

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Zu den folgenden Stützpunkten soll die natürliche kubische Splinefunktion bestimmt werden, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i der kubischen Polynome S_i für $i = 0, 1, 2$ und geben Sie die $S_i(x)$ explizit an.

x_i	4	6	8	10
y_i	6	3	9	0

x_i	4	6	8	10
y_i	6	3	9	0
a_i	6	3	9	0
h_i	2	2	2	-
c_i	0	?	?	0

$$Ac = z$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3 \frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ 3 \frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3 \frac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{6}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ 3 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) - 3 \cdot \frac{6}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 4,5 \\ -13,5 - 9 \end{pmatrix}$$

Gauss-Verfahren

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5 \\ -22,5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 13,5 \\ 2 & 8 & -22,5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,25 & 27/16 \\ 2 & 8 & -22,5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,25 & 27/16 \\ 0 & 7,5 & -25,875 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0,25 & 27/16 \\ 0 & 1 & -3,45 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2,55 \\ 0 & 1 & -3,45 \end{array} \right)$$

$$c_1 = 2,55$$

$$c_2 = -3,45$$

für $i = 0, 1, 2$

$$5 \quad b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i)$$

$$6 \quad d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i)$$

	0	1	2	3
x_i	4	6	8	10
y_i	6	3	9	0
a_i	6	3	9	0
h_i	2	2	2	-
c_i	0	2,55	-3,45	0

$$b_0 = -\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot 2,55 = -3,2$$

$$b_1 = 3 - \frac{2}{3} \cdot (-3,45 + 2 \cdot 2,55) = 1,9$$

$$b_2 = -\frac{9}{2} - \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot (-3,45)) = 0,01$$

$$d_0 = \frac{2,55}{6} = 0,425$$

$$d_1 = \frac{1}{6} \cdot (-3,45 - 2,55) = -1$$

$$d_2 = \frac{3,45}{6} = 0,575$$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

$$S_0(x) = 6 - 3,2 \cdot (x - 4) + 0 \cdot \cancel{(x - 4)^2} + 0,425(x - 4)^3$$

$$S_1(x) = 3 + 1,9 \cdot (x - 6) + 2,55(x - 6)^2 - (x - 6)^3$$

$$S_2(x) = 9 + 0,01 \cdot (x - 8) - 3,45(x - 8)^2 + 0,575(x - 8)^3$$