『ストリング図で学ぶ圏論の基礎』勉強会

§1.3 自然変換

山田鈴太

電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程 1 年

1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ は圏，$F,G\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ は関手

定義 1.66 (自然変換)

α が F から G への**自然変換** (natural transformation) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の条件を満たす

(1) α は各 $a\in\mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga\right\}_{a\in\mathcal{C}}$

(2) 任意の $a,b\in\mathcal{C}$ と $f\colon a\to b$ に対して $Gf\circ\alpha_a=\alpha_b\circ Ff$（**自然性**, naturality）

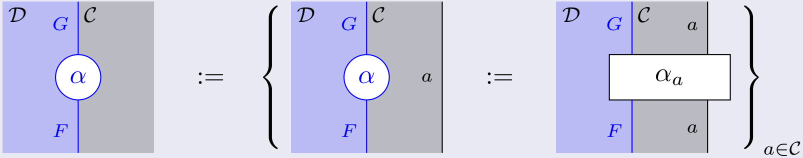
- α が F から G への自然変換であることを $\alpha\colon F\Rightarrow G$ と書く

1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

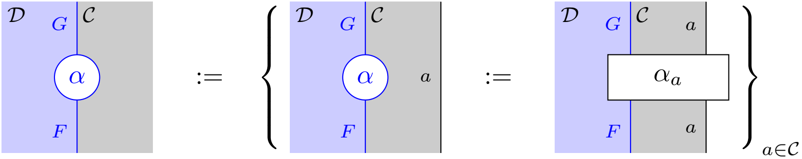
定義 1.66 (自然変換)

(1) α は各 $a \in \mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$



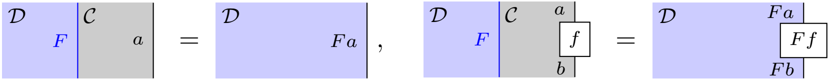
(1.67)

- α を構成する各射 α_a を α の**成分** (component) と呼ぶ



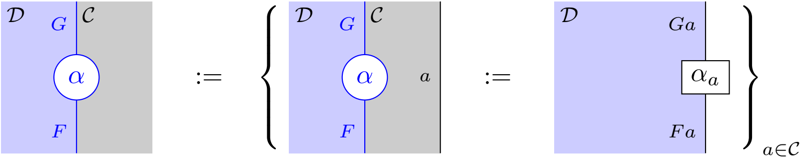
(1.67)

- 一番右の図は少しわかりづらい気がする……
- 我々は既に関手の適用をストリング図として導入したのだった



(1.40)

- ならばこうしてしまってもよいのでは？



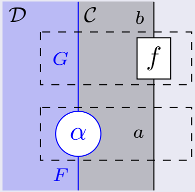
(1.67')

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ は圏，$F,G\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ は関手

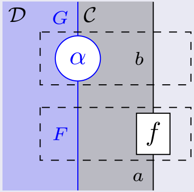
定義 1.66 (自然変換)

(2) 任意の $a,b\in\mathcal{C}$ と $f\colon a\to b$ に対して $\underline{Gf\circ\alpha_a=\alpha_b\circ Ff}$（自然性, naturality）

$$Gf\circ\alpha_a=\alpha_b\circ Ff \quad \rightleftarrows \tag{1.68}$$

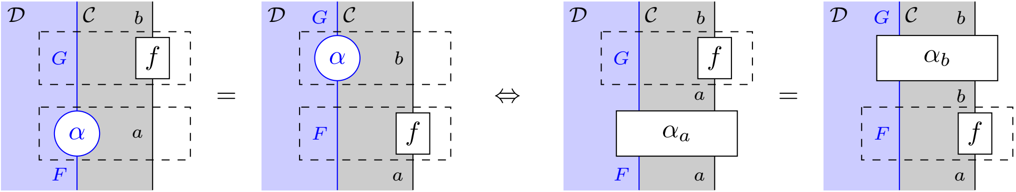


$=$



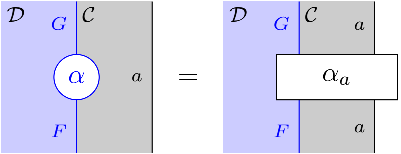
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手，$\alpha \colon F \Rightarrow G$ は自然変換

- 自然性 $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$ は次のようにも表せる



(nat)

ただし



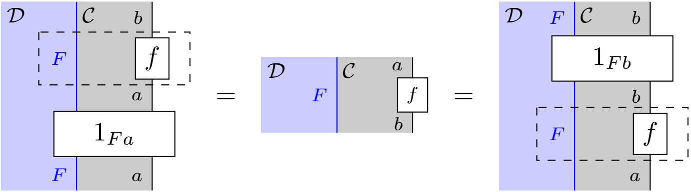
を思い出す

- f が α を素通りして縦方向に動ける
  - スライディング則

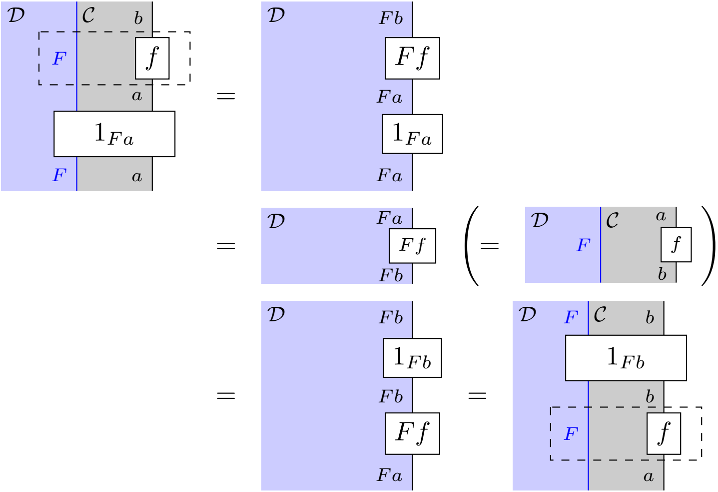
1.3.1 自然変換の定義

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手

- 各 $a \in \mathcal{C}$ に対して Fa の恒等射 1_{Fa} を集めると，$1_F := \left\{ Fa \xrightarrow{1_{Fa}} Fa \right\}_{a \in \mathcal{C}}$ は F の**恒等自然変換**
  - 実際，以下の通り各 $a \in \mathcal{C}$ について自然性の条件を満たす



1.3.1 自然変換の定義


$\mathcal{D}$ $\mathcal{C}$ b F f a 1_{Fa} F a
=
$\mathcal{D}$ Fb Ff Fa 1_{Fa} Fa
=
$\mathcal{D}$ Fa Ff Fb
$\mathcal{D}$ $\mathcal{C}$ a F f b
=
$\mathcal{D}$ Fb 1_{Fb} Fb Ff Fa
=
$\mathcal{D}$ F $\mathcal{C}$ b 1_{Fb} b F f a

1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手，$\alpha \colon F \Rightarrow G$ は自然変換

- $\alpha = \{\alpha_a\}_{a \in \mathcal{C}}$ を，$\mathcal{C}$ の対象と射への作用と見なせる

対象への作用: $\mathcal{C}$ の対象を対応する α の成分に写す

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{ob}\,\mathcal{C} & \to & \mathcal{D}(Fa, Ga) & \subseteq \mathrm{mor}\,\mathcal{D} \\ a & \mapsto & \alpha_a & \end{array}$$

射への作用: α と射 f を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{mor}\,\mathcal{C} \supseteq & \mathcal{C}(a, b) & \to & \mathcal{D}(Fa, Gb) & \subseteq \mathrm{mor}\,\mathcal{D} \\ & f & \mapsto & \alpha \bullet f & \end{array}$$

1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手，$\alpha \colon F \Rightarrow G$ は自然変換

射への作用: α と射 f を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{mor}\,\mathcal{C} & \supseteq & \mathcal{C}(a,b) & \to & \mathcal{D}(Fa, Gb) & \subseteq & \mathrm{mor}\,\mathcal{D} \\ & & f & \mapsto & \alpha \bullet f & & \end{array}$$

$\alpha \bullet f$ の定義

$$\alpha \bullet f \quad := \quad Gf \circ \alpha_a \quad = \quad \alpha_b \circ Ff$$

$$\downharpoonleft\upharpoonright$$