第3讲 三维空间刚体运动

3.1 旋转矩阵

3.1.1 点、向量和坐标系

a,b属于R^3

- 内积:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \, |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle .$$

- 外积:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{b} \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{b}.$$

外积的结果是一个向量，它的方向垂直于这两个向量，大小为|a||b|sin<a,b>，是两个向量张成的四边形的有向面积。 aXb写成了a^b,变成了线性计算 如何向量都对应着唯一的一个反对称矩阵:

$$\boldsymbol{a}^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(反对称矩阵A满足A^T=-A)

3.1.2坐标系间的欧式变换

如果考虑运动的机器人，那么常见的做法是设定一个惯性坐标系(或者叫世界坐标系)，可以认为它是固定不动的。同时，相机或机器人是一个移动坐标系。相机视野中某个向量 p，它在相机坐标系下的坐标为 ${p}{c}
，而从世界坐标系下看，它的坐标为{p}{w}$，那么，这两个坐标之间是如何转换的呢?这时，就需要先得到该点针对机器人坐标系的坐标值，再根据机器人位姿变换到世界坐标系中。我们需要一种数学手段来描述这个变换关系，稍后我们会看到，可以用一个矩阵T来描述它

两个坐标系之间的运动由一个旋转加上一个平移组成，这种运动称为刚体运动。相机运动就是一个刚体运动。刚体运动过程中，同一个向量在各个坐标系下的长度和夹角都不会发生变化,只可能有空间位置和姿态的不同，而它自己的长度、各个面的角度等性质不会有任何变化。

欧氏变换由旋转和平移组成。我们首先考虑旋转。设某个单位正交基 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 经过一次旋转变成了 $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$。那么，对于同一个向量 $\boldsymbol{a}$（该向量并没有随着坐标系的旋转而发生运动），它在两个坐标系下的坐标为 $[a_1, a_2, a_3]^{\mathrm{T}}$ 和 $[a_1', a_2', a_3']^{\mathrm{T}}$。因为向量本身没变，所以根据坐标的定义，有

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'] \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

为了描述两个坐标之间的关系，我们对上述等式的左右两边同时左乘 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，那么左边的系数就变成了单位矩阵，所以：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'. \tag{3.6}$$

矩阵R描述了旋转本身。因此，称为旋转矩阵(Rotation Matrix)。同时，该矩阵各分量是两个坐标系基的内积，由于基向量的长度为 1，所以实际上是各基向量夹角的余弦值。所以这个矩阵也叫方向余弦矩阵(Direction Cosine Matrix)。我们后文统一称它为旋转矩阵。

旋转矩阵有一些特别的性质。事实上，它是一个行列式为1的正交矩阵,。反之，行列式为1的正交矩阵也是一个旋转矩阵。所以，可以将n 维旋转矩阵的集合定义如下：

$$\mathrm{SO}(n) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}, \det(\boldsymbol{R}) = 1\}.$$

在欧氏变换中，除了旋转还有平移。考虑世界坐标系中的向量 $\boldsymbol{a}$，经过一次旋转（用 $\boldsymbol{R}$ 描述）和一次平移 $\boldsymbol{t}$ 后，得到了 $\boldsymbol{a}'$，那么把旋转和平移合到一起，有

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}. \tag{3.9}$$

其中，$\boldsymbol{t}$ 称为平移向量。相比于旋转，平移部分只需把平移向量加到旋转之后的坐标上，非常简单。通过上式，我们用一个旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和一个平移向量 $\boldsymbol{t}$ 完整地描述了一个欧氏空间的坐标变换关系。实际当中，我们会定义坐标系 1、坐标系 2，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 在两个坐标系下的坐标为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$，它们之间的关系应该是：

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{t}_{12}. \tag{3.10}$$

这里的 $\boldsymbol{R}_{12}$ 是指“把坐标系 2 的向量变换到坐标系 1”中。由于向量乘在这个矩阵的右边，它的下标是**从右读到左**的。这也是本书的习惯写法。坐标变换很容易搞混，特别是存在多个坐标系的情况下。同理，如果我们要表达“从 1 到 2 的旋转矩阵”时，就写成 $\boldsymbol{R}_{21}$。请读者务必清楚本书的记法，因为不同书籍里写法不同，有的会记成左上/下标，而本书写在右侧下标。

关于平移 $\boldsymbol{t}_{12}$，它实际对应的是坐标系 1 原点指向坐标系 2 原点的向量，**在坐标系 1 下取的**

①正交矩阵即逆为自身转置的矩阵。旋转矩阵的正交性可以直接由定义得出。
②行列式为 1 是人为定义的，实际上只要求它的行列式为 ±1，但行列式为 −1 的称为瑕旋转，即一次旋转加一次反射。

坐标，所以笔者建议读者把它记作“从 1 到 2 的向量”。但是反过来的 $\boldsymbol{t}_{21}$，即从 2 指向 1 的向**量在坐标系 2 下的坐标**，却并不等于 $-\boldsymbol{t}_{12}$，而是和两个系的旋转还有关系①。所以，当初学者问“我的坐标在哪里”这样的问题时，我们需要清楚地说明这句话的含义。这里“我的坐标”实际上指从世界坐标系指向自己坐标系原点的向量，在世界坐标系下取到的坐标。对应到数学符号上，应该是 $\boldsymbol{t}_{\mathrm{WC}}$ 的取值。同理，它也不是 $-\boldsymbol{t}_{\mathrm{CW}}$。

3.1.3变换矩阵与齐次坐标

式 (3.9) 完整地表达了欧氏空间的旋转与平移，不过还存在一个小问题：这里的变换关系不是一个线性关系。假设我们进行了两次变换：$\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{t}_2$：

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}_1, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_2.$$

那么，从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{c}$ 的变换为

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}_2\left(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}_1\right) + \boldsymbol{t}_2.$$

这样的形式在变换多次之后会显得很啰嗦。因此，我们引入齐次坐标和变换矩阵，重写式 (3.9)：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

这是一个数学技巧：我们在一个三维向量的末尾添加 1，将其变成了四维向量，称为**齐次坐标**。对于这个四维向量，我们可以把旋转和平移写在一个矩阵里，使得整个关系变成线性关系。该式中，矩阵 $\boldsymbol{T}$ 称为**变换矩阵（Transform Matrix）**。

我们暂时用 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的齐次坐标。那么依靠齐次坐标和变换矩阵，两次变换的叠加就可以有很好的形式：

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}_1\tilde{\boldsymbol{a}},\ \tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{T}_2\tilde{\boldsymbol{b}} \quad \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\tilde{\boldsymbol{a}}. \tag{3.12}$$

向量，右下角为 1。这种矩阵又称为特殊欧氏群（Special Euclidean Group）：

$$\mathrm{SE}(3) = \left\{ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} | \boldsymbol{R} \in \mathrm{SO}(3), \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{3.13}$$

与 SO(3) 一样，求解该矩阵的逆表示一个反向的变换：

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

3.2 EIGEN

3.3 旋转向量与欧拉角

3.3.1 旋转向量

旋转矩阵表示方式至少有以下两个缺点:

- 1.SO(3)的旋转矩阵有9个量，但一次旋转只有3个自度。因此这种表达方式是冗余的同理，变换矩阵用 16 个量表达了6自由度的变换。
- 2.旋转矩阵自身带有约束:它必须是个正交矩阵，且行列式为1。变换矩阵也是如此。当想估计或优化一个旋转矩阵或变换矩阵时，这些约束会使得求解变得更困难

因此，我们希望有一种方式能够紧凑地描述旋转和平移。例如，用一个三维向量表达旋转用一个六维向量表达变换。事实上，任意旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来刻画。于是，我们可以使用一个向量，其方向与

旋转轴一致，而长度等于旋转角。这种向量称为旋转向量(或轴角/角轴，Axis-Angle)只需一个三维向量即可描述旋转。同样对于变换矩阵，我们使用一个旋转向量和一个平移向量即可表达一次变换。这时的变量维数正好是六维。

考虑某个用 $\boldsymbol{R}$ 表示的旋转。如果用旋转向量来描述，假设旋转轴为一个单位长度的向量 $\boldsymbol{n}$，角度为 θ，那么向量 $\theta\boldsymbol{n}$ 也可以描述这个旋转。于是，我们要问，两种表达方式之间有什么联系吗？事实上推导它们的转换关系并不难。从旋转向量到旋转矩阵的转换过程由**罗德里格斯公式**（Rodrigues's Formula）表明，由于推导过程比较复杂，这里不做描述，只给出转换的结果①：

$$\boldsymbol{R} = \cos\theta \boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} + \sin\theta \boldsymbol{n}^{\wedge}. \tag{3.15}$$

符号 ^ 是向量到反对称矩阵的转换符，见式 (3.3)。反之，我们也可以计算从一个旋转矩阵到旋转向量的转换。对于转角 θ，取两边的**迹**②，有

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\boldsymbol{R}) &= \cos\theta \operatorname{tr}(\boldsymbol{I}) + (1-\cos\theta)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\right) + \sin\theta \operatorname{tr}(\boldsymbol{n}^{\wedge}) \\ &= 3\cos\theta + (1-\cos\theta) \\ &= 1 + 2\cos\theta \end{aligned} \tag{3.16}$$

因此：

$$\theta = \arccos\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{R})-1}{2}. \tag{3.17}$$

3.3.2 欧拉角

当我们看到一个旋转矩阵或旋转向量时，很难想象出这个旋转究竟是什么样的。

而欧拉角则提供了一种非常直观的方式来描述旋转——它使用了3个分离的转角，把一个旋转分解成3次绕不同轴的旋转。

但是，由于分解方式有许多种，所以欧拉角也存在着众多不同的、易于混淆的定义方法例如，先绕X轴，再绕Y轴，最后绕Z轴旋转，就得到了一个XYZ轴的旋转。同理，可以定义ZYZ、ZYX等旋转方式。