

Proyecto 5 – Modulaciones digitales

Autor: Gerez Jimenez, Juan Jose Armadno

Resumen

Esta monografía investiga la representación de Fourier de formas de onda de energía finita y determina el ancho de banda que contiene al menos el 90% de la energía para diferentes formas de pulso utilizadas en comunicaciones digitales. Se analizan el pulso rectangular, el pulso seno cardinal, el pulso de coseno elevado y el pulso de raíz cuadrada de coseno elevado, considerando distintos valores del factor de roll-off. Además, se determina el ancho de banda necesario para una transmisión con una tasa de 1 bit por segundo utilizando modulación en amplitud de pulso binaria (2-PAM) para estas formas de pulso. Se investiga la condición de "cero interferencia entre símbolos" y se analiza la interferencia entre símbolos para señales 2-PAM en diversos escenarios. Los resultados se respaldan con modelos numéricos desarrollados en Python, cuyo código fuente se incluye por separado.

Introducción

En sistemas de comunicaciones digitales, la forma del pulso transmitido juega un papel crucial en el desempeño del sistema, afectando aspectos como el ancho de banda requerido y la interferencia entre símbolos (ISI). Comprender cómo se distribuye la energía de diferentes formas de pulso en el dominio de la frecuencia es esencial para diseñar sistemas eficientes y minimizar la ISI.

Esta monografía se enfoca en analizar la representación de Fourier de formas de onda de energía finita y en determinar el ancho de banda que contiene al menos el 90% de la energía de varias formas de pulso comunes. Se consideran el pulso rectangular, el pulso seno cardinal, el pulso de coseno elevado y el pulso de raíz cuadrada de coseno elevado, explorando el impacto del factor de roll-off en los pulsos de coseno elevado.

Además, se determina el ancho de banda necesario para transmitir a una tasa de 1 bit por segundo utilizando modulación 2-PAM con estas formas de pulso. Se investiga la condición necesaria para lograr "cero interferencia entre símbolos" y se analiza la ISI en diferentes escenarios, incluyendo el uso de filtros adaptados y canales pasa-bajos.

Los resultados se obtienen mediante simulaciones numéricas implementadas en Python, y el código fuente empleado se incluye por separado para permitir la replicación de los experimentos.

Desarrollo

1. Representación de Fourier de Formas de Onda de Energía Finita

La transformada de Fourier permite representar señales de energía finita en el dominio de la frecuencia, proporcionando información sobre cómo se distribuye su energía espectralmente. Según Proakis y Salehi (2008) y Gallager (2008), la densidad espectral de potencia de una señal $x(t)$ se define como $|X(f)|^2$, donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$. La energía total de la señal se calcula como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Esta representación es fundamental para analizar y diseñar sistemas de comunicación que optimicen el uso del ancho de banda y minimicen la interferencia entre símbolos.

2. Determinación del Ancho de Banda que Contiene el 90% de la Energía

Se analizarán las siguientes formas de pulso:

- **Pulso Rectangular**
- **Pulso Seno Cardinal**
- **Pulso de Coseno Elevado** (para distintos valores de α)
- **Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado** (para los mismos valores de α)

2.1 Pulso Rectangular

Definición y Transformada de Fourier

El pulso rectangular de duración T se define como:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su transformada de Fourier es:

$$P(f) = T \cdot \text{sinc}(\pi f T)$$

donde $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Cálculo del Ancho de Banda

La densidad espectral de potencia es $|P(f)|^2 = T^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi f T)$. La energía total es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = T$$

Para encontrar el ancho de banda $B_{90\%}$ que contiene el 90% de la energía, resolvemos:

$$\int_{-B_{90\%}/2}^{B_{90\%}/2} |P(f)|^2 df = 0.9E$$

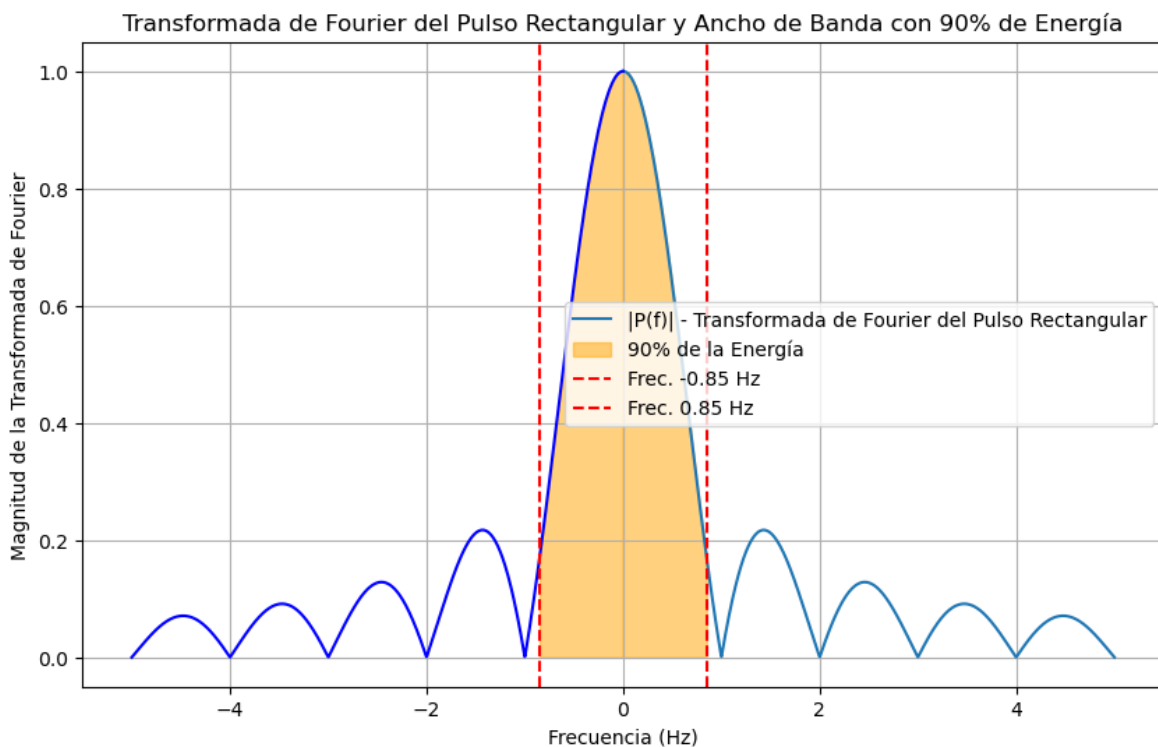
Implementación y Resultados

Se utilizó Python para realizar la integración numérica y determinar $B_{90\%}$. El código fuente se encuentra en test_p5.ipynb.

Resultado:

- Ancho de banda que contiene el 90% de la energía: **1.7017 Hz**

Gráfica



Grafica 1: gráfica que muestra la magnitud de $P(f)$ y el área correspondiente al 90% de la energía.

2.2 Pulso Seno Cardinal

Definición y Transformada de Fourier

El pulso seno cardinal se define como:

$$p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Su transformada de Fourier es:

$$P(f) = T \cdot \text{rect}(fT)$$

donde $\text{rect}(x)$ es la función rectangular:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cálculo del Ancho de Banda

La densidad espectral de potencia es constante en el rango $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$. Por lo tanto, el ancho de banda total es $\frac{1}{T}$, y el 90% de la energía se encuentra en el 90% de este ancho de banda.

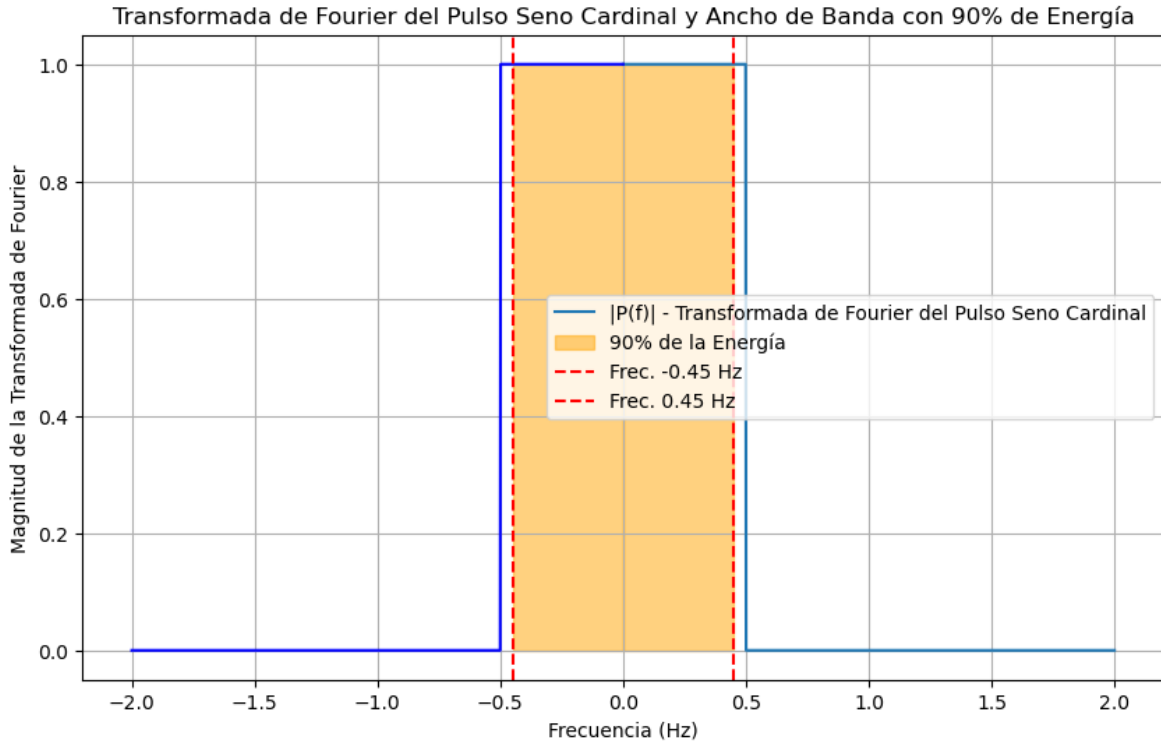
Implementación y Resultados

El código fuente está en `test_p5.ipynb`.

Resultado:

- Ancho de banda que contiene el 90% de la energía: **0.9009 Hz**

Gráfica



Gráfica 2: Gráfica del espectro del pulso seno cardinal y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.

2.3 Pulso de Coseno Elevado

Definición y Transformada de Fourier

El pulso de coseno elevado tiene una respuesta en frecuencia (Proakis y Salehi, 2008):

$$P(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi T}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right) \right], & \frac{1-\alpha}{2T} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde α es el factor de roll-off.

Cálculo del Ancho de Banda

El ancho de banda total es $B = \frac{1+\alpha}{T}$. Se calcula la energía acumulada hasta cierta frecuencia y se encuentra el ancho de banda que contiene el 90% de la energía.

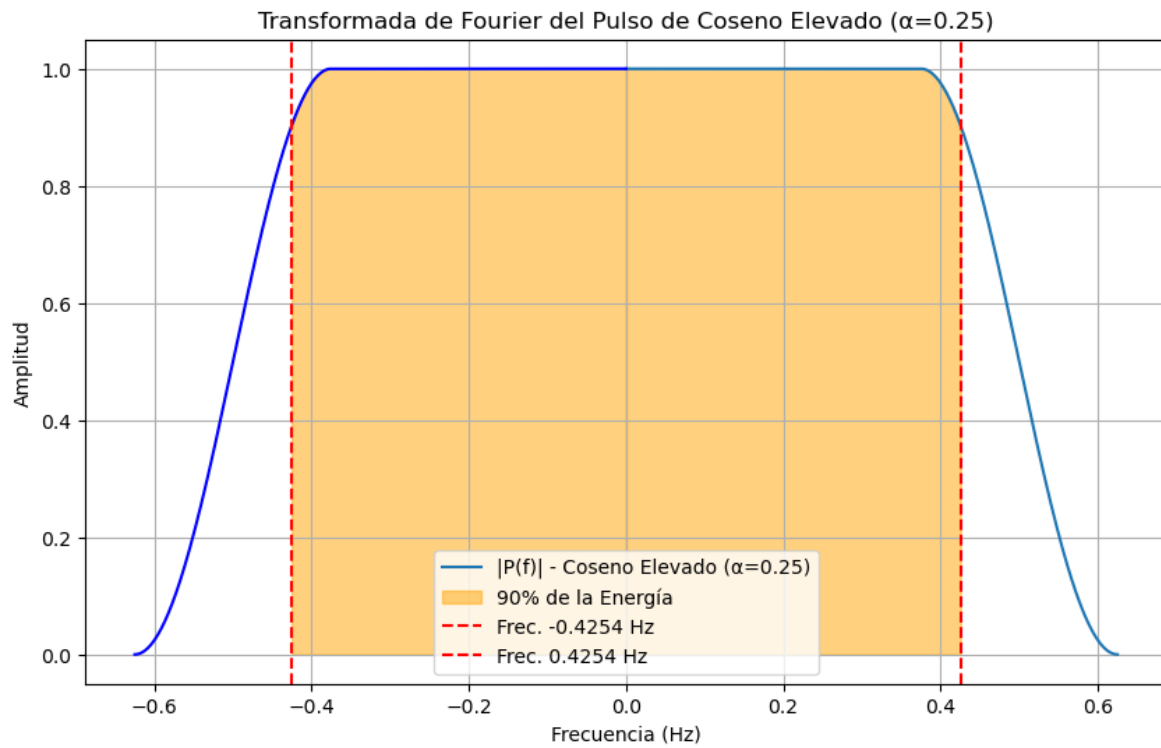
Implementación y Resultados

El código fuente está en test_p5.ipynb. Se consideraron $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$.

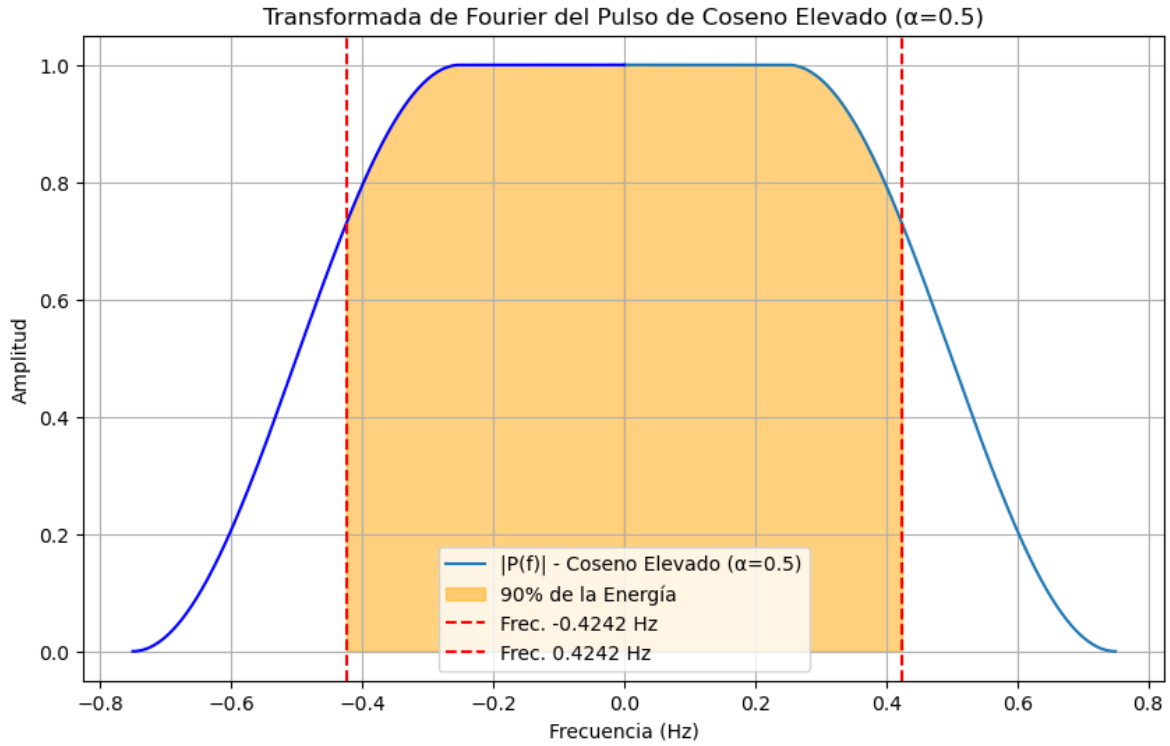
Resultados:

- $\alpha = 0.25$: **0.8509Hz**
- $\alpha = 0.5$: **0.8483Hz**
- $\alpha = 0.75$: **0.8794 Hz**

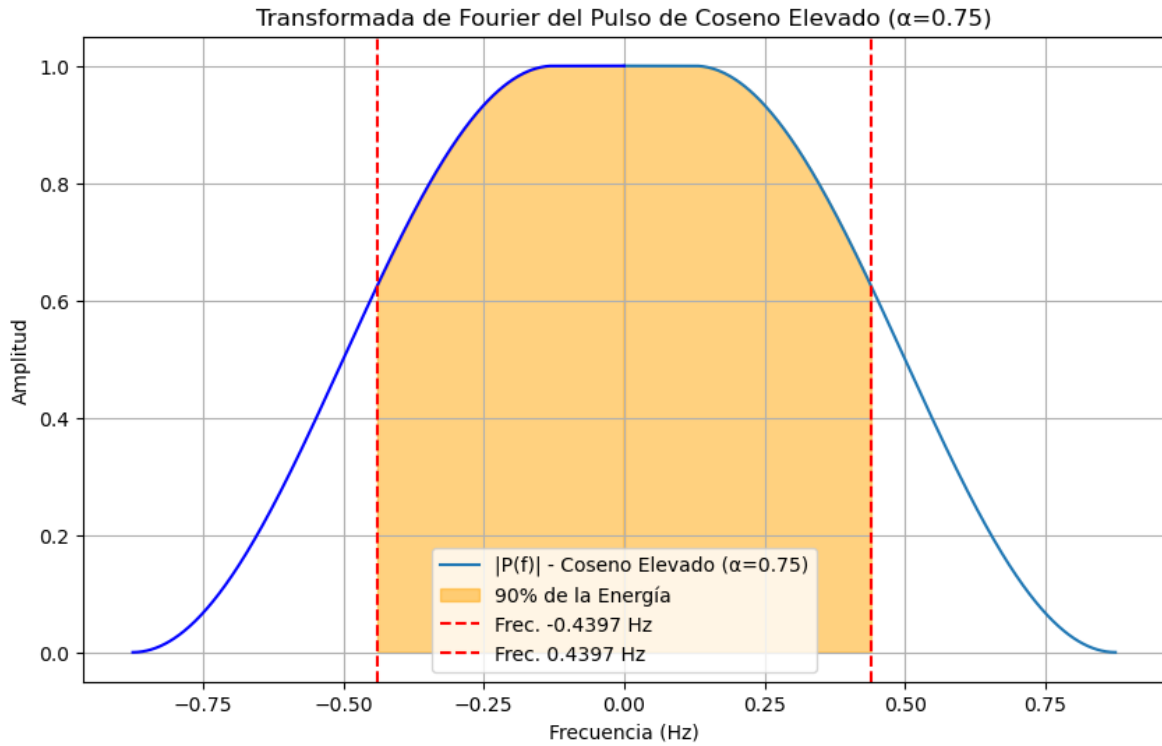
Gráficas



Grafica 3: Gráfica del espectro del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.25$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.



Grafica 4: Gráfica del espectro del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.5$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.



Grafica 5: Gráfica del espectro del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.75$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.

2.4 Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado

Definición y Transformada de Fourier

El pulso de raíz cuadrada de coseno elevado tiene una respuesta en frecuencia que es la raíz cuadrada de la del pulso de coseno elevado:

$$P(f) = \sqrt{P_{\text{coseno elevado}}(f)}$$

Cálculo del Ancho de Banda

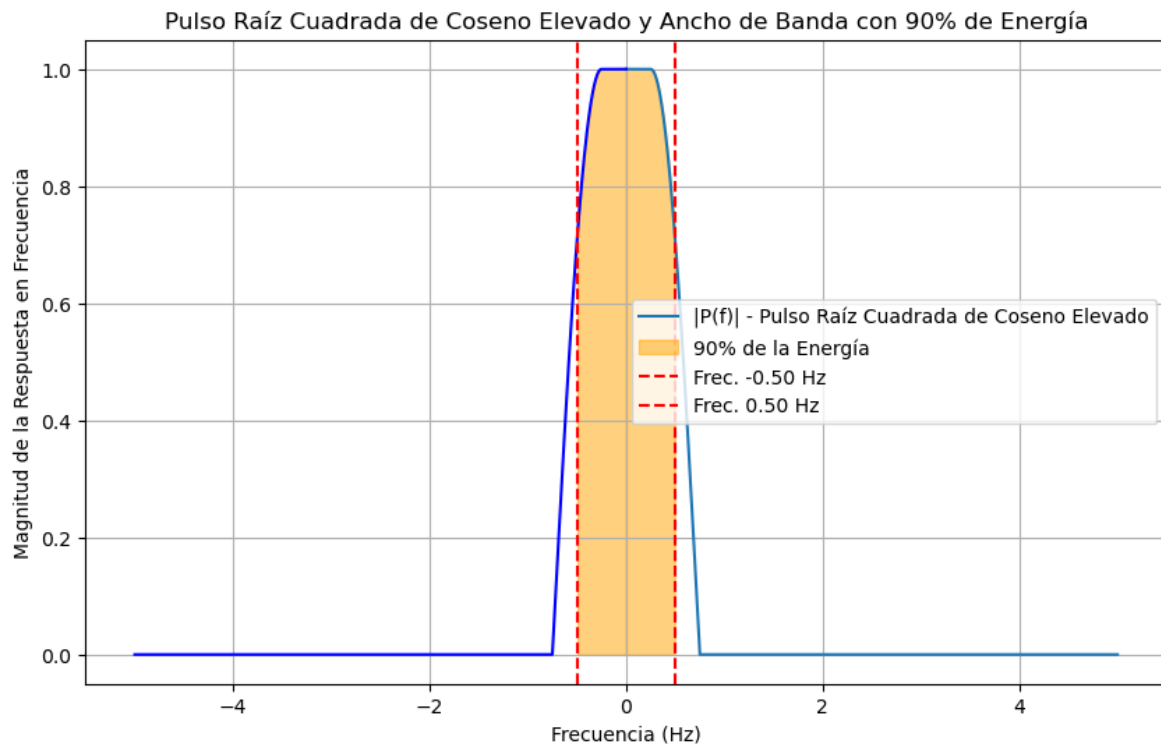
Se sigue un procedimiento similar al del pulso de coseno elevado, calculando la energía acumulada y determinando $B_{90\%}$.

Implementación y Resultados

El código fuente está en pulso_raiz_coseno_elevado.py. Valores de α :

- $\alpha = 0.5$: **0.9910 Hz**

Gráficas



Grafica 6: Gráfica del espectro raíz del pulso coseno elevado con un $\alpha = 0.5$ y el ancho de banda correspondiente al 90% de la energía.

3. Ancho de Banda Necesario para una Transmisión 2-PAM a 1 bps

En sistemas de comunicación digital, el ancho de banda requerido para transmitir información depende tanto de la tasa de transmisión como de la forma del pulso utilizado. Para una modulación 2-PAM a una tasa de 1 bit por segundo (bps), transmitimos un símbolo cada segundo, es decir, el tiempo de símbolo $T=1$ segundo.

- **Pulso Rectangular:** Requiere un ancho de banda de aproximadamente **1.7017 Hz**.
- **Pulso Seno Cardinal:** Ancho de banda de **0.9009 Hz**.
- **Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado** ($\alpha = 0.5$): Ancho de banda de **0.9910 Hz**.

4. Condición de "Cero Interferencia entre Símbolos"

La interferencia entre símbolos (ISI) ocurre cuando los pulsos de símbolos adyacentes se superponen, afectando la capacidad de detectar correctamente los símbolos transmitidos. La condición de cero ISI, según Proakis y Salehi (2008), se logra cuando la respuesta al impulso global del sistema cumple:

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

donde T_s es el intervalo de símbolos y k es un entero.

5. Análisis de la Interferencia entre Símbolos para Señales 2-PAM

Este apartado analiza la interferencia entre símbolos (ISI) en una señal de modulación 2-PAM (Modulación por Amplitud de Pulso Binaria) para diferentes formas de pulsos y configuraciones de transmisión. Se emplearon simulaciones para evaluar el comportamiento de la señal transmitida al pasar por un canal de respuesta al impulso y por filtros específicos en el receptor. Los resultados se presentan en la **Figura 7**, que muestra el comportamiento de la señal en cada etapa de la transmisión para las diferentes configuraciones de pulsos y filtros.

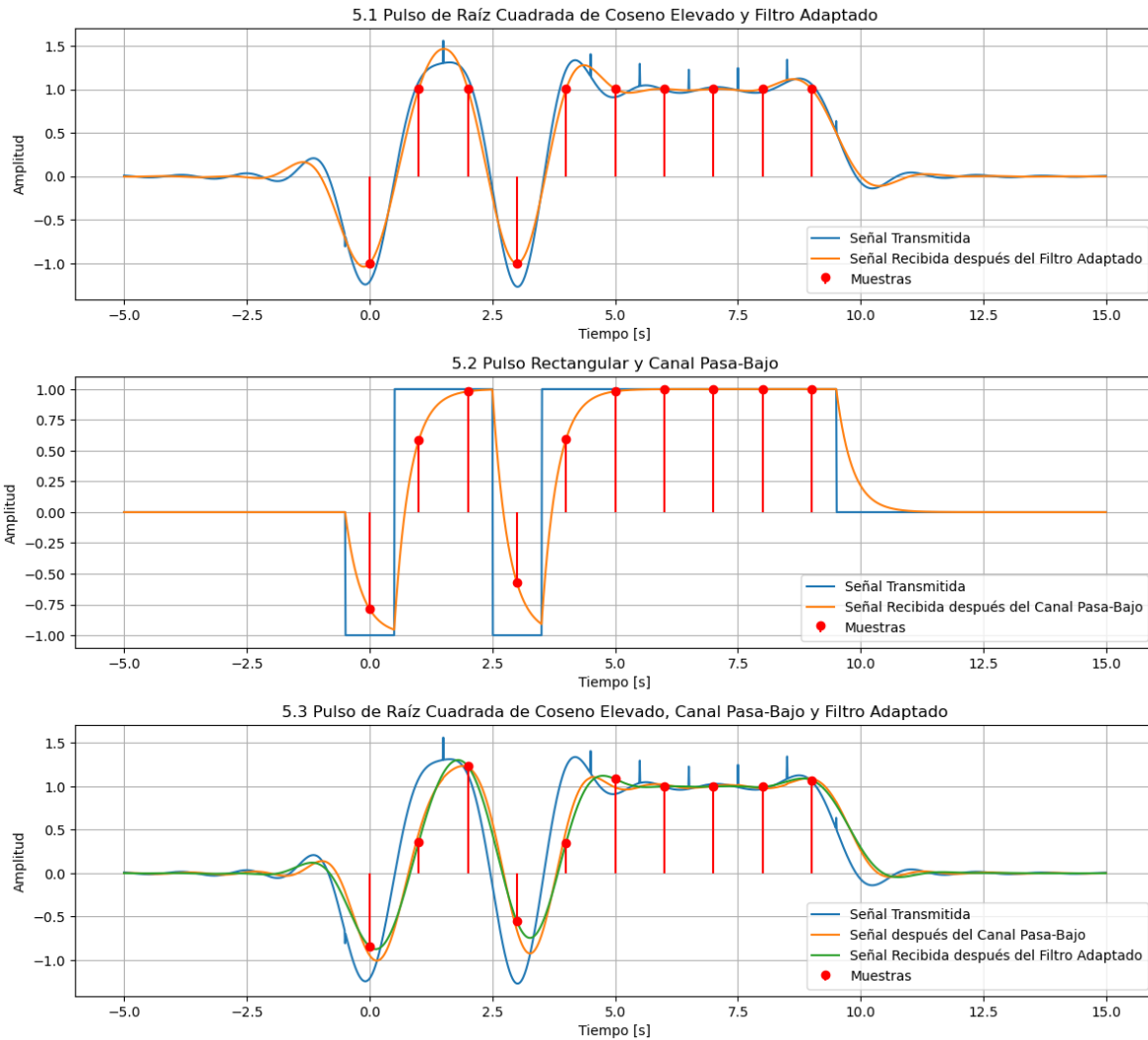


Figura 7: señales afectadas por canales y filtros.

5.1 Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado y Filtro Adaptado

En este caso, se utiliza un pulso de raíz cuadrada de coseno elevado como forma de pulso en la transmisión, y un filtro adaptado en el receptor con la misma respuesta al impulso. La respuesta global del sistema es un pulso de coseno elevado, cumpliendo la condición de "cero interferencia entre símbolos". Esto se observa en el primer gráfico de la **Figura 7**, donde:

- La línea azul representa la **Señal Transmitida** con forma de pulso de raíz cuadrada de coseno elevado.
- La línea naranja muestra la **Señal Recibida después del Filtro Adaptado**, la cual se asemeja a la señal transmitida, indicando que el filtro adaptado ha reducido efectivamente la ISI.
- Los puntos rojos indican las **Muestras en los Instantes de Símbolo**, que se toman en los puntos óptimos y muestran valores cercanos a los de la señal transmitida, evidenciando la reducción de ISI.

5.2 Pulso Rectangular y Canal Pasa-Bajo

En este escenario, se utiliza un pulso rectangular como forma de pulso para la transmisión, y la señal pasa por un canal de respuesta al impulso con un filtro pasa-bajo de un solo polo y frecuencia de corte de 0.5 Hz. Este tipo de canal introduce distorsión en la señal, lo que causa interferencia entre símbolos.

El segundo gráfico de la **Figura 7** muestra los resultados de esta simulación:

- La línea azul representa la **Señal Transmitida** con forma de pulso rectangular.
- La línea naranja muestra la **Señal Recibida después del Canal Pasa-Bajo**, donde se observa una distorsión significativa causada por el canal, lo cual afecta la forma del pulso.
- Los puntos rojos indican las **Muestras en los Instantes de Símbolo**, las cuales reflejan claramente la presencia de ISI, dificultando la correcta detección de los símbolos transmitidos.

5.3 Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado, Canal Pasa-Bajo y Filtro Adaptado

En esta configuración, se utiliza un pulso de raíz cuadrada de coseno elevado en la transmisión. La señal pasa primero por un canal pasa-bajo con frecuencia de corte de 0.5 Hz y luego por un filtro adaptado en el receptor. El objetivo de este diseño es observar si el filtro adaptado puede compensar la ISI introducida por el canal pasa-bajo.

El tercer gráfico de la **Figura 7** muestra los resultados:

- La línea azul representa la **Señal Transmitida** con forma de pulso de raíz cuadrada de coseno elevado.
- La línea naranja muestra la **Señal después del Canal Pasa-Bajo**, donde se aprecia una distorsión debido al canal.
- La línea verde muestra la **Señal Recibida después del Filtro Adaptado**, que se asemeja más a la señal transmitida, aunque persiste algo de distorsión. Esto indica que el filtro adaptado reduce significativamente la ISI, pero no puede eliminar completamente la distorsión introducida por el canal.
- Los puntos rojos representan las **Muestras en los Instantes de Símbolo**, y muestran una mejoría en la detección de los símbolos transmitidos en comparación con el caso anterior.

Conclusiones

- **Distribución de Energía y Ancho de Banda:** Las diferentes formas de pulso distribuyen su energía de manera distinta en el dominio de la frecuencia. Pulsos como el seno cardinal requieren menos ancho de banda para contener el 90% de su energía en comparación con el pulso rectangular.
- **Impacto del Factor de Roll-off α :** En los pulsos de coseno elevado y raíz cuadrada de coseno elevado, un mayor valor de α incrementa el ancho de banda requerido pero mejora la atenuación de los lóbulos laterales, reduciendo la ISI.
- **Cero Interferencia entre Símbolos:** Utilizar pulsos que cumplen la condición de cero ISI, como el de coseno elevado, es crucial para evitar errores en la detección de símbolos en sistemas de comunicación.
- **Efectos del Canal y Filtros:** Los canales y filtros afectan la forma del pulso transmitido, lo que puede introducir ISI. El uso de filtros adaptados y el diseño adecuado de la forma del pulso son esenciales para mitigar estos efectos.

Referencias

- Proakis, J. G., & Salehi, M. (2008). *Digital Communications* (5ta ed.). McGraw-Hill.
- Gallager, R. G. (2008). *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press.