ある集合 G に対して、その要素を用いて作成した要素 n 個の重複順列 P すべての集合 S_P を返すサブルーチン $f_G : n \mapsto S_P$ を考える。

f の再帰的定義は

$$f_G := \lambda n. \begin{cases} \left(\underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_1,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_2,\ \ldots,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_{|G|} \right) & n > 1 \\ \left(G_1, G_2, \ldots, G_{|G|} \right) & n = 1 \end{cases}$$

である。ただし G_k は G の要素に重複なく振り分けた番号である。以下の通り演算を定義した。

演算	定義
$\underset{X\to x}{\text{map}} \langle \text{expr} \rangle$	X の各要素 x に対して操作 $\langle \text{expr} \rangle$ を行う。X が順列の場合は元の順序を破壊しない。
$P \tilde{+} x$	順列 P の末尾に要素 x を結合する。

また、不動点コンビネータを fix とする。

ところで一般に、ある再帰関数 $f(x)$ を $f(x) = U(f, x)$ という形で表す関数 U が存在する。さらに U を $V : f \mapsto U(f, x)$ で定義するとき、

$$f(x) = \text{fix}(V) \tag{Lem.}$$

が成り立つ。

今回の例に当てはめると、

$$\begin{aligned} U &= \lambda f_G.\lambda n. \begin{cases} \left(\underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_1,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_2,\ \ldots,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_{|G|} \right) & n > 1 \\ \left(G_1, G_2, \ldots, G_{|G|} \right) & n = 1 \end{cases} \\ V &= \lambda f_G. \begin{cases} \lambda n. \left(\underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_1,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_2,\ \ldots,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_{|G|} \right) & n > 1 \\ \lambda n. \left(G_1, G_2, \ldots, G_{|G|} \right) & n = 1 \end{cases} \\ &= \lambda f_G n. \begin{cases} \left(\underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_1,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_2,\ \ldots,\ \underset{f(G,n-1)\to p}{\text{map}} p \tilde{+} G_{|G|} \right) & n > 1 \\ \left(G_1, G_2, \ldots, G_{|G|} \right) & n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Order:

$$\begin{aligned} n \sum_{k=0}^{n} |G| \cdot |G|^k &= n \sum_{k=1}^{n+1} |G|^k \\ &= n \frac{|G|(|G|^{n+1} - 1)}{|G| - 1} \\ &= \frac{n(|G|^{n+2}) - n|G|}{|G| - 1} \\ \therefore\ O(n|G|^{n+1}) \end{aligned}$$