\,\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}$) は集合．したがって $\mathrm{ob}\,\mathcal{D}^{\mathrm{ob}\,\mathcal{C}} \times \mathrm{mor}\,\mathcal{D}^{\mathrm{mor}\,\mathcal{C}}$ とでも書くべき作用の組全体も集合をなすので，その部分クラスである $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ も集合である．

演習問題 2.3.2

(a) 圏 $\mathbf{Cat}$ は局所小圏であることを示せ．
(b) 小圏 $\mathcal{C}$ と局所小圏 $\mathcal{D}$ について関手圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ は局所小圏であることを示せ．
(c) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が共に局所小圏であるとき，関手圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ が必ずしも局所小圏でないことを示せ．

(b) 各対象 F, G に対して，$\mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F, G)$ が集合であるか考える．各射 $\alpha \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F, G)$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ であり，自然変換は対象への作用 $\mathrm{ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{mor}\,\mathcal{D}$ のみから決定されることを思い出す (cf. §1.3.2)．条件より $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{mor}\,\mathcal{D}$ は共に集合であるから，対象への作用全体も集合をなし，その部分クラスである $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F, G)$ も集合となる．

(c) $\mathcal{C}$ が単に局所小である場合，$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ は集合であるとは限らないので，上の議論が成り立たない．（具体的な反例は次ページ）

2.3.1 関手圏の定義

演習問題 2.3.2

(c) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が共に局所小圏であるとき，関手圏 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ が必ずしも局所小圏でないことを示せ．

- 記号を次のように定める
  - $\mathbf{DSet}$: 全ての集合を対象とする離散圏
  - $\mathit{1}$: 1 元集合 $\{*\}$
  - $\mathit{2}$: 2 元集合 $\{0,1\}$
  - $F\colon \mathbf{DSet} \to \mathbf{Set}$: $\mathbf{DSet}$ の各対象を $\mathit{1}$ に，各射を 1_{1} に写す関手
  - $G\colon \mathbf{DSet} \to \mathbf{Set}$: $\mathbf{DSet}$ の各対象を $\mathit{2}$ に，各射を 1_{2} に写す関手
- 自然変換 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ は $\mathbf{Set}$ の射（つまり写像）の族 $\{\alpha_X \colon \mathit{1} \to \mathit{2}\}_{X \in \mathbf{DSet}}$
- 各 α_X は行き先を 0 にするか 1 にするかの選択
  - α ごとに集合族 $P_\alpha := \{\, X \in \mathbf{DSet} \mid \alpha_X(*) = 1 \,\}$ がある
- 自然変換 $F \Rightarrow G$ 全体 $\mathbf{Set}^{\mathbf{DSet}}(F, G)$ のサイズは「集合全体のクラスの冪クラス」に等しい
- これは集合でないので，$\mathbf{Set}^{\mathbf{DSet}}$ は局所小にならない $\leftarrow$ 反例！

2.3.1 関手圏の定義

$\mathcal{C}$: 圏

例 2.23 関手圏 $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$

関手圏 $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$ の対象および射は，それぞれ圏 $\mathcal{C}$ の対象および射と同一視できる．

例 1.49 任意の対象は関手とみなせる：各 $a \in \mathcal{C}$ に対して $\Delta_{\mathbf{1}}a \colon \mathbf{1} \to \mathcal{C}; * \mapsto a$

例 1.72 任意の射は自然変換とみなせる：各 $f \in \mathcal{C}(a, b)$ に対して $\{f\}_{* \in 1} \colon a \Rightarrow b$

- $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$ の対象は関手 $\Delta_{\mathbf{1}}a$
  - $a \in \mathcal{C}$ と同一視
- $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$ の射は自然変換 $\{f\}_{* \in \mathbf{1}} \colon a \Rightarrow b$
  - $f \colon a \to b$ と同一視

したがって関手 $F \colon \mathcal{C}^{\mathbf{1}} \to \mathcal{C}; \Delta_{\mathbf{1}}a \mapsto a$ によって同型 $\mathcal{C}^{\mathbf{1}} \cong \mathcal{C}$ を得る．

$\mathcal{C}$: 圏

例 2.24 関手圏 $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$

関手圏 $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ の対象は，圏 $\mathcal{C}$ の射と同一視できる．$\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ を**射圏** (arrow category) とも呼ぶ．

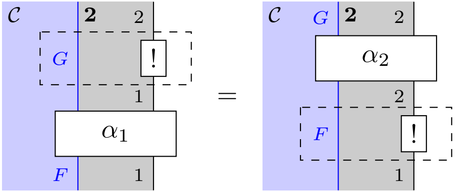
$$\mathbf{2} := \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1_1"] \arrow[r, "!"] & 2 \arrow[loop right, "1_2"] \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ の対象 F は関手 $\mathbf{2} \to \mathcal{C}$
- F は射 $! \in \operatorname{mor} \mathbf{2}$ の行き先 $F! \in \operatorname{mor} \mathcal{C}$ のみによって決まる
  - $F! := f$ と決めたなら，$F1 := \operatorname{dom} f$, $F2 := \operatorname{cod} f$ とせざるを得ない
- 逆に任意の射 $f \in \operatorname{mor} \mathcal{C}$ に対して，$F! = f$ となる関手 F を 1 つだけ作れる
- よって $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ の対象は $\mathcal{C}$ の射と一対一に対応している

例 2.24 関手圏 $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$

関手圏 $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ の対象は，圏 $\mathcal{C}$ の射と同一視できる．$\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ を射圏 (arrow category) とも呼ぶ．

- $F, G \colon \mathbf{2} \to \mathcal{C}$ に対して $f := F!, g := G!$ とする
- $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ の射 $\alpha \in \mathcal{C}^{\mathbf{2}}(F, G)$ は自然変換 $F \Rightarrow G$
  - $g\alpha_1 = \alpha_2 f$ を満たす各射 $\alpha_1 \colon F1 \to G1$, $\alpha_2 \colon F2 \to G2$ から自然変換 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ を作れる



$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏

例 2.25 関手を前から施す関手

関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，関手 $- \bullet F\colon \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ を次で定義する．

対象への作用:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ob}\,\mathcal{E}^{\mathcal{D}} & \to & \mathrm{ob}\,\mathcal{E}^{\mathcal{C}} \\ \underbrace{G}_{\mathcal{D}\to\mathcal{E}} & \mapsto & \underbrace{G \bullet F}_{\mathcal{C}\to\mathcal{E}}. \end{array}$$

射への作用: 各対象（すなわち関手）$G, H \in \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ について，

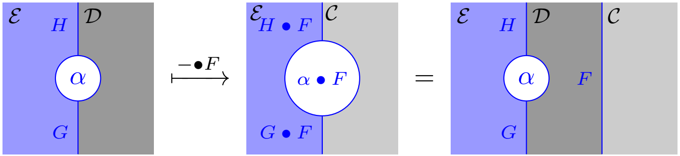
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathcal{D}}(G, H) & \to & \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(G \bullet F, H \bullet F) \\ \underbrace{\alpha}_{G\Rightarrow H} & \mapsto & \underbrace{\alpha \bullet F}_{G\bullet F\Rightarrow H\bullet F} \end{array}.$$

$\alpha \bullet F := \alpha \bullet 1_F = \{\alpha \bullet 1_{Fa}\}_{a\in\mathcal{C}}$ に注意

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏，$F$: 関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

例 2.25 関手を前から施す関手

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathcal{D}}(G, H) & \to & \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(G \bullet F, H \bullet F) \\ \underbrace{\alpha}_{G \Rightarrow H} & \mapsto & \underbrace{\alpha \bullet F}_{G \bullet F \Rightarrow H \bullet F} \end{array} .$$



(2.26)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏，$F$: 関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

演習問題 2.3.5（前半）

例 2.25 で定めた写像 $- \bullet F : \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ が関手であることを示せ．

証明

$\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ の射（すなわち自然変換）$G \xRightarrow{\alpha} H \xRightarrow{\beta} I$ を任意に取って，関手の公理

$$(\beta\alpha) \bullet F = (\beta \bullet F) \circ (\alpha \bullet F)$$

を満たすことを次の通り確認できる:

$$\begin{aligned} (\beta\alpha) \bullet F &:= (\beta \circ \alpha) \bullet 1_F \\ &= (\beta \circ \alpha) \bullet (1_F \circ 1_F) \\ &= (\beta \bullet 1_F) \circ (\alpha \bullet 1_F) && (\because \text{命題 } 2.9) \\ &=: (\beta \bullet F) \circ (\alpha \bullet F). \end{aligned}$$

したがって $- \bullet F$ は関手である． $\square$

2.3.2 関手圏に関する関手の例

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏，$F, G$: 関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

例 2.25 関手を前から施す関手

同様に自然変換 $\gamma\colon F \Rightarrow G$ に対して，自然変換 $- \bullet \gamma\colon (- \bullet F) \Rightarrow (- \bullet G)$ が定義できる．

対象への作用:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{ob} \mathcal{E}^{\mathcal{D}} & \to & \operatorname{mor} \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \\ \underbrace{H}_{\mathcal{D} \to \mathcal{E}} & \mapsto & \underbrace{H \bullet \gamma}_{(H \bullet F) \to (H \bullet G)} \end{array} .$$

射への作用: 各対象（すなわち関手）$H, I \in \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ に対して，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\mathcal{D}}(H, I) & \to & \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(H \bullet \gamma, I \bullet \gamma) \\ \underbrace{\alpha}_{H \Rightarrow I} & \mapsto & \underbrace{\alpha \bullet \gamma}_{(H \bullet \gamma) \Rightarrow (I \bullet \gamma)} \end{array} .$$

2.3.2 関手圏に関する関手の例

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏，$F, G$: 関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$\gamma$: 自然変換 $F \Rightarrow G$

演習問題 2.3.5（後半）

例 2.25 で定めた写像 $- \bullet \gamma \colon (- \bullet F) \Rightarrow (- \bullet G)$ が自然変換であることを示せ．

$$
\begin{array}{ccc}
\operatorname{ob} \mathcal{E}^{\mathcal{D}} & \to & \operatorname{mor} \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \\
\underbrace{H}_{\mathcal{D} \to \mathcal{E}} & \mapsto & \underbrace{H \bullet \gamma}_{(H \bullet F) \to (H \bullet G)}
\end{array}
.
$$

$\boxed{\text{証明}}$

$\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ の射（すなわち自然変換）$H \xRightarrow{\alpha} I$ を任意に取って，自然性の条件

$$(\alpha \bullet G) \circ (H \bullet \gamma) = (I \bullet \gamma) \circ (\alpha \bullet F)$$

を満たすことを示す．

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏，$F, G, H, I$: 関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$\gamma$: 自然変換 $F \Rightarrow G$，α: 自然変換 $H \Rightarrow I$

演習問題 2.3.5（後半）

例 2.25 で定めた写像 $- \bullet \gamma \colon (- \bullet F) \Rightarrow (- \bullet G)$ が自然変換であることを示せ．

$$
\begin{aligned}
(\alpha \bullet G) \circ (H \bullet \gamma) &:= (\alpha \bullet 1_G) \circ (1_H \bullet \gamma) \\
&= (\alpha \circ 1_H) \bullet (1_G \circ \gamma) && (\because \text{命題 2.9}) \\
&= (1_I \circ \alpha) \bullet (\gamma \circ 1_F) \\
&= (1_I \bullet \gamma) \circ (\alpha \bullet 1_F) && (\because \text{命題 2.9}) \\
&=: (I \bullet \gamma) \circ (\alpha \bullet F).
\end{aligned}
$$

したがって，$- \bullet \gamma$ は自然変換である． $\square$

2.3.2 関手圏に関する関手の例

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏，$F, G$: 関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

例 2.25 関手を前から施す関手

同様に自然変換 $\gamma\colon F \Rightarrow G$ に対して，自然変換 $- \bullet \gamma\colon (- \bullet F) \Rightarrow (- \bullet G)$ が定義できる．

自然変換 $\theta\colon G \Rightarrow H$ と $\tau\colon F' \Rightarrow G'$ に対して

$$\begin{aligned} (- \bullet \theta)(- \bullet \gamma) &= - \bullet \theta\gamma, \\ (- \bullet \tau) \bullet (- \bullet \gamma) &= - \bullet (\tau \bullet \gamma) \end{aligned} \tag{2.27}$$

が成り立つ．

2.3.2 関手圏に関する関手の例

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏
当然，例 2.25 の逆も考えられる．

例 2.28 関手を後ろから施す関手

関手 $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ に対して，関手 $F \bullet -\colon \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ を次で定義する．

対象への作用:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ob}\,\mathcal{D}^{\mathcal{C}} & \to & \mathrm{ob}\,\mathcal{E}^{\mathcal{C}} \\ \underbrace{G}_{\mathcal{C}\to\mathcal{D}} & \mapsto & \underbrace{F \bullet G}_{\mathcal{C}\to\mathcal{E}}. \end{array}$$

射への作用: 各対象（すなわち関手）$G, H \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ について，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(G, H) & \to & \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(F \bullet G, F \bullet H) \\ \underbrace{\alpha}_{G \Rightarrow H} & \mapsto & \underbrace{F \bullet \alpha}_{F\bullet G \Rightarrow F\bullet H}. \end{array}$$

2.3.2 関手圏に関する関手の例

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏，$F, G$: 関手 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$

例 2.28 関手を後ろから施す関手

自然変換 $\gamma\colon F \Rightarrow G$ に対して，自然変換 $\gamma \bullet -\colon (F \bullet -) \Rightarrow (G \bullet -)$ が定義できる．

対象への作用:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ob}\, \mathcal{D}^{\mathcal{C}} & \to & \mathrm{mor}\, \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \\ \underbrace{H}_{\mathcal{C} \to \mathcal{D}} & \mapsto & \underbrace{\gamma \bullet H}_{(F \bullet H) \to (G \bullet H)} \end{array} .$$

自然変換 $\theta\colon G \Rightarrow H$ と $\tau\colon F' \Rightarrow G'$ に対して

$$\begin{aligned} (\theta \bullet -)(\gamma \bullet -) &= \theta\gamma \bullet -, \\ (\tau \bullet -) \bullet (\gamma \bullet -) &= (\tau \bullet \gamma) \bullet - \end{aligned} \tag{2.29}$$

が成り立つ．

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏

例 2.25 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，関手 $- \bullet F\colon \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ を定義

例 2.31 評価関手

例 2.25 で $\mathcal{C} = \mathbf{1}$ と取る．

- $F\colon \mathbf{1} \to \mathcal{D}$ は対象 $d = F(*) \in \mathcal{D}$ と同一視できる (cf. 例 1.49)
- $\mathcal{E}^{\mathbf{1}}$ は $\mathcal{E}$ と同型 (cf. 例 2.23)

この関手 $- \bullet d\colon \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}$ を評価関手 (evaluation functor) と呼び，ev_d でも表す．

すなわち，この ev_d は次のような関手．

対象への作用: 各対象（すなわち関手）$G \in \mathcal{E}^{\mathcal{D}}$ を $G \bullet d = Gd \in \mathcal{E}$ に写す

射への作用: 各射（すなわち自然変換）$G \xRightarrow{\alpha} H$ を $\alpha \bullet d = \alpha_d \in \mathcal{E}(Gd, Hd)$ に写す．

2.3.2 関手圏に関する関手の例

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: 圏

例 2.25 関手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，関手 $- \bullet F \colon \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ を定義

例 2.32 対角関手

今度は $\mathcal{C} = \mathbf{1}$ と取る．

- $F \colon \mathcal{C} \to \mathbf{1}$ は $\mathcal{C}$ の全ての対象を $\mathbf{1}$ のただ 1 つの対象 $* \in \mathbf{1}$ へ写す
  - そもそも $\mathcal{C} \to \mathbf{1}$ の関手は 1 つしかないので ! で表す．
- $\mathcal{E}^{\mathbf{1}}$ は $\mathcal{E}$ と同型 (cf. 例 2.23)

この関手 $- \bullet ! \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ を対角関手 (diagnal functor) と呼び，$\Delta_{\mathcal{C}}$ でも表す．

すなわち，この $\Delta_{\mathcal{C}}$ は次のような関手．

対象への作用: $\mathcal{E}$ の各対象 a を関手 $a \bullet ! \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ に写す

射への作用: $\mathcal{E}$ の各射 $a \xrightarrow{f} b$ を自然変換 $f \bullet ! = \{f\}_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(a \bullet !, b \bullet !)$ に写す．