

『ストリング図で学ぶ圏論の基礎』勉強会

§1.3 自然変換

山田鈴太

電気通信大学大学院情報理工学研究科 博士前期課程 1 年

1.3.1 自然変換の定義

\mathcal{C}, \mathcal{D} は圏, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は関手

定義 1.66 (自然変換)

α が F から G への自然変換 (natural transformation) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 以下の条件を満たす

- (1) α は各 $a \in \mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$
- (2) 任意の $a, b \in \mathcal{C}$ と $f: a \rightarrow b$ に対して $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$ (自然性, naturality)

▶ α が F から G への自然変換であることを $\alpha: F \Rightarrow G$ と書く

1.3.1 自然変換の定義

\mathcal{C}, \mathcal{D} は圏, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は関手

定義 1.66 (自然変換)

(1) α は各 $a \in \mathcal{C}$ で添字付けられた射の集まり $\left\{ Fa \xrightarrow{\alpha_a} Ga \right\}_{a \in \mathcal{C}}$

$$:= \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad G \quad \mathcal{C} \\ \alpha \\ F \end{array} \right\}_{a \in \mathcal{C}} \quad (1.67)$$

► α を構成する各射 α_a を α の成分 (component) と呼ぶ

1.3.1 自然変換の定義

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & \\ \hline F & \\ \hline \end{array} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & a \\ \hline F & \\ \hline \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \quad a \\ \hline \alpha_a & \\ \hline F & a \\ \hline \end{array} \right\}_{a \in C} \quad (1.67)$$

- ▶ 一番右の図は少しわかりづらい気がする……
- ▶ 我々は既に関手の適用をSTRING図として導入したのであった

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & C \\ \hline F & a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Fa \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & C \quad a \\ \hline F & f \\ \hline & b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Fa \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Ff \\ \hline Fb \\ \hline \end{array} \quad (1.40)$$

- ▶ ならばこうしてしまってもよいのでは？

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & \\ \hline F & \\ \hline \end{array} := \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & G \quad C \\ \hline \alpha & a \\ \hline F & \\ \hline \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \mathcal{D} \\ \hline Ga \\ \hline \alpha_a \\ \hline Fa \\ \hline \end{array} \right\}_{a \in C} \quad (1.67')$$

1.3.1 自然変換の定義

\mathcal{C}, \mathcal{D} は圏, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は関手

定義 1.66 (自然変換)

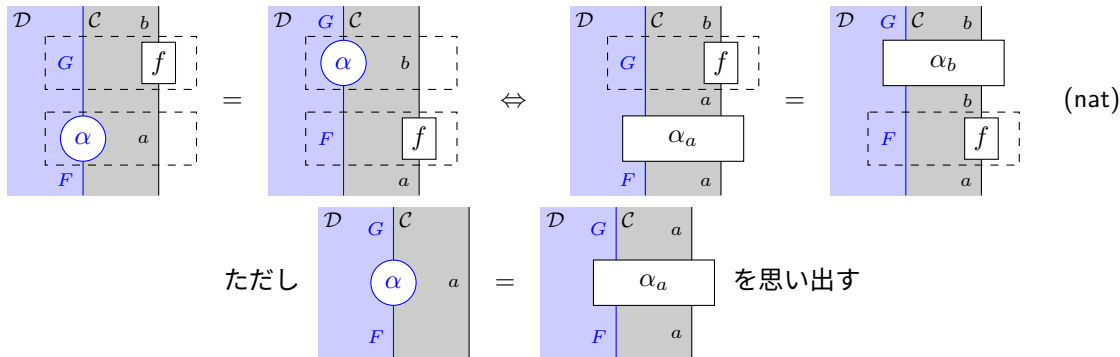
(2) 任意の $a, b \in \mathcal{C}$ と $f: a \rightarrow b$ に対して $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$ (自然性, naturality)

$$Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \quad b \\ \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad a \\ \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \quad b \\ \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} \quad a \end{array} \quad (1.68)$$

1.3.1 自然変換の定義

\mathcal{C}, \mathcal{D} は圏, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は関手, $\alpha: F \Rightarrow G$ は自然変換

- ▶ 自然性 $Gf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Ff$ は次のようにも表せる

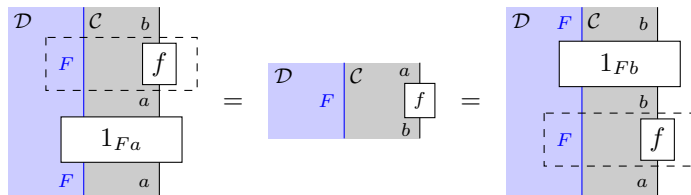


- ▶ f が α を素通りして縦方向に動ける
 - ▶ スライディング則

1.3.1 自然変換の定義

\mathcal{C}, \mathcal{D} は圏, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は関手

- ▶ 各 $a \in \mathcal{C}$ に対して Fa の恒等射 1_{Fa} を集めると, $1_F := \left\{ Fa \xrightarrow{1_{Fa}} Fa \right\}_{a \in \mathcal{C}}$ は F の **恒等自然変換**
- ▶ 実際, 以下の通り各 $a \in \mathcal{C}$ について自然性の条件を満たす



1.3.1 自然変換の定義

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{D} & \mathcal{C} & b \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} & \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1_{Fa} \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline F & & a \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & Fb \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Ff \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fa \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1_{Fa} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fa \\ \hline \end{array}
 \\
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & Fa \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Ff \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fb \\ \hline \end{array}
 \left(= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{D} & \mathcal{C} & a \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}
 \right)
 \\
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{D} & Fb \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1_{Fb} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fb \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Ff \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Fa \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{D} & F & \mathcal{C} & b \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1_{Fb} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} & \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

\mathcal{C}, \mathcal{D} は圏, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は関手, $\alpha: F \Rightarrow G$ は自然変換

▶ $\alpha = \{\alpha_a\}_{a \in \mathcal{C}}$ を, \mathcal{C} の対象と射への作用と見なせる

対象への作用: \mathcal{C} の対象を対応する α の成分に写す

$$\begin{array}{ccc} \text{ob } \mathcal{C} & \rightarrow & \mathcal{D}(Fa, Ga) \subseteq \text{mor } \mathcal{D} \\ a & \mapsto & \alpha_a \end{array}$$

射への作用: α と射 f を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccc} \text{mor } \mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}(a, b) & \rightarrow & \mathcal{D}(Fa, Gb) & \subseteq & \text{mor } \mathcal{D} \\ f & \mapsto & \alpha \bullet f & & \end{array}$$

1.3.2 自然変換の対象への作用と射への作用

\mathcal{C}, \mathcal{D} は圏, $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は関手, $\alpha: F \Rightarrow G$ は自然変換

射への作用: α と射 f を「横に並べる」

$$\begin{array}{ccccc} \text{mor } \mathcal{C} \supseteq & \mathcal{C}(a, b) & \rightarrow & \mathcal{D}(Fa, Gb) & \subseteq \text{mor } \mathcal{D} \\ & f & \mapsto & \alpha \bullet f & \end{array}$$

$\alpha \bullet f$ の定義

$$\alpha \bullet f \quad := \quad Gf \circ \alpha_a \quad = \quad \alpha_b \circ Ff$$

$\downarrow \uparrow$

The diagram illustrates the definition of $\alpha \bullet f$ using string diagrams. It shows three equivalent ways to represent the composition $Gf \circ \alpha_a$ and $\alpha_b \circ Ff$. The first diagram shows a box with a vertical line separating a blue region (labeled \mathcal{D}) from a grey region (labeled \mathcal{C}). In the blue region, there is a circle labeled α with F below it. In the grey region, there is a box labeled f with a and b on its right side. This is followed by an equals sign. The second diagram shows the same box, but with dashed lines. A dashed box encloses the α circle and the F label. Another dashed box encloses the f box and the a label. A third dashed box encloses the α circle and the f box. This is followed by an equals sign. The third diagram shows the same box, but with the α circle and the f box swapped. The α circle is now above the f box, and the F label is now below the α circle. This is followed by an equals sign.