



UNIVERSIDADE DO MINHO

LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

Investigação Operacional
Trabalho Prático 2

Bernardo Saraiva (A93189)
Daniel Azevedo (A93324)
José Gonçalves (A93204)
Pedro Araújo (A70699)
Rui Moreira (A93232)

9 de agosto de 2022

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 3 |
| 2 | Alterações nos clientes e tempos de deslocação | 3 |
| 2.1 | Grafo de compatibilidades | 3 |
| 3 | Formulação do Problema | 4 |
| 3.1 | Breve descrição do problema | 4 |
| 3.2 | Objetivo | 5 |
| 3.3 | Explicação da Rede | 5 |
| 3.4 | Explicação da influência dos valores de fluxo | 5 |
| 3.5 | Explicação dos valores dos custos e capacidades dos arcos | 6 |
| 3.6 | Explicação dos valores de ofertas e consumos | 6 |
| 3.7 | Incongruência verificada no modelo | 6 |
| 4 | Modelo de problema de fluxos em rede | 8 |
| 5 | Ficheiro de input | 9 |
| 6 | Ficheiro de output | 9 |
| 7 | Solução Ótima | 10 |
| 8 | Validação do modelo | 11 |
| 9 | Conclusão | 12 |

1 Introdução

O presente relatório visa expor a solução obtida para o problema de atribuição de serviços a diversas equipas. A solução propõe-se, deste modo, a minimizar o custo total da operação, sendo a sua formulação apresentada no decorrer do relatório.

Recorrendo ao uso do software de otimização *Relax4*, foi possível descobrir o número de equipas de modo a ser atingido o objetivo.

2 Alterações nos clientes e tempos de deslocação

De maneira a calcular todos os percursos possíveis a serem percorridos pelas equipas, foi necessário retirar os clientes B e D com base no cálculo realizado através do maior número mecanográfico, sendo este o **93324**, tendo-se também obtido $a_1 = a_8 = 4$, como se pode observar na Figura 1.

| j | cliente | a_j (1/4 hora) | a_j (hora do serviço) | |
|--------------|--------------------|------------------|-------------------------|-------|
| 1 | Ana | a_1 4 | depende de ABCDE | 10:00 |
| 2 | Beatriz | 7 | 10:45 | |
| 3 | Carlos | 4 | 10:00 | |
| 4 | Diogo | 2 | 09:30 | |
| 5 | Eduardo | 10 | 11:30 | |
| 6 | Francisca | 6 | 10:30 | |
| 7 | Gonçalo | 9 | 11:15 | |
| 8 | Helena | a_8 4 | depende de ABCDE | 10:00 |
| 9 | Inês | 2 | 09:30 | |
| 10 | José | 5 | 10:15 | |

Figura 1: Novo agendamento de serviços

2.1 Grafo de compatibilidades

Após a realização do cálculo de todos os caminhos possíveis e efetuando a verificação da hora de serviço obteve-se o seguinte grafo de compatibilidades, como é possível observar na Figura 2.

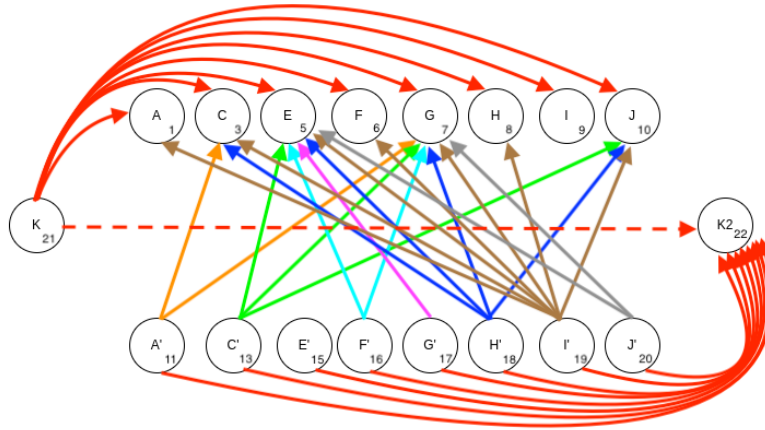


Figura 2: Grafo de compatibilidade de acordo com as instruções

Legenda:

- **K** corresponde ao nodo de saída de Keleirós
- **K2** corresponde ao nodo de regresso a Keleirós
- **A,C,E,F,G,H,I,J** correspondem aos nodos de entrada dos vários clientes
- **A',C',E',F',G',H',I',J'** correspondem aos nodos de saída dos vários clientes

3 Formulação do Problema

3.1 Breve descrição do problema

O problema em causa consiste na distribuição e quantificação das equipas necessárias de modo a satisfazer todos os clientes, distribuídos geograficamente, cumprindo assim todos os serviços agendados. As deslocações entre clientes acarretam custos a nível temporal e espacial, como tal, a solução ótima calculada pelo modelo teve em consideração a minimização não só deste tipo de custo mas também do número de equipas necessário para realizar todos os serviços.

Posto isto, inferência-se que se está perante um problema classificado como *fixed schedule*, como tal deve ser aplicado o problema de maximização de fluxo para o solucionar.

No problema proposto, cada cliente tem associada uma hora de início, bem como um tempo de deslocação entre nodos. Assim, é possível decidir que serviços são

passíveis de se realizar tendo em conta o nodo em que a equipa se encontra. Nestas situações a expressão seguinte é verificada $td + ha \leq hs$, onde:

- **td** - tempo de deslocação;
- **ha** - hora atual;
- **hs** - hora de serviço.

De modo a satisfazer todos os clientes é necessário alocar equipas em diferentes percursos disjuntos, com o intuito de realizar todos os serviços. As equipas partem do nodo inicial às 9:00h e devem regressar a este no final do trabalho.

Posto isto, com o objetivo de minimizar os custos de deslocação, consegue-se reduzir o número de equipas através da decomposição do grafo num conjunto mínimo de caminhos.

3.2 Objetivo

O objetivo do presente problema é determinar, com auxílio de software, o número de equipas necessárias para realizar os diversos serviços propondo-se a minimizar o custo total de toda a operação

3.3 Explicação da Rede

O modelo produzido para obter a solução do problema consiste na representação de uma rede através de um grafo. Este possui 2 vértices por cliente com o intuito de representar a entrada e saída, assim é possível definir corretamente os valores de fluxo. Por outro lado, Keleirós também é representado através de 2 nodos de forma a representar o nodo inicial e final. Cada arco neste grafo representa as possibilidades de serviços a realizar após cada nodo, respeitando as restrições temporais previamente referidas.

3.4 Explicação da influência dos valores de fluxo

Os valores dos fluxos nos arcos, numa solução, traduzem-se em decisões a implementar no sistema real. Se, por exemplo, o arco $A \rightarrow B$ tiver o valor 1, significa que esse arco foi utilizado, ou seja, uma equipa vai fazer o caminho do cliente A para o B. Isto em série, indica qual o caminho que a equipa, ou equipas, devem percorrer.

3.5 Explicação dos valores dos custos e capacidades dos arcos

Em relação aos custos dos arcos, estes correspondem ao custo de deslocação entre os diferentes nodos. As suas capacidades tomam o valor de 1 ou de 1000, dependendo se o arco representa a ligação entre clientes ou se representa a ligação de Keleirós (entrada) para Keleirós (saída), respetivamente. O valor 1 é obtido dado que cada arco pode ser utilizado apenas uma vez, já que após o serviço ser realizado não existe a necessidade de visitar o nodo novamente. Quanto ao valor 1000, este poderá ser utilizado indefinidamente dado que um número arbitrário de equipas podem não ser necessárias. Para além disto, nos arcos cujo destino é Keleirós é necessário aumentar o seu custo em uma unidade, de modo a representar o custo fixo da operação como enunciado no problema.

3.6 Explicação dos valores de ofertas e consumos

No nodo inicial, dado que este representa a saída das equipas o valor de fluxo deverá corresponder a 8 e de forma simétrica a -8 no nodo que representa o final do percurso. O número máximo de equipas para a realização do serviço corresponde ao número total de nodos, sendo este 8. Se isto se verifica, todos os caminhos efetuados pelas equipas são disjuntos. Quanto aos nodos que representam clientes, todos devem possuir o valor de fluxo 1 no nodo que representa a saída e -1 nos de entrada, de forma a totalizar um fluxo neutro, uma vez que, sempre que uma equipa entra para realizar o serviço também deve sair para poder efetuar os restantes.

3.7 Incongruência verificada no modelo

No modelo em questão, existem 2 clientes à mesma hora, o Carlos e a Helena. Por este motivo ambos irão possuir as mesmas arestas, ora isto resultará num problema que o modelo definido tratará com alguma incongruência. Como as restrições apenas dizem respeito ao fluxo de cada nodo e não à origem dos arcos de entrada e saída, é portanto possível a criação de um ciclo na solução, já que, como no problema não é considerada a duração do serviço e o custo Carlos-Helena é 0, após ser efetuado o serviço, por exemplo no cliente Carlos é possível realizar o atendimento também na Helena. Deste modo, uma solução admissível seria por exemplo visitar o nodo Carlos através de Helena, e de seguida visitar Helena através do Carlos, como verificado na Figura 3.

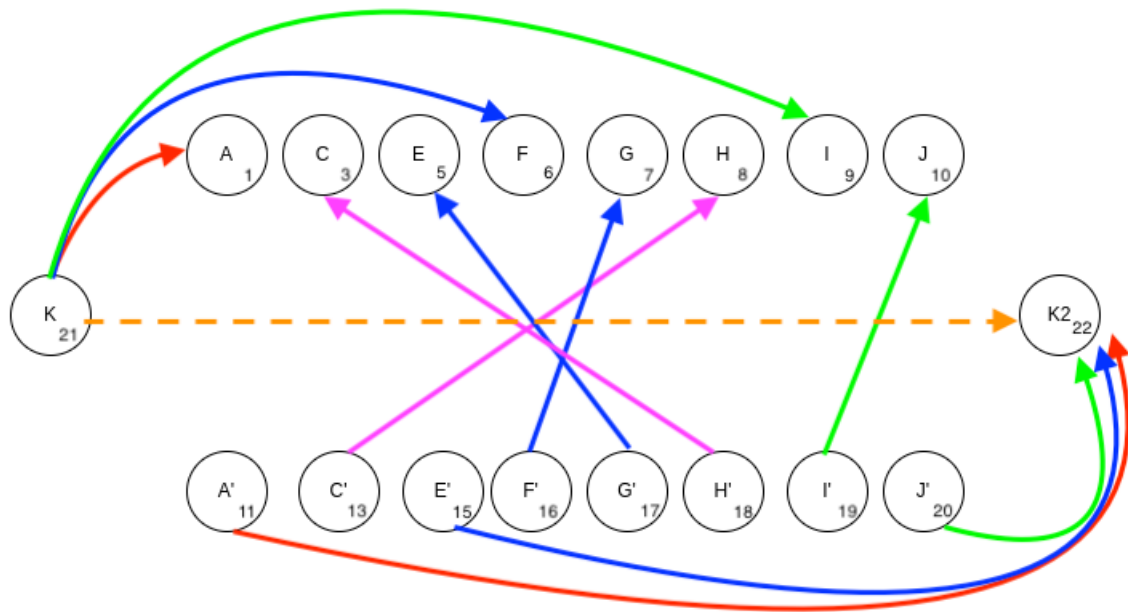


Figura 3: Grafo com sub-circuito

Esta situação não corresponde a uma solução válida, uma vez que o sub-circuito criado não sai nem regressa a Keleirós. Para resolver esta situação foi necessário atualizar o grafo de compatibilidades criado inicialmente removendo a aresta entre C' e H. Poderia ter sido removida também a aresta entre H' e C, no entanto, como esta possui um custo menor, é preferível manter a mesma tornando assim o modelo mais eficiente. O grafo resultante desta alteração encontra-se na Figura 2.

4 Modelo de problema de fluxos em rede

De forma a modelar o fluxo de rede, é de extrema importância analisar:

- custo unitário do fluxo $c_{ij}(i, j), \forall (i, j) \in A$
- capacidade u_{ij} do arco $(i, j), \forall (i, j) \in A$
- a oferta e a procura em cada vértice $b_j, \forall j \in V$

Para tal, apresenta-se de seguida o quadro do problema de transportes com toda a informação indicada. Onde cada linha e coluna correspondem a um nodo, de forma a representar nas várias células todos os arcos e deste modo representar os seus custos. Nas linhas são representados apenas os nodos que possuem oferta e nas colunas, por oposição, os nodos que possuem procura. De modo a apresentar toda a informação necessária, são acrescentadas uma linha e uma coluna de modo a representar o valor da oferta/procura de cada nodo, sendo assim este valor corresponderá à quantidade de arcos utilizados em determinada linha.

| | A | C | E | F | G | H | I | J | K2 | |
|----|---|---|---|----|----|---|---|----|----|---|
| K | 1 | 2 | 6 | 11 | 9 | 9 | 9 | 10 | 1 | 8 |
| A' | | 5 | | | 7 | | | | 2 | 1 |
| C' | | | 6 | | 6 | | | 6 | 3 | 1 |
| E' | | | | | | | | | 7 | 1 |
| F' | | | 6 | | 5 | | | | 12 | 1 |
| G' | | | 4 | | | | | | 10 | 1 |
| H' | | 0 | 6 | | 10 | | | 6 | 10 | 1 |
| I' | 0 | 5 | 5 | 10 | 7 | 5 | | 7 | 10 | 1 |
| J' | | | 7 | | 5 | | | | 11 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 | |

Tabela 1: Quadro do problema de transportes

5 Ficheiro de input

```
1 22
2 38
3 21 22 0 1000
4 21 1 1 1
5 21 3 2 1
6 21 5 6 1
7 21 6 11 1
8 21 7 9 1
9 21 8 9 1
10 21 9 9 1
11 21 10 10 1
12 11 5 5 1
13 11 7 7 1
14 11 22 2 1
15 13 5 6 1
16 13 7 6 1
17 13 10 6 1
18 13 22 3 1
19 15 22 7 1
20 16 5 6 1
21 16 7 5 1
22 16 22 12 1
23 17 5 4 1
24 17 22 10 1
25 18 3 0 1
26 18 5 6 1
27 18 7 10 1
28 18 10 6 1
29 18 22 10 1
30 19 1 0 1
31 19 3 5 1
32 19 5 5 1
33 19 6 10 1
34 19 7 7 1
35 19 8 5 1
36 19 10 7 1
37 19 22 10 1
38 20 5 7 1
39 20 7 5 1
40 20 22 11 1
41 -1
42 0
43 -1
44 0
45 -1
46 -1
47 -1
48 -1
49 -1
50 -1
51 1
52 0
53 1
54 0
55 1
56 1
57 1
58 1
59 1
60 1
61 8
62 -8
```

Figura 4: Ficheiro de input introduzido no Relax4

6 Ficheiro de output

Através da análise do ficheiro de *output*, Figura 5, é possível verificar que se encontram representadas as ligação pertencentes à solução ótima, assim como o custo ótimo de se efetuar todos os serviços da operação.

```

-
s 61.
f 21 22 5
f 21 1 1
f 21 3 0
f 21 5 0
f 21 6 1
f 21 7 0
f 21 8 0
f 21 9 1
f 21 10 0
f 11 5 0
f 11 7 0
f 11 22 1
f 13 5 0
f 13 7 0
f 13 10 1
f 13 22 0
f 15 22 1
f 16 5 0
f 16 7 1
f 16 22 0
f 17 5 1
f 17 22 0
f 18 3 1
f 18 5 0
f 18 7 0
f 18 10 0
f 18 22 0
f 19 1 0
f 19 3 0
f 19 5 0
f 19 6 0
f 19 7 0
f 19 8 1
f 19 10 0
f 19 22 0
f 20 5 0
f 20 7 0
f 20 22 1

```

Figura 5: Ficheiro de output fornecido pelo *Relax4*

7 Solução Ótima

Por interpretação do ficheiro de *output*, produzido pelo *software* de otimização, é possível verificar que a solução ótima para o problema formulado é igual a **61**.

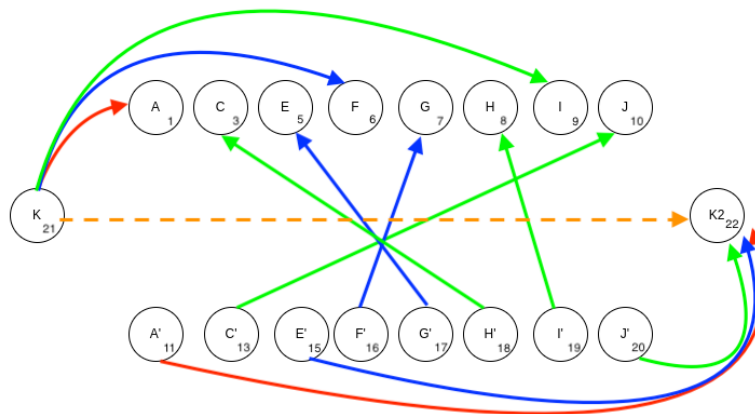


Figura 6: Grafo de compatibilidade com a solução

Na Figura 6, pode-se observar o respetivo grafo de compatibilidades com a solução obtida. De notar que a solução ótima obtida foram 3 equipas: equipa vermelha, verde e azul. As restantes 5 equipas estão representadas pela seta a tracejado a laranja, ou seja, permaneceram na sede da empresa em Keleirós.

8 Validação do modelo

De modo a validar o modelo obtido, é possível analisar o ficheiro obtido e os seus resultados, sendo que se desenvolveu a seguinte tabela, na qual se analisa o fluxo de entrada e saída.

| Nodo | Fluxo espectável | Fluxo real | Valor Lógico |
|------|------------------|------------|--------------|
| 1 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 2 | 0 | 0 | Verdadeiro |
| 3 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 4 | 0 | 0 | Verdadeiro |
| 5 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 6 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 7 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 8 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 9 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 10 | -1 | -1 | Verdadeiro |
| 21 | 8 | 8 | Verdadeiro |

| Nodo | Fluxo espectável | Fluxo real | Valor Lógico |
|------|------------------|------------|--------------|
| 11 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 12 | 0 | 0 | Verdadeiro |
| 13 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 14 | 0 | 0 | Verdadeiro |
| 15 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 16 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 17 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 18 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 19 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 20 | 1 | 1 | Verdadeiro |
| 22 | -8 | -8 | Verdadeiro |

Figura 7: Tabela

Deste modo, pela análise da Tabela 7 é possível verificar que, para cada nodo,

se verifica as restrições que foram escritas no ficheiro de input, tal como é possível verificar na Figura 4. Assim, e uma vez que todas as linhas verificam a igualdade, pode-se concluir que o a solução desenvolvida é válida num contexto de *Fixed Schedule*.

De seguida, demonstra-se o plano de trabalhos das equipas obtidas na solução, verificando que se cumprem os requisitos temporais para a realização do serviço a cada cliente.

| | Partida | Tempo Deslocação | Chegada | Hora Serviço | Veracidade | Custo Deslocação |
|-----------------------|---------|------------------|---------|--------------|------------|------------------|
| $K \rightarrow A$ | 09:00 | [KA]:1/4hora | 9:15 | 10:00 | V | 1 |
| $A \rightarrow K$ | 10:00 | [AK]:1/4hora | 10:15 | | V | $2(1+1)$ |
| Custo operação | | | | | | 3 |

Tabela 2: Plano da Equipa Vermelha

| | Partida | Tempo Deslocação | Chegada | Hora Serviço | Veracidade | Custo Deslocação |
|-----------------------|---------|------------------|---------|--------------|------------|------------------|
| $K \rightarrow I$ | 9:00 | [KI]:2/4hora | 9:30 | 9:30 | V | 9 |
| $I \rightarrow H$ | 09:30 | [IH]:1/4hora | 09:45 | 10:00 | V | 5 |
| $H \rightarrow C$ | 10:00 | [HC]:0/4hora | 10:00 | 10:00 | V | 0 |
| $C \rightarrow J$ | 10:00 | [CJ]:1/4hora | 10:15 | 10:15 | V | 6 |
| $J \rightarrow K$ | 10:15 | [JK]:4/4hora | 11:15 | | V | $11(10+1)$ |
| Custo Operação | | | | | | 31 |

Tabela 3: Plano da Equipa Verde

| | Partida | Tempo Deslocação | Chegada | Hora Serviço | Veracidade | Custo Deslocação |
|-----------------------|---------|------------------|---------|--------------|------------|------------------|
| $K \rightarrow F$ | 09:00 | [KF]:4/4hora | 10:00 | 10:30 | V | 11 |
| $F \rightarrow G$ | 10:30 | [FG]:2/4hora | 11:00 | 11:15 | V | 5 |
| $G \rightarrow E$ | 11:15 | [GE]:1/4hora | 11:30 | 11:30 | V | 4 |
| $E \rightarrow K$ | 11:30 | [EK]:2/4hora | 12:00 | | V | $7(6+1)$ |
| Custo Operação | | | | | | 27 |

Tabela 4: Plano da Equipa Azul

Ao somar o custo de operações das 3 equipas, $3 + 31 + 27 = 61$, pode-se verificar que se obteve o mesmo valor que o ficheiro de output, presente na Figura 5.

9 Conclusão

De acordo com o enunciado apresentado, o presente relatório delineou os passos necessários de modo a encontrar soluções adequadas que permitissem minimizar os custos da prestação de serviços aos clientes. Tal foi possível com recurso ao *software* de otimização *Relax4*.

O trabalho desenvolvido consolidou os conhecimentos adquiridos ao longo do semestre na unidade curricular Investigação Operacional, tendo ajudado em especial no desenvolvimento da capacidade de análise, criação e validação de sistemas assim como na interpretação das soluções obtidas. Foi assim possível cumprir todos os objectivos propostos.