Höhere Mathematik 2, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 11

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S11.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (30 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `Name_S11_Aufg1(f , xmin, xmax, ymin, ymax, hx, hy)`, welche Ihnen das Richtungsfeld der DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ auf den Intervallen $[x_{min}, x_{max}]$ und $[y_{min}, y_{max}]$ plottet mit der Schrittweite h_x in $x-$Richtung und h_y in $y-$Richtung. Benutzen Sie dafür die Python-Funktionen `numpy.meshgrid()` und `numpy.quiver()`.

Gehen Sie dafür folgendermassen vor:

(i) Mit `np.meshgrid()` erzeugen Sie zuerst die Koordinaten des Punkterasters in derxy- Ebene, z.B. `[X,Y] = np.meshgrid(0:0.1:5,0:0.1:3)`

(ii) Mit Ihrer Funktion $f(x, y)$ berechnen Sie anschliessend für jeden dieser Punkte die Steigung, z.B. `Ydiff=f(X,Y)`.

(iii) Damit `np.quiver()` die entsprechenden Steigungsvektoren für jeden Punkt zeichnen kann, erwartet es für jeden Punkt in der (x, y)- Ebene neben den Koordinaten X und Y auch die $x-$Komponenten der jeweiligen Steigungsdreiecke und die entsprechenden $y-$Komponenten. Sie erhalten das gewünschte Resultat, wenn Sie für die $y-$Komponente des Steigungsdreiecks Ydiff übergeben und für die $x-$Komponente eine Matrix mit lauter Einsen.

Aufgabe 2 (45 Minuten):

Betrachten Sie die folgende DGL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1.4$ mit $y(0) = 2$. Lösen Sie die DGL manuell mit

(a) dem Euler-Verfahren mit $h = 0.7$.

(b) dem Mittelpunkt-Verfahren mit $h = 0.7$.

(c) dem modifizierten Euler-Verfahren mit $h = 0.7$.

Die exakte Lösung der DGL ist $y(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 4}$. Berechnen Sie für (a) - (c) jeweils den absoluten Fehler $\mid y(x_i) - y_i \mid$ für jedes x_i.

Aufgabe 3 (45 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `[x, y_euler,y_mittelpunkt,y_modeuler] = Name_S11_Aufg3(f,a,b,n,y0)`, welche Ihnen das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$ auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Schritten berechnet, sowohl mit dem Euler-Verfahren als auch mit dem Mittelpunkt-Verfahren und dem modifizierten Euler-Verfahren. Die Resultate werden in die Vektoren `y_euler, y_mittelpunkt, y_modeuler` geschrieben, `x` enthält die entsprechenden x_i-Werte. Ausserdem soll eine Grafik des Richtungsfeldes erzeugt (benutzen Sie dafür ihre Funktion aus Aufgabe 1) und die drei Lösungen eingezeichnet werden. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate aus Aufgabe 2.

Aufgabe 2.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

Intervall $0 \le x \le 1.4$

$y(0) = 2$ $\qquad y' = \frac{x^2}{y}$

a.) Euler-Verfahren $(h=0.7)$

$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow 0.7 = \frac{1.4}{n} \quad n = 2$

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

$y_0' = \frac{0^2}{2} = 0 \qquad x_0 = 0$

$x_1 = 0 + h = 0.7 \qquad y_1 = 2$

$y_1' = f(0.7, 0) = \frac{0.7^2}{2} = 0.245$

$y_2' = \frac{1.4^2}{2.172} = 0.902$

$x_2 = 0.7 + 0.7 = 1.4$

$y_2 = 2 + 0.7 \cdot 0.245 = 2.172$

b.) Mittelpunktverfahren $(h=0.7)$

$n=2$

$x_{h/2} = x_i + \frac{h}{2}$

$y_{h/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{h/2}, y_{h/2})$

$y_0' = \frac{0}{2} = 0$

$x_{h/2} = \frac{0.7}{2} = 0.35$

$y_{h/2} = 0$

$y_{0.1}' = \frac{0.35^2}{2} = 0.06125$

$x_1 = 0.7$

$y_1 = 0.06125 \cdot 0.7 + 2 = 2.02875$

$y_1' = \frac{0.7^2}{2.02875} = 0.24153 \approx 0.242$

$x_{11} = 1.05$

$y_{11} = 0.35 \cdot 0.242 + 2.029 = 2.1137$

$y_{11}' = \frac{1.05^2}{2.1137} = 0.5216$

$x_2 = 1.4$

$y_2 = 2.029 + 0.7 \cdot 0.5216 = 2.39412$

c.) $y'_0 = \frac{0}{2} = 0$

$x_1 = 0.7$

$y_1 = 2$

$y'_1 = \frac{0.7^2}{2} = 0.245$

$y'_{01} = \frac{0.245}{2} = 0.1225$

$x_{11} = 0.7$

$y_{11} = 2 + 0.7 \cdot 0.1225 = 2.086$

$y'_{11} = \frac{0.7^2}{2.086} = 0.235$

$x_2 = 1.4$

$y_2 = 2.086 + 0.7 \cdot 0.235 = 2.251$

$y'_2 = \frac{1.4^2}{2.251} = 0.871$

$y'_{12} = \frac{0.235 + 0.871}{2} = 0.553$

$x_{21} = 1.4$

$y_{21} = 2.086 + 0.7 \cdot 0.553 = 2.473$

Fehler

genau: $y(x_1) = 2.056$

$y(x_2) = 2.414$

Euler: $|y(x_1) - y_1| = |2.056 - 2| = 0.056$

$|y(x_2) - y_2| = |2.414 - 2.172| = 0.242$

Mittel: $|y(x_1) - y_1| = |2.056 - 2.02875| = 0.02725$

$|y(x_2) - y_2| = |2.414 - 2.39412| = 0.01988$

Modifiziert: $|y(x_1) - y_1| = |2.056 - 2.086| = 0.03$

$|y(x_2) - y_2| = |2.414 - 2.473| = 0.059$