

## Proyección Gauss-Krüger

La teoría de la proyección conforme del elipsoide terrestre es establecida por primera vez por el matemático Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855) entre los años 1816 y 1827.

En el año 1821, Gauss aplicó su proyección en trabajos geodésicos en el estado de Hannover.

En este sistema la superficie intermedia de proyección en un cilindro tangente a la largo del meridiano central de la región que se quiere representar; es apropiado para territorios cuya dirección de máxima amplitud es en el sentido de las latitudes.

Las deformaciones dependen solamente del apartamiento del meridiano central y son simétricas respecto del mismo.

Cuando se trata de representar territorios muy extendidos en el sentido de las longitudes, se presentarán deformaciones importantes en los puntos más alejados del meridiano central, que podrían exceder una tolerancia prefijada.

Para resolver este problema, se divide el territorio en husos o fajas meridianas de ancho tal que las mayores deformaciones no sobrepasen un valor establecido. Los husos son sistemas de coordenadas independientes; para lograr la vinculación de ellos se establecen zonas de superposición en los límites de los mismos, donde se calculan las coordenadas en ambos sistemas.

El geodesta L. Krüger del Instituto Geodésico de Postdam, introdujo en 1912 el empleo de las fajas meridianas y desde allí se generalizó el nombre de la proyección.

Esta proyección busca fórmulas que den la transformación conforme de puntos del elipsoide en puntos del plano.

Los puntos del elipsoide están caracterizados por sus coordenadas geográficas latitud y longitud, y los puntos del plano por sus coordenadas planas rectangulares  $X$  e  $Y$ . Se trata de establecer una relación funcional entre el sistema elipsoidal y el plano de manera tal que la representación sea conforme.

Esta transformación se lleva a cabo mediante una función de variable compleja e imponiendo ciertas condiciones previas.

La imagen del meridiano central de la faja es el eje  $X$ , tomándolo con sentido positivo hacia el norte.

Las magnitudes lineales sobre el meridiano central aparecen sin deformación.

### Al margen: Cauchy Riemman y conservar los angulos.

The statement as formulated is false. In the first place, a function is holomorphic on an **open set** and not "at a point  $z_0$ ".

Now it is easy to define a real differentiable function  $f$  whose  $df(z_0)$  at some point  $z_0$  is a similarity, but  $f$  is nowhere holomorphic. Consider, e.g., the function

$$f(z) := z + \bar{z}^2 = (x + x^2 - y^2) + i(y - 2xy) \quad (z := x + iy) .$$

Here  $df(0) = \text{id}$ , but  $f$  is definitely not holomorphic.

When the function  $f$  fulfills the stated condition in **every** point  $z$  of its domain of definition  $\Omega$  then  $f$  is indeed holomorphic.

This can be shown as follows:

Let

$$[df(z_0)] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \quad ad - bc > 0 .$$

If  $df(z_0)$  preserves angles then the images of  $(1, 0)$  and  $(0, 1)$  must be orthogonal, whence  $ab + cd = 0$ . Now the images of  $(1, 1)$  and  $(-1, 1)$  have to be orthogonal, too; and this implies  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ . It is now easy to see that the matrix  $[df(z_0)]$  is of the form

$$[df(z_0)] = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \rho \sin \phi & \rho \cos \phi \end{bmatrix} , \quad \rho > 0$$

for some  $\phi$ , whence is the constant multiple of an orthogonal matrix (of determinant  $+1$ ).

It follows that there are numbers  $A$  and  $B$  such that

$$[df(z_0)] = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} , \quad A^2 + B^2 > 0 .$$

Interpreting this in the complex sense this means that we in fact have

$$f(z) - f(z_0) = (A + iB)(z - z_0) + o(z - z_0) \quad (z \rightarrow z_0) ,$$

which is the same thing as

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + iB .$$

Más al margen:

$$\text{Im} f(z) = \text{de p. m. } f(z) \text{ es conforme.}$$

$$f(x+iy) = c_0(x+iy) + c_1(x+iy)^2 + c_2(x+iy)^3 + \dots + c_n(x+iy)^n$$

$$f'_x = c_1 + 2c_2(x+iy) + 3c_3(x+iy)^2 + \dots$$

$$f'_y = [(x+iy) + c_2 2(x+iy) + \dots] \cdot i$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}[f'_y] &= -\operatorname{Im}[f'_x] \\ \operatorname{Im}[f'_y] &= \operatorname{Re}[f'_x] \end{aligned} \right\} \text{CAUCHY RIEMANN!}$$

$a d - b c = 0$

### Proyección Gauss-Krüger.

Dados dos puntos sobre el elipsoide infinitamente próximos (figura IX.2), ambos vienen caracterizados por sus coordenadas geográficas latitud y longitud. Teniendo en cuenta que ambos puntos son infinitamente próximos, se puede considerar que la parcela elipsoidal que abarcan no tienen curvatura, es decir que es un plano que se denominará  $z$ , es decir que la superficie elemental ( $d\varphi, d\lambda$ ) se supone plana.

Ambos puntos tienen su imagen plana, cuyas posiciones se caracterizan por sus coordenadas planas ortogonales  $X$  e  $Y$  en la carta, que se denominará plano de las  $u$ .

Se trata de establecer la relación funcional entre la superficie elipsoidal elemental con la correspondiente superficie plana, con la condición que la representación sea conforme. De acuerdo con lo anteriormente expuesto se hace uso de la funciones de variable compleja porque ellas satisfacen dicha condición.

Se forman para cada plano las variables complejas:

$$z = \varphi + i\lambda$$

$$u = X + iY$$

Ambas variables están ligadas por la función de variable compleja:

$$u = f(z)$$

O sea:

$$X + iY = f(\varphi + i)$$

(X.7)

Formando la variable compleja  $\varphi + i\lambda$  no se ha elegido la misma unidad lineal para la parte real y la parte imaginaria de la variable. Si se incrementan en 1" por ejemplo la latitud y longitud, el arco de meridiano es siempre el mismo para cualquier latitud, no así el arco de paralelo que disminuye a medida que la longitud aumenta.

Los arcos de meridiano y paralelo en el elipsoide son respectivamente:

$$\begin{aligned} dm &= M \cdot d\varphi \\ dp &= N \cdot \cos(\varphi) \cdot d\lambda \end{aligned}$$

En la esfera:

$$\begin{aligned} dm &= R \cdot d\varphi \\ dp &= R \cdot \cos(\varphi) \cdot d\lambda \end{aligned}$$

Por lo tanto el arco de paralelo disminuye de acuerdo con el coseno de la latitud. Por ejemplo 1" en el ecuador y a 60 de latitud le corresponden los siguientes arcos de meridiano y paralelo:

$$dm(0^\circ) = 30m$$

$$dp(0^\circ) = 30m$$

$$dm(60^\circ) = 30m$$

$$dp(50^\circ) = 15m$$

Es decir, que sobre la superficie elipsoidal considerada plana, no se tienen cuadrados elementales sino rectángulos elementales, por no producir el mismo incremento lineal sobre el elipsoide, incrementos iguales en latitud y longitud. Si:

$$d\varphi = d\lambda$$

Las unidades lineales en el sentido de la latitud y la longitud están en la relación:

$$\frac{dp}{dm} = \frac{M}{N \cdot \cos(\varphi)}$$

Para igualar los arcos de meridiano y paralelo se sustituye la latitud  $\varphi$  por una nueva variable  $q$  llamada latitud isométrica, contada también a partir del ecuador de manera que el elemento de meridiano se exprese:

$$M \cdot d\varphi = N \cdot \cos(\varphi) \cdot dq$$

Porque se desea que para iguales incrementos de latitud isométrica y longitud:

$$dq = d\lambda$$

Se produzcan iguales incrementos lineales sobre meridianos y paralelos. Por lo tanto:

$$dq = \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos(\varphi)}$$

(X.8)

En el caso de una esfera donde  $M = N = R$  se tiene que:

$$dq = \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)}$$

(X.8')

Si por ejemplo  $dq = d\lambda = 1$ , en la latitud de 60 se tiene que:

$$dm = R \cdot d\varphi = R \cdot \cos(\varphi) \cdot dq = 15m$$

$$dm = R \cdot d\varphi = R \cdot \cos(\varphi) \cdot dq = 15m$$

Integrando las (X.8) y (X.8'):

$$q = \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 - e \cdot \operatorname{sen}(\varphi)}{1 + e \cdot \operatorname{sen}(\varphi)} \right)$$

$$q = \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 - e \cdot \operatorname{sen}(\varphi)}{1 + e \cdot \operatorname{sen}(\varphi)} \right)$$

Haciendo el cambio de variable en la ecuación (X.7) se tiene que:

$$X + iY = f(q + i)$$

(X.9)

En esta proyección no se busca la representación del elipsoide entero, sino de una faja comprendida entre dos meridianos no muy distanciados. Teóricamente se podría representar el elipsoide entero en esta forma, pero serían inevitables grandes dilataciones lineales a medida que los puntos se apartan del meridiano central.

El origen de las longitudes no es el meridiano de Greenwich sino el meridiano central de la faja que se pretende representar, de manera que se efectúa otro cambio de variable ya que las longitudes se cuentan a partir del meridiano central, positiva al este y negativa al oeste del mismo, longitud que se denominará  $l$ , tal que:

$$l = \lambda - \lambda_{M.C.}$$

Se forma entonces la función de variable compleja:

$$X + iY = f(q + il)$$

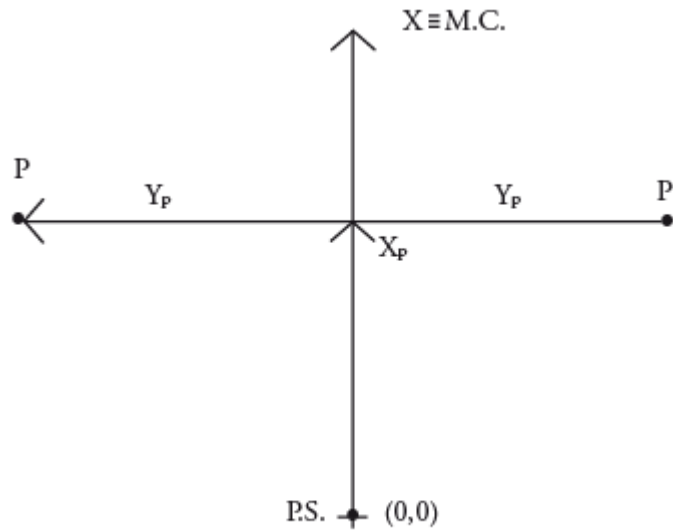
(X.10)

donde  $q$  y  $l$  caracterizan la situación de cualquier punto sobre la faja del elipsoide, y que en  $X$  e  $Y$  son las coordenadas planas de la representación de ese punto en el plano de la proyección.

Para que esta proyección esté completamente determinada, se impone una condición que exige que los puntos del meridiano central sean representados sin deformación lineal.

Además la imagen rectificada del meridiano central es el eje de las  $X$  de la representación y para el hemisferio sur de origen de coordenadas  $(0, 0)$  se encuentra en el polo sur.

La condición de que en el meridiano central no se deformen las magnitudes lineales es la condición de tangencia del cilindro a lo largo de tal meridiano.



- Fig. X.3 -

Por lo tanto los puntos situados sobre el meridiano central tienen coordenadas:  
 $l = 0$   $Y = 0$  sobre el elipsoide y la carta, respectivamente.

La función (X.10) para dichos puntos se transforma en:

$$X = f(q)$$

Los puntos del meridiano central están representados por puntos en una recta, eje de las X, en tal forma que sus distancias relativas son iguales en la proyección y en el elipsoide.

De lo anterior se deduce la naturaleza de la (X.11), que expresa el arco de meridiano del polo sur al punto considerado, por la variable  $q$  la que en cualquier momento se puede reemplazar por la variable  $\varphi$ .

La función que expresa tal magnitud, como se determinó en VIII.5 es:

$$S = \int_{-\pi/2}^{\varphi} M \cdot d\varphi$$

De modo que se tiene:

$$S = f(q)$$

(X.12)

Para encontrar las coordenadas X e Y de puntos que no se encuentran sobre el meridiano central, se desarrolla en serie de Taylor la función de variable compleja (X.10) tomando como origen dicho meridiano y como incremento la diferencia de longitud  $l$ .

Se obtiene por lo tanto:

$$X + iY = f(q) + \frac{df(q)}{dq} \cdot (il) + \frac{d^2f(q)}{dq^2} \cdot \frac{(il)^2}{2!} + \frac{d^3f(q)}{dq^3} \cdot \frac{(il)^3}{3!} + \dots$$

O bien teniendo en cuenta la (X.12):

$$X + iY = S + \frac{dS}{dq} \cdot (il) + \frac{d^2S}{dq^2} \cdot \frac{(il)^2}{2!} + \frac{d^3S}{dq^3} \cdot \frac{(il)^3}{3!} + \dots$$

Los términos del desarrollo en serie pares son reales porque:

$$i^2 = -1$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

Por lo tanto los términos de derivadas pares corresponden a las X; los términos de derivadas impares son imaginarios puros porque:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^5 = i^3 \cdot i^2 = (-i) \cdot (-1) = i$$

Por lo tanto corresponden a las Y. Es posible entonces separar las variables reales e imaginarias:

$$X = S - \frac{d^2S}{dq^2} \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{d^4S}{dq^4} \cdot \frac{l^4}{24} - \frac{d^6S}{dq^6} \cdot \frac{l^6}{720} + \dots$$

$$Y = \frac{dS}{dq} \cdot l - \frac{d^3S}{dq^3} \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{d^5S}{dq^5} \cdot \frac{l^5}{120} - \dots$$

(X.13.b)

Se calculará el primer término de la serie:

$$\frac{dS}{dq} = \frac{dS}{d} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$$

$$dS = M \cdot d\varphi$$



$$\frac{dS}{d\varphi} = M$$

$$dq = \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N \cdot \cos(\varphi)}{M}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dS}{dq} = M \cdot \frac{N \cdot \cos(\varphi)}{M}$$

$$\frac{dS}{dq} = N \cdot \cos(\varphi)$$

Para hallar las sucesivas derivadas de  $S$  respecto de  $q$  se deriva como función de función, primero respecto de la variable  $\varphi$  y luego por  $q$ . Llamando:

$$F^{II} = \frac{d^2 S}{dq^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dS}{dq} \right) \frac{d\varphi}{dq}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dS}{dq} \right) = \frac{d}{d\varphi} [N \cos(\varphi)] = \frac{dN}{d\varphi} \cdot \cos(\varphi) - N \cdot \sin(\varphi)$$

$$N = a \cdot [1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)]^{-1/2}$$

$$\frac{dN}{d\varphi} = a \cdot [1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)]^{-3/2} \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \frac{N \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dS}{dq} \right) = \left[ \frac{N \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \right] \cdot \cos(\varphi) - N \cdot \sin(\varphi) =$$

$$= \frac{N \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) - N \cdot \sin(\varphi) \cdot [1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)]}{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)} =$$

$$= \frac{[-N \cdot \sin(\varphi)] \cdot [-e^2 \cdot \cos^2(\varphi) + (1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi))]}{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)} = \frac{[-N \cdot \sin(\varphi)] \cdot (1 - e^2)}{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)} =$$

$$= \frac{(-a) \cdot (1 - e^2) \cdot \text{sen}(\varphi)}{[1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)]^{-3/2}}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dS}{dq} \right) = -M \cdot \text{sen}(\varphi)$$

Por lo tanto:

$$F^{II} = -M \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{N \cdot \cos(\varphi)}{M}$$

$$F^{II} = (-N) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

En las deducciones de las derivadas restantes se usan las siguientes abreviaturas auxiliares:

$$n^2 = e'^2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

$$t = \text{tg}(\varphi)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Reemplazando estas abreviaturas en la segunda derivada:

$$F^{II} = (-N) \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} = (-N) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \text{tg}(\varphi) = (-N) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot t$$

La  $\frac{d\varphi}{dq}$  se expresa también en función de las nuevas abreviaturas introducidas, de manera tal que:

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N}{M} \cdot \cos(\varphi) = \frac{a \cdot [1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)]^{3/2} \cdot \cos(\varphi)}{[1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)]^{1/2} \cdot a \cdot (1 - e^2)} = \frac{[1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)]}{(1 - e^2)} \cdot \cos(\varphi)$$

Teniendo en cuenta que:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = \left( \frac{1 - e^2}{1 - e^2} - \frac{e^2 \cdot \cos^2(\varphi)}{1 - e^2} \right) \cdot \cos(\varphi) = [1 + e^2 \cdot \cos^2(\varphi)] \cdot \cos(\varphi)$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = [1 + n^2] \cdot \cos(\varphi)$$

Para hallar la tercera derivada se hace:

$$\frac{F^{II}}{F^I} = \frac{(-N) \cdot \cos(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)}{N \cdot \cos(\varphi)} = -\operatorname{sen}(\varphi)$$

Y se derivan ambos miembros respecto de  $q$ :

$$\frac{F^{III} \cdot F^I - F^{II} \cdot F^{II}}{F^{I^2}} = \frac{F^{III}}{F^I} - \frac{F^I I^2}{F^{I^2}} = -\cos(\varphi) \cdot \frac{d}{dq} = -\cos^2(\varphi) \cdot (1 + n^2)$$

$$F^{III} = \left[ -\cos^2(\varphi) \cdot (1 + n^2) + \frac{F^I I^2}{F^{I^2}} \right] \cdot F^{I^2}$$

$$F^{III} = \left[ -\cos^2(\varphi) \cdot (1 + n^2) + \frac{N^2 \cdot \cos^4(\varphi) \cdot t^2}{N^2 \cdot \cos^2(\varphi)} \right] \cdot N \cdot \cos(\varphi)$$

$$F^{III} = [-\cos^3(\varphi)] \cdot (1 - t^2 + n^2) \cdot N$$

De manera similar se encuentran las siguientes derivadas:

$$F^{IV} = \cos^4(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot n^2 + 4 \cdot n^4)$$

$$F^V = \cos^5(\varphi) \cdot N \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + 14 \cdot n^2 - 58 \cdot t^2 \cdot n^2 + 13 \cdot n^4 - 64 \cdot t^2 \cdot n^4 + 4 \cdot n^6 - 24 \cdot t^2 \cdot n^6)$$

$$F^{VI} = \cos^6(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4 + 270 \cdot n^2 - 330 \cdot t^2 \cdot n^2 + 445 \cdot n^4 - 680 \cdot t^2 \cdot n^4 +$$

$$+ 44 \cdot n^6 - 600 \cdot t^2 \cdot n^6 + 88 \cdot n^8 - 192 \cdot t^2 \cdot n^8)$$

Reemplazando las expresiones de las derivadas (X.14), (X.15), (X.17), (X.18), (X.19) y (X.20) en los desarrollos en serie de (X.13.a) y (X.13.b) dará las coordenadas de los puntos de la carta con las abscisas contadas a partir del polo sur y las ordenadas a partir del meridiano central de la faja.

Las coordenadas X e Y en la proyección Gauss- Krüger resultan entonces:

$$\begin{aligned}
X = S + \frac{l^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t}{2} + \frac{l^4 \cdot \cos^4(\varphi) \cdot N \cdot t}{24} \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot n^2 + 4 \cdot n^4) + \\
+ \frac{l^6 \cdot \cos^6(\varphi) \cdot N \cdot t}{720} \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4 + 270 \cdot n^2 - 330 \cdot t^2 \cdot n^2 + 445 \cdot n^4 - 680 \cdot t^2 \cdot n^4 + \\
+ 44 \cdot n^6 - 600 \cdot t^2 \cdot n^6 + 88 \cdot n^8 - 192 \cdot t^2 \cdot n^8) \\
Y = l \cdot \cos(\varphi) \cdot N + \frac{l^3 \cdot \cos^3(\varphi) \cdot N}{6} \cdot (1 - t^2 + n^2) + \frac{l^5 \cdot \cos^5(\varphi) \cdot N}{120} \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + \\
+ 14 \cdot n^2 - 58 \cdot t^2 \cdot n^2 + 13 \cdot n^4 - 64 \cdot t^2 \cdot n^4 + 4 \cdot n^6 - 24 \cdot t^2 \cdot n^6)
\end{aligned}$$

(X.21.b)

Estas últimas expresiones dan la representación conforme de una parte de la superficie terrestre sobre un plano, o bien para toda la extensión de la tierra. Se elige un meridiano central a partir del cual se cuentan las cantidades  $l$ , positivas al Este y negativas al Oeste.

Las fórmulas (X.21.a) y (X.21.b) dan va valores negativos de las  $Y$  para los puntos situados al Oeste del meridiano central y habría que hacer distinción de signos para las ordenadas.

El sistema de fajas meridianas introducidas por Krüger están limitadas en 3 de longitud, 130' a cada lado del meridiano central. Se debe distinguir por lo tanto las coordenadas de las siguientes longitudes respecto de Greenwich: -72, -69, -66, -63, - 60, -57, -54.

Con el fin de evitar coordenadas  $Y$  negativas, se ha convenido en aumentar en 500.000 a todas las  $Y$ , de modo que resultan menores que 500.000 al Oeste del meridiano central, pero positivas y superiores a 500.000 al Este. Se elige este valor debido a que ninguna coordenada  $Y$  lo supera dentro de una misma faja.

Como a un determinado par de coordenadas le debe corresponder un solo punto dentro del sistema, lo cual con las convenciones adoptadas hasta ahora no sería el caso, dado que en las siete fajas existen siete puntos con las mismas coordenadas, se aumentan las ordenadas  $Y$  en números enteros de millones según la faja de que se trata.

Así se atribuyen a los siete meridianos centrales los siguientes números de faja, que corresponden al número entero de millones que se antepone a las  $Y$ , resultando las siguientes coordenadas para dichos meridianos:

Meridiano	N de faja	Ordenada Y
-72	1	1.500.000
-69	2	2.500.000
-66	3	3.500.000
-63	4	4.500.000
-60	5	5.500.000
-57	6	6.500.000
-54	7	7.500.000

Llamando  $Y'$  al valor obtenido de la expresión (X.21.b) con las modificaciones descriptas, el valor de la coordenada Y en el sistema Gauss- Krüger aplicado a la Argentina se transforma en:

$Y = n \cdot t^6 + 500.000 + Y'$  donde  $n$  es el número de faja.

Las expresiones (X.21) corresponden al orden de precisión de los trabajos fundamentales; en trabajos de menor precisión se podrá prescindir de los términos  $t$  y  $n$  con potencias superiores a 2.

Conocidas las coordenadas geográficas de los puntos, se calculan las coordenadas Gauss- Krüger de los mismos dentro de la faja que corresponda.

Por razones prácticas, se extienden las coordenadas hasta 2 a cada lado del meridiano central. De esa manera los puntos situados cerca de los bordes de faja tienen coordenadas en los dos sistemas vecinos.

De esta manera cuando se realiza algún levantamiento que se extiende en una faja vecina no necesita hacer uso de coordenadas en dos sistemas distintos.

En las cartas topográficas se ha trazado una cuadrícula de coordenadas Gauss-Krüger en el borde de cada hoja. Frente a las líneas del cuadriculado se han impreso las coordenadas en kilómetros permitiendo determinar las coordenadas de cualquier punto que interese.

Se deberá medir la distancia en X e Y que separa al punto considerado de un cruce de cuadrícula próximo, teniendo en cuenta la escala de la carta, y se agregan esos valores a las coordenadas de cruce elegido. Para la determinación de dichas distancias figuran en la información marginal de la carta una escala de coordenadas.

La operación recíproca, es decir dado un par de coordenadas ubicar dicho punto en la carta, también es posible por medio de la cuadrícula.

### **Transformación de coordenadas planas en geográficas.**

Se debe resolver el problema inverso del que se vio en el punto anterior, planteando en forma general las siguientes ecuaciones:

$$q + il = F(x + iy)$$

Análogamente, se desarrollan en serie de Taylor:

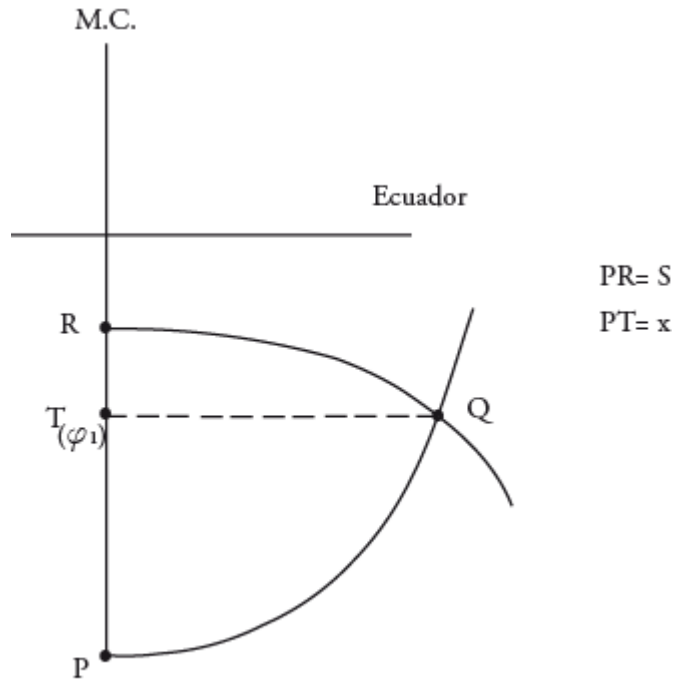
$$q + il = F(x) + F^I(x)(iy) - F^{II}(x)\frac{y^2}{2} + F^{III}(x)\frac{(iy)^3}{3!} + F^{IV}(x)\frac{y^4}{4!}$$

Separando la parte real y la imaginaria:

$$q = F(x) - F^{II}(x)\frac{y^2}{2} + F^{IV}(x)\frac{y^2}{24} - \dots$$

$$l = F^I(x)y - F^{III}(x)\frac{y^3}{6} + F^V(x)\frac{y^5}{120} - \dots$$

Estas últimas expresiones resultan de la condición de conformidad de la transformación de un plano al elipsoide. De la misma forma que se realizó en la proyección Gauss- Krüger, se introducen ciertas condiciones para la transformación.



- Fig. X.4 -

Para  $y=0$  debe ser  $l=0$ ; por lo tanto:

$$F(x) = q_1 \quad (\text{X.24})$$

En la figura (X.4), S es el arco de meridiano del polo sur hasta la latitud del punto Q; X es la coordenada Gauss, distancia del polo sur al pie de la perpendicular desde Q al meridiano central, que se denomina T; a la latitud del punto T se la denomina  $\varphi_1$ . Por lo tanto  $q_1$  se calcula en función de  $\varphi_1$ .

Este valor puede ser obtenido en función de la coordenada X, en efecto de la (VIII.13), arco de meridiano del polo sur a una altitud cualquiera.

$$X = S = \alpha \cdot \varphi_1 + \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + \beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_1) + \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_1) + \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_1) + \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_1) + \dots$$

El valor de  $\varphi_1$  se obtiene por aproximaciones sucesivas:

$$X = \alpha \cdot \left( \varphi_{1,1} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\varphi_{1,1} = \frac{X}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$$

Luego se introduce este primer valor de la latitud en la (VIII.13) para obtener una segunda aproximación del valor de la latitud.

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\alpha} \left( x - \alpha \cdot \frac{\pi}{2} - \beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,1}) - \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,1}) - \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,1}) - \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,1}) \right)$$

$$\varphi_{1,2} = \left( \frac{x}{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,1}) - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,1}) - \frac{\delta}{\alpha} \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,1}) - \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,1})$$

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,1} - \frac{1}{\alpha} [\beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,1}) - \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,1}) - \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,1}) - \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,1})]$$

$$\varphi_{1,3} = \varphi_{1,1} - [\beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,2}) + \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,2}) + \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,2}) + \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,2})]$$

Se sigue iterando hasta que en la (VIII.13) introduciendo  $\varphi_{1,j}$  dé como resultado el valor de X ingresado.

Para resolver las (X.23) se debe recordar:

$$dq = \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos(\varphi)}$$

Donde:

$$q = \int \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos(\varphi)}$$

Por lo tanto:

$$\varphi = f(q) = f[q_1 + (q - q_1)]$$

Desarrollando en serie, tomando a  $(q - q_1)$  como incremento, se tiene:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{d}{dq}(q - q_1) + \frac{d^2\varphi}{dq^2}(q - q_1)^2 + \dots$$

Y por la (X.23) y (X.24) se tiene que:

$$\varphi = \varphi_1 - \left[ F^{II}(x) \frac{y^2}{2} - F^{IV}(x) \frac{y^4}{24} \right] \cdot \frac{d\varphi}{dq}$$

Para encontrar las expresiones se hallan las derivadas:

$$F^I(x) = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{d} \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dq}{d} = \frac{M}{N \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{M}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

La segunda derivada se obtiene haciendo:

$$\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{d}{d} \left( \frac{dq}{dx} \right) \frac{d}{dx}$$

Omitiendo el cálculo de ésta y las derivadas de orden superior, como así también ciertas transformaciones, se obtienen las siguientes expresiones:

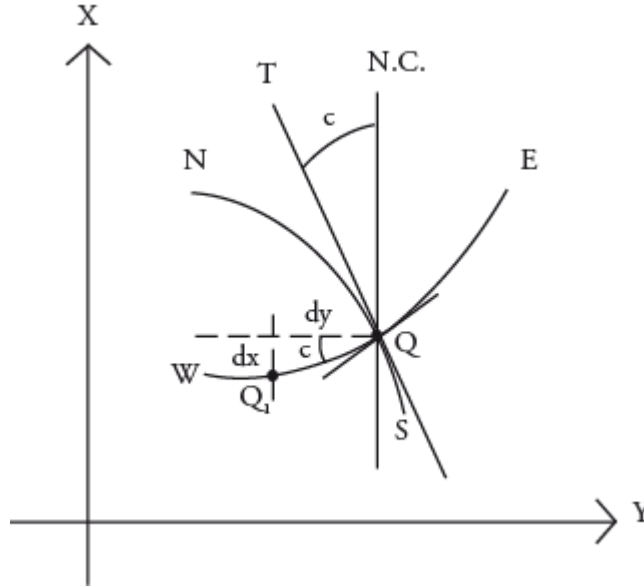


$$l = \frac{y}{N_1 \cdot \cos(\varphi_1)} \cdot \left[ 1 - \frac{y^2}{6 \cdot N_1^2} \cdot (1 + 2 \cdot t_1^2 + n_1^2) + \frac{y^4}{120 \cdot N_1^4} \cdot (5 + 28 \cdot t_1^2 + 24 \cdot t_1^4 + 6 \cdot n_1^2 + 8 \cdot n_1^2 \cdot t_1^2) \right]$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y^2}{2 \cdot N_1 \cdot M_1} \cdot t_1 \cdot \left[ 1 - \frac{y^2}{12 \cdot N_1^2} \cdot (5 + 3 \cdot t_1^2 + n_1^2 - 9 \cdot t_1^2 \cdot n_1^2) + \frac{y^4}{360 \cdot N_1^4} \cdot (61 + 90 \cdot t_1^2 + 45 \cdot t_1^4) \right]$$

Expresiones en las que el resultado se obtiene en radianes.

#### Convergencia de meridianos.



Considerando la figura (X.5), NS representa la imagen del meridiano que pasa por Q, WE el paralelo que pasa por el mismo punto, NC la dirección paralela al meridiano central, es decir el norte de cuadrícula.

El ángulo  $c$  formado por la tangente a NS en Q y la dirección NC, se denomina convergencia de meridianos plana.

Considerando un punto Q1 infinitamente próximo, la diferencia de coordenadas entre éste y Q es  $dx$  y  $dy$ . Del triángulo elemental de la figura:

$$\operatorname{tg}(c) = \frac{dx}{dy}$$

(X.26)

$$\frac{dx}{dy}$$

se halla de la ecuación de la curva WE, en la cual la latitud es constante por tratarse de un paralelo y la (X.26) puede escribirse:

$$tg(c) = \frac{dx/dl}{dy/dl}$$

Las derivadas

$$\frac{dx}{dl}$$

y

$$\frac{dy}{dl}$$

se obtienen de diferenciar las expresiones de las coordenadas Gauss (X.21.a) y (X.21.b), obteniéndose como primera aproximación:

$$\frac{dx}{dy} = l \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t$$

$$\frac{dy}{dl} = N \cdot \cos(\varphi)$$

La convergencia de meridianos, también como primera aproximación, será:

$$tg(c) = \frac{dx/dl}{dy/dl} = \frac{l \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t}{N \cdot \cos(\varphi)} = l \cdot \sin(\varphi)$$

$$tg(c) = l \cdot \sin(\varphi)$$

(X.27)

Con  $l$  en radianes.

Como resultado de la diferenciación de las expresiones de las coordenadas Gauss con respecto a  $l$ , considerando todos los miembros y la (X.27), se obtiene:

$$tg(c) = l \cdot \sin(\varphi) - \frac{l^3}{3} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot (1 + t^2 + 3 \cdot n^2 + 2n^4) + \frac{l^5}{15} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^4(\varphi) \cdot (2 + 4 \cdot t + 2 \cdot t^4)$$

Como

$$c = tg(c) - \frac{l^3}{3} \cdot tg^3(c) - \frac{l^5}{5} \cdot tg^5(c)$$

$$c = l \cdot \text{sen}(\varphi) + \frac{l^3}{3} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot (1 + 3 \cdot n^2 + 2n^4) + \frac{l^5}{15} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos^4(\varphi) \cdot (2 - t^2)$$

Si se desea la convergencia en función de las coordenadas planas, se obtiene reemplazando  $l$  por las coordenadas rectangulares

$$d = \frac{y}{N_1} \cdot t_1 \cdot \left[ 1 - \frac{y^2}{3 \cdot N_1^2} \cdot (1 + t_1^2 - n_1^2 - 2 \cdot n_1^4) + \frac{y^4}{N_1^4} \cdot \frac{(2 + 5 \cdot t_1^2 + 3 \cdot t_1^4)}{15} \right]$$

### Módulo de deformación.

Por tratarse de una proyección conforme, el módulo de deformación lineal o factor de escala varía de acuerdo a las coordenadas pero una vez fijadas, el módulo es el mismo en cualquier dirección.

De la (IX.2)

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(M \cdot d\varphi)^2 + (N \cdot \cos(\varphi) \cdot dl)^2} \\ m^2 &= \frac{(dy)^2 \cdot [1 + (dx/dy)^2]}{(dl)^2 \cdot N^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos(\varphi) \cdot dl} \right)^2 \right]} \\ m^2 &= \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 \cdot \frac{1 + (dx/dy)^2}{N^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos(\varphi) \cdot dl} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

Donde

$$1 + (dx/dy)^2 = 1 + tg^2(c) = \sec(c)$$

Para el paralelo

$$d\varphi/dl = 0$$

$$m = \frac{dy}{dl} \cdot \frac{1}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \sec(c)$$

Calculando la derivada de  $y$  respecto de  $l$  de la (X.21.b), sustituyendo el valor de  $c$ , se obtiene:

$$m = 1 + l^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot (1 + n^2) + \frac{l^4 \cdot \cos^4(\varphi)}{24} \cdot (5 - t^2 + 14 \cdot n^2 - 28 \cdot t^2 \cdot n^2)$$

Expresión en la cual  $l$  se introduce en radianes.

Si se desea conocer la deformación lineal en función de las coordenadas planas, se deduce:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2} + \frac{y^4}{24 \cdot R^4}$$

Donde:

$$R = \sqrt{M_1 \cdot N_1}$$

#### Deformaciones lineales.

Cuando se desea conocer la deformación de una distancia finita, tendiendo en cuenta que:

$$m = \frac{dl}{dL}$$

$$L = \int_o^l \frac{dl}{m}$$

O bien:

$$l = \int_o^L m \cdot dL$$

Donde  $L$  es la distancia sobre el elipsoide,  $l$  es la correspondiente en el plano y  $m$  es el módulo de deformación lineal, por lo tanto:

$$L = \int_o^l \left( 1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2} + \frac{y^4}{24 \cdot R^2} \right)^{-1} dl$$

Se desprecia el término de cuarto orden lo cual es aceptable hasta unos 3 grados del meridiano central.

$$L = \int_o^l \left( 1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2} \right)^{-1} dl$$

O bien desarrollando el binomio:

$$L = \int_o^l \left( 1 - \frac{y^2}{2 \cdot R^2} \right) dl$$

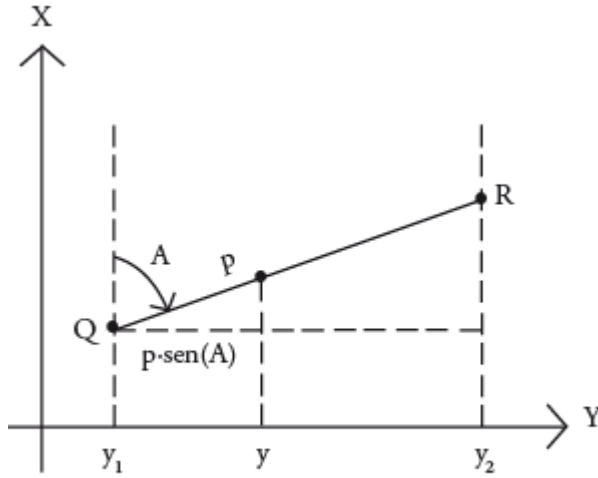


Fig. X.6

Sea  $p$  en la figura (X.6) la distancia del elemento  $dl$  a partir de  $Q$ , designando  $y_1$  ordenada del punto  $Q$  y por  $A$  ángulo de dirección o acimut de cuadrícula, se tiene que:

$$y = y_1 + p \cdot \text{sen}(A)$$

Por lo tanto:

$$L = \int_{p=0}^{p=l} \left( 1 - \frac{(y_1 + p \cdot \text{sen}(A))^2}{2 \cdot R^2} \right) dp$$

$$L = \int_{p=0}^{p=l} \left( 1 - \frac{y_1^2 + 2 \cdot y_1 p \cdot \text{sen}(A) + p^2 \cdot \text{sen}^2(A)}{2 \cdot R^2} \right) dp$$

$$L = p - \frac{y_1^2 \cdot p}{2 \cdot R^2} - \frac{2 \cdot y_1 \cdot p^2 \cdot \text{sen}(A)}{2 \cdot 2 \cdot R^2} - \frac{p^3 \cdot \text{sen}^2(A)}{6 \cdot R^2} \Big|_0^l$$

$$L = p \cdot \left[ 1 - \frac{y_1^2}{2 \cdot R^2} - \frac{y_1 \cdot p \cdot \text{sen}(A)}{2 \cdot R^2} - \frac{p^2 \cdot \text{sen}^2(A)}{6 \cdot R^2} \right] \Big|_0^l$$

$$L = l \cdot \left[ 1 - \frac{y_1^2}{2 \cdot R^2} - \frac{y_1 \cdot l \cdot \text{sen}(A)}{2 \cdot R^2} - \frac{l^2 \cdot \text{sen}^2(A)}{6 \cdot R^2} \right]$$

Teniendo en cuenta que

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta y = l \cdot \text{sen}(A)$$

$$L = l \cdot \left[ 1 - \frac{y_1^2}{2 \cdot R^2} - \frac{y_1 \cdot (y_2 - y_1)}{2 \cdot R^2} - \frac{(y_2 - y_1)^2}{6 \cdot R^2} \right]$$

Multiplicando y elevando al cuadrado el paréntesis y operando se llega:

$$L = l \cdot \left[ 1 - \frac{(y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)}{6 \cdot R^2} \right]$$

El módulo de deformación de una distancia finita será:

$$\frac{l}{L} = \left[ 1 - \frac{(y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)}{6 \cdot R^2} \right]^{-1}$$

O bien

$$\frac{l}{L} = 1 + \frac{(y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)}{6 \cdot R^2}$$

Donde:

$$R = \sqrt{M_1 \cdot N_1}$$

;

$$\varphi = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$

En algunos casos es suficiente con tomar un valor promedio de la coordenada  $y$ , entonces:

$$y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

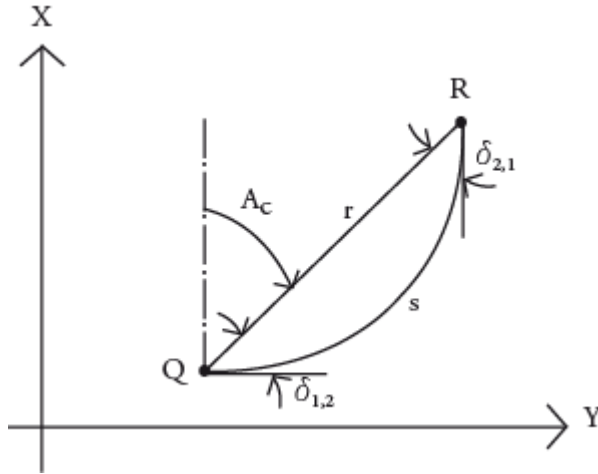
Reemplazando en (X.30.a)

$$\frac{l}{L} = 1 + \frac{y_m^2}{2 \cdot R^2}$$

(X.30.b)

### Corrección angular.

En las proyecciones conformes los ángulos y las direcciones se trasladan al elipsoide sin deformación pero la línea geodésica no queda representada por una recta sino por alguna curva.



La conformidad se cumple en las tangentes a la curva que representa a la línea geodésica. Si se mide un acimut en la carta respecto de la línea recta que une los puntos del plano, se debe introducir una corrección conocida como corrección del arco a la cuerda o corrección por curvatura de la representación de la línea geodésica sobre un plano.

Se llega a la siguiente expresión suficientemente aproximada para cualquier aplicación práctica:

$$\delta_{1,2} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (2 \cdot y_1 + y_2)}{6 \cdot M \cdot N}$$

$$\delta_{2,1} = \frac{(x_1 - x_2) \cdot (2 \cdot y_2 + y_1)}{6 \cdot M \cdot N}$$

El resultado de la corrección viene expresado en radianes.

Tomando un valor promedio de la coordenada  $y$ , se tiene:

$$\delta_{1,2} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (3 \cdot y_m)}{6 \cdot M \cdot N}$$

$$\delta_{1,2} = \frac{\Delta x \cdot y_m}{3 \cdot M \cdot N}$$

Donde es inmediato que:

$$\delta_{1,2} = -\delta_{2,1}$$

La distancia de la línea recta

que une los puntos debe ser corregida llamando a ésta  $r$  y a la imagen de la línea geodésica  $s$  se tiene que:

$$dr = ds \cdot \cos(\delta)$$

$$r = \int_0^s ds \cdot \cos(\delta)$$

$$dr = ds \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)$$

$$dr - ds = -\left(\frac{\delta^2}{2}\right) \cdot ds$$

La diferencia entre  $r$  y  $s$  es despreciable.

### **Proyección transversa de mercator. sistema u.t.m.**

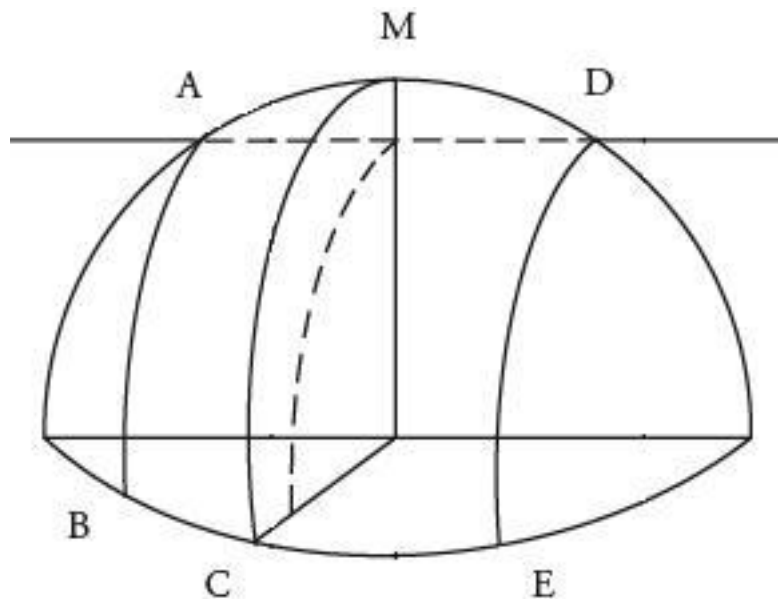
El sistema U.T.M. (Universal Transverse Mercator) de la proyección de Gauss fue recomendado por la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (IX Asamblea de Bruselas, 1951).

La proyección es cilíndrica transversal conforme; si es tangente al elipsoide se trata de la proyección Gauss-Kruger y si es secante, del sistema UTM.

Ambas proyecciones tienen mucho en común, sólo se diferencian en el factor de escala, el ancho y numeración de las fajas y el origen de la coordenada  $x$ .



### Especificaciones.



La proyección ordinaria es la de Gauss o transversa de Mercator. En la proyección Trasversa Universal de Mercator, el cilindro envolvente sufre una reducción y se torna secante cortando al elipsoide según dos líneas AB y DE de la figura XI.1; la línea MC representa el meridiano. Los círculos menores paralelos al meridiano central aparecen representados en su verdadera magnitud, no así el meridiano central que aparecerá representado con la misma longitud que los círculos menores, es decir se reduce.

Sobre los círculos menores de sedancia el módulo de deformación o factor de escala es igual a la unidad; en el meridiano central será un valor menor que uno. Al módulo de deformación en el meridiano central se lo denomina factor de reducción de escala.

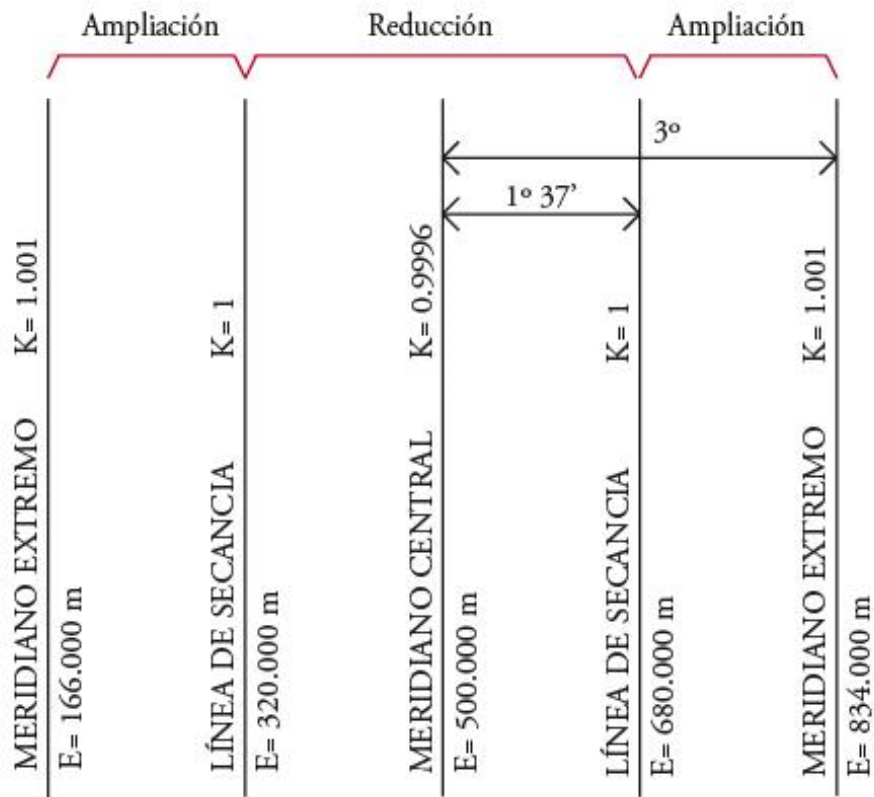
En el sistema UTM el factor de escala en el meridiano central se establece como:

$$k_0 = 1 - \frac{1}{2500} = 0.9996$$

(XI.1)

Es decir, los valores de las distancias medidas sobre el meridiano aparecen reducidas según  $k_0$ .

Este factor de escala equivale a ubicar los círculos menores de sedancia en una longitud de 1 37' 14" a ambos lados del meridiano central. Sobre esas líneas el factor de escala se hace igual a uno y más allá de ellas supera este valor.



En la figura XI.2 se ilustra lo anterior. Existen dos zonas: una de ampliación y otra de reducción.

En el sistema UTM los husos son de 6 de amplitud, 3 a cada lado del meridiano central. La ampliación de la faja meridiana respecto de Gauss-Kruger, se hace compatible con los módulos de deformación en los extremos por haber introducido en el meridiano central el factor de reducción  $k_0$ .

Las líneas de tangencia se encuentran situadas a unos 180 km a ambos lados del meridiano central, y los meridianos extremos a unos 334 km.

Las fajas de 6 de amplitud están limitados por los meridianos múltiplos de 6 coincidiendo con los husos de la carta mundial al millonésimo.

Cada sistema debe ser prolongado  $30'$  sobre los contiguos, es decir los puntos pertenecientes a cada faja tienen coordenadas en la propia y en la contigua, creándose así una zona de superposición de 1 de ancho.

No son usadas las letras  $X$  e  $Y$  para designar las coordenadas, sino  $N$  (norte) y  $E$  (este).

El origen de coordenadas planas en cada huso es el cruce del ecuador con el

meridiano central. La coordenada  $N$  se mide a partir del ecuador pero para el hemisferio sur se las aumenta en 10.000.000 m evitando valores negativos.

La coordenada  $E$  se mide a partir del meridiano central, positiva al Este y negativa al Oeste. Para evitar valores negativos de  $E$  se adjudica al meridiano central la coordenada 500.000 m.

El número de faja es el mismo que en la Carta Internacional al millonésimo, éste es de 1 a 60 a contar del antimeridiano de Greenwich.

El meridiano central de 177 (W) es la zona 1, el 171 (W) la zona 2 y así cada 6.

La coordenada  $E$  para las líneas de sedancia son de acuerdo a lo anterior son 680.000 m y 320.000 m al este y al oeste del meridiano central respectivamente; y las coordenadas de los meridianos de borde de faja son 834.000 m y 166.000 m al este y al oeste.

Las correspondencias entre los números de zona de las coordenadas UTM y el número de fajas de proyección Gauss-Kruger en la República Argentina de acuerdo a las convenciones adoptadas son:

Meridiano Central	Zona UTM	Faja Gauss-Kruger
-51	22	-
-54		7
-57	21	6
-60		5
-63	20	4
-66		3
-69	19	2
-72		1
-75	18	-

En el sistema UTM el número de zona puede determinarse por medio de la siguiente expresión:

$$ZONA = \frac{(183 + \lambda_0)}{6}$$

Donde  $\lambda_0$  es la longitud del meridiano central y se debe introducir con su signo.

El número de faja de la proyección Gauss-Kruger para el territorio argentino se puede encontrar por medio de:

$$FAJA = \frac{(75 + \lambda_0)}{3}$$

### Transformación de coordenadas geográficas en planas.

El planteo de las expresiones de las coordenadas UTM es similar al de las Gauss-Kruger, y es a través de las funciones de variable compleja:

$$x + iy = f(q + il)$$

(XI.4)

Considerando puntos en el meridiano central

$$x = f(q) = B$$

Donde  $B$  es el arco de meridiano elipsóidico que va del ecuador hasta la latitud considerada como se determinó en la expresión (VIII.12).

Se desarrolla en serie de Taylor tomando  $l$  como incremento de la misma forma que en la proyección Gauss-Kruger determinándose expresiones similares con la diferencia que en el meridiano central se cuentan las coordenadas a partir del ecuador.

Pero para reducir las deformaciones y poder ampliar las zonas, se afectó al meridiano central según un factor de reducción  $k_0$ , de manera tal que las distancias sobre el meridiano central aparecen reducidas por el factor de escala, es decir que el arco de meridiano del ecuador a la latitud en consideración habrá que afectarlo por este factor

$$f(q) = k_0 \cdot B$$

(XI.5)

la imagen geométrica de la proyección con este artificio del factor de escala, se obtiene considerando un cilindro secante en lugar de tangente según dos líneas que se representan en su verdadera magnitud. En lugar de una línea sin deformación se obtienen dos, simétricas respecto del meridiano central.

Las expresiones de las coordenadas UTM son similares a las de Gauss con las siguientes modificaciones:

$$\begin{aligned} N = k_0 \cdot [ & B + \frac{l^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t}{2} + \frac{l^4 \cdot \cos^4(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot n^2 + 4 \cdot n^4)}{24} + \\ & + \frac{l^6 \cdot \cos^6(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4 + 270 \cdot n^2 - 330 \cdot t^2 \cdot n^2)}{720} ] \\ E = 500.000 + k_0 \cdot [ & l \cdot \cos(\varphi) \cdot N + \frac{l^3 \cdot \cos^3(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (1 - t^2 + n^2)}{6} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{l^5 \cdot \cos^5(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + 14 \cdot n^2 - 58 \cdot t^2 \cdot n^2)}{120}]$$

En el hemisferio sur se le suma la cantidad de 10.000.000 m a la coordenada  $N$ .

En el problema recíproco, es decir la transformación de coordenadas planas a geográficas se computarán con las mismas expresiones que las de Gauss-Kruger con la diferencia de que el valor de  $y$  se tomará como:

$$y = \frac{(E - 500.000)}{k_0}$$

Este mismo valor de  $y$  se adoptará para el círculo de la convergencia meridiana en la expresión (X.28.b).

El módulo de deformación lineal se calculará introduciendo el valor de

$$k_0$$

:

$$m = k_0 \cdot \left( 1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2} + \frac{y^4}{24 \cdot R^4} \right)$$

En cuanto a la deformación de distintas finitas la consideración es la misma de modo que:

$$\frac{l}{L} = k_0 \cdot \left( 1 + \frac{y_1^2 + y^1 \cdot y^2 + y_2^2}{6 \cdot R^2} \right)$$

La corrección el arco a la cuerda se obtiene de las (X.41.a) o (X.41.b) pero teniendo en cuenta la (XI.7) en las (XI.8) y (XI.9); también se introduce el valor de  $y$  de la (XI.7).

### Una expresión para ambas proyecciones.

En las siguientes expresiones se debe tener en cuenta el signo de la latitud y longitud, y son válidas para el hemisferio sur.

$$X = Q + k_0 \cdot \left[ B + \frac{l^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t}{2} + \frac{l^4 \cdot \cos^4(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot n^2 + 4 \cdot n^4)}{24} + \right. \\ \left. + \frac{l^6 \cdot \cos^6(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4 + 270 \cdot n^2 - 330 \cdot t^2 \cdot n^2)}{720} \right]$$

$$Y = F + 500.000 + k_0 \cdot [l \cdot \cos(\varphi) \cdot N + \frac{l^3 \cdot \cos^3(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (1 - t^2 + n^2)}{6} + \frac{l^5 \cdot \cos^5(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + 14 \cdot n^2 - 58 \cdot t^2 \cdot n^2)}{120}]$$

Donde:

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}(\varphi) \\ n^2 &= e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \\ e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \\ N &= \frac{a}{[1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)]^{1/2}} \\ l &= \lambda - \lambda_0 \end{aligned}$$

(expresada en radianes)

$$\lambda_0$$

es la longitud del meridiano central de la faja Gauss-Kruger o zona UTM en la que se proyectan los puntos.

$B$  es el arco de meridiano desde el ecuador hasta la latitud considerada, por la expresión (VIII.12).

$$B = \alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + \gamma \cdot \sin(4 \cdot \varphi) + \delta \cdot \sin(6 \cdot \varphi) + \varepsilon \cdot \sin(8 \cdot \varphi)$$

En el caso de Gauss-Kruger la coordenada por el meridiano central se mide a partir del polo sur; para que ésto se cumpla en la expresión (XI.10.a) se hace:

$$Q = \frac{a \cdot \pi}{2}$$

En el caso de coordenadas UTM para el hemisferio sur, por lo anteriormente visto, se tiene que:

$$Q = 10.000.000m$$

El factor de escala:

$$k_0 = 1$$

(Gauss-Kruger)

$$k_0 = 0.9996$$

(U.T.M.)

$F$  se refiere al número de faja, introducido en los millones de la coordenada  $Y$

$$F = \left[ \frac{(75 + \lambda_0)}{3} \right] \cdot 10^6$$

(Gauss-Kruger)

$$F = 0$$

(U.T.M.)

En la proyección UTM debe agregarse como información el valor de la zona, ésto es:

$$ZONA = \frac{183 + \lambda_0}{6}$$

En la proyección Gauss-Kruger, los resultados de las coordenadas (XI.10.a) y (XI.10.b) se expresan como  $X$  e  $Y$ . En el sistema UTM como  $N$  en lugar de  $X$ , y  $E$  en lugar de  $Y$ .

En ambas proyecciones, para la transformación son necesarias como datos la latitud y longitud de los puntos con cuatro decimales, los parámetros del elipsoide de referencia, longitud del meridiano central.

En la transformación de coordenadas planas en coordenadas geográficas se puede escribir:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y^2}{2 \cdot M_1 \cdot N_1} \cdot t_1 \cdot \left[ 1 - \frac{y^2}{12 \cdot N_1^2} \cdot (5 + 3 \cdot t_1^2 + n_1^2 - 9 \cdot t_1^2 \cdot n_1^2) + \frac{y^4}{360 \cdot N_1^4} \cdot (61 + 90 \cdot t_1^2 + 45 \cdot t_1^4) \right]$$

(XI.11.a)

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{y}{N_1 \cdot \cos(\varphi_1)} \cdot \left[ 1 - \frac{y^2}{6 \cdot N_1^2} \cdot (1 + 2 \cdot t_1^2 + n_1^2) + \frac{y^4}{120 \cdot N_1^4} \cdot (5 + 28 \cdot t_1^2 + 24 \cdot t_1^4 + 6 \cdot n_1^2 - 8 \cdot n_1^2 \cdot t_1^2) \right]$$

(XI.11.b)

Donde:

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{[1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)]^{3/2}}$$

$$y = \frac{(Y - F - 500.000)}{k_0}$$

$$NF = \frac{F}{10^6}$$

(número de faja en Gauss-Kruger)

$$\lambda_0 = 3 \cdot NF - 75$$

(para Gauss-Kruger)

$$\lambda_0 = 6 \cdot ZONA - 183$$

(para UTM)

es el arco de meridiano correspondiente a  $x$  siendo:

$$x = \frac{X - Q}{k_0}$$

$$Q = \frac{\alpha \cdot \pi}{2}$$

(para Gauss-Kruger)

$$Q = 10.000.000m$$

(para UTM)

El valor de  $\varphi_1$  se halla con las aproximaciones sucesivas vistas en (X.3).

Los resultados de las (XI.11) están expresados en radianes; notar que tanto

$$\varphi_1$$

y

$$\lambda_0$$

deben ser introducidos en radianes.

Para la transformación son necesarias como dato X o N, Y o E, los parámetros del elipsoide de referencia.