モナドって何だよ

型推栄 (`@_jj1lis_uec`)

2025 年 8 月 2 日

1　はじめに

プログラミング言語におけるモナドって何？　という直感が全然生えてこないので，まとめてみて理解を試みる．よかったら読んでみてください．あと間違いがあればご指摘お願いします．

本稿では以下の知識を仮定する．

- 圏論の入門書（Mac Lane とか Leinster とか）の最初の数章を読んだことがある．
- Haskell について多少は知っている（でもモナドは知らない）．
- 型について多少は知っている．

2　圏論におけるモナド

文献によって定義の揺れなどがあるだろうから，本稿で採用するモナドの定義を述べておく．

定義 1.　(1) $\mathcal{V}$ を圏，$I \in \mathcal{V}$ をその対象，$\otimes \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ を関手とする．$\otimes(A, B) \in \mathcal{V}$ は $A \otimes B$ のようにも書く．次のような自然同型 α, λ, ρ が存在するとき，$\mathcal{V}$ は**モノイダル** (*monoidal*) であると言う．なお以下では対象 $I \in \mathcal{V}$ と関手 $I \colon \mathbf{1} \to \mathcal{V}$ と同一視していることに注意せよ．

$$
\begin{array}{rccc}
\alpha\colon & \otimes \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{V}} \times \otimes) & \Rightarrow & \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id}_{\mathcal{V}}), \\
\lambda\colon & \pi_2 & \Rightarrow & I \times \mathrm{id}_{\mathcal{V}}, \\
\rho\colon & \pi_1 & \Rightarrow & \mathrm{id}_{\mathcal{V}} \times I,
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \arrow[r, "\otimes \times \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{V}} \times \otimes"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow\alpha"] & \mathcal{V} \times \mathcal{V} \arrow[d, "\otimes"] \\
\mathcal{V} \times \mathcal{V} \arrow[r, "\otimes"'] & \mathcal{V},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \times \mathcal{V} \arrow[r, "I \times \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, bend right, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow\lambda"] & \mathcal{V} \times \mathcal{V} \arrow[d, "\otimes"] \arrow[d, phantom, shift left=8, "\Nwarrow\rho"] & \mathcal{V} \times \mathbf{1} \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathcal{V}} \times I"'] \arrow[dl, bend left, "\pi_1"] \\
& \mathcal{V}. &
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

加えて，任意の $A, B, C, D \in \mathcal{V}$ に対して以下の図式は可換となる必要がある．ただしここで射 $\alpha_{(A,B,C)}$ を簡単に $\alpha_{A,B,C}$ とも書いている：

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes B) \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_B"'] & & (A \otimes I) \otimes B \arrow[dl, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_B"] \\
& A \otimes B, &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A\otimes\alpha_{B,C,D}"'] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & \\
A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[d, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \\
(A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C}\otimes\mathrm{id}_D"'] & & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D.
\end{tikzcd}
$$

このとき I を**単位対象** (*unit object*)，$\otimes$ を**テンソル積** (*tensor product*) と呼ぶ．また $\mathcal{V}$ を 6 つ組 $(\mathcal{V},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$ として明記する場合もある．

(2) $(\mathcal{V},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$ をモノイダル圏とする．$\mathcal{V}$ の**モノイド対象** (*monoid object*) ないし単に**モノイド**とは，対象 $M\in\mathcal{V}$，**乗法** (*multiplication*) と呼ばれる射 $\mu\colon M\otimes M\to M$，**単位** (*unit*) と呼ばれる射 $\eta\colon I\to M$ から成る 3 つ組 (M,μ,η) であって，以下の図式を可換にするもののことである．

$$
\begin{tikzcd}
M\otimes M\otimes M \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M\otimes\mu"'] & M\otimes M \arrow[d, "\mu"] \\
M\otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I\otimes M \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}_M"] \arrow[dr, bend right, "\lambda_M"'] & M\otimes M \arrow[d, "\mu"] & M\otimes I \arrow[l, "\mathrm{id}_M\otimes\eta"'] \arrow[dl, bend left, "\rho_M"] \\
& M. &
\end{tikzcd}
\tag{2.2}
$$

(3) **モナド** (*monad*) とは，自己関手の圏におけるモノイド対象である．

特にモナドについて補足しよう．所与の圏 $\mathcal{C}$ に対して，関手圏 $[\mathcal{C},\mathcal{C}]$—以後は $\mathbf{End}_{\mathcal{C}}$ と書く—は，テンソル積として関手の合成 $\circ$，単位対象として恒等関手 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ を取ることでモノイダル圏をなす．以下の図式を見れば分かる通り，定義 1 (1) における自然変換 α,λ,ρ はすべて恒等自然変換となる．

$$
\begin{tikzcd}
(F,G,H) \arrow[r, mapsto, "\circ\times\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathcal{C}}}"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathcal{C}}}\times\circ"'] & (F\circ G,H) \arrow[d, mapsto, "\circ"] \\
(F,G\circ H) \arrow[r, mapsto, "\circ"'] & \begin{array}{c}(F\circ G)\circ H\\ F\circ(G\circ H),\end{array}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(*,F) \arrow[r, mapsto, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\times\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathcal{C}}}"] \arrow[dr, mapsto, bend right, "\pi_2"'] & (\mathrm{id}_{\mathcal{C}},F)\mid(G,\mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \arrow[d, mapsto, "\circ"] & (G,*) \arrow[l, mapsto, "\mathrm{id}_{\mathbf{End}_{\mathcal{C}}}\times\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dl, mapsto, bend left, "\pi_1"] \\
& \begin{array}{c}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\circ F\mid G\circ\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\\ F\mid G.\end{array} &
\end{tikzcd}
$$

このとき $\mathbf{End}_{\mathcal{C}}$ の対象（すなわち関手）$T\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ と射（すなわち自然変換）$\mu\colon T\circ T\Rightarrow T$ および $\eta\colon\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow T$ の組 (T,μ,η) は，以下の条件を満たすとき $\mathbf{End}_{\mathcal{C}}$ のモノイド対象となる．

$$
\begin{aligned}
&\mu\cdot(T\mu)=\mu\cdot(\mu T),\\
&\mu\cdot(T\eta)=\mu\cdot(\eta T)=\mathrm{id}_T.
\end{aligned}
$$

これはまさに，図式 2.2 と同じことを言っているに過ぎない．

$$
\begin{tikzcd}
T\circ T\circ T \arrow[r, "\mu\circ\mathrm{id}_T"] \arrow[d, "\mathrm{id}_T\circ\mu"'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] \\
T\circ T \arrow[r, "\mu"'] & T,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\circ T \arrow[r, "\eta\circ\mathrm{id}_T"] \arrow[dr, bend right, "\lambda_T"'] & T\circ T \arrow[d, "\mu"] & T\circ\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \arrow[l, "\mathrm{id}_T\circ\eta"'] \arrow[dl, bend left, "\rho_T"] \\
& T. &
\end{tikzcd}
$$

ただしここで次のような記法を用いはじめた．まず $\cdot$ は $\mathbf{End}_{\mathcal{C}}$ における射の合成である．また $T\mu$ は各対象 $A\in\mathcal{C}$ について

$$
(T\mu)_A=T(\mu_A)\colon T\circ T\circ T(A)\to T\circ T(A)
$$

とすることで定義される自然変換 $T \circ T \circ T \Rightarrow T \circ T$ を表す．同様に $\mu T \colon T \circ T \circ T \Rightarrow T \circ T$ で $(\mu T)_A = \mu_{T(A)}$ により定まる自然変換を表す．この (T, μ, η) が $\mathcal{C}$ におけるモナドである．

3　Haskell におけるモナド

ようやく本題に入ろう．関数型プログラミング言語は数多あるが，本稿では Haskell を用いて説明を行う．Haskell の型を対象，関数を射と見て，その全体を Hask と書くことにする．実は Hask は圏である．

注意 2.