

# 『ストリング図で学ぶ圏論の基礎』勉強会

## §1.3 自然変換

山田鈴太

電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程 1 年

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

### 定義 1.66 (自然変換)

$\alpha$  が  $F$  から  $G$  への自然変換 (natural transformation)  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  以下の条件を満たす

- (1)  $\alpha$  は各  $a \in \mathcal{C}$  で添字付けられた射の集まり  $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$
- (2) 任意の  $a, b \in \mathcal{C}$  と  $f: a \rightarrow b$  に対して  $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$  (自然性, naturality)

▶  $\alpha$  が  $F$  から  $G$  への自然変換であることを  $\alpha: F \Rightarrow G$  と書く

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

### 定義 1.66 (自然変換)

(1)  $\alpha$  は各  $a \in \mathcal{C}$  で添字付けられた射の集まり  $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \quad G \quad \mathcal{C} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \mathcal{D} \quad F \quad \mathcal{C} \end{array} := \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad G \quad \mathcal{C} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \mathcal{D} \quad F \quad \mathcal{C} \quad a \end{array} \right\}_{a \in \mathcal{C}} \quad (1.67)$$

►  $\alpha$  を構成する各射  $\alpha_a$  を  $\alpha$  の成分 (component) と呼ぶ

## 1.3.1 自然変換の定義

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & \\ \hline F & \\ \hline \end{array} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & a \\ \hline F & \\ \hline \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \quad a \\ \hline \alpha_a & \\ \hline F & a \\ \hline \end{array} \right\}_{a \in C} \quad (1.67)$$

- ▶ 一番右の図は少しわかりづらい気がする……
- ▶ 我々は既に関手の適用をSTRING図として導入したのであった

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & C \\ \hline F & a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Fa \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & C \quad a \\ \hline F & f \\ \hline & b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & Fa \\ \hline & Ff \\ \hline & Fb \\ \hline \end{array} \quad (1.40)$$

- ▶ ならばこうしてしまってもよいのでは？

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & \\ \hline F & \\ \hline \end{array} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & a \\ \hline F & \\ \hline \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Ga \\ \hline \alpha_a \\ \hline Fa \\ \hline \end{array} \right\}_{a \in C} \quad (1.67')$$

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

### 定義 1.66 (自然変換)

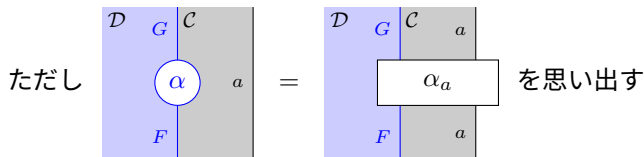
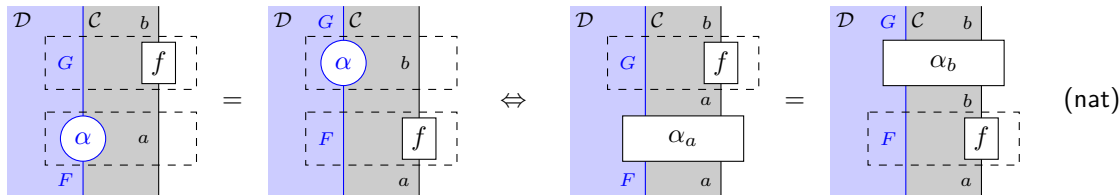
(2) 任意の  $a, b \in \mathcal{C}$  と  $f: a \rightarrow b$  に対して  $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$  (自然性, naturality)

$$Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \quad b \\ \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad a \\ \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \quad b \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \quad a \end{array} \quad (1.68)$$

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手,  $\alpha: F \Rightarrow G$  は自然変換

- ▶ 自然性  $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$  は次のようにも表せる

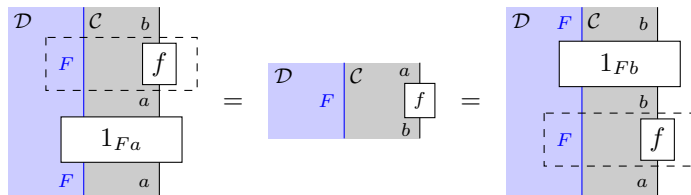


- ▶  $f$  が  $\alpha$  を素通りして縦方向に動ける
  - ▶ スライディング則

## 1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  は圏,  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  は関手

- ▶ 各  $a \in \mathcal{C}$  に対して  $Fa$  の恒等射  $1_{Fa}$  を集めると,  $1_F := \left\{ Fa \xrightarrow{1_{Fa}} Fa \right\}_{a \in \mathcal{C}}$  は  $F$  の **恒等自然変換**
- ▶ 実際, 以下の通り各  $a \in \mathcal{C}$  について自然性の条件を満たす



## 1.3.1 自然変換の定義

