第2章

布林代數

2.1 簡介

- **布林代數**（Boolean algebra）是研究數位系統的邏輯設計所需的基本數學工具。喬治．布林（George Boole）在1847年推演出布林代數，用來解決數學邏輯上的問題。布林代數應用在許多方面，包括集合理論和數學邏輯，但是本書僅限於它在交換電路的應用。

2.1 簡介

- 我們將用布林變數，如X 或Y，來代表交換電路的輸入或輸出，假設這些變數只能取兩個相異的值其中之一，符號「0」和「1」用來代表這兩個相異值。因此，若X是一個布林（交換）變數，則$X = 0$ 或$X = 1$。
- 應用在布林代數的符號「0」和「1」不是數值，它們代表邏輯電路的兩種狀態，是一個交換變數的兩種值。在邏輯閘電路中，符號0（一般）對應到低電壓，且符號1 對應到高電壓。在交換電路中，符號0（通常）代表開關開路，符號1 代表閉路。一般而言，在任意的二進位數字系統中，0 和1用來表示這兩種狀態。

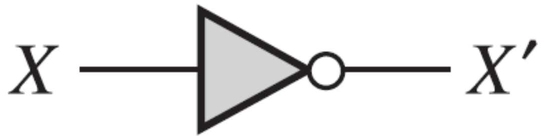
2.2 基本運算

- 布林代數或交換代數的基本運算為AND、OR和補數〔或反相（inverse）〕。
  - 補數

$$0' = 1 \quad 且 \quad 1' = 0$$

$$X' = 1 \text{ 若 } X = 0 \quad 且 \quad X' = 0 \text{ 若 } X = 1$$

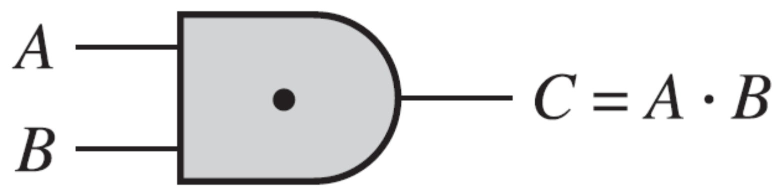
  - 反相器



2.2 基本運算

A	B	$C = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 左邊真值表定義的功能稱為AND，用代數的形式寫成$C = A \cdot B$。其中「$\cdot$」符號常被省略，所以通常寫成AB而非$A \cdot B$。AND運算也稱為邏輯（布林）乘法。



2.3 布林代數式和真值表

- 布林代數式之運算順序：括弧→補數→AND→OR
- 每一個代數式都直接對應到一個邏輯閘電路：

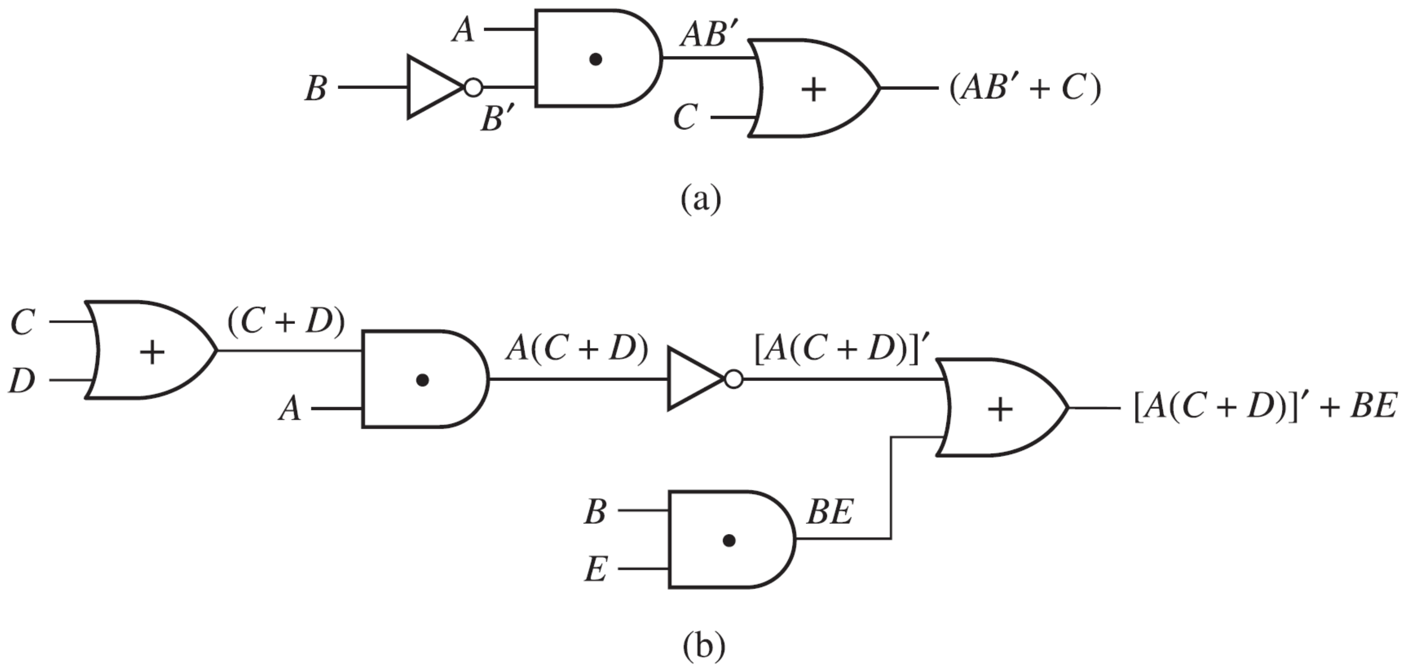
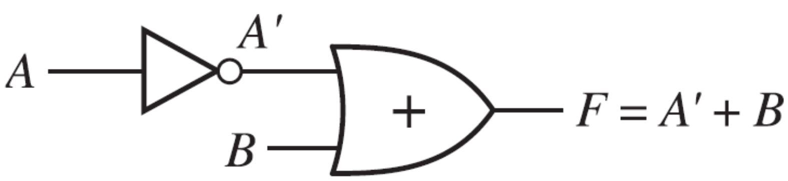


圖 2-1 (2-1) 式和 (2-2) 式的電路圖

真值表(truth table)

- $F = A' + B$



(a)

(b)

A	B	A'	$F = A' + B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

圖 2-2 兩個輸入的電路和真值表

真值表(truth table)

❖ $AB' + C = (A + C)(B' + C)$ (2-3)

表 2-1

A	B	C	B'	AB'	$AB' + C$	$A + C$	$B' + C$	$(A + C)(B' + C)$
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1

2.4 基本定理

❖ **0 和 1 的運算**：

$$X + 0 = X \qquad (2\text{-}4) \qquad\qquad X \cdot 1 = X \qquad (2\text{-}4D)$$

$$X + 1 = 1 \qquad (2\text{-}5) \qquad\qquad X \cdot 0 = 0 \qquad (2\text{-}5D)$$

❖ **同體率**（idempotent laws）：

$$X + X = X \qquad (2\text{-}6) \qquad\qquad X \cdot X = X \qquad (2\text{-}6D)$$

2.4 基本定理

❖ 摺疊率（involution laws）：

$$(X')' = X \qquad (2\text{-}7)$$

❖ 互補率（laws of complementarity）：

$$X + X' = 1 \qquad (2\text{-}8) \qquad\qquad X \cdot X' = 0 \qquad (2\text{-}8D)$$

2.5 交換律、結合律、分配律與笛摩根定理

❖ 交換律

$$XY = YX \qquad (2\text{-}9) \qquad\qquad X + Y = Y + X \qquad (2\text{-}9D)$$

❖ 結合律

$$(XY)Z = X(YZ) = XYZ \qquad (2\text{-}10)$$

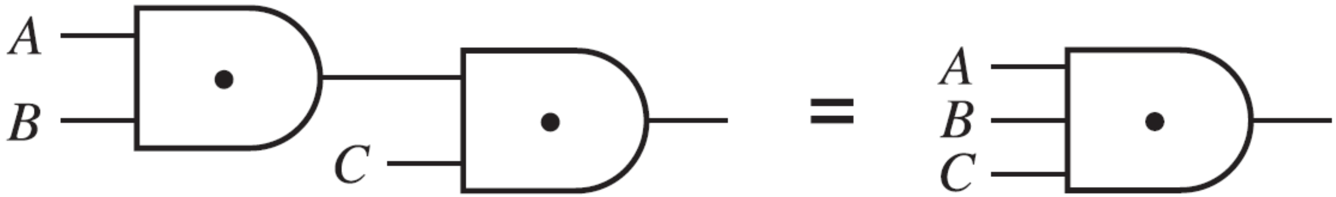
$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z \qquad (2\text{-}10D)$$

2.5 交換律、結合律、分配律與笛摩根定理

表 2-2　AND 結合律的證明

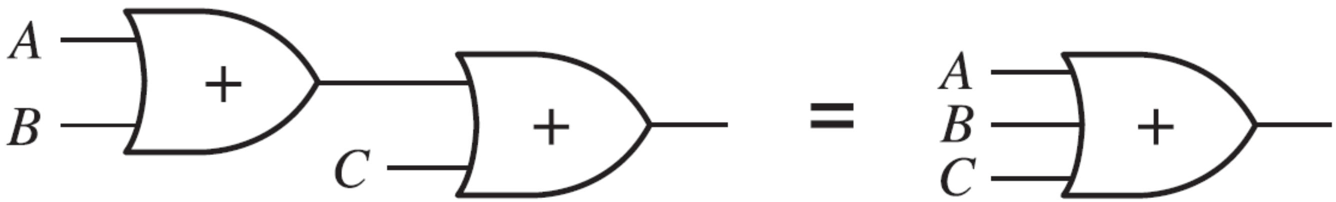
X	Y	Z	XY	YZ	$(XY)Z$	$X(YZ)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

2.5 交換律、結合律、分配律與笛摩根定理



$(AB)C = ABC$

(a)



$(A + B) + C = A + B + C$

(b)

圖 2-3 AND 和 OR 的結合律

2.5 交換律、結合律、分配律與笛摩根定理

❖ 分配律

$$X(Y+Z) = XY + XZ \qquad (2\text{-}11)$$

$$X + YZ = (X+Y)(X+Z) \qquad (2\text{-}11D)$$

$= (X+Y)(X+Z)$

$= XY(X+Z)$

2.5 交換律、結合律、分配律與笛摩根定理

❖ 第二分配律的證明如下：

$$(X+Y)(X+Z)=X(X+Z)+Y(X+Z)=XX+XZ+YX+YZ$$

（由 (2-11) 式）

$$=X+XZ+XY+YZ=X\cdot 1+XZ+XY+YZ$$

（由 (2-6D) 式和 (2-4D) 式）

$$=X(1+Z+Y)+YZ=X\cdot 1+YZ=X+YZ$$

（由 (2-11) 式、(2-5) 式和 (2-4D) 式）

2.5 交換律、結合律、分配律與笛摩根定理

表 2-3 布林代數的定律

0 和 1 的運算：	
1. $X+0=X$	1D. $X\cdot 1=X$
2. $X+1=1$	2D. $X\cdot 0=0$
同體律（idempotent laws）：	
3. $X+X=X$	3D. $X\cdot X=X$
摺疊律（involution laws）：	
4. $(X')'=X$	
互補律（laws of complementarity）：	
5. $X+X'=1$	5D. $X\cdot X'=0$
交換律（commutative laws）：	
6. $X+Y=Y+X$	6D. $XY=YX$
結合律（associative laws）：	
7. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$ $=X+Y+Z$	7D. $(XY)Z=X(YZ)=XYZ$
分配律（distributive laws）：	
8. $X(Y+Z)=XY+XZ$	8D. $X+YZ=(X+Y)(X+Z)$
笛摩根定律（DeMorgan's laws）：	
9. $(X+Y)'=X'Y'$	9D. $(XY)'=X'+Y'$

2.6 化簡定理

$X\cdot(Y+Y')=X.$

❖ 聯合定理：$XY + XY' = X$ (2-15)

$\times \to +$
$+ \to \times$. 同果

$(X + Y)(X + Y') = \underline{X}$ (2-15D)

❖ 吸收定理：$X + XY = X$ (2-16)

$X(1+Y)=X.$

$X(X + Y) = X$ (2-16D)

❖ 消除定理：$X + X'Y = X + Y$ (2-17)

$X(X' + Y) = XY$ (2-17D)

❖ 重合定理：$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$ (2-18)

$\underline{(X + Y)(X' + Z)(Y + Z)} = (X + Y)(X' + Z)$

(2-18D)

2.6 化簡定理

(2-15) 的證明：$XY + XY' = X(Y + Y') = X(1) = X$

(2-16) 的證明：$X + XY = X \cdot 1 + XY = X(1 + Y) = X \cdot 1 = X$

(2-17) 的證明：$X + X'Y = (X + X')(X + Y) = 1(X + Y) = X + Y$

(2-18) 的證明：$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z + (1)YZ =$

$XY + X'Z + (X + X')YZ = XY + XYZ + X'Z + X'YZ =$

$XY + X'Z$ （運用吸收定理兩次）

2.6 化簡定理

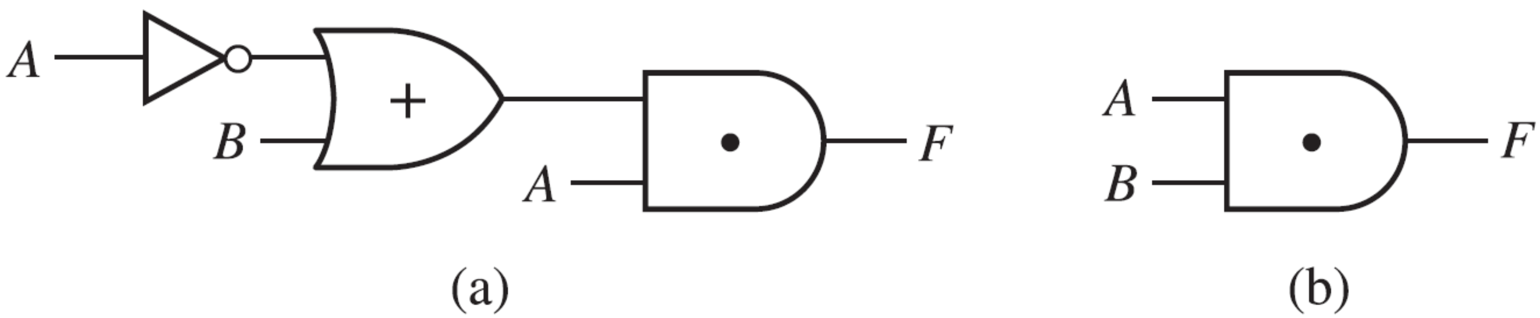


圖 2-4 等效的邏輯閘電路

範例 1

$XY + X$ $\quad$ $X(1+Y) = X$

- 化簡 $Z = A'BC + A'$ $= A'$
- 如果令$X = A'$且$Y = BC$，則這個代數式和(2-16)式的吸收定理格式相同。
- 因此，這個代數式可以簡化成$Z = X + XY = X = A'$。

範例 2

$XY + XY' = X(Y+Y') = X = A + B'C.$

$(X+Y)(X+Y')$

- 化簡 $Z = [A + B'C + D + EF]\,[A + B'C + (D + EF)']$
- 代入：$Z = [\ X + Y\ ]\,[\ X + Y'\ ]$
- 因此，運用(2-15D) 式的聯合定理這個代數式，可以簡化成

$$Z = X = A + B'C$$

範例 3

- 化簡 $Z = \underbrace{(AB + C)}_{X'}\underbrace{(B'D + C'E')}_{Y} + \underbrace{(AB + C)'}_{X}$
- 代入： $Z = X'Y + X$
- 運用(2-17)式的消除定理：$Z = X + Y = B'D + C'E' + (AB + C)'$
- 注意在此範例中，為了符合(2-17) 式消除定理的格式，我們令$X = (AB + C)'$，而非$(AB + C)$。

2.6 化簡定理

表 2-4　布林代數的定理

聯合定理（uniting theorems）：	
1. $XY + XY' = X$	1D. $(X + Y)(X + Y') = X$
吸收定理（absorption theorems）：	
2. $X + XY = X$	2D. $X(X + Y) = X$
消除定理（elimination theorems）：	
3. $X + X'Y = X + Y$	3D. $X(X' + Y) = XY$
對偶性（duality）：	
4. $(X + Y + Z + \cdots)^D = XYZ\ldots$	4D. $(XYZ\ldots)^D = X + Y + Z + \cdots$
乘開與分解定理（theorems for multiplying out and factoring）：	
5. $(X + Y)(X' + Z) = XZ + X'Y$	5D. $XY + X'Z = (X + Z)(X' + Y)$
重合定理（consensus theorems）：	
6. $XY + YZ + X'Z = XY + X'Z$	6D. $(X + Y)(Y + Z)(X' + Z) = (X + Y)(X' + Z)$

2.7 乘開與分解

- 分配律常用來乘開代數式以獲得**積項和**（sum-of-products, SOP）的形式。
- 分配律也可以用來分解代數式以獲得**和項積**（product-of-sums, POS）的形式。

2.7 乘開與分解

- **積項和**（sum-of-products, SOP）形式

$$AB' + CD'E + AC'E' \qquad (2\text{-}19)$$

$$ABC' + DEFG + H \qquad (2\text{-}20)$$

$$A + B' + C + D'E \qquad (2\text{-}21)$$

- **和項積**（product-of-sums, POS）形式

$$(A + B')(C + D' + E)(A + C' + E') \qquad (2\text{-}22)$$

$$(A + B)(C + D + E)F \qquad (2\text{-}23)$$

$$AB'C(D' + E) \qquad (2\text{-}24)$$

範例 1

$X+YZ = (X+Y)(X+Z) =$

$A+B'CD$

- 分解$A + B'CD$。這是$X + YZ$的形式，其中$X = A$，$Y = B'$及$Z = CD$。所以，

$(X+Y)$ $(X+Z)$

$$A+B'CD=(X+Y)(X+Z)=(A+B')(A+CD)$$

- $A + CD$可以運用第二分配律再分解一次，所以

$X+YZ$

$(X+Y)(X+Z)$

$$A+B'CD=(A+B')(A+C)(A+D)$$

範例 2

$x + yz = (x+y)(x+z)$

❖ 分解 $AB' + C'D$。

$X+Y$ $\quad$ $X+Z$

$$AB'+C'D = (AB'+C')(AB'+D) \quad \leftarrow \text{留意在此如何運用}$$

$$X+YZ = (X+Y)(X+Z)$$

$$= (A+C')(B'+C')(A+D)(B'+D) \quad \leftarrow \text{每一項再用一次第二分配律}$$

範例 3

X+YZ=

❖ 分解 $C'D + C'E' + G'H$。

X+YZ

$C'(D+E')+G'H.$　　$\boxed{(X+Y)(X+Z)}$

$C'D + C'E' + G'H = C'(D+E') + G'H$ ← 先運用一般的分配律

Y　Z　X

$XY + XZ = X(Y+Z)$

X+Y　X+Z

$= (C' + G'H)(D + E' + G'H)$ ← 再用第二分配律

$= (C' + G')(C' + H)(D + E' + G')(D + E' + H)$ ← 識別出X、Y和Z的代數式，完成分解的動作

❖ 顯示在圖2-5和圖2-6的電路通常稱為二階（two-level）電路，因為電路的輸入和輸出端之間最多只有兩個邏輯閘串聯。

2.7 乘開與分解

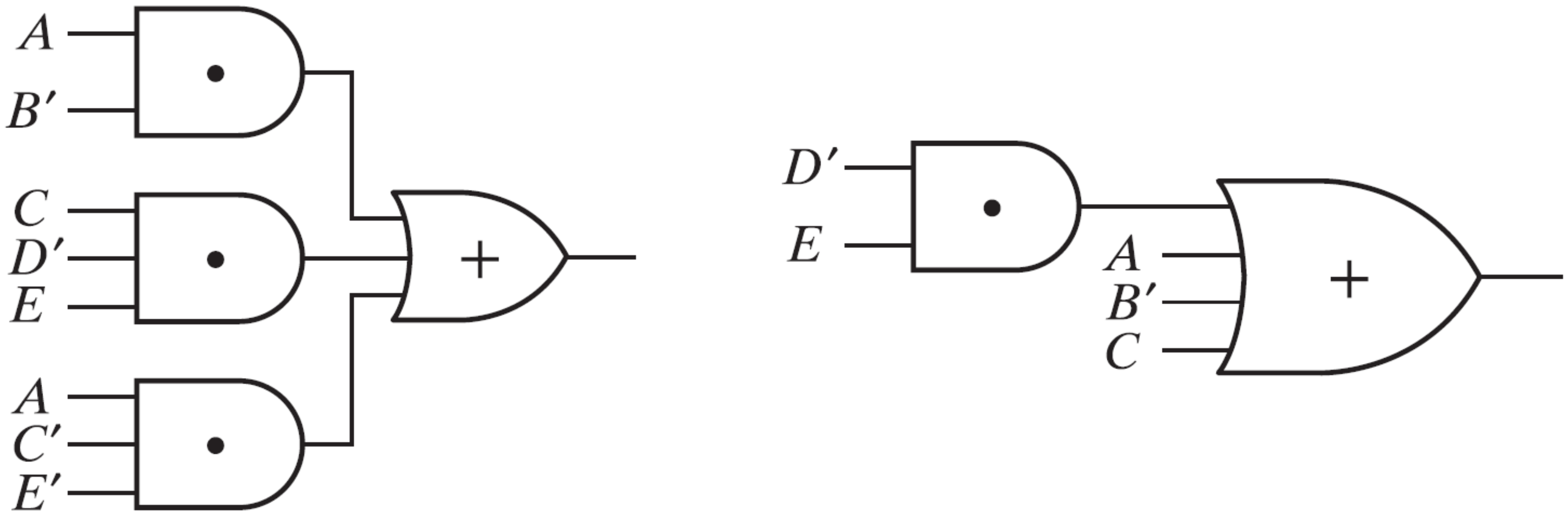


圖 2-5 (2-19) 式和 (2-21) 式的電路

2.7 乘開與分解

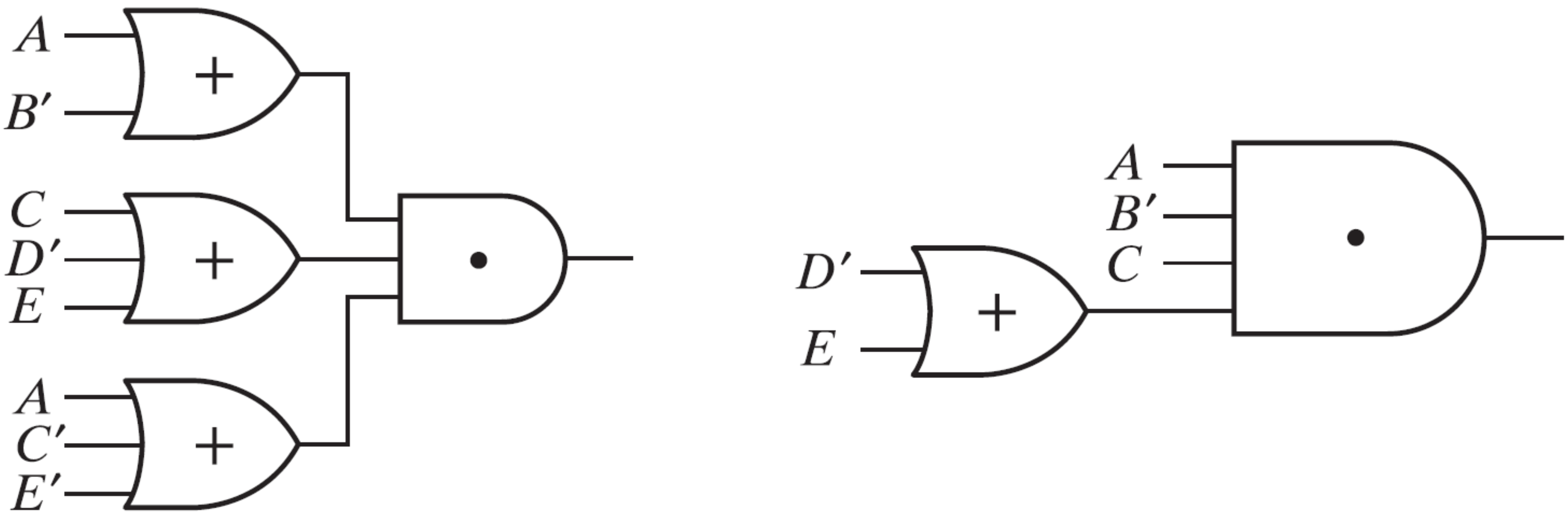


圖 2-6 (2-22) 式和 (2-24) 式的電路

2.8 布林代數的補數

❖ 笛摩根定律很容易擴充到*n* 個變數：

$$(X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n)'=X_1'X_2'X_3'\ldots X_n' \quad (2\text{-}25)$$

$$(X_1X_2X_3\ldots X_n)'=X_1'+X_2'+X_3'+\ldots+X_n' \quad (2\text{-}26)$$

- 積項的補數等於補數項的和。
- 和項的補數等於補數項的積。

範例 1

- 求$(A' + B)C'$ 的補數時，首先應用(2-13)式，然後是(2-12)式。

$(AB')+C$

$$[(A'+B)C']'=(A'+B)'+(C')'=AB'+C$$

範例 2

$$[(AB'+C)D'+E]' = [(AB'+C)D']'E' \quad （運用 (2\text{-}12) 式）$$

$[(AB)C'+D]E'$

$$= [(AB'+C)'+D]E' \quad （運用 (2\text{-}13) 式）$$

$$= [(AB')C'+D]E' \quad （運用 (2\text{-}12) 式）$$

$$= [(A'+B)C'+D]E' \quad （運用 (2\text{-}13) 式） \quad (2\text{-}27)$$

- 注意在最後的式子中，補數運算只應用在單獨的變數上。

對偶式(dual)

- 給予一個布林代數式，求其對偶式可以取整個代數式的補數式，然後再取每個變數的補數。例如，求 $AB'+C$ 的對偶式：

補

$$(AB'+C)' = (AB')'C' = (A'+B)C'，所以(AB'+C)^{D} = (A+B')C$$

$(A+B')C$