

Proyecto 5 – Modulaciones digitales

Autor: Gerez Jimenez, Juan Jose Armadno

Resumen

Esta monografía investiga la representación de Fourier de formas de onda de energía finita y determina el ancho de banda que contiene al menos el 90% de la energía para diferentes formas de pulso utilizadas en comunicaciones digitales. Se analizan el pulso rectangular, el pulso seno cardinal, el pulso de coseno elevado y el pulso de raíz cuadrada de coseno elevado, considerando distintos valores del factor de roll-off. Además, se determina el ancho de banda necesario para una transmisión con una tasa de 1 bit por segundo utilizando modulación en amplitud de pulso binaria (2-PAM) para estas formas de pulso. Se investiga la condición de "cero interferencia entre símbolos" y se analiza la interferencia entre símbolos para señales 2-PAM en diversos escenarios. Los resultados se respaldan con modelos numéricos desarrollados en Python, cuyo código fuente se incluye por separado.

Introducción

En sistemas de comunicaciones digitales, la forma del pulso transmitido juega un papel crucial en el desempeño del sistema, afectando aspectos como el ancho de banda requerido y la interferencia entre símbolos (ISI). Comprender cómo se distribuye la energía de diferentes formas de pulso en el dominio de la frecuencia es esencial para diseñar sistemas eficientes y minimizar la ISI.

Esta monografía se enfoca en analizar la representación de Fourier de formas de onda de energía finita y en determinar el ancho de banda que contiene al menos el 90% de la energía de varias formas de pulso comunes. Se consideran el pulso rectangular, el pulso seno cardinal, el pulso de coseno elevado y el pulso de raíz cuadrada de coseno elevado, explorando el impacto del factor de roll-off en los pulsos de coseno elevado.

Además, se determina el ancho de banda necesario para transmitir a una tasa de 1 bit por segundo utilizando modulación 2-PAM con estas formas de pulso. Se investiga la condición necesaria para lograr "cero interferencia entre símbolos" y se analiza la ISI en diferentes escenarios, incluyendo el uso de filtros adaptados y canales pasa-bajos.

Los resultados se obtienen mediante simulaciones numéricas implementadas en Python, y el código fuente empleado se incluye por separado para permitir la replicación de los experimentos.

Desarrollo

1. Representación de Fourier de Formas de Onda de Energía Finita

La transformada de Fourier permite representar señales de energía finita en el dominio de la frecuencia, proporcionando información sobre cómo se distribuye su energía espectralmente. Según Proakis y Salehi (2008) y Gallager (2008), la densidad espectral de potencia de una señal $x(t)$ se define como $|X(f)|^2$, donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$. La energía total de la señal se calcula como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Esta representación es fundamental para analizar y diseñar sistemas de comunicación que optimicen el uso del ancho de banda y minimicen la interferencia entre símbolos.

2. Determinación del Ancho de Banda que Contiene el 90% de la Energía

Se analizarán las siguientes formas de pulso:

- **Pulso Rectangular**
- **Pulso Seno Cardinal**
- **Pulso de Coseno Elevado** (para distintos valores de α)
- **Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado** (para los mismos valores de α)

2.1 Pulso Rectangular

Definición y Transformada de Fourier

El pulso rectangular de duración T se define como:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su transformada de Fourier es:

$$P(f) = T \cdot \text{sinc}(\pi f T)$$

donde $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Cálculo del Ancho de Banda

La densidad espectral de potencia es $|P(f)|^2 = T^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi f T)$. La energía total es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = T$$

Para encontrar el ancho de banda $B_{90\%}$ que contiene el 90% de la energía, resolvemos:

$$\int_{-B_{90\%}/2}^{B_{90\%}/2} |P(f)|^2 df = 0.9E$$

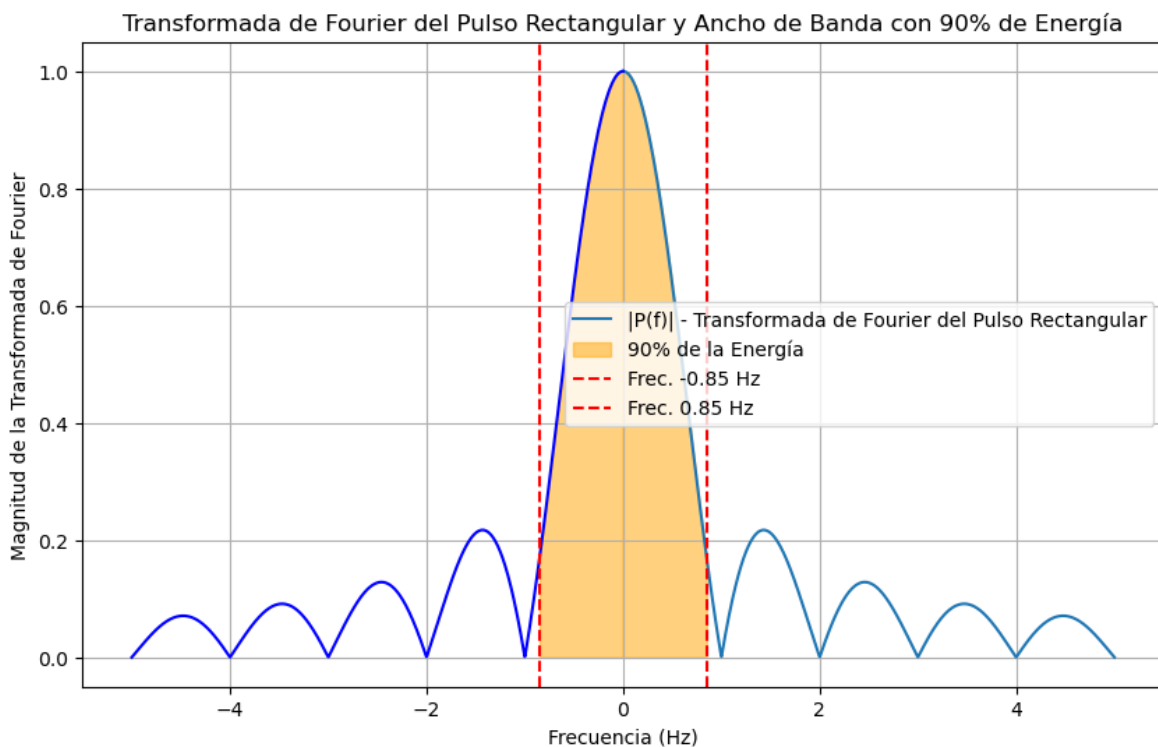
Implementación y Resultados

Se utilizó Python para realizar la integración numérica y determinar $B_{90\%}$. El código fuente se encuentra en test_p5.ipynb.

Resultado:

- Ancho de banda que contiene el 90% de la energía: **1.7017 Hz**

Gráfica



Grafica 1: gráfica que muestra la magnitud de $P(f)$ y el área correspondiente al 90% de la energía.

2.2 Pulso Seno Cardinal

Definición y Transformada de Fourier

El pulso seno cardinal se define como:

$$p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Su transformada de Fourier es:

$$P(f) = T \cdot \text{rect}(fT)$$

donde $\text{rect}(x)$ es la función rectangular:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cálculo del Ancho de Banda

La densidad espectral de potencia es constante en el rango $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$. Por lo tanto, el ancho de banda total es $\frac{1}{T}$, y el 90% de la energía se encuentra en el 90% de este ancho de banda.

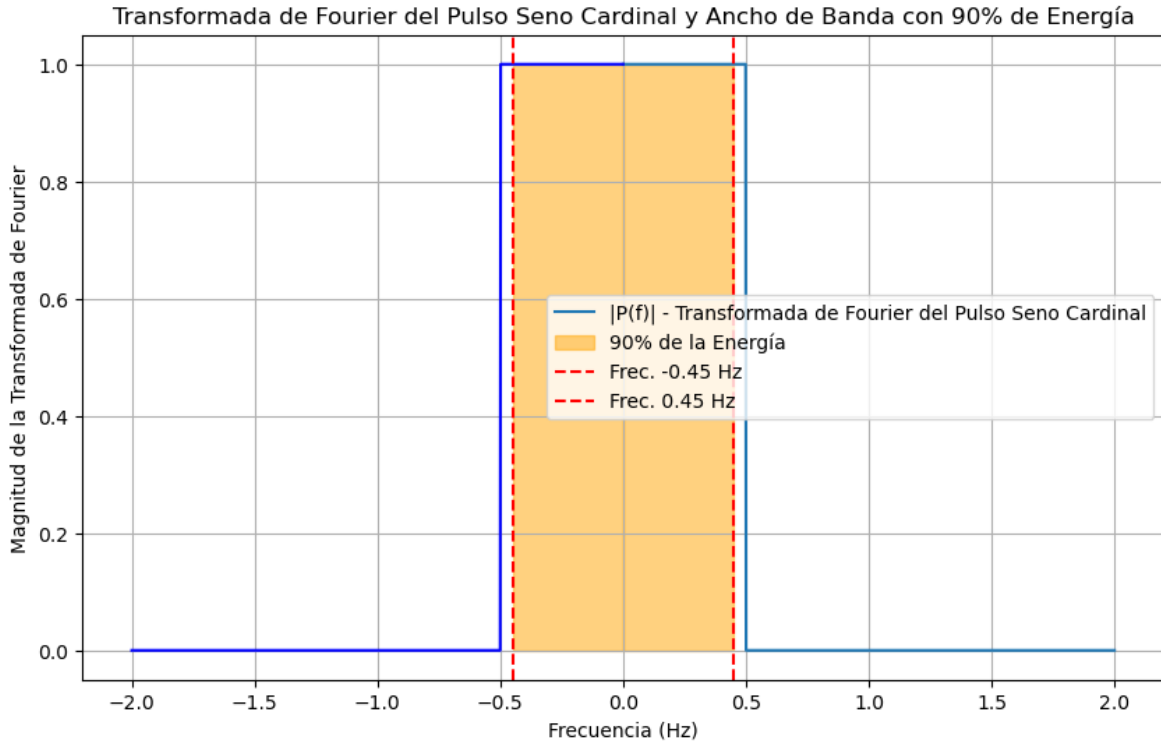
Implementación y Resultados

El código fuente está en test_p5.ipynb.

Resultado:

- Ancho de banda que contiene el 90% de la energía: **0.9009 Hz**

Gráfica



Gráfica 2: Gráfica del espectro del pulso seno cardinal y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.

2.3 Pulso de Coseno Elevado

Definición y Transformada de Fourier

El pulso de coseno elevado tiene una respuesta en frecuencia (Proakis y Salehi, 2008):

$$P(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi T}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right) \right], & \frac{1-\alpha}{2T} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde α es el factor de roll-off.

Cálculo del Ancho de Banda

El ancho de banda total es $B = \frac{1+\alpha}{T}$. Se calcula la energía acumulada hasta cierta frecuencia y se encuentra el ancho de banda que contiene el 90% de la energía.

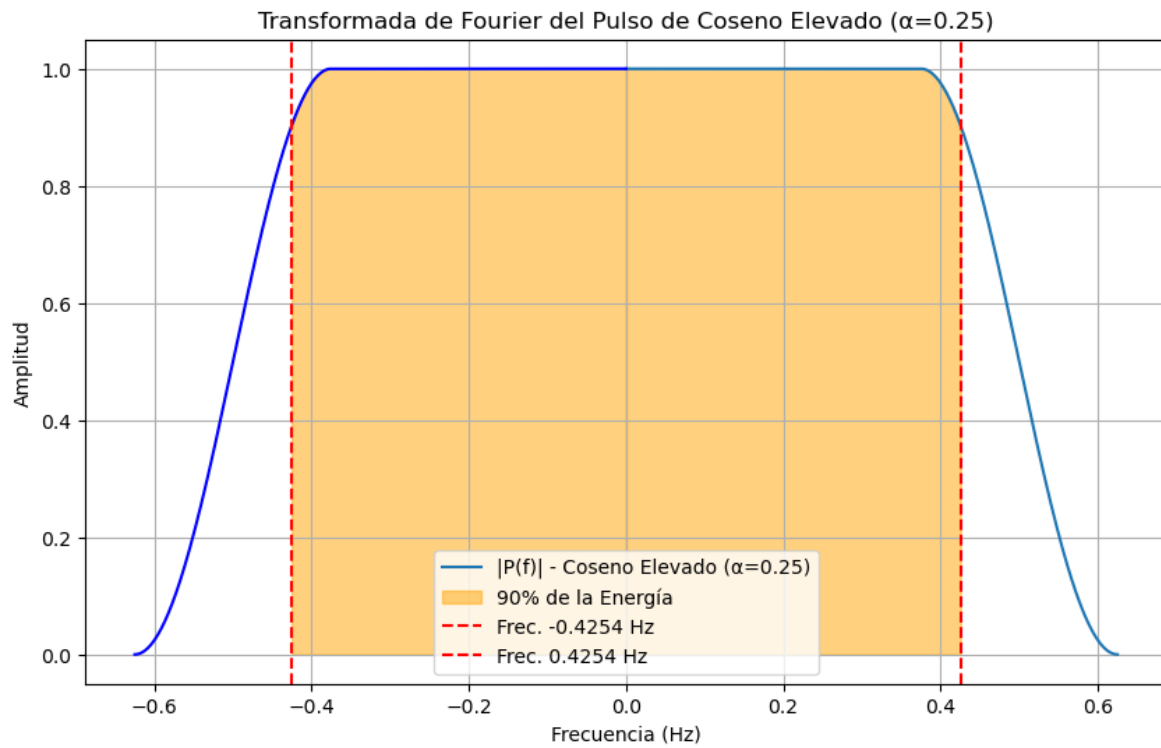
Implementación y Resultados

El código fuente está en test_p5.ipynb. Se consideraron $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$.

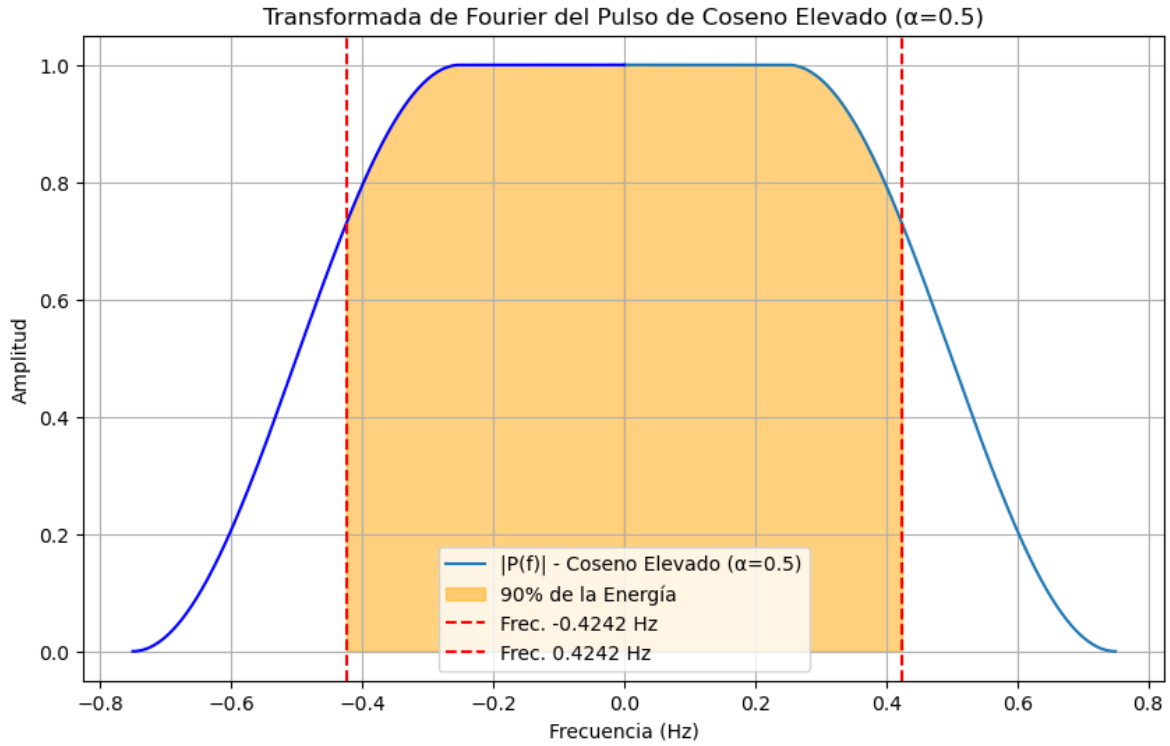
Resultados:

- $\alpha = 0.25$: **0.8509Hz**
- $\alpha = 0.5$: **0.8483Hz**
- $\alpha = 0.75$: **0.8794 Hz**

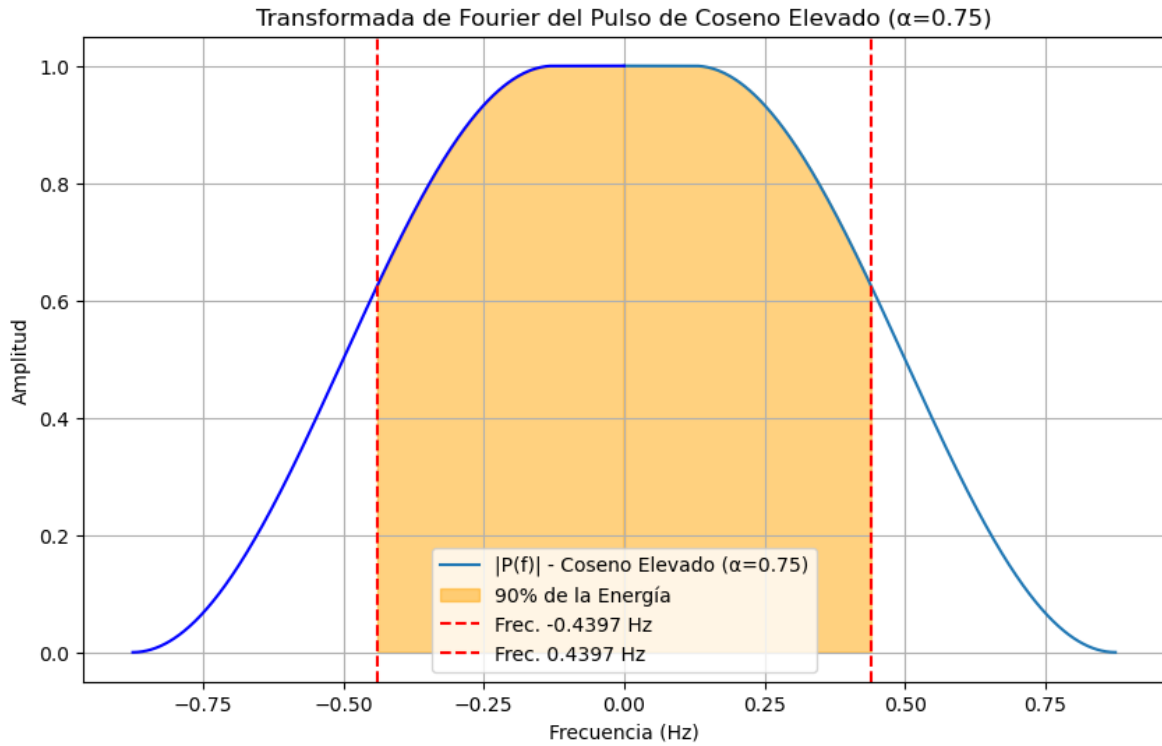
Gráficas



Grafica 3: Gráfica del espectro del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.25$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.



Grafica 4: Gráfica del espectro del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.5$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.



Grafica 5: Gráfica del espectro del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.75$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.

2.4 Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado

Definición y Transformada de Fourier

El pulso de raíz cuadrada de coseno elevado tiene una respuesta en frecuencia que es la raíz cuadrada de la del pulso de coseno elevado:

$$P(f) = \sqrt{P_{\text{coseno elevado}}(f)}$$

Cálculo del Ancho de Banda

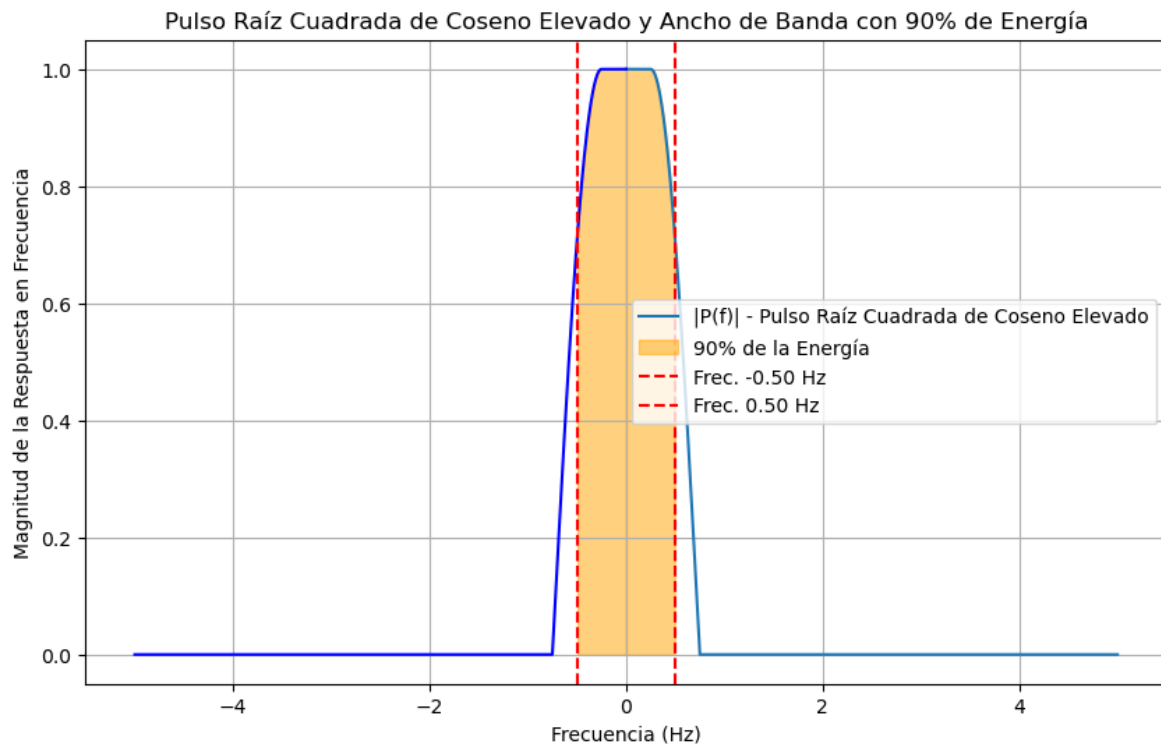
Se sigue un procedimiento similar al del pulso de coseno elevado, calculando la energía acumulada y determinando $B_{90\%}$.

Implementación y Resultados

El código fuente está en pulso_raiz_coseno_elevado.py. Valores de α :

- $\alpha = 0.5$: **0.9910 Hz**

Gráficas



Grafica 6: Gráfica del espectro raíz del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.5$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.

3. Ancho de Banda Necesario para una Transmisión 2-PAM a 1 bps

En sistemas de comunicación digital, el ancho de banda requerido para transmitir información depende tanto de la tasa de transmisión como de la forma del pulso utilizado. Para una modulación 2-PAM a una tasa de 1 bit por segundo (bps), transmitimos un símbolo cada segundo, es decir, el tiempo de símbolo $T=1$ segundo.

- **Pulso Rectangular:** Requiere un ancho de banda de aproximadamente **1.7017 Hz**.
- **Pulso Seno Cardinal:** Ancho de banda de **0.9009 Hz**.
- **Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado** ($\alpha = 0.5$): Ancho de banda de **0.9910 Hz**.

4. Condición de "Cero Interferencia entre Símbolos"

La interferencia entre símbolos (ISI) ocurre cuando los pulsos de símbolos adyacentes se superponen, afectando la capacidad de detectar correctamente los símbolos transmitidos. La condición de cero ISI, según Proakis y Salehi (2008), se logra cuando la respuesta al impulso global del sistema cumple:

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

donde T_s es el intervalo de símbolos y k es un entero.

5. Análisis de la Interferencia entre Símbolos para Señales 2-PAM

Este apartado analiza la interferencia entre símbolos (ISI) en una señal de modulación 2-PAM (Modulación por Amplitud de Pulso Binaria) para diferentes formas de pulsos y configuraciones de transmisión. Se emplearon simulaciones para evaluar el comportamiento de la señal transmitida al pasar por un canal de respuesta al impulso y por filtros específicos en el receptor. Los resultados se presentan en la **Figura 7**, que muestra el comportamiento de la señal en cada etapa de la transmisión para las diferentes configuraciones de pulsos y filtros.

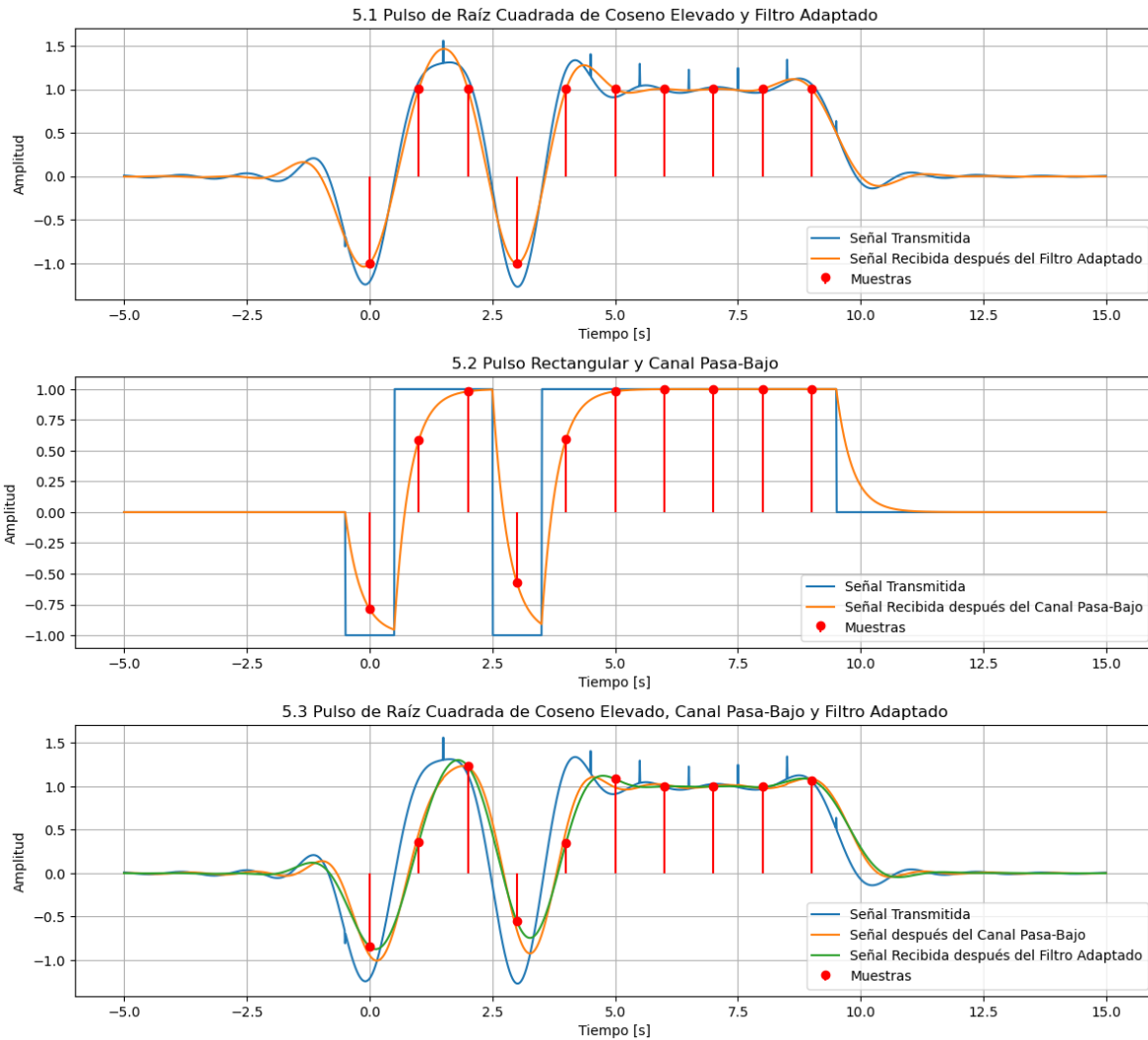


Figura 7: señales afectadas por canales y filtros.

5.1 Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado y Filtro Adaptado

En este caso, se utiliza un pulso de raíz cuadrada de coseno elevado como forma de pulso en la transmisión, y un filtro adaptado en el receptor con la misma respuesta al impulso. La respuesta global del sistema es un pulso de coseno elevado, cumpliendo la condición de "cero interferencia entre símbolos". Esto se observa en el primer gráfico de la **Figura 7**, donde:

- La línea azul representa la **Señal Transmitida** con forma de pulso de raíz cuadrada de coseno elevado.
- La línea naranja muestra la **Señal Recibida después del Filtro Adaptado**, la cual se asemeja a la señal transmitida, indicando que el filtro adaptado ha reducido efectivamente la ISI.
- Los puntos rojos indican las **Muestras en los Instantes de Símbolo**, que se toman en los puntos óptimos y muestran valores cercanos a los de la señal transmitida, evidenciando la reducción de ISI.

5.2 Pulso Rectangular y Canal Pasa-Bajo

En este escenario, se utiliza un pulso rectangular como forma de pulso para la transmisión, y la señal pasa por un canal de respuesta al impulso con un filtro pasa-bajo de un solo polo y frecuencia de corte de 0.5 Hz. Este tipo de canal introduce distorsión en la señal, lo que causa interferencia entre símbolos.

El segundo gráfico de la **Figura 7** muestra los resultados de esta simulación:

- La línea azul representa la **Señal Transmitida** con forma de pulso rectangular.
- La línea naranja muestra la **Señal Recibida después del Canal Pasa-Bajo**, donde se observa una distorsión significativa causada por el canal, lo cual afecta la forma del pulso.
- Los puntos rojos indican las **Muestras en los Instantes de Símbolo**, las cuales reflejan claramente la presencia de ISI, dificultando la correcta detección de los símbolos transmitidos.

5.3 Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado, Canal Pasa-Bajo y Filtro Adaptado

En esta configuración, se utiliza un pulso de raíz cuadrada de coseno elevado en la transmisión. La señal pasa primero por un canal pasa-bajo con frecuencia de corte de 0.5 Hz y luego por un filtro adaptado en el receptor. El objetivo de este diseño es observar si el filtro adaptado puede compensar la ISI introducida por el canal pasa-bajo.

El tercer gráfico de la **Figura 7** muestra los resultados:

- La línea azul representa la **Señal Transmitida** con forma de pulso de raíz cuadrada de coseno elevado.
- La línea naranja muestra la **Señal después del Canal Pasa-Bajo**, donde se aprecia una distorsión debido al canal.
- La línea verde muestra la **Señal Recibida después del Filtro Adaptado**, que se asemeja más a la señal transmitida, aunque persiste algo de distorsión. Esto indica que el filtro adaptado reduce significativamente la ISI, pero no puede eliminar completamente la distorsión introducida por el canal.
- Los puntos rojos representan las **Muestras en los Instantes de Símbolo**, y muestran una mejoría en la detección de los símbolos transmitidos en comparación con el caso anterior.

6. Análisis de los Diagramas de Ojo

Los **diagramas de ojo**, como vimos en Proakis y Salehi, (2008), son una herramienta visual que permite evaluar la calidad de la señal en un sistema de comunicaciones digitales, en este caso utilizando modulación 2-PAM. Estos

diagramas muestran cómo se solapan los pulsos de los símbolos en el tiempo, permitiendo observar la presencia de **interferencia entre símbolos (ISI)**, ruido y otros factores que pueden afectar la claridad de la señal recibida.

A continuación, se analizan los diagramas de ojo generados para cada configuración de pulso y canal usando el programa de Python *eye.ipynb*.

6.1 Diagrama de Ojo - Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado y Filtro Adaptado

En la **Figura 8**, se observa el diagrama de ojo para el caso de un pulso de raíz cuadrada de coseno elevado con un filtro adaptado en el receptor. Esta configuración minimiza la interferencia entre símbolos, cumpliendo la **condición de Nyquist** para cero ISI.

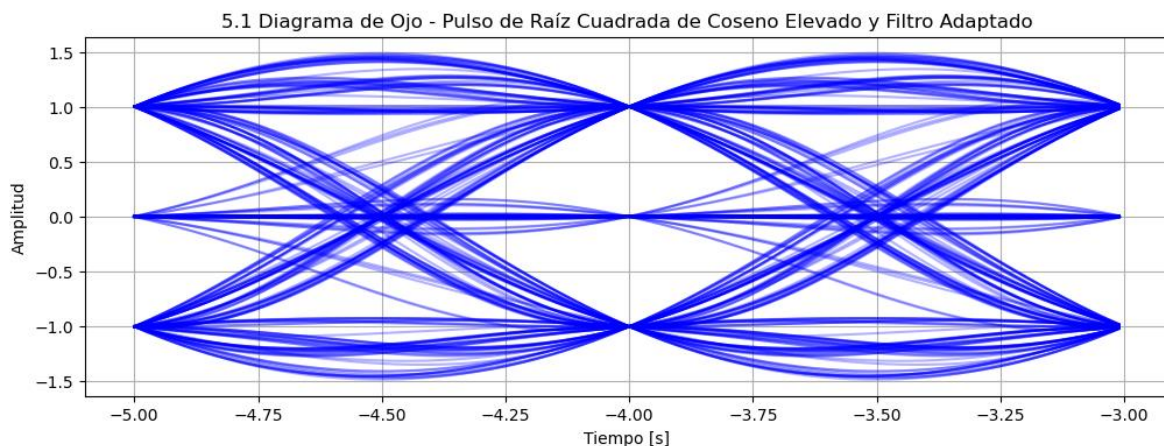


Figura 8: Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado y Filtro Adaptado.

- **Análisis del ojo abierto:** Se aprecia un ojo bien definido y abierto, lo que indica que los símbolos están claramente separados en el tiempo. La apertura del ojo muestra una ventana donde la señal se puede muestrear sin interferencia de los símbolos adyacentes.
- **Cruces definidos:** Los puntos de cruce del ojo son nítidos, lo que ayuda a minimizar los errores en la detección de bits.

Este caso representa una transmisión óptima en términos de reducción de ISI, ya que el filtro adaptado cumple su función de moldear la señal para evitar solapamientos entre símbolos.

6.2 Diagrama de Ojo - Pulso Rectangular y Canal Pasa-Bajo

La **Figura 9** muestra el diagrama de ojo para una señal transmitida con pulso rectangular que pasa por un canal pasa-bajo. En este caso, el canal introduce

distorsión debido a su limitación en el ancho de banda, lo cual afecta la forma de los pulsos transmitidos.

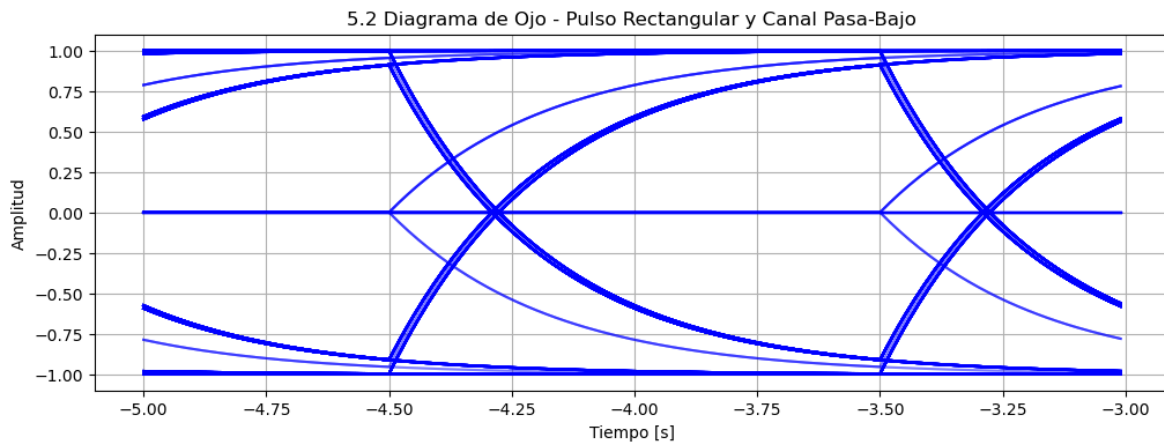


Figura 9: Pulso rectangular y canal pasa-bajo.

- **Ojo cerrado y distorsión:** El ojo está notablemente más cerrado en comparación con el caso anterior, y las transiciones de la señal no son claras. Esto se debe a que el canal pasa-bajo atenúa las frecuencias altas, provocando que los pulsos se extiendan y se solapen.
- **Interferencia entre símbolos (ISI):** La distorsión generada por el canal pasa-bajo causa una interferencia significativa entre los símbolos, dificultando la detección precisa de cada símbolo.

Este caso demuestra cómo la limitación del ancho de banda del canal puede generar ISI y afectar la calidad de la transmisión.

6.3 Diagrama de Ojo - Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado, Canal Pasa-Bajo y Filtro Adaptado

En la **Figura 10**, se presenta el diagrama de ojo para una señal con pulso de raíz cuadrada de coseno elevado que pasa primero por un canal pasa-bajo y luego por un filtro adaptado en el receptor. Esta configuración busca compensar la distorsión causada por el canal utilizando el filtro adaptado.

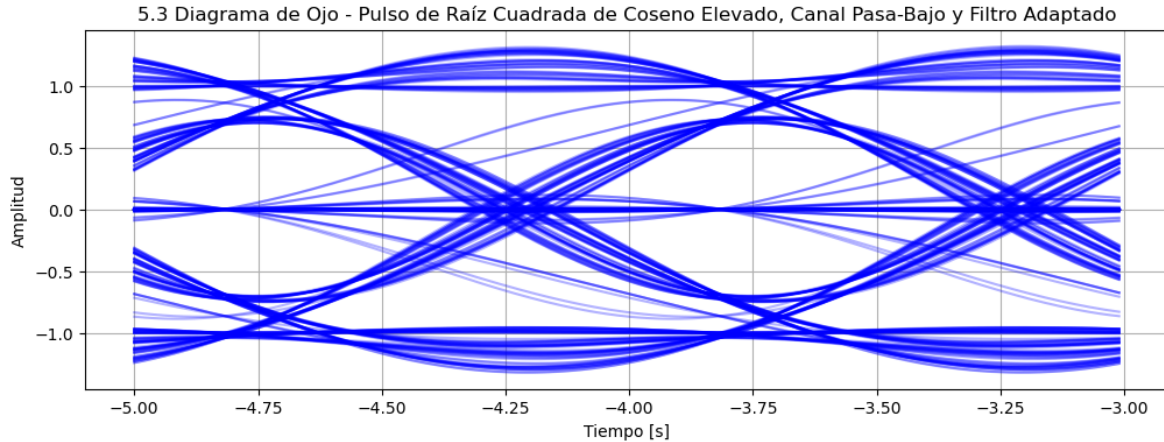


Figura 10: Pulso raíz coseno elevado con canal pasa-bajo y filtro.

- **Mejoramiento de la apertura del ojo:** Aunque el canal pasa-bajo introduce distorsión, el filtro adaptado en el receptor ayuda a recuperar parcialmente la forma de los pulsos, lo que resulta en un ojo más abierto en comparación con el caso del pulso rectangular y canal pasa-bajo.
- **Reducción parcial de la ISI:** El filtro adaptado reduce la interferencia entre símbolos, aunque no puede eliminar completamente los efectos de la distorsión del canal. Aún se observa algo de solapamiento en las transiciones, pero la calidad de la señal es mejor que en el caso sin filtro adaptado.

Este caso muestra la efectividad del filtro adaptado para mitigar los efectos del canal y reducir la ISI, aunque no de forma completa debido a las limitaciones impuestas por el canal pasa-bajo.

7. Guía de Usuario para el Uso y Modificación del código.

El archivo [test_p5.ipynb](#) contiene código para calcular y visualizar las transformadas de Fourier de diferentes formas de pulso utilizadas en sistemas de comunicaciones digitales, cálculos de energía y ancho de banda e incluso graficas para ver los efectos de la distorsión que producen los canales y filtros a distintas señales. A continuación, se explica cómo modificar los parámetros clave de cada función para que el usuario pueda explorar los efectos de distintos pulsos y observar sus respuestas en frecuencia.

7.1. Definición de los Pulsos y Transformadas de Fourier

El código en esta sección calcula la **transformada de Fourier** de tres tipos de pulsos: el pulso rectangular, el pulso sinc, y el pulso de coseno elevado. Esto permite visualizar el espectro de frecuencia de cada pulso, que es fundamental para entender el ancho de banda que cada pulso requiere.

Parámetros Modificables

1. Ancho del Pulso Rectangular (ancho):

- **Descripción:** El parámetro ancho controla la duración del pulso rectangular en el dominio temporal. Cambiar este valor afecta el ancho de banda del pulso en el dominio de la frecuencia.
- **Modificación:** Cambie ancho = 0.5 a un valor mayor o menor en la función pulso_rectangular(t, ancho) para observar cómo un pulso más ancho en el tiempo resulta en un espectro más estrecho y viceversa.

2. Factor de Roll-Off (alpha) en el Pulso de Coseno Elevado:

- **Descripción:** El parámetro alpha define el roll-off del pulso de coseno elevado. Controla la suavidad de los bordes del pulso, lo cual afecta el ancho de banda en el dominio de la frecuencia.
- **Modificación:** Cambie alpha = 0.5 a valores como alpha = 0.25 o alpha = 0.75 en la función pulso_coseno_elevado(t, alpha, Ts) para ver cómo un roll-off mayor o menor cambia la distribución de energía en el espectro.

3. Periodo de Simbolización (Ts) en el Pulso de Coseno Elevado:

- **Descripción:** Este parámetro Ts determina la duración de cada símbolo en el pulso de coseno elevado, similar a ancho en el pulso rectangular. Afecta el ancho de banda del pulso en la frecuencia.
- **Modificación:** Cambie Ts = 0.5 en pulso_coseno_elevado(t, alpha, Ts) a otros valores para observar el efecto de un símbolo más corto o más largo en el ancho de banda.

7.2. Cálculo del Ancho de Banda que Contiene el 90% de la Energía para un Pulso Rectangular

Esta sección del código calcula el **ancho de banda que contiene el 90% de la energía** de un pulso rectangular, proporcionando una medida de cuánta frecuencia se necesitan para representar la mayor parte de la energía del pulso. Esto es importante en sistemas de comunicación, ya que determina el ancho de banda necesario para transmitir la señal de forma eficiente sin grandes pérdidas de información.

Parámetros Modificables

1. Duración del Pulso (T):

- **Descripción:** Define la duración temporal del pulso rectangular, lo cual afecta directamente el ancho de banda. A mayor duración, menor es el ancho de banda requerido para contener la energía.
- **Modificación:** Cambie T = 1 a un valor mayor o menor para observar cómo afecta el ancho de banda que contiene el 90% de la energía.

2. Frecuencia Máxima para el Gráfico (f_{\max}):

- **Descripción:** Define el límite de frecuencias que se muestran en la gráfica de la transformada de Fourier.
- **Modificación:** Ajuste $f_{\max} = 5 / T$ a valores más altos para observar un mayor rango de frecuencias o a valores más bajos para concentrarse en las frecuencias principales del pulso.

3. Número de Puntos para la Gráfica (N):

- **Descripción:** Define la resolución en la frecuencia, es decir, cuántos puntos se calculan en el espectro. Aumentar este valor puede hacer la gráfica más detallada.
- **Modificación:** Cambie $N = 1000$ a un valor mayor para obtener una representación más detallada del espectro.
-

Funcionamiento del Código

1. Transformada de Fourier del Pulso Rectangular:

- Se calcula la transformada de Fourier del pulso rectangular en el dominio de la frecuencia (P_f), que tiene forma de función sinc. Esta transformada permite visualizar cómo se distribuye la energía del pulso en el dominio de la frecuencia.

2. Cálculo de la Densidad Espectral de Potencia (PSD):

- La densidad espectral de potencia (PSD) se calcula como el cuadrado de la magnitud de P_f , y representa la distribución de la energía en el dominio de la frecuencia.

3. Cálculo de la Energía Acumulada:

- La energía acumulada se calcula de manera simétrica alrededor de cero, integrando el espectro desde $-f[i]$ hasta $f[i]$ para cada frecuencia $f[i]$. Luego se normaliza en función de la energía total del pulso, permitiendo encontrar el punto en el que se alcanza el 90% de la energía.

4. Determinación del Ancho de Banda para el 90% de la Energía:

- Se encuentra el índice en el cual la energía acumulada alcanza el 90%. La frecuencia correspondiente, f_{90} , se multiplica por dos para obtener el ancho de banda total simétrico que contiene el 90% de la energía.

5. Visualización:

- El código genera una gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier del pulso rectangular, destacando el rango de frecuencias que contiene el 90% de la energía en color naranja. Líneas verticales en las frecuencias $-f_{90}$ y f_{90} indican los límites de este rango.
-

7.3. Cálculo del Ancho de Banda que Contiene el 90% de la Energía para un Pulso Seno Cardinal

En esta sección, el código calcula el **ancho de banda que contiene el 90% de la energía** de un pulso seno cardinal (sinc), lo que permite determinar el rango de frecuencias necesario para transmitir la mayoría de la energía del pulso.

Parámetros Modificables

1. Duración del Pulso (T):

- **Descripción:** Controla la duración del pulso en el dominio temporal. Aunque el seno cardinal es una función ideal que se extiende infinitamente, T define su "escala" en este caso. Cambiar este valor afecta el rango de frecuencias.
- **Modificación:** Ajuste $T = 1$ a un valor mayor o menor para observar cómo afecta el ancho de banda que contiene el 90% de la energía.

2. Frecuencia Máxima para el Gráfico (f_max):

- **Descripción:** Define el límite de frecuencias que se muestran en la gráfica de la transformada de Fourier.
- **Modificación:** Ajuste $f_max = 2 / T$ para observar un mayor o menor rango de frecuencias en la gráfica.

3. Número de Puntos para la Gráfica (N):

- **Descripción:** Define la resolución de las frecuencias en el dominio de la frecuencia. Aumentar este valor permite ver una representación más detallada del espectro.
- **Modificación:** Cambie $N = 1000$ para obtener una mayor o menor resolución en la gráfica.

Funcionamiento del Código

1. Transformada de Fourier del Pulso Seno Cardinal:

- Se calcula la transformada de Fourier del pulso seno cardinal en el dominio de la frecuencia (P_f). Esta transformada es un espectro rectangular, indicando que el pulso sinc tiene una distribución de frecuencia limitada a un rango definido, lo que representa una idealización.

2. Cálculo de la Densidad Espectral de Potencia (PSD):

- La densidad espectral de potencia (PSD) se calcula como el cuadrado de la magnitud de P_f, representando la cantidad de energía distribuida en cada componente de frecuencia.

3. Cálculo de la Energía Acumulada:

- La energía acumulada se calcula simétricamente en torno a cero, integrando el espectro de potencia desde $-f[i]$ hasta $f[i]$. La energía acumulada se normaliza con respecto a la energía total del pulso, lo

que facilita encontrar el punto en el que se alcanza el 90% de la energía.

4. **Determinación del Ancho de Banda para el 90% de la Energía:**

- Se identifica el índice donde la energía acumulada alcanza el 90%. La frecuencia correspondiente (f_{90}) se multiplica por dos para obtener el ancho de banda total simétrico que contiene el 90% de la energía.

5. **Visualización:**

- El código genera una gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier del pulso seno cardinal, destacando el rango de frecuencias que contiene el 90% de la energía en color naranja. Se incluyen líneas verticales que indican los límites de este rango en $-f_{90}$ y f_{90} .
-

7.4. Cálculo del Ancho de Banda que Contiene el 90% de la Energía para un Pulso de Coseno Elevado

Esta sección del código calcula el **ancho de banda que contiene el 90% de la energía** de un pulso de coseno elevado. Los pulsos de coseno elevado son ampliamente utilizados en comunicaciones digitales, ya que permiten controlar el ancho de banda mediante el parámetro de **roll-off** (alpha), el cual ajusta la cantidad de suavidad en los bordes del pulso.

Parámetros Modificables

1. **Duración del Pulso (T):**

- **Descripción:** Define la duración de cada símbolo, lo cual afecta el ancho de banda. Cuanto mayor es el valor de T, menor es el ancho de banda.
- **Modificación:** Cambie $T = 1$ a otros valores para observar cómo afecta el ancho de banda que contiene el 90% de la energía del pulso.

2. **Factor de Roll-Off (alpha):**

- **Descripción:** Controla la suavidad de los bordes del pulso. Valores de alpha más altos hacen que el ancho de banda se expanda para mejorar la atenuación de los lóbulos laterales.
- **Modificación:** Pruebe valores como $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.5$, y $\alpha = 0.75$ para observar cómo varía la distribución de energía en el dominio de la frecuencia.

3. **Número de Puntos (N):**

- **Descripción:** Define la resolución en el dominio de la frecuencia para la visualización.

- **Modificación:** Cambie $N = 1000$ para aumentar o reducir la resolución del gráfico de la transformada de Fourier.

Funcionamiento del Código

1. Transformada de Fourier del Pulso de Coseno Elevado:

- La función `P_f_coseno_elevado` calcula la transformada de Fourier del pulso de coseno elevado para cada frecuencia f , utilizando el roll-off α y la duración T . Esta función ajusta el ancho de banda de la señal en función de α .

2. Cálculo de la Densidad Espectral de Potencia (PSD):

- La densidad espectral de potencia (PSD) se calcula como el cuadrado de la magnitud de `P_f`. Esta medida representa la cantidad de energía distribuida en cada componente de frecuencia.

3. Cálculo de la Energía Acumulada:

- La energía acumulada se calcula de manera simétrica, integrando el espectro de potencia desde cero hasta $f[i]$ para cada frecuencia $f[i]$. Esto permite determinar el porcentaje de energía acumulada en función del ancho de banda.

4. Determinación del Ancho de Banda para el 90% de la Energía:

- Se identifica el índice donde la energía acumulada alcanza el 90%. La frecuencia correspondiente (f_{90}) se multiplica por dos para obtener el ancho de banda total simétrico que contiene el 90% de la energía.

5. Visualización:

- El código genera una gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier del pulso de coseno elevado para cada valor de α . El rango de frecuencias que contiene el 90% de la energía se destaca en color naranja, y las líneas verticales indican los límites de este rango.

7.5. Cálculo del Ancho de Banda que Contiene el 90% de la Energía para un Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado

Esta sección del código calcula el **ancho de banda que contiene el 90% de la energía** de un pulso de raíz cuadrada de coseno elevado. Este tipo de pulso es muy utilizado en sistemas de comunicaciones digitales porque permite una transmisión sin interferencia entre símbolos (ISI) al cumplir la condición de Nyquist.

Parámetros Modificables

1. Duración del Símbolo (T):

- **Descripción:** Controla la duración de cada símbolo, afectando directamente el ancho de banda del pulso. Valores de T mayores reducirán el ancho de banda necesario para transmitir el pulso.
- **Modificación:** Ajuste $T = 1$ para observar cómo afecta el ancho de banda que contiene el 90% de la energía del pulso.

2. Factor de Roll-Off (alpha):

- **Descripción:** Este parámetro define el grado de roll-off, afectando el ancho de banda del pulso. Valores de α más altos aumentan el ancho de banda pero mejoran la atenuación de los lóbulos laterales.
- **Modificación:** Cambie $\alpha = 0.5$ a valores como $\alpha = 0.25$ o $\alpha = 0.75$ para observar cómo la energía del pulso se distribuye en el dominio de la frecuencia.

3. Número de Puntos (N):

- **Descripción:** Define la resolución de la representación de la frecuencia. Aumentar este valor mejora la precisión del gráfico.
- **Modificación:** Cambie $N = 1000$ a un valor mayor para obtener una representación más detallada.

Funcionamiento del Código

1. Transformada de Fourier del Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado:

- La función `P_f_raiz_coseno_elevado` calcula la transformada de Fourier del pulso de raíz cuadrada de coseno elevado para cada frecuencia f , utilizando los parámetros α y T . Esta función ajusta el ancho de banda y la distribución de energía en el espectro según el valor de α .

2. Cálculo de la Densidad Espectral de Potencia (PSD):

- La densidad espectral de potencia (PSD) se calcula como el cuadrado de la magnitud de `P_f`, representando la cantidad de energía en cada componente de frecuencia.

3. Cálculo de la Energía Acumulada:

- La energía acumulada se calcula integrando el espectro de potencia de forma simétrica desde cero hasta cada frecuencia $f[i]$, normalizándola con respecto a la energía total. Esto permite observar el punto en que se acumula el 90% de la energía.

4. Determinación del Ancho de Banda para el 90% de la Energía:

- Se identifica el índice donde la energía acumulada alcanza el 90%. La frecuencia f_{90} correspondiente se multiplica por dos para obtener el ancho de banda total simétrico que contiene el 90% de la energía.

5. Visualización:

- El código genera una gráfica de la magnitud de la respuesta en frecuencia del pulso de raíz cuadrada de coseno elevado, destacando en color naranja el rango de frecuencias que contiene el 90% de la energía. Las líneas verticales indican los límites de este rango en $-f_{90}$ y f_{90} .

7.6. Análisis de Señales en Distintos Canales y Filtros

Esta sección del código examina cómo distintas formas de pulso (raíz cuadrada de coseno elevado y rectangular) se comportan al pasar por canales y filtros específicos, incluyendo un filtro adaptado y un canal pasa-bajo. La configuración de cada escenario permite evaluar la **interferencia entre símbolos (ISI)** y la efectividad de los filtros para mejorar la calidad de la señal recibida.

Parámetros Modificables

1. Duración del Símbolo (T):

- **Descripción:** Controla la duración de cada símbolo. Modificar T afecta la tasa de transmisión y el intervalo de los pulsos.
- **Modificación:** Cambiar $T = 1$ a otro valor permite ajustar la duración del símbolo y, con ello, observar cómo se modifica la separación entre los pulsos y la ISI.

2. Factor de Roll-Off (alpha):

- **Descripción:** Define la suavidad de los bordes del pulso de raíz cuadrada de coseno elevado, afectando su ancho de banda y la distribución de la energía.
- **Modificación:** Cambiar $\alpha = 0.5$ a valores como 0.25 o 0.75 permite observar cómo el roll-off impacta la forma del pulso y su respuesta ante el canal y el filtro.

3. Frecuencia de Muestreo (fs):

- **Descripción:** Define la frecuencia a la que se muestrean los pulsos en el tiempo. Debe ser suficientemente alta para capturar adecuadamente la forma del pulso.
- **Modificación:** Cambiar $f_s = 100$ a valores más altos puede mejorar la precisión del muestreo.

4. Frecuencia de Corte del Canal Pasa-Bajo (fc):

- **Descripción:** Define la frecuencia máxima que permite pasar el canal pasa-bajo, afectando cómo se atenúan las frecuencias altas en la señal.
- **Modificación:** Ajustar $f_c = 0.5$ a un valor más alto o más bajo permite observar cómo el canal filtra los pulsos y genera distorsión.

5. Número de Bits Transmitidos (N_bits):

- **Descripción:** Establece la cantidad de símbolos que se transmiten, lo cual afecta la longitud de la simulación.
- **Modificación:** Cambiar $N_{\text{bits}} = 10$ a valores mayores permite observar cómo se comportan secuencias de bits más largas en el sistema.

Descripción del Código

1. Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado y Filtro Adaptado:

- Se genera una señal transmitida compuesta por un pulso de raíz cuadrada de coseno elevado. Esta señal pasa por un filtro adaptado con una respuesta de raíz cuadrada de coseno elevado, lo cual permite minimizar la ISI.
- **Muestreo:** Los puntos de muestreo se seleccionan en instantes óptimos para evaluar la calidad de la detección.

2. Pulso Rectangular y Canal Pasa-Bajo:

- Una señal con un pulso rectangular pasa por un canal pasa-bajo de un polo. Este canal atenúa las frecuencias altas, introduciendo distorsión en la señal recibida.
- **Muestreo:** Se utiliza el mismo instante de muestreo que en el pulso de raíz cuadrada de coseno elevado para facilitar la comparación.

3. Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado, Canal Pasa-Bajo y Filtro Adaptado:

- Una señal de pulso de raíz cuadrada de coseno elevado pasa primero por un canal pasa-bajo, introduciendo cierta distorsión. Luego, pasa por un filtro adaptado para mejorar la calidad de la señal y reducir la ISI.
- **Muestreo:** Similar a los casos anteriores, se seleccionan instantes óptimos para muestrear la señal después del filtro adaptado.

7.7. Diagrama de Ojo para Señales Transmitidas con Diferentes Pulsos y Configuraciones de Canal y Filtro

El código en *eye.ipynb* genera diagramas de ojo para las señales transmitidas con tres configuraciones distintas, representadas en los apartados previos. Cada diagrama muestra cómo la señal se ve afectada por el tipo de pulso, el canal, y el uso de filtros adaptados.

Parámetros Modificables

1. Duración del Símbolo (T):

- **Descripción:** Define el período de cada símbolo, afectando la separación en el tiempo entre los pulsos.
- **Modificación:** Cambiar $T = 1$ afecta el espaciado entre pulsos en el diagrama, lo cual puede facilitar o dificultar la visualización de la ISI.

2. Factor de Roll-Off (alpha):

- **Descripción:** Controla la suavidad de los bordes del pulso de raíz cuadrada de coseno elevado, afectando su ancho de banda.
- **Modificación:** Cambie $\alpha = 0.5$ a otros valores, como 0.25 o 0.75, para observar cómo el roll-off afecta la forma del pulso y su sensibilidad a la interferencia.

3. Frecuencia de Corte del Canal Pasa-Bajo (f_c):

- **Descripción:** Define la frecuencia máxima permitida por el canal, afectando la distorsión en la señal.
- **Modificación:** Cambie $f_c = 0.5$ a valores más altos o bajos para observar cómo la limitación de ancho de banda afecta la calidad de la señal.

4. Número de Bits Transmitidos (N_{bits}):

- **Descripción:** Controla la longitud de la transmisión y la cantidad de datos superpuestos en el diagrama de ojo.
- **Modificación:** Cambie $N_{\text{bits}} = 50$ para aumentar la densidad del diagrama de ojo.

5. Función diagrama_ojo:

- La función genera diagramas de ojo superponiendo múltiples bits de la señal transmitida, permitiendo observar visualmente la ISI.
- **Parámetros:**
 - **funcion_pulso:** Define la forma del pulso a utilizar (raíz cuadrada de coseno elevado o rectangular).
 - **canal:** Si se aplica un canal pasa-bajo.
 - **filtro_adaptado:** Si se aplica un filtro adaptado en el receptor.
 - **es_rectangular:** Diferencia el uso de pulsos rectangulares de los pulsos de coseno elevado.

Conclusiones

- **Distribución de Energía y Ancho de Banda:** Las diferentes formas de pulso distribuyen su energía de manera distinta en el dominio de la frecuencia. Pulsos como el seno cardinal requieren menos ancho de banda para contener el 90% de su energía en comparación con el pulso rectangular.
- **Impacto del Factor de Roll-off α :** En los pulsos de coseno elevado y raíz cuadrada de coseno elevado, un mayor valor de α incrementa el ancho de banda requerido pero mejora la atenuación de los lóbulos laterales, reduciendo la ISI.
- **Cero Interferencia entre Símbolos:** Utilizar pulsos que cumplen la condición de cero ISI, como el de coseno elevado, es crucial para evitar errores en la detección de símbolos en sistemas de comunicación.
- **Efectos del Canal y Filtros:** Los canales y filtros afectan la forma del pulso transmitido, lo que puede introducir ISI. El uso de filtros adaptados y el diseño adecuado de la forma del pulso son esenciales para mitigar estos efectos.

Referencias

- Proakis, J. G., & Salehi, M. (2008). *Digital Communications* (5ta ed.). McGraw-Hill.
- Gallager, R. G. (2008). *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press.