Proyecto 5

Autor: Gerez Jimenez, Juan Jose Armando

Resumen

Esta monografía investiga la representación de Fourier de formas de onda de energía finita comúnmente utilizadas en sistemas de comunicación digital, incluyendo pulsos rectangulares, pulsos seno cardinal, pulsos de coseno elevado y pulsos de raíz cuadrada de coseno elevado. Se trabajan las transformadas de Fourier de estas formas de onda y se determina el ancho de banda que contiene al menos el 90% de su energía. La investigación examina además los requisitos de ancho de banda para transmitir señales de modulación por amplitud de pulsos binaria (2-PAM) a una tasa de un bit por segundo utilizando diferentes formas de pulso. Se explora la condición para cero interferencia entre símbolos (ISI) y se realiza un análisis de ISI para señales 2-PAM que pasan por diversas condiciones de canal y filtrado. Se proporciona código en Python para replicar los resultados.

Introducción

En los sistemas de comunicación digital, la elección de las formas de onda y sus propiedades espectrales impacta significativamente en el rendimiento del sistema. Las formas de onda de energía finita, como los pulsos rectangulares, los pulsos seno cardinal, los pulsos de coseno elevado y los pulsos de raíz cuadrada de coseno elevado, son fundamentales en el diseño de señales de comunicación. Comprender sus representaciones de Fourier ayuda a analizar los requisitos de ancho de banda y a mitigar la interferencia entre símbolos (ISI), un problema común en la transmisión de datos de alta velocidad.

Esta monografía tiene como objetivos:

- Determinar las transformadas de Fourier de formas de onda seleccionadas de energía finita.
- Calcular los anchos de banda que contienen al menos el 90% de su energía.
- Evaluar el ancho de banda necesario para transmitir señales 2-PAM a una tasa de un bit por segundo utilizando diferentes formas de pulso.
- Investigar la condición para cero ISI.
- Analizar los efectos del ISI en señales 2-PAM bajo diversas condiciones de canal y filtrado.

El análisis se basa en conceptos fundamentales de comunicaciones digitales presentados por Proakis y Salehi (2008) y Gallager (2008).

Transformada de Fourier de Formas de Onda de Energía Finita

Pulso Rectangular

Representación en el Dominio del Tiempo:

Un pulso rectangular de duración T se define como:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Transformada de Fourier:

La transformada de Fourier $P(f)$ de $p(t)$ es:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p\,(t) e^{-j2\pi f t} dt = T \cdot \mathrm{sinc}(\pi f T)$$

donde $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Cálculo del Ancho de Banda:

Para encontrar el ancho de banda que contiene el 90% de la energía, calculamos la energía total E y encontramos la frecuencia f_b tal que:

$$\frac{\int_{-f_b}^{f_b} |\,P(f)\,|^2\, df}{\int_{-\infty}^{\infty} |\,P(f)\,|^2\, df} = 0.9$$

La energía total E es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\,P(f)\,|^2\, df = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\,(\pi f T) df = T$$

Utilizando métodos numéricos o software como Python, podemos encontrar f_b que satisface la condición.

Pulso Seno Cardinal

Representación en el Dominio del Tiempo:

Un pulso seno cardinal se define como:

$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}}$$

Transformada de Fourier: **---nota: controlar el calculo**

La transformada de Fourier es:

$$P(f) = T \cdot \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq \dfrac{1}{2T} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cálculo del Ancho de Banda:

El ancho de banda es finito y equivale a $\frac{1}{2T}$, conteniendo el 100% de la energía.

Nota: en el tiempo, la integral para el calculo de la energía no converge (en frec si), seria energía infinita?

Pulso de Coseno Elevado

Representación en el Dominio del Tiempo:

El pulso de coseno elevado con factor de roll-off α es:

$$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \cdot \frac{\cos(\pi \alpha t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2}$$

Transformada de Fourier:

La transformada de Fourier es:

$$P(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \dfrac{1-\alpha}{2T} \\ \dfrac{T}{2}\left[1 + \cos\left(\dfrac{\pi T}{\alpha}\left(|f| - \dfrac{1-\alpha}{2T}\right)\right)\right] & \text{si } \dfrac{1-\alpha}{2T} < |f| \leq \dfrac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cálculo del Ancho de Banda:

El ancho de banda es $B = \frac{1+\alpha}{2T}$. Para diferentes valores de α (por ejemplo, 0, 0.5, 1), calculamos numéricamente el ancho de banda que contiene el 90% de la energía.

Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado

Representación en el Dominio del Tiempo:

El pulso de raíz cuadrada de coseno elevado se utiliza en conjunto con el filtrado adaptado.

Transformada de Fourier:

La transformada de Fourier es la raíz cuadrada del espectro de coseno elevado:

$$P(f) = \sqrt{\text{Espectro de Coseno Elevado}}$$

Cálculo del Ancho de Banda:

Similar al pulso de coseno elevado, el ancho de banda es $B = \frac{1+\alpha}{2T}$. Se utilizan métodos numéricos para determinar el ancho de banda que contiene el 90% de la energía.

Código en Python para el Cálculo del Ancho de Banda:

Requisitos de Ancho de Banda para Transmisión 2-PAM a 1 bps

Pulso Rectangular

Para una tasa de bits $R_b = 1$ bps y pulsos rectangulares:

- Duración del símbolo $T = 1$ s.
- El ancho de banda B es teóricamente infinito debido al espectro en forma de sinc.

Para contener la mayor parte de la energía, se considera un ancho de banda práctico, a menudo usando el primer nulo en $B = \frac{1}{T} = 1$ Hz.

Pulso Seno Cardinal

Los pulsos seno cardinal tienen un ancho de banda finito:

- Ancho de banda $B = \frac{1}{2T} = 0.5$ Hz.
- Contiene el 100% de la energía.

Pulso de Raíz Cuadrada de Coseno Elevado

Con $\alpha = 0.5$:

- Ancho de banda $B = \frac{1+\alpha}{2T} = 0.75$ Hz.

Condición de Cero Interferencia entre Símbolos

Se logra cero ISI cuando la respuesta combinada del filtro transmisor, el canal y el filtro receptor satisface el criterio de Nyquist:

$$p(nT) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Esto asegura que los símbolos no interfieren entre sí en los instantes de muestreo.

Análisis de ISI para Señales 2-PAM con Forma de Pulso Raíz Cuadrada de Coseno Elevado

Antes del Filtrado Adaptado

Después del Filtrado Adaptado

Análisis de ISI para Señal 2-PAM con Pulso Rectangular a través de un Canal Pasa-Bajos de Un Polo

Análisis de ISI para Señal 2-PAM con Pulso Raíz Cuadrada de Coseno Elevado a través del Mismo Canal y Filtro Adaptado

Conclusiones

Referencias

- Proakis, J. G., & Salehi, M. (2008). *Digital Communications* (5ta ed.). McGraw-Hill.
- Gallager, R. G. (2008). *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press.