

Péndulo Forzado Periódicamente con una Fuerza Restauradora Cúbica

Jorge Juan Araujo Alvarez
Myllee Sarleth Mosquera Rivas

Junio 2023

1. Introducción

1.1. Modelación matemática

El péndulo de estudio es un sistema compuesto por un objeto sujetado a una cuerda elástica, que se mueve en sentido vertical debido a la aplicación de forma periódica de una fuerza restauradora cúbica. La ecuación que nos permitirán modelar este sistema serán la ecuación de Duffing, la cual describe un movimiento oscilador amortiguado (mucho más complejo que un armónico simple, y que en términos físicos, modela péndulos elásticos, cuya rigidez no obedece exactamente a la ley de Hooke). Este sistema tiene como única entrada la amplitud de la fuerza, y como posibles salidas de interés se tienen la posición, la velocidad, la aceleración. Como se muestra en la figura 1, la posición del objeto suele estar limitada por una especie de techo, sin embargo, el modelo establecido para este sistema no tiene en cuenta dicha barrera, por lo que en el sistema se podrá tener posiciones e incluso puntos de equilibrio negativos.

La ecuación de Duffing permite modelar circuitos de resistencia-inductor-capacitor periódicamente forzados con elementos de circuito no lineales, y osciladores caóticos como el de este caso. La ecuación de Duffing para describir la dinámica de osciladores caóticos está dada por:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1)$$

Para convertir la ecuación (1) en la estructura de ecuaciones de estado, consideraremos $\dot{x} = y$, así, se tienen las siguientes variables de estado:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \gamma \cos(\omega t) - \delta y - \alpha x - \beta x^3 \quad (2)$$

Como se puede observar en la ecuación de Duffing, el modelo tiene como entrada una fuerza impulsadora sinusoidal ($F = \gamma \cos(\omega t)$), sin embargo, para efectos de este trabajo, no consideraremos dicha fuerza como la entrada del sistema, sino

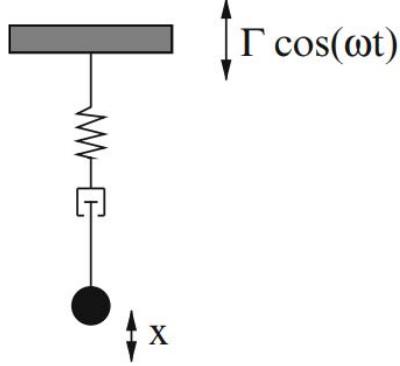


Figura 1: Representación péndulo accionado periódicamente

que tendremos a $u(t)$ como la única entrada del sistema. Como se mencionó anteriormente, tenemos varias opciones de salidas como la velocidad (y), la posición (x), y la aceleración lineal (\dot{y}), nuestro mayor interés en cuanto a las salidas del sistema, será la posición de la masa (x). Y por último, los estados del sistema son:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t) - ky - \alpha x - \beta x^3 \quad (3)$$

A continuación se muestra el modelo del Péndulo Forzado Periódicamente con una Fuerza Restauradora Cúbica en Simulink:

1.2. Análisis Dimensional

Según [2] la representación física de cada uno de los parámetros y su dimensionalidad las resumiremos en la siguiente tabla (figura 3):

De esta forma, confirmamos que nuestro modelo tiene sentido dimensionalmente.

1.3. Validación del Modelo

Para validar el modelo, es decir, para establecer la veracidad del modelo, realizamos simulaciones en Simulink, teniendo en cuenta el valor de los parámetros dados en [1] y tomando este mismo como referencia para la comparación de resultados. Cabe resaltar que este sistema está validado con un entrada muy específica, y es la entrada usada y validada por la gran mayoría de estudios previos que encontramos en la literatura. Ingresando los valores de los parámetros y la entrada referenciada, tendremos que la ecuación quedará como:

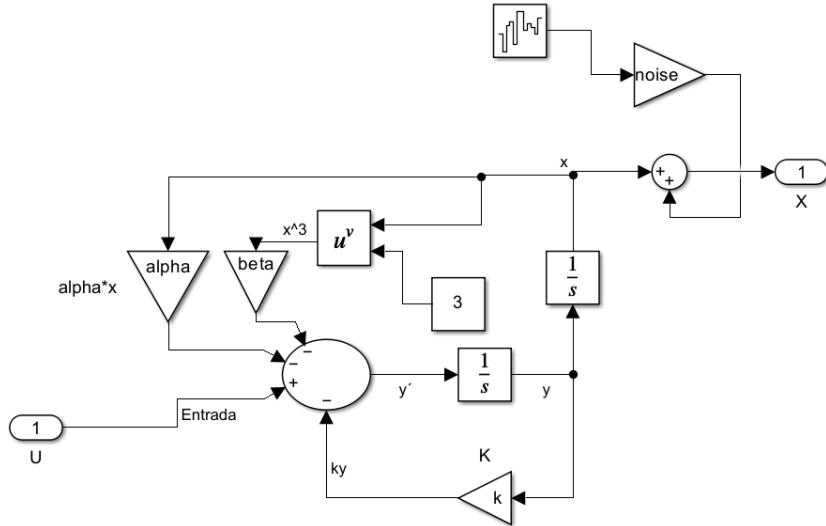


Figura 2: Modelo en Simulink

	Significado Físico	Dimensión
β	Rigidez	$\frac{1}{t^2}$
k	Coeficiente de Amortiguamiento	$\frac{1}{t}$
α	Rigidez no lineal	$\frac{1}{t^2 m^2}$
\ddot{x}	Aceleración	$\frac{m}{t^2}$
\dot{x}	Velocidad	$\frac{m}{t}$
x	Posición	m

$t = \text{Unidades de Tiempo}$
 $m = \text{Unidades de Longitud}$

Figura 3: Parámetros físicos y dimensionalidad

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \Gamma \cos(\theta) - 0,3y + x - x^3, \quad \dot{\theta} = 1,25 \quad (4)$$

Por lo que la entrada será $u(t) = \Gamma \cos(\theta)$ y los valores de los parámetros serán $\dot{\theta} = \omega = 1,25$, $\delta = 0,3$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Donde Γ es la amplitud de la fuerza y ω representa la frecuencia de la fuerza impulsadora. En [1] se estudia el comportamiento del modelo de acuerdo a distintos valores de Γ , por lo que para validar,

nos basaremos también en como varia el comportamiento de acuerdo a este parámetro. En las siguientes imágenes vemos en azul (Imagen a la Izquierda) los resultados obtenidos por nuestro modelo y en negro (Imagen a la Derecha) los resultados obtenidos en [1], se puede observar en los ciclos gráficos que los resultados del modelo son consistentes con los reportados en la literatura, y es evidente su capacidad de representar situaciones caóticas como lo es en el caso de $\Gamma = 5$

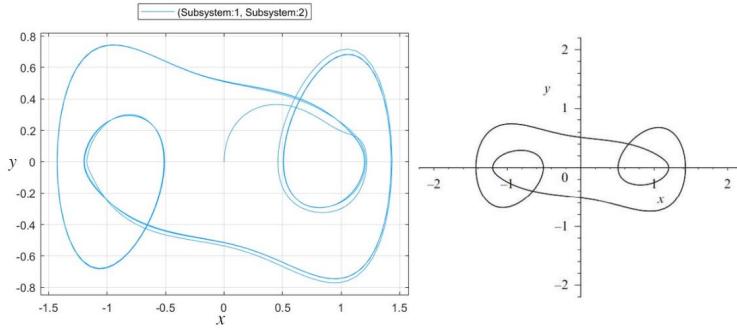


Figura 4: $\Gamma = 0,37$, Ciclo de período cinco, centrado en el origen

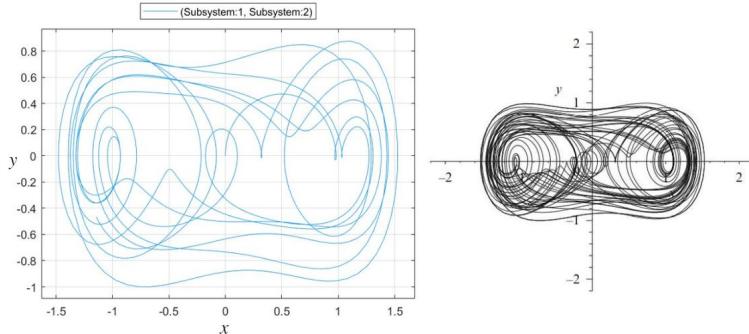


Figura 5: $\Gamma = 0,5$, Sistema Caótico

2. Metodología

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo utilizado para estimar el estado de un sistema dinámico basado en mediciones incompletas o ruidosas. Fue desarrollado por los matemáticos y estadísticos Rudolf E. Kálmán y Richard S. Bucy en la década de 1960. El filtro de Kalman se basa en el supuesto de

que tanto el modelo del sistema como los errores de medición y proceso siguen distribuciones normales o gaussianas. Este supuesto permite utilizar métodos de estimación óptima basados en estadísticas, minimizando el error cuadrático medio de la estimación. El filtro de Kalman clásico opera en dos pasos principales: predicción y actualización (o corrección). En el paso de predicción, se utiliza el modelo dinámico del sistema y la estimación anterior para predecir el estado actual del sistema. Esta predicción tiene en cuenta tanto la evolución del sistema como el ruido de proceso. En este trabajo se implementará el filtro de Kalman Extendido (EKF) que como su nombre lo indica es una extensión del filtro de Kalman que se utiliza para la estimación de estados de un sistema dinámico no lineal con presencia de ruido. Además se usará el Filtro de Kalman conjunto, que además de permitirnos estimar los estados del sistema, permitirá la estimación de algunos parámetros del sistema, pero para este caso, solo estimaremos un parámetro. A continuación se expone el procedimiento que se llevará a cabo para la implementación de dichos filtros.

- 1. Filtro Extendido de Kalman (EKF):** Para el diseño de este filtro, es necesario linealizar analíticamente para obtener las matrices \mathbf{A} y \mathbf{C} que nos permitirán determinar si el sistema es observable y de acuerdo a esta, elegir las variables de estado a estimar. Posteriormente, se discretizará el sistema por medio del método de Euler, y se calculará la matriz Φ que es construida por series de Taylor.

En [3] dado un sistema discretizado de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{G}\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \\ p(\mathbf{v}) \sim N(0, \mathbf{R}) \quad p(\mathbf{w}) \sim N(0, \mathbf{Q}) \quad E\mathbf{v}(k)\mathbf{w}^T(k) = \mathbf{0}$$

El filtro de Kalman Extendido está dado por,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k | k-1) = f(\hat{\mathbf{x}}(k-1 | k-1), \mathbf{u}(k-1)) \\ \mathbf{P}(k | k-1) = \Phi\mathbf{P}(k-1 | k-1)\Phi^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \\ \mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k | k-1)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}(k | k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(k | k) = \hat{\mathbf{x}}(k | k-1) + \mathbf{K}(k)\{\mathbf{y}(k) - h[\hat{\mathbf{x}}(k | k-1), \mathbf{u}(k-1)]\} \\ \mathbf{P}(k | k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}(k | k-1) \end{cases}$$

Donde, \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} son respectivamente, la matriz de covarianza del error del estado, la matriz de covarianza del ruido del proceso y la matriz de covarianza del ruido de medición. y \mathbf{K} la matriz de ganancia de Kalman, y $\mathbf{G} = \mathbf{I}$.

Implementación: El EKF será implementado en MATLAB de acuerdo a las ecuaciones dadas anteriormente. Para construir el filtro de Kalman extendido seguiremos los siguientes pasos:

- Obtener datos experimentales:

Con una entrada PRBS **de baja frecuencia** de 0 a 2 (debido a que en este rango el modelo es no lineal tal y como podemos observar en la curva de linealidad figura 6) simularemos el modelo y obtendremos uno de los estados del sistema y el otro será estimado. Escogeremos el sistema a estimar de acuerdo con la matriz de observabilidad

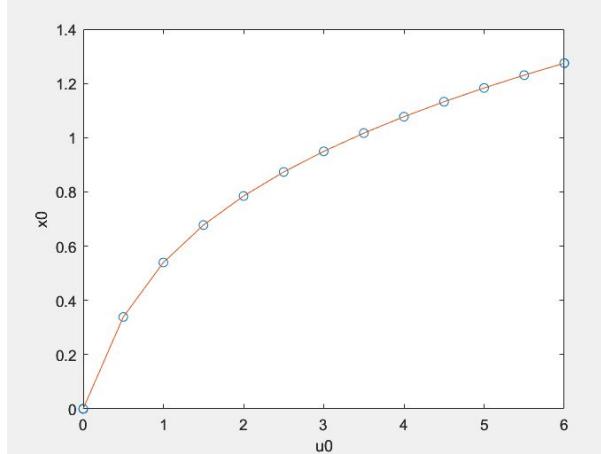


Figura 6: Curva de Linealidad

- Discretizar el sistema para predecir el estado. Nótese que el parámetro k lo hemos cambiado por la letra δ para no hacer confusa la discretización.

El sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t) - \delta y - \alpha x - \beta x^3 \quad (5)$$

Queda discretizado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + T_s y(k) \\ y(k+1) &= y(k) + T_s (u(k) - \delta y(k) - \alpha x(k) - \beta x^3(k)) \end{aligned}$$

- Calcular las matrices A y C , para determinar si el sistema es observable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta x^2 & -\delta \end{bmatrix}$$

Sabemos que C es una matriz de unos y ceros, determinaremos si $C = [0, 1]$ ó $C = [1, 0]$ de acuerdo con el rango de la matriz de observabilidad que nos permitirá identificar que estado estimar.

d) Calcular la matriz Φ :

$$\Phi = I + TsA$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ T_s(-\alpha - 3\beta x^2) & 1 - \delta T_s \end{bmatrix}$$

e) Programar el filtro de Kalman en MATLAB

Con toda la información anterior y simulando con distintos valores de \mathbf{Q}, \mathbf{R} , se espera obtener estimaciones acertadas por medio del filtro de Kalman Extendido.

Prueba

2. **Filtro de Kalman extendido conjunto:** Para el diseño de este filtro, no será necesaria la linealización del sistema. En [3] se establece que para un sistema de la forma,

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \varphi^T(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases}$$

Donde,

$$\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\theta} \quad E\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(l) = \mathbf{Q}\delta_{kl} \quad E\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(l) = \mathbf{R}\delta_{kl}$$

El filtro de Kalman para la estimación de parámetros está dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k | k-1)\varphi(k) [\varphi^T(k)\mathbf{P}(k | k-1)\varphi(k) + \mathbf{R}]^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(k | k) \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k | k-1) + \mathbf{K}(k) [\mathbf{y}(k) - \varphi^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k | k-1)] \\ \mathbf{P}(k | k) \equiv \mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\varphi^T(k)] \mathbf{P}(k | k-1) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(k | k-1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1 | k-1) \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \\ \mathbf{P}(k | k-1) = \mathbf{P}(k-1 | k-1) + \mathbf{Q} \equiv \mathbf{P}(k-1) + \mathbf{Q} \end{cases}$$

Donde, φ es el vector de regresión de una estructura ARX. Se puede ver con mayor detalle en [3]. Caso análogo al procedimiento anterior, se necesitará la siguiente información para la construcción del filtro conjunto en Matlab.

- a)* Introducción de un nuevo estado: Para implementar el Filtro de Kalman Conjunto, se define el parámetro α (Coeficiente de amortiguamiento del péndulo) como un estado del sistema, de tal forma el

modelo está dado por las siguientes ecuaciones de estado. Nótese que hemos llamado α el parámetro a estimar, como z .

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u(t) - \delta y - zx - \beta x^3 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

b) Sistema Discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + T_s y(k) \\ y(k+1) &= y(k) + T_s (u(k) - \delta y(k) - z(k)x(k) - \beta x^3(k)) \\ z(k+1) &= z(k) \end{aligned}$$

c) Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -z - 3\beta x^2 & -\delta & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Matriz Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_s & 0 \\ T_s (-z - 3\beta x^2) & 1 - \delta T_s & -T_s x \\ 0 & 0 & 1 + T_s \end{bmatrix}$$

3. **Validación del filtro:** Para validar realizaremos un análisis de incertidumbre por el método de montecarlo. En este proceso, generaremos valores aleatorios de los parámetros y realizaremos las estimaciones con estos para determinar que tan buenas son la estimaciones a pesar de errores en el valor de los parámetros.

3. Resultados

Con una entrada PRBS de 0 a 2, con frecuencia de 2 Hz, realizamos las estimaciones de los estados con los distintos filtros de Kalman.

3.1. Filtro de Kalman Extendido

El filtro de Kalman fue implementado en Matlab haciendo uso de las matrices mencionadas anteriormente, además, tomamos condiciones iniciales en cero, y los parámetros de diseño fueron inicializados en $P_0=0$, $Q=0.00001$ y $R=0.01^2$, estos valores fueron escogidos ya que luego de realizar simulaciones con otros parámetros, encontramos que estos llevaban a estimaciones correctas. Lo anterior se evidencia en las siguientes gráficas donde se presentan las estimaciones de 2 estados del sistema, la posición y velocidad del péndulo.

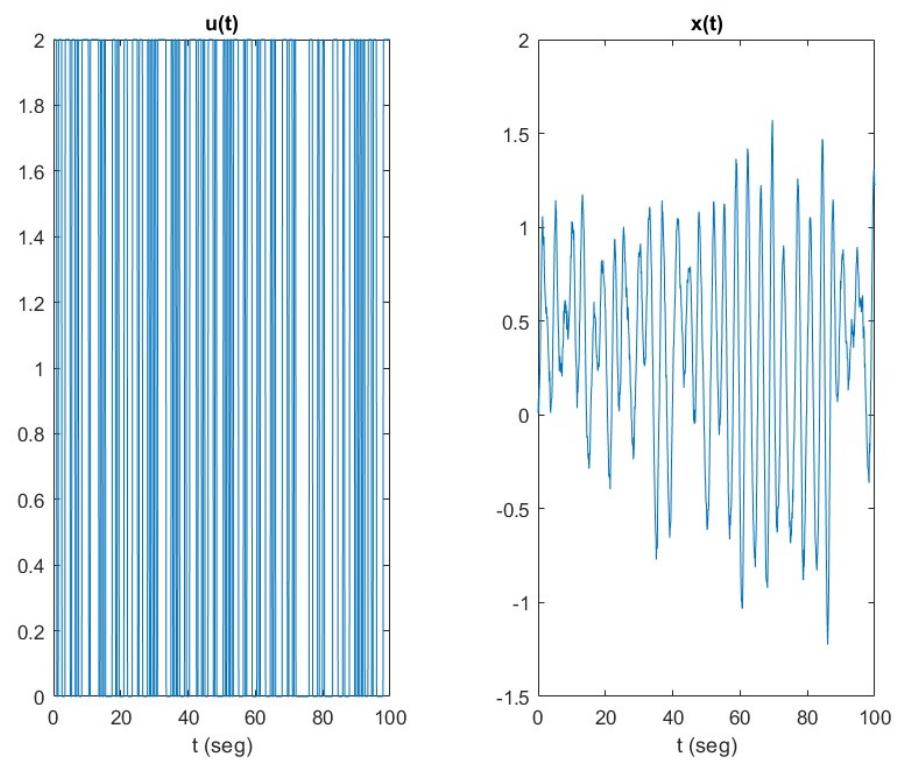
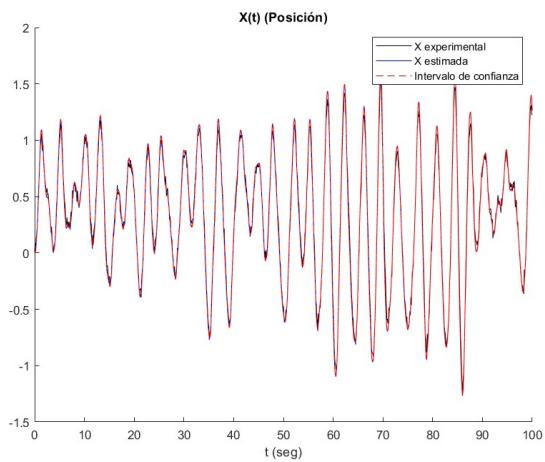
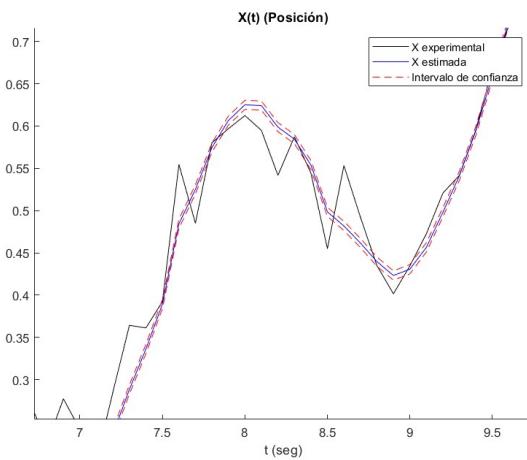


Figura 7: Entrada (PRBS) y salida(Posición) experimental

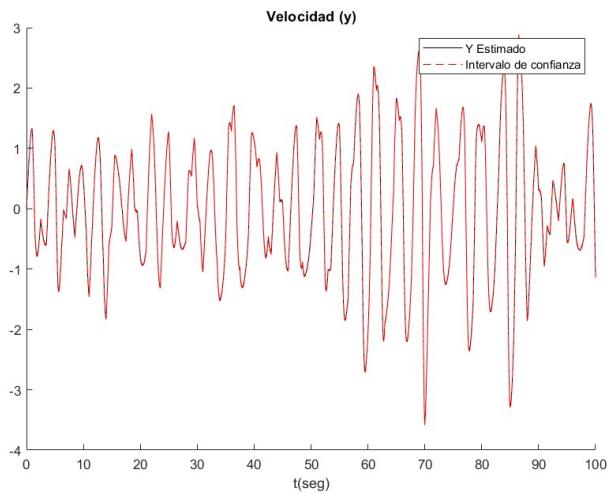


(a) Vista general

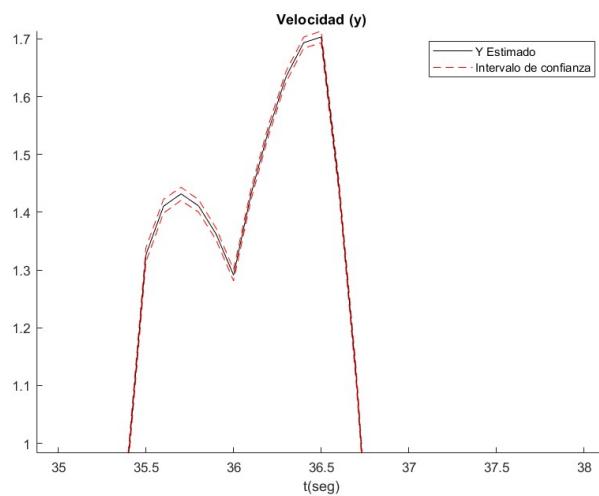


(b) Ampliación

Figura 8: Estimación de la posición con el Filtro de Kalman Extendido



(a) Vista general



(b) Ampliación

Figura 9: Estimación de la velocidad con el Filtro de Kalman Extendido

En el siguiente figura se presenta gráficamente el número de condición de la matriz de observabilidad del sistema, vemos que el número de condición es pequeño, además de ser constante.

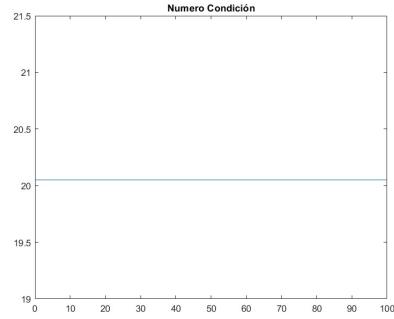


Figura 10: Condicionamiento de la matriz de observabilidad

En el siguiente gráfico se presenta la norma de la ganancia de Kalman y la traza de la matriz de covarianzas del error, donde se puede observar una gran variabilidad de la matriz P y la ganancia de Kalman.

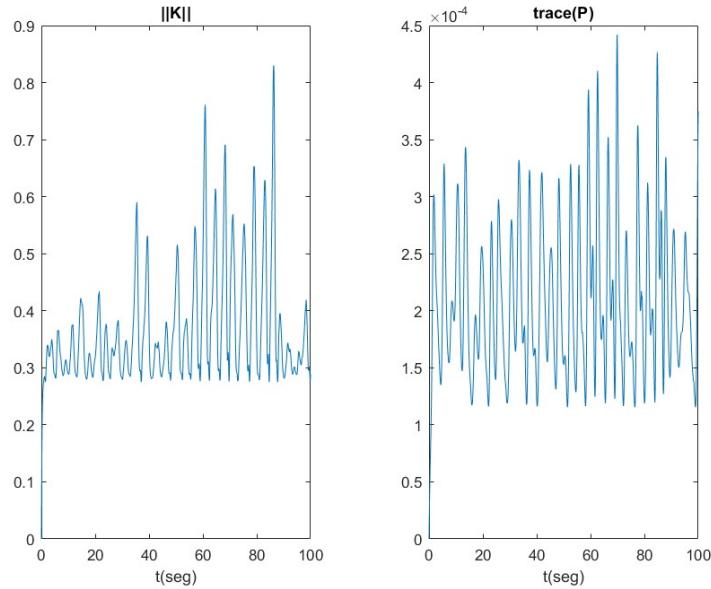


Figura 11: Norma de la ganancia de Kalman y Traza de la matriz de covarianzas del error del estado

El análisis residual muestra que los residuos no pasan el test de blancura, lo cual no se esperaba ya que las simulaciones se realizaron con un ruido blanco.

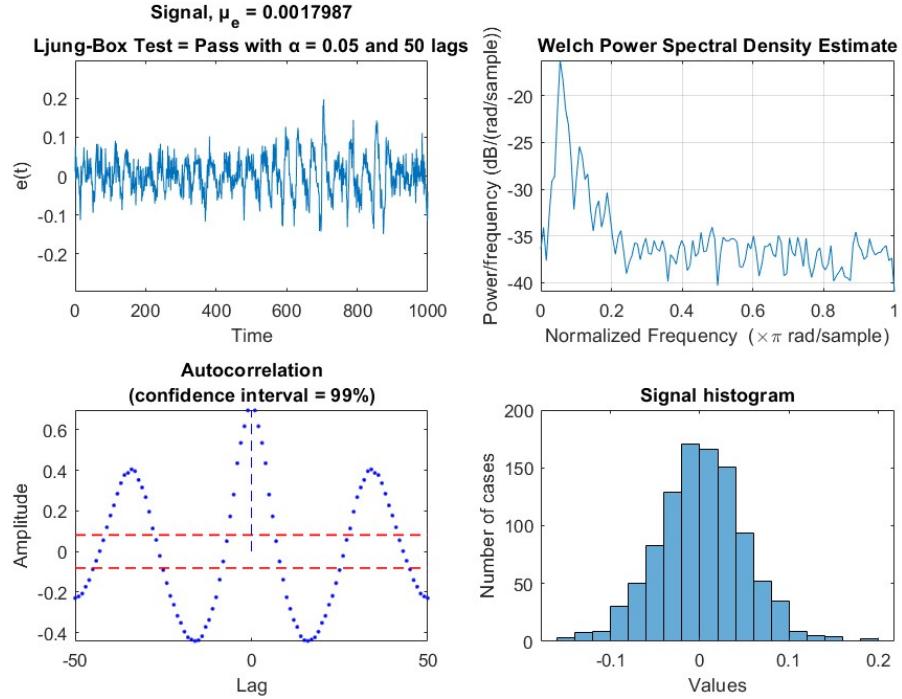
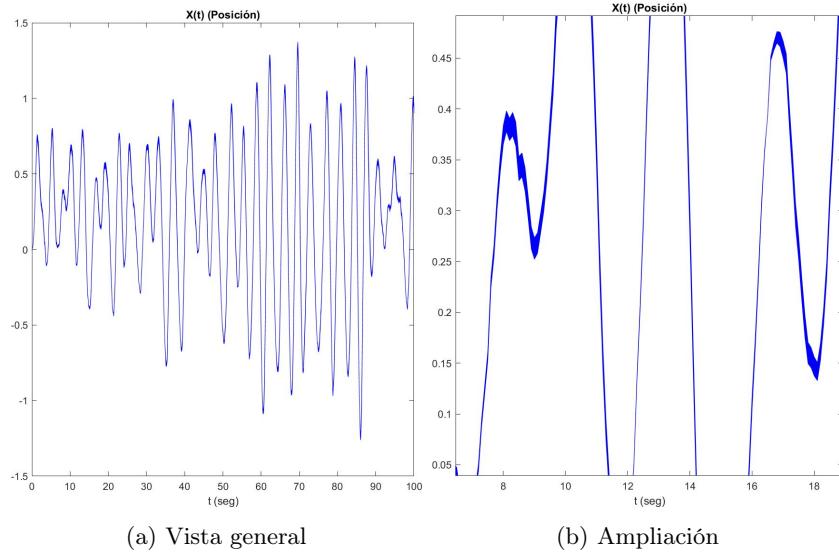


Figura 12: Análisis Residual

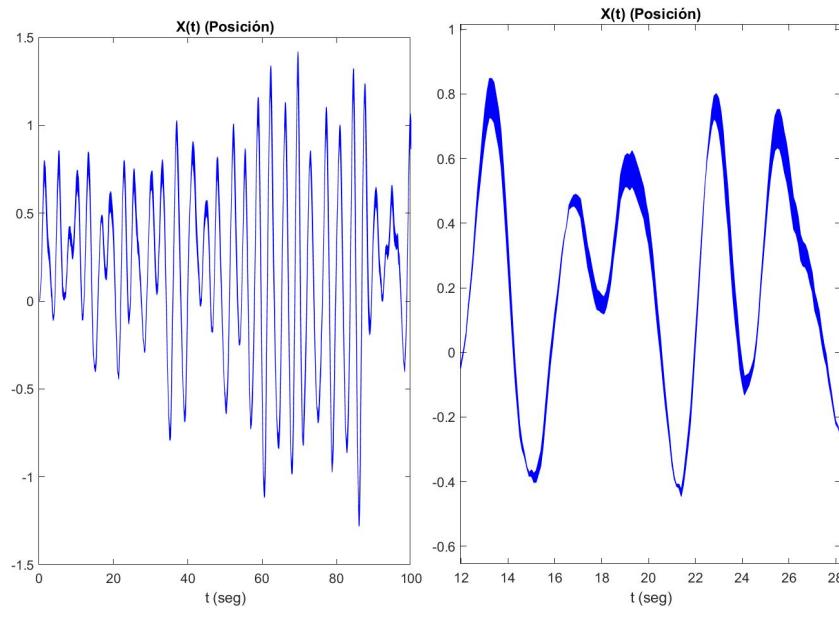
Por último, se realizaron 1000 estimaciones con incertidumbre en los parámetros del 10 % y 30 %, este análisis muestra que para los 2 estados estimados, el filtro de Kalman extendido logra buenas estimaciones a pesar de que los parámetros utilizados son estimaciones de la práctica anterior y NO son los nominales del modelo.



(a) Vista general

(b) Ampliación

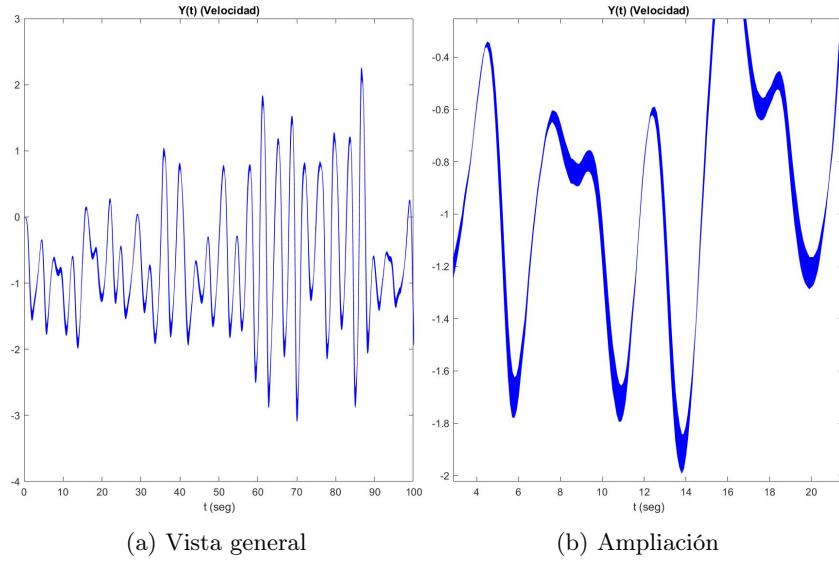
Figura 13: Análisis de Incertidumbre: Estimación de la posición con nivel de incertidumbre del 10 % en los parámetros



(a) Vista general

(b) Ampliación

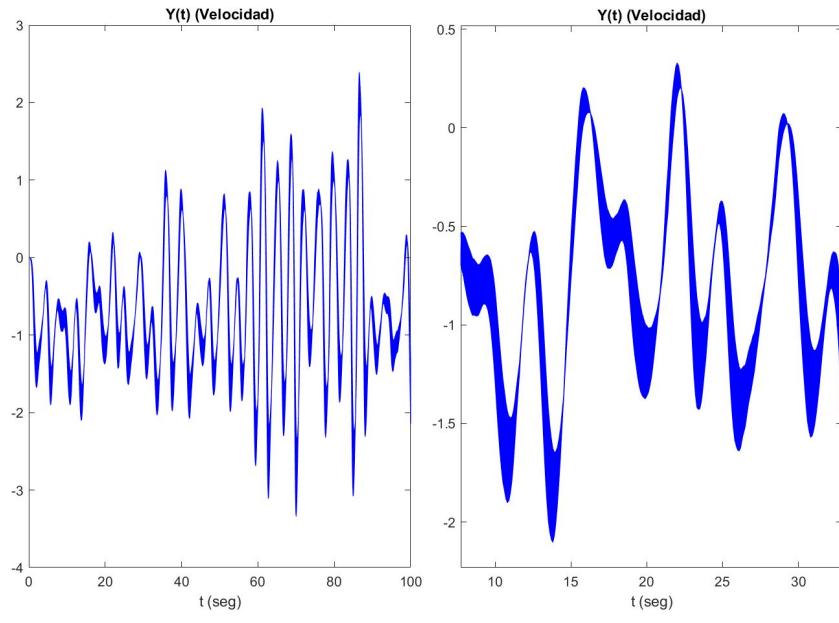
Figura 14: Análisis de Incertidumbre: Estimación de la posición con nivel de incertidumbre del 30 % en los parámetros



(a) Vista general

(b) Ampliación

Figura 15: Análisis de Incertidumbre: Estimación de la velocidad con nivel de incertidumbre del 10 % en los parámetros

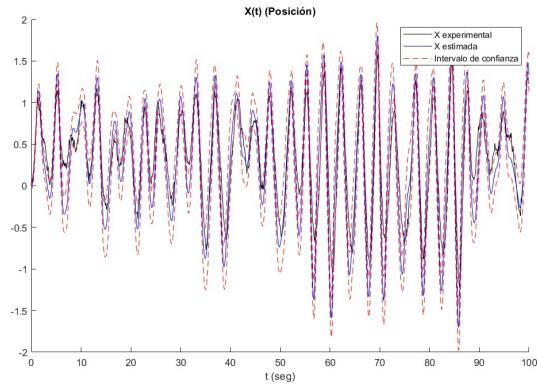


(a) Vista general

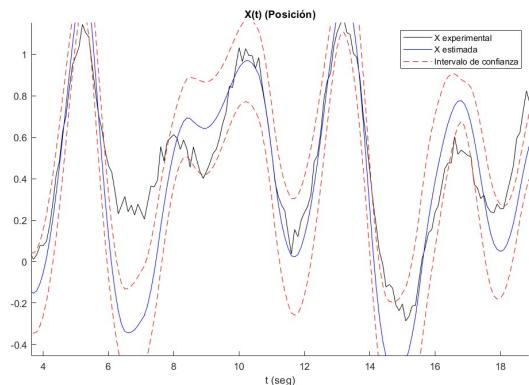
(b) Ampliación

Figura 16: Análisis de Incertidumbre: Estimación de la velocidad con nivel de incertidumbre del 30 % en los parámetros

Probamos otros parámetros para la implementación del filtro de Kalman extendido, $P_0=0$, $Q=0.001$, $R=1$, y obtuvimos la siguiente estimación que sigue siendo buena.

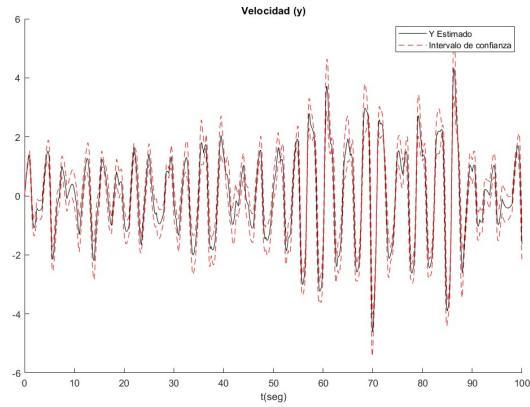


(a) Vista general

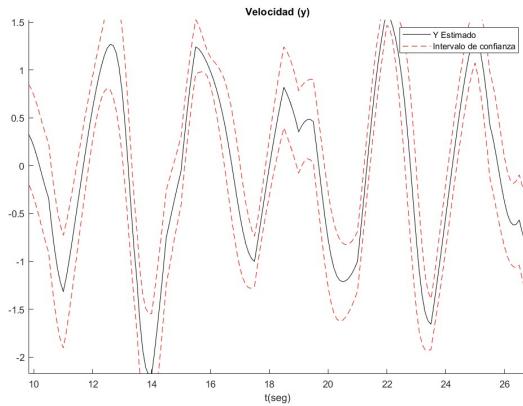


(b) Ampliación

Figura 17: Estimación de la posición con el Filtro de Kalman Extendido



(a) Vista general



(b) Ampliación

Figura 18: Estimación de la velocidad con el Filtro de Kalman Extendido

El gráfico de la norma de la ganancia de Kalman muestra que a medida que pasa el tiempo se suele confiar menos en las predicciones, aún así, las correcciones que se hacen no son tan grandes. Además, la traza de P obtiene valores más grandes que los obtenidos con los parámetros anteriores.

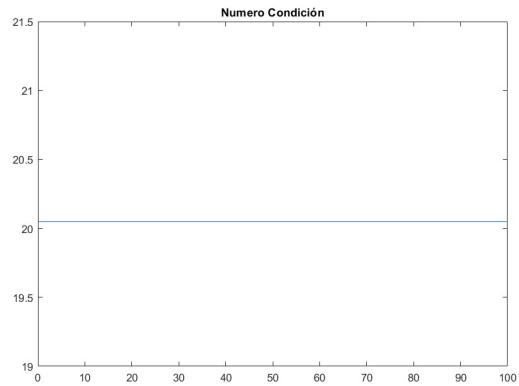


Figura 19: Condicionalidad de la matriz de observabilidad

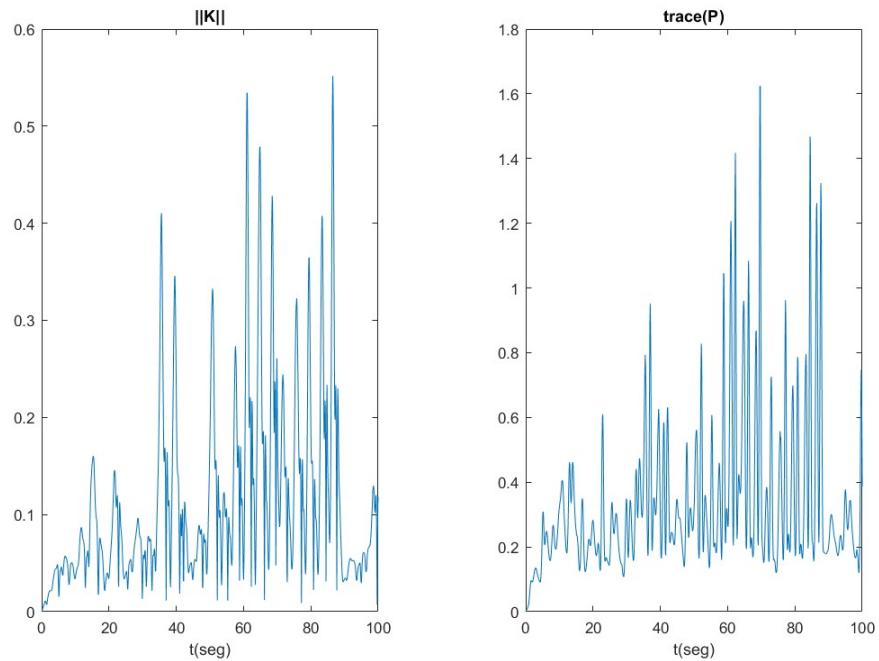
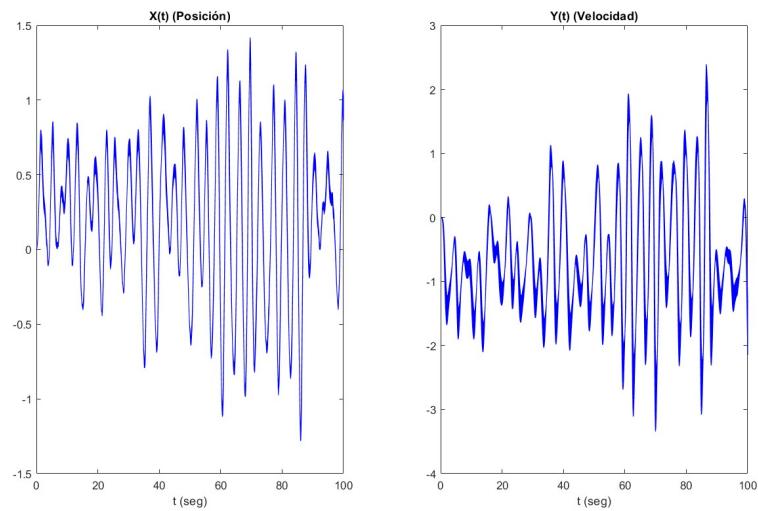
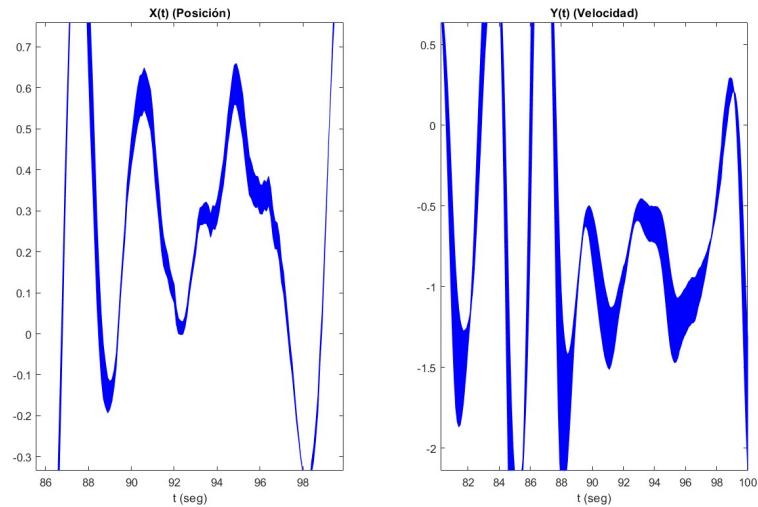


Figura 20: Norma de la ganancia de Kalman y Traza de la matriz de covarianzas del error del estado

Se realizó también el análisis de Incertidumbre y se encontró que con una incertidumbre en los parámetros del 30 % las estimaciones siguen siendo buenas, sin embargo presentan un poco más de errores que con los parámetros anteriores.



(a) Vista general

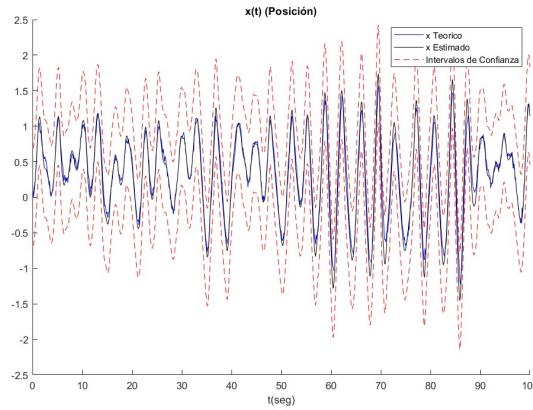


(b) Ampliación

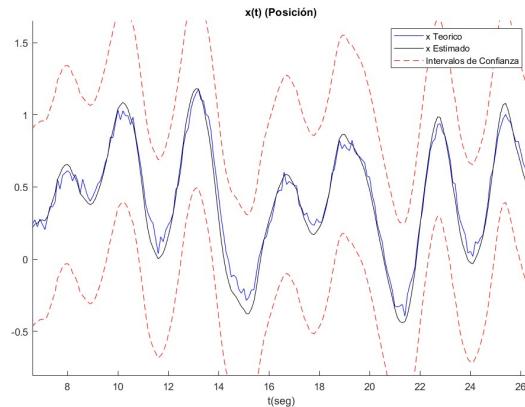
Figura 21: Análisis de Incertidumbre: Estimación de la velocidad con nivel de incertidumbre del 30 % en los parámetros

3.2. Filtro de Kalman Conjunto

El filtro de Kalman fue implementado en Matlab haciendo uso de las matrices mencionadas anteriormente, además, tomamos condiciones iniciales en cero para los estados Posición y velocidad, pero, establecemos 1.2 como la condición inicial para el estado que representa al parámetro α estimado, y los parámetros de diseño fueron incializados en matrices diagonales con valores $P_0=0.01$ $Q=0.01$ y $R= 1$, estos valores fueron escogidos ya que luego de realizar simulaciones con otros parámetros, encontramos que estos llevaban a estimaciones correctas. Lo anterior se evidencia en las siguientes gráficas donde se presentan las estimaciones de los 3 estados del sistema, la posición, velocidad y el coeficiente de amortiguamiento del péndulo.

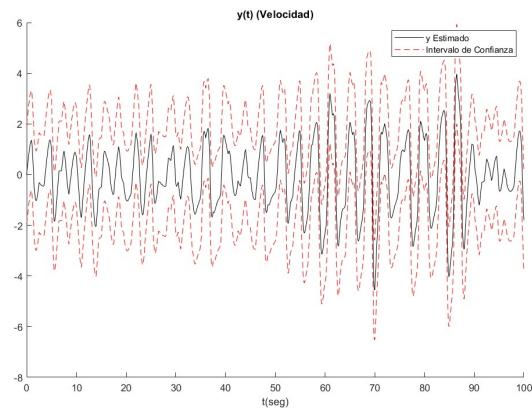


(a) Vista general

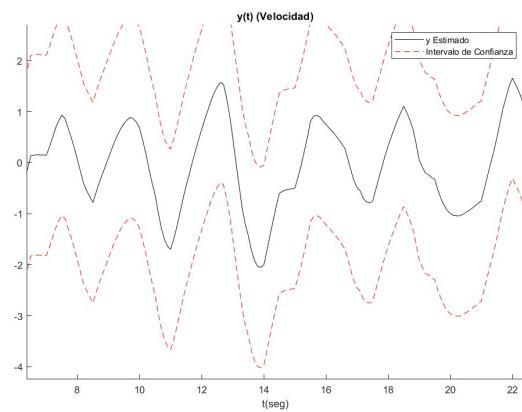


(b) Ampliación

Figura 22: Estimación de la posición con el Filtro de Kalman Conjunto



(a) Vista general



(b) Ampliación

Figura 23: Estimación de la velocidad con el Filtro de Kalman Conjunto

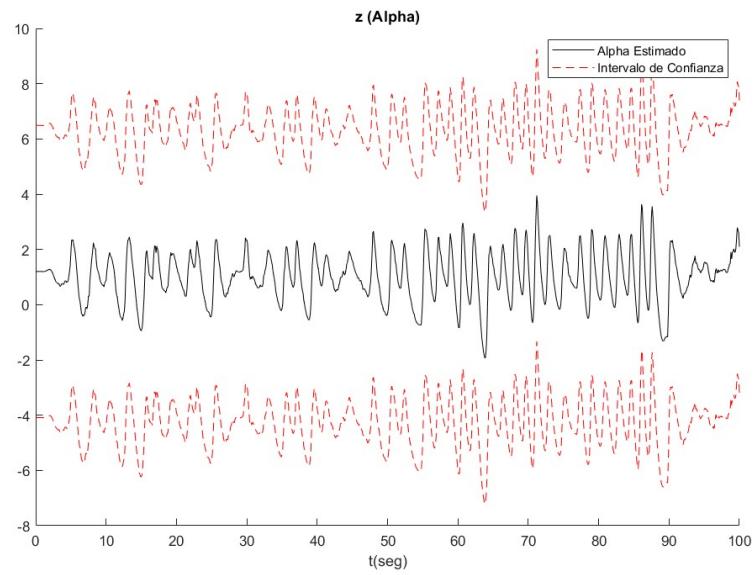


Figura 24: Estimación del coeficiente de amortiguamiento con el Filtro de Kalman Conjunto

En la siguiente figura se presenta gráficamente el número de condición de la matriz de observabilidad del sistema, esta nos muestra que la matriz está bien condicionada, pues el número de condición es bastante pequeño.

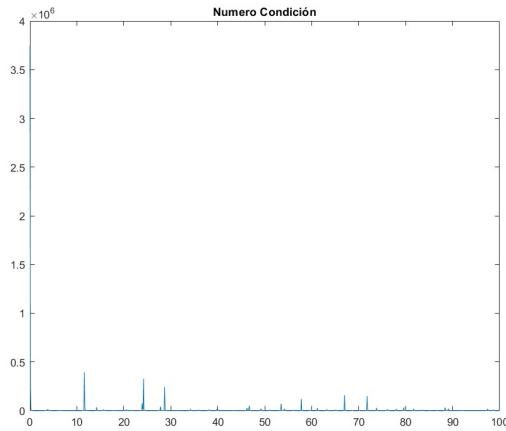


Figura 25: Condicionamiento de la matriz de Observabilidad

En el siguiente gráfico se presenta la norma de la ganancia de Kalman y la traza de la matriz de covarianzas del error, donde se puede observar una gran variabilidad de la matriz P y la ganancia de Kalman. Además, vemos que K suele ser mucho mayor a 1, y se presentan valores de la traza de P bastante grandes.

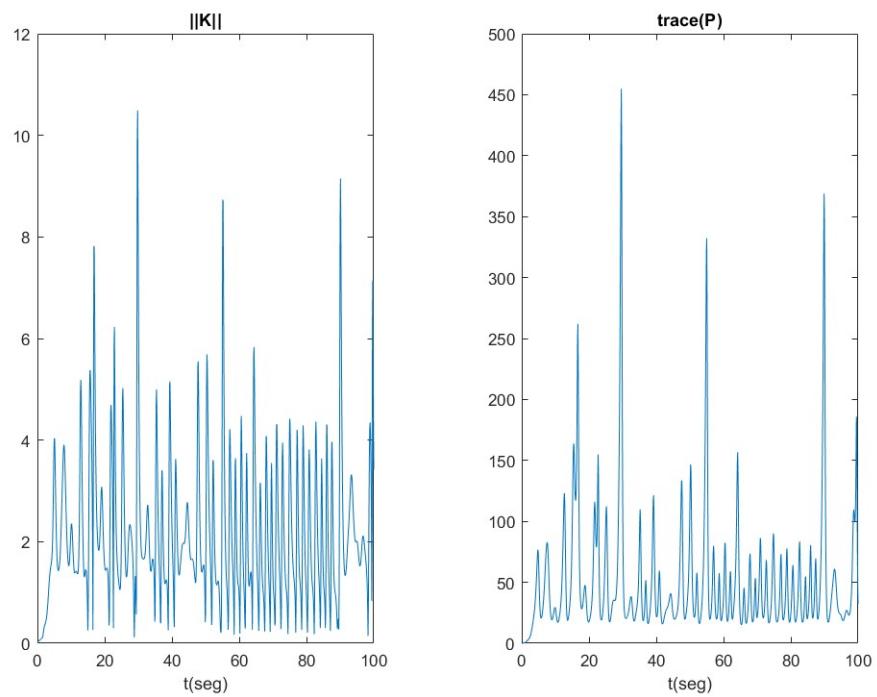


Figura 26: Norma de la ganancia de Kalman y Traza de la matriz de covarianzas del error del estado

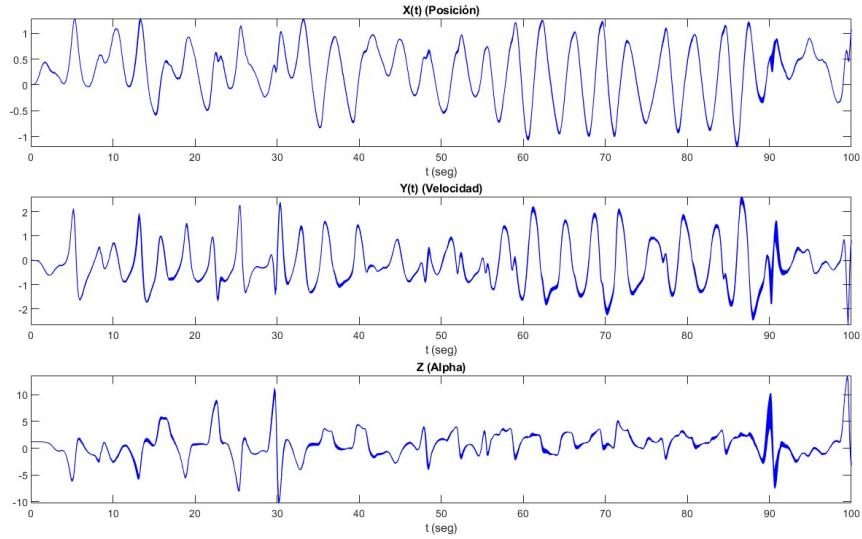


Figura 28: Análisis de Incertidumbre con nivel del 10 % en los parámetros

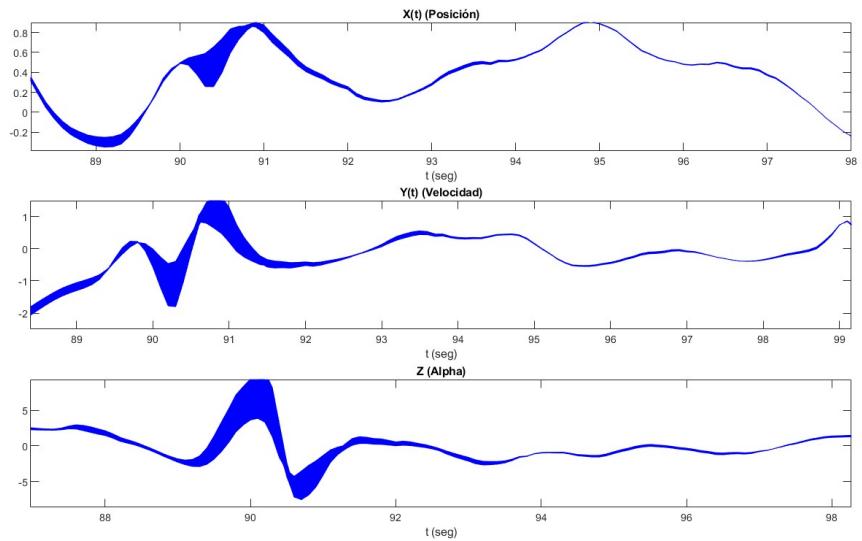


Figura 29: Análisis de Incertidumbre (Ampliado)

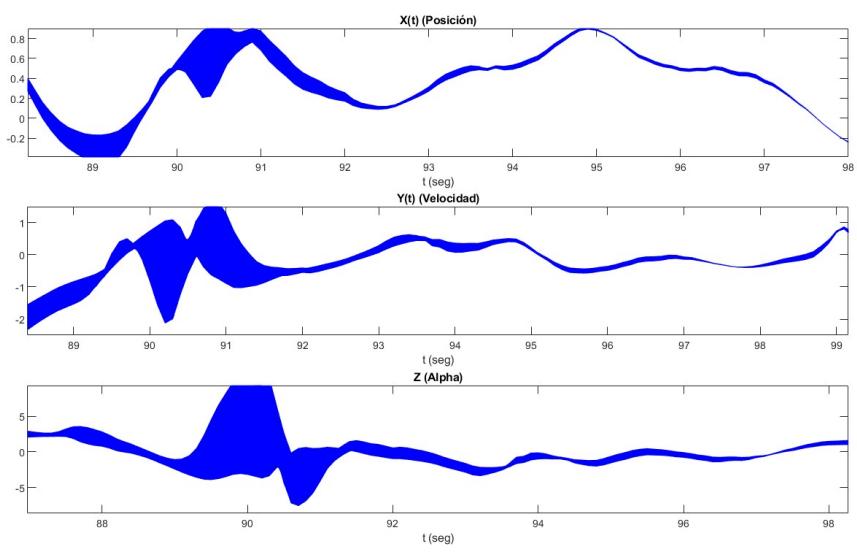
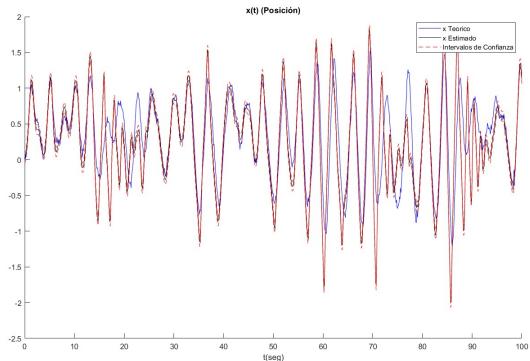
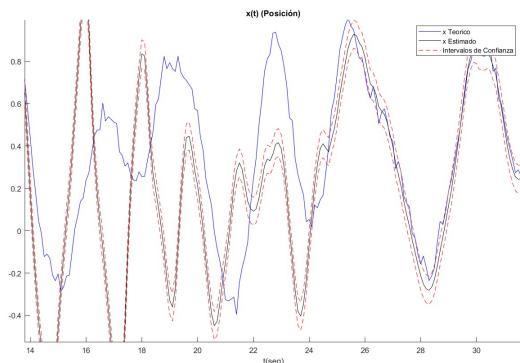


Figura 30: Análisis de Incertidumbre con nivel del 30 % en los parámetros

Probamos otras condiciones inciales para la implementación del filtro de Kalman conjunto, $P_0=0.01$, $Q=0.0000001$, $R=0.1^2$, y obtuvimos una estimación no tan buena como la obtenida con los parámetros anteriores.

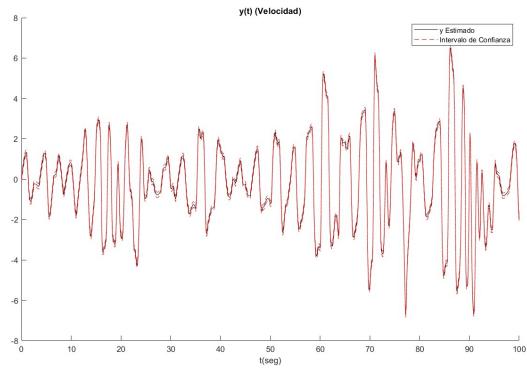


(a) Vista general

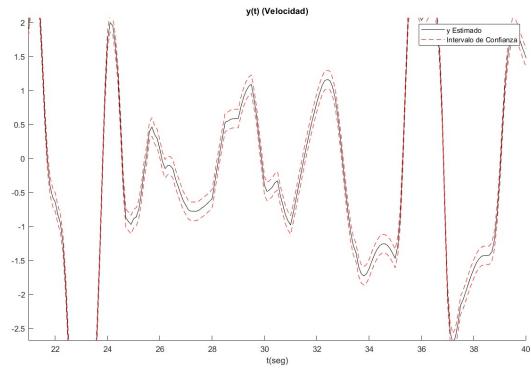


(b) Ampliación

Figura 31: Estimación de la posición con el Filtro de Kalman Conjunto

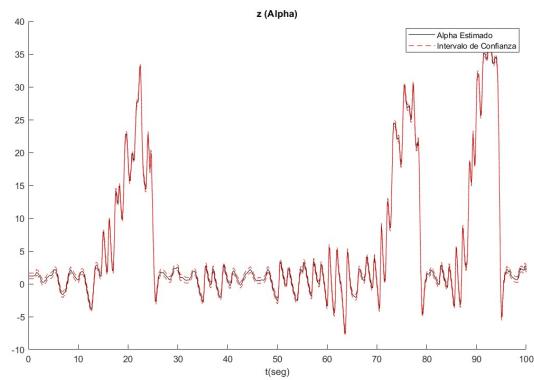


(a) Vista general

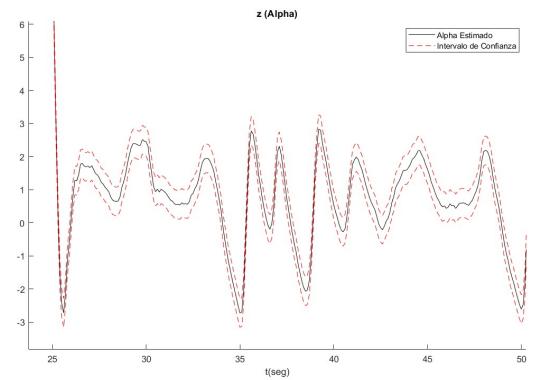


(b) Ampliación

Figura 32: Estimación de la velocidad con el Filtro de Kalman Conjunto



(a) Vista general



(b) Ampliación

Figura 33: Estimación del coeficiente de amortiguamiento con el Filtro de Kalman Conjunto

En este caso, el número de condición de la matriz de observabilidad es muy grande y con mayor variabilidad.

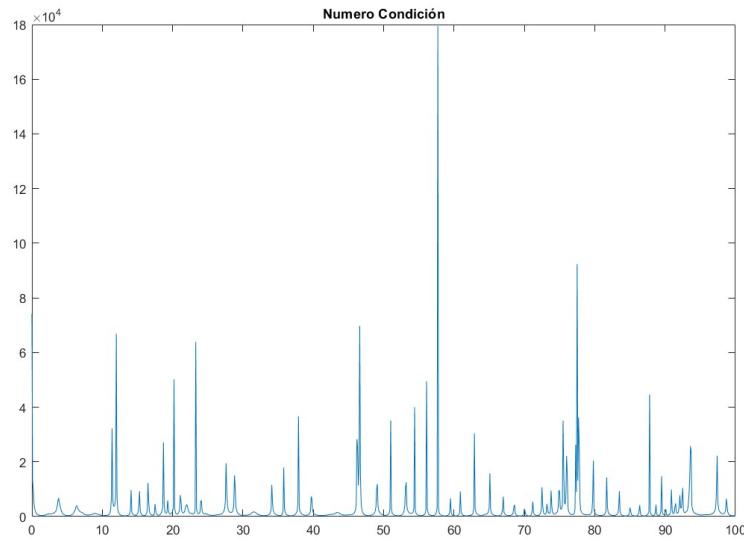


Figura 34: Condisionalidad de la matriz de observabilidad

En cuanto a la norma de la ganancia de Kalman, vemos que también alcanza algunos valores altos como con los parámetros anteriores, sin embargo, la traza de la matriz P es más pequeña y presenta menor variabilidad.

Finalmente, el análisis de incertidumbre muestra que con un nivel de incertidumbre del 30 % en los parámetros se presentan pequeños errores en las estimaciones de los estados.

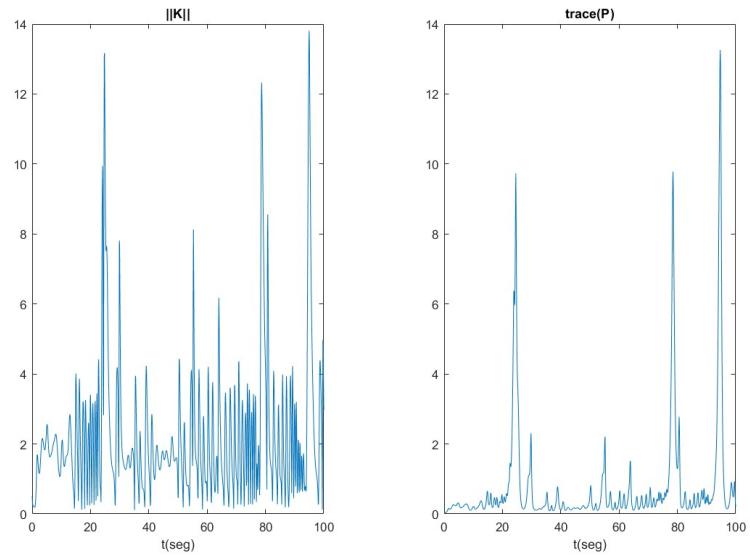


Figura 35: Norma de la ganancia de Kalman y Traza de la matriz de covarianzas del error del estado

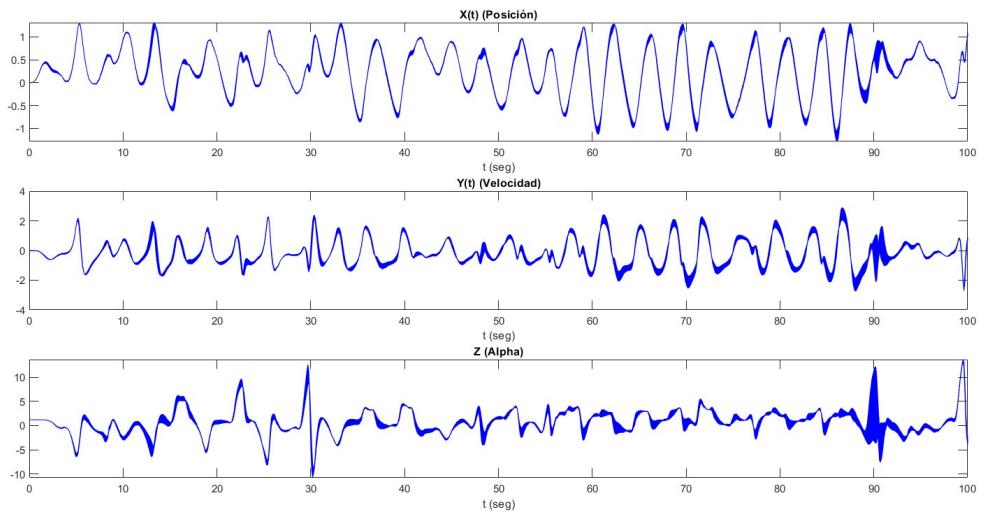


Figura 36: Análisis de Incertidumbre con nivel del 30 % en los parámetros

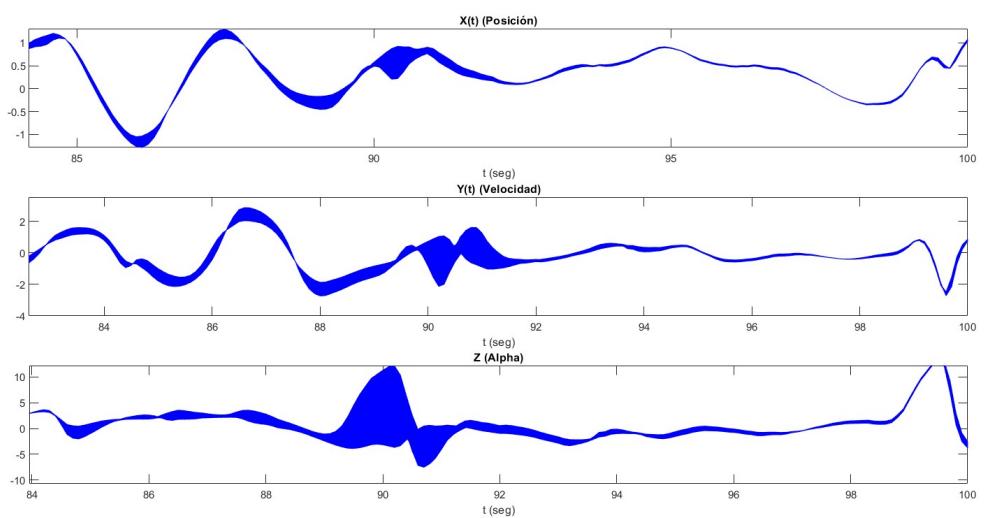


Figura 37: Análisis de Incertidumbre con nivel del 30 % en los parámetros (Ampliciado)

4. Discusión

Gracias a que nuestro sistema es observable se logró la estimación de los estados del sistema mediante el filtro de Kalman extendido, encontramos que si se establecen correctos valores de Q y R , las estimaciones son bastante buenas, pues es importante tener en cuenta que a la salida se le agregó un ruido por lo que no se espera igualdad en las estimaciones. De hecho, que el filtro no se sobreaproxime tanto, hace que ignore el ruido producido, por lo que se estima de mejor manera

A pesar de que la norma de K es pequeña, vemos que el filtro de Kalman Extendido suele confiar menos en la predicción a medida que pasa el tiempo, ya que indica que se hacen mayores correcciones, esto lo podemos notar en las imágenes que muestran la norma de K y la traza de P .

Vemos que los valores de Q y R que usamos inicialmente para el filtro extendido, hacen una muy buena estimación de los estados, a la vez que un intervalo de confianza muy estrecho, lo que genera una gran confianza en la estimación brindada. Esto cambia al cambiar esos valores de Q y R . En general, el valor Q no hacía mucha diferencia en el extendido, ya que por muy alto o por muy menor (de manera moderada ya que valores extremos rompían la estimación) no modificaba la estimación, pero el valor de R si generaba un gran cambio, sobretodo en la anchura de los intervalos de confianza. Para el filtro conjunto, vemos que los valores usados hacen unas estimaciones muy buenas, pero tenía unos intervalos de confianza muy grande, sobretodo esto lo podemos notar en la estimación del parámetro, aunque este no tiene una muy buena aproximación, considerando que es un valor constante, y apesar de darle un valor inicial muy parecido al nominal. En general notamos que al realizar experimentos con Q afectaba la estimación realizada (sobretodo lo podemos notar con el filtro conjunto) a medida que hacíamos de Q un numero mayor, mejor se hacía la estimación, y viceversa. Para R notamos que a medida que hacíamos el numero más pequeño, menor era el intervalo de confianza, y viceversa. Para el valor de P y P_0 realizamos algunas pruebas pero no notamos un gran cambio, esto seguramente sea por el largo tiempo de simulación que usamos, ya que el propio filtro cambiaba rápidamente de predecir a corregir, y no se notaba gran cambio en esto al usar diferentes valores en el inicio.

El análisis de incertidumbre nos mostró que el valor de los parámetros no tienen gran impacto en las estimaciones realizadas, a pesar de que usamos valores hasta un 30 % diferentes. En general, el cambio en los parámetros lo notábamos al momento de que ocurría un cambio abrupto en la salida, lo que tiene sentido ya que algunos de estos parámetros son el amortiguamiento del péndulo, pero por lo general, no hacen una gran diferencia en la estimación.

Como conclusión final, podemos decir que el filtro de kalman extendido funcionó muy bien para nuestro modelo, tuvo unas muy buenas estimaciones, al igual que no tuvo un costo de recursos considerable. El filtro de kalman conjunto, a pesar de tener buenos resultados estimando los estados (aunque no tan buenos como el extendido), no fue para nada aceptable la estimación que hizo del parámetro α . Y en general un problema que nos preocupó fue que fallara el test de blancura, dado que estuvimos seguros de tomar los datos con un ruido blanco, tal vez tuvimos errores al calcular los residuos. Pero en general fue una muy buena practica, en la que pudimos ver lo bien que el filtro de Kalman estima los estados, comparándolos al final con los valores teóricos.

Referencias

Stephen Lynch. *Dynamical systems with applications using MATLAB*. Springer, 2 edition, 2014.

Jorgelina Ramos, Stephen Lynch, David Jones, and Hans Degens. Hysteresis in muscle. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27, 02 2017.

Carlos Mario Velez. Sistemas dinámicos, estimación y control. 2023.
MathWorks. System Design Optimization Toolbox. 2021.