1 Radio de curvatura

De Wikipedia, la enciclopedia libre

El **radio de curvatura** es una magnitud que mide la curvatura de un objeto geométrico tal como una línea curva, una superficie o más en general una variedad diferenciable embebida en un espacio euclídeo.

1.1 Radio de curvatura de una curva

El **radio de curvatura** de una línea curva o un objeto aproximable mediante una curva es una magnitud geométrica que puede definirse en cada punto de la misma y que coincide con el inverso del valor absoluto de la curvatura en cada punto:

$$R_c(s) := \frac{1}{\chi(s)}$$

Por otro lado la curvatura es una medida del cambio que sufre la dirección del vector tangente a una curva cuando nos movemos a lo largo de ésta. Para una curva parametrizada cualquiera la curvatura y el radio de curvatura vienen dados por:[1]

$$\frac{1}{R_c(t)} = \chi(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}$$

Si en lugar de un parámetro cualquiera usamos el parámetro de longitud de arco, la anterior ecuación se simplifica mucho, por resultar un vector tangente constante, y puede escribirse como:

$$\frac{1}{R_c(s)} = \chi(s) = \left|\tilde{\mathbf{r}}''(s)\right|$$

1.1.1 Curvas planas

Para una curva plana cuya ecuación pueda escribirse en coordenadas cartesianas $(x,y)\,$ como $x = x(t); y = y(t)$ donde t es un parámetro arbitrario, la expresión para el radio de curvatura se reduce a:

$$R_c = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right|}$$

En caso que pueda escribirse $y = f(x)\,$ de tal modo que para cada punto de la curva exista un único valor de x entonces puede tomarse a x como el parámetro arbitrario, y el radio de curvatura se puede calcular simplemente como:

$$R_c = \frac{\left[1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2f}{dx^2}\right|}$$

1.1.2 Demostración

En primer lugar tenemos la ecuación paramétrica de la curva $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la que queremos deducir su radio de curvatura ρ Ahora debemos buscar la ecuación paramétrica de la circunferencia ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que toma el mismo valor que γ y además satisfaga que $g'(t) = \gamma'(t)$ y $g''(t) = \gamma''(t)$ para cada t fijado. Claramente el radio no depende de la posición ($\gamma(t)$ solo de la velocidad ($\gamma'(t)$ y la aceleración ($\gamma''(t)$ A partir de dos vectores v y w solo se pueden obtener tres escalares independientes, que son: $v \cdot v$ $w \cdot w$ y $w \cdot v$. Por lo tanto el radio de curvatura dependerá únicamente de los escalares $|\gamma'(t)|^2$ y $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t)$.

La ecuación paramétrica general para una circunferencia en $\mathbb{R}^n$ viene dada por

$$g(u) = A\cos(h(u)) + B\sin(h(u)) + C$$

[1] Spiegel, M. & Abellanas, 1988, p. 121

donde $C \in \mathbb{R}^n$ es el centro de la circunferencia (aunque es irrelevante, por desaparecer al derivar), $A, B \in \mathbb{R}^n$ son vectores perpendiculares le módulo ρ (es decir $A \cdot A = B \cdot B = \rho^2 \wedge A \cdot B = 0$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera doblemente diferenciable en t

Derivando

$$\begin{array}{rcc} |g'|^2 & = & \rho^2 (h')^2 \\ g' \cdot g'' & = & \rho^2 h' h'' \\ |g''|^2 & = & \rho^2 \left((h')^4 + (h'')^2 \right) \end{array}$$

si ahora igualamos a las derivadas correspondientes de γ obtenemos

$$\begin{array}{rcc} |\gamma'^2(t)| & = & \rho^2 h'^2(t) \\ \gamma'(t) \cdot \gamma''(t) & = & \rho^2 h'(t) h''(t) \\ |\gamma''^2(t)| & = & \rho^2 (h'^4(t) + h''^2(t)) \end{array}$$

que se trata de un sistema en ρ $h'(t)$ y $h''(t)$ que permite despejar ρ obteniendo finalmente que $\rho = \frac{|\gamma'|^3}{\sqrt{|\gamma'|^2 \, |\gamma''|^2 - (\gamma' \cdot \gamma'')^2}}$.

1.2 Referencias

1. Spiegel, M. & Abellanas, 1988, p. 121

1.2.1 Bibliografía

- Girbau, J.: "*Geometria diferencial i relativitat*", Ed. Universitat Autònoma de Barcelona, 1993. ISBN 84-7929-776-X.
- Spiegel, M. & Abellanas, L.: "*Fórmulas y tablas de matemática aplicada*", Ed. McGraw-Hill, 1988. ISBN 84-7615-197-7.

1.2.2 Enlaces

externoseditar] :CUSTOM$_{\mathrm{ID}}$: enlaces-externoseditar

- Weisstein, Eric W. «Principal Curvatures». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- Weisstein, Eric W. «Principal Radius of Curvature». En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- Introducción a la curvatura de curvas planas.

1.2.3 Licencia