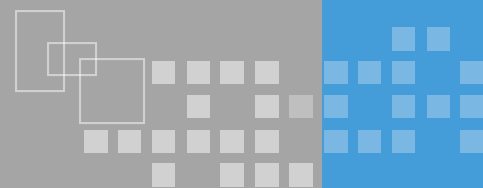


第5章

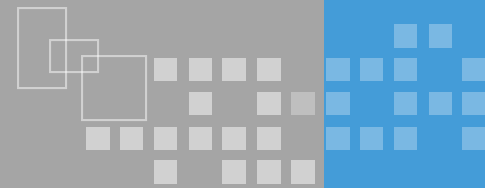
卡諾圖



- ❖ 交換函數通常可以使用在第3章所描述的代數技巧來作化簡，但是使用代數步驟時會產生兩個問題：
 - 1. 很難用系統化的步驟來處理問題。
 - 2. 很難知道何時得到最簡解。

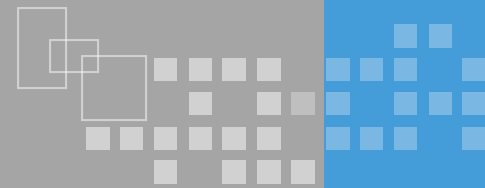
- ❖ 在本章所學習的**卡諾圖**（Karnaugh maps）可以提供系統性的方法來化簡交換函數，克服這些困難。

5.1 交換函數的最簡形式



- ❖ 當利用 **及**（AND）閘和 **或**（OR）閘實現一個函數時，其成本與使用的閘數與閘輸入數有直接的關係。在本章所發展的卡諾圖技巧，可以直接減少包含AND和OR閘二階電路的成本。

5.1 交換函數的最簡形式



❖ 積項和的表示式：二階AND-OR電路 (見圖2-5)

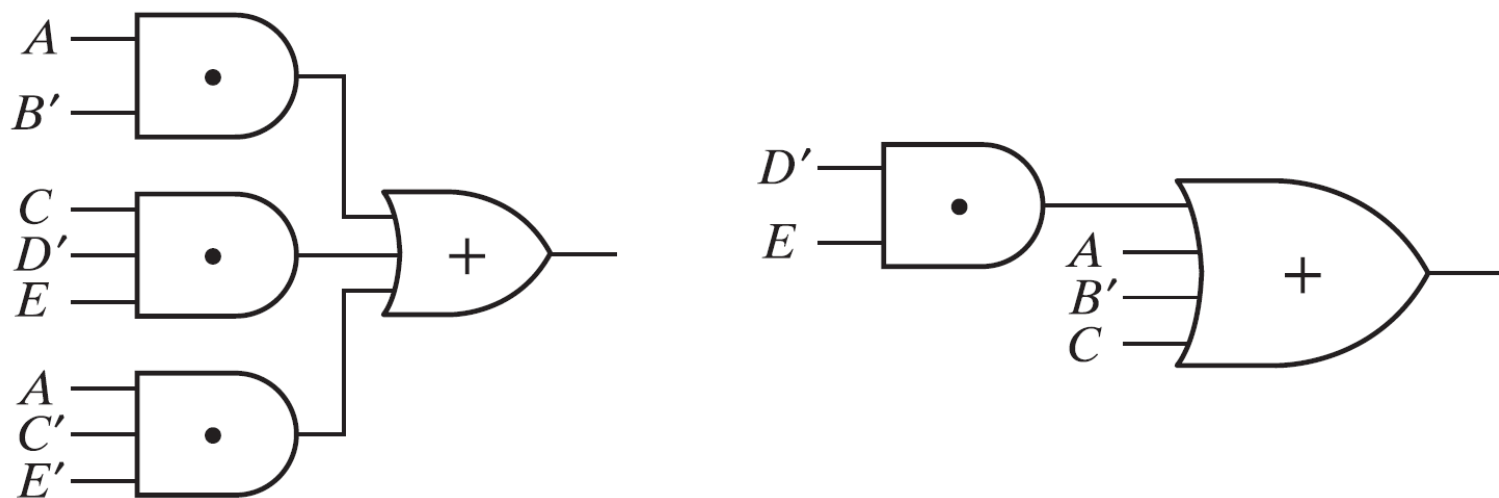
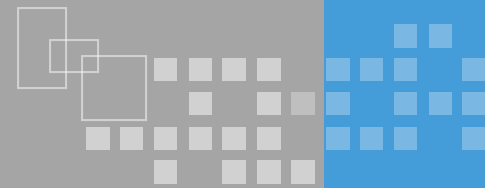


圖 2-5 (2-19) 式和 (2-21) 式的電路

5.1 交換函數的最簡形式



❖ 和項積的表示式：二階OR-AND電路 (見圖2-6)

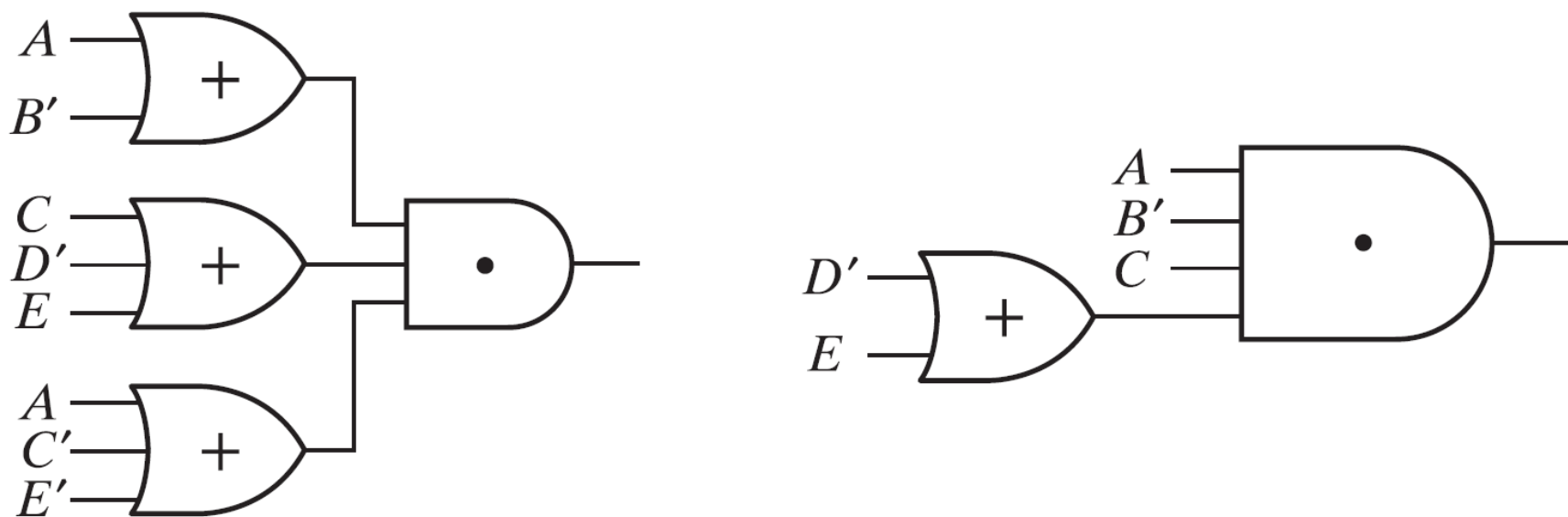
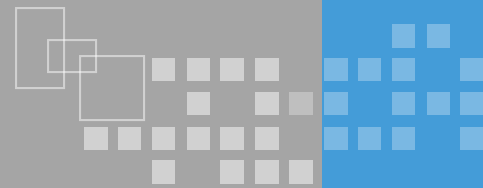


圖 2-6 (2-22) 式和 (2-24) 式的電路

5.1 交換函數的最簡形式



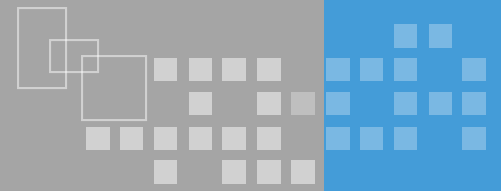
❖ **最簡積項和**（minimum sum-of-products）表示式被定義為：具有

- (a) 最少數目的項。
- (b) 所有這些表示式具有相同最少的項且文字字元最少之積項的和。

❖ **最簡和項積**（minimum product-of-sums）表示式被定義為具有

- (a) 最少數目的因式。
- (b) 所有這些表示式具有相同數目的因式且文字字元數最少。

範例

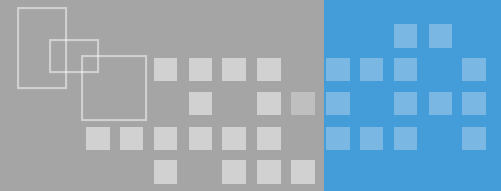


❖ 求出 $F(a, b, c) = \Sigma m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$ 之最簡積項和表示式。

$$\begin{aligned} F &= a'b'c' + a'b'c + a'bc' + ab'c + abc' + abc \\ &= a'b' + b'c + bc' + ab \end{aligned}$$

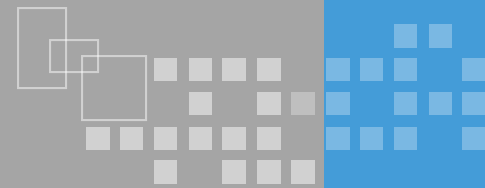
(5-1)

範例

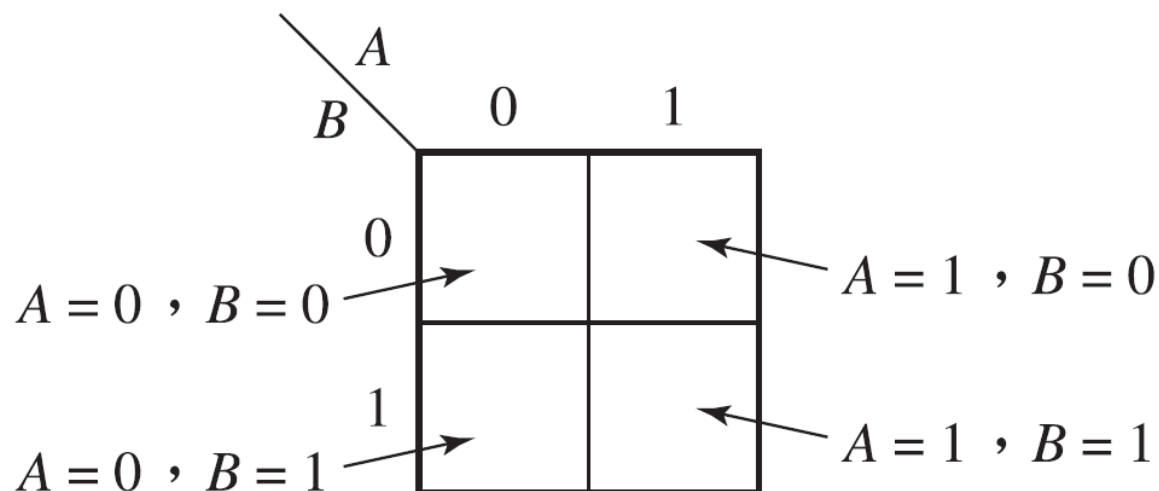


$$\begin{aligned}
 & (A + B' + C + D')(A + B' + C' + D')(A + B' + C' + D)(A' + B' + C' + D)(A + B + C' + D)(A' + B + C' + D) \\
 &= (A + B' + D') \quad (A + B' + C') \quad (B' + C' + D) \quad (B + C' + D) \\
 &= (A + B' + D') \quad \underbrace{(A + B' + C')}_{\text{利用重合項消去}} \quad (C' + D) \\
 &= (A + B' + D')(C' + D)
 \end{aligned}
 \tag{5-4}$$

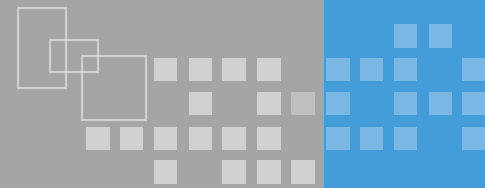
5.2 二和三變數卡諾圖



❖ 二變數卡諾圖：



5.2 二和三變數卡諾圖



A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

(a)

$A \backslash B$	0	1
0	1	0
1	1	0

(b)

$A \backslash B$	0	1
0	1	0
1	1	0

$$F = A'B' + A'B$$

(c)

$A \backslash B$	0	1
0	1	0
1	1	0

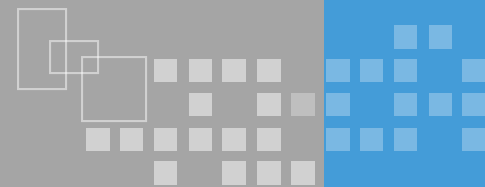
$$A'B' + A'B = A'$$

$$F = A'$$

(d)

圖 5-1

5.2 二和三變數卡諾圖



❖ 三變數卡諾圖：

$A B C$	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

(a)

$A \backslash BC$		0	1
00	0	0	1
01	0	0	0
11	1	0	0
10	1	1	1
F			

$ABC = 001, F = 0$ (points to cell 00, 1)

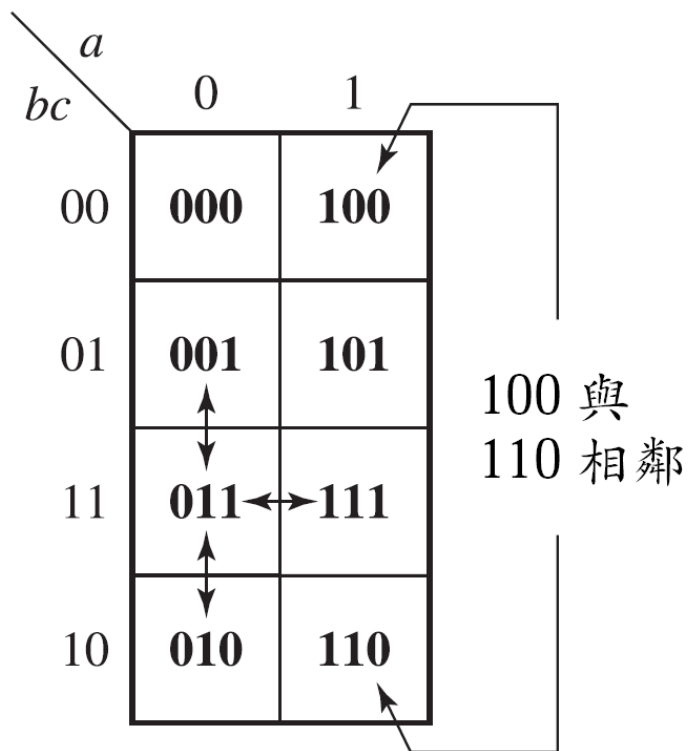
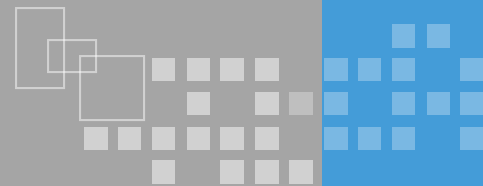
$ABC = 110, F = 1$ (points to cell 11, 0)

(b)

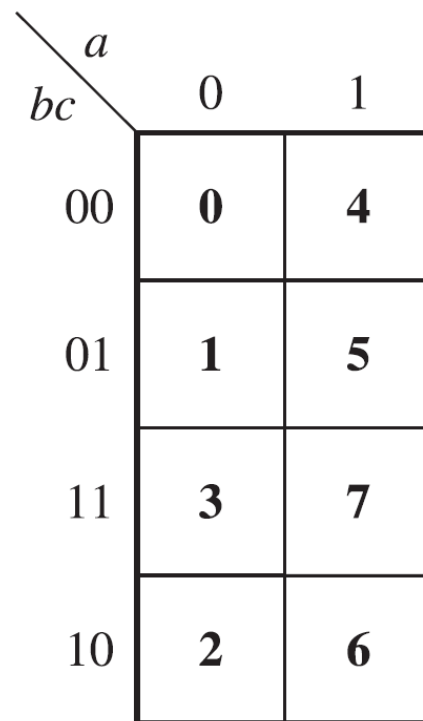
圖 5-2

三變數函數的真值表和卡諾圖

5.2 二和三變數卡諾圖



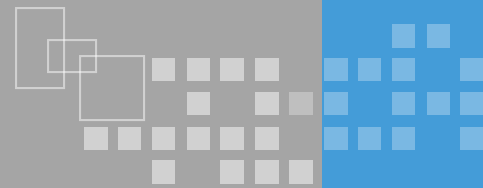
(a) 二進位表示法



(b) 十進位表示法

圖 5-3 三變數卡諾圖全及項的位置

5.2 二和三變數卡諾圖



- ❖ 已知一個函數的全及項展開式，則在卡諾圖中與函數全及項相對應位置的方格填上1，其餘的方格填0，即可畫出卡諾圖（需要的話可以省略0）。圖5-4所示為 $F(a, b, c) = m_1 + m_3 + m_5$ 的卡諾圖。

$a \backslash bc$		0	1
00	0 0	0 4	
01	1 1	1 5	
11	1 3	0 7	
10	0 2	0 6	

圖 5-4 $F(a, b, c) = \sum m(1, 3, 5) = \prod M(0, 2, 4, 6, 7)$ 的卡諾圖

5.2 二和三變數卡諾圖

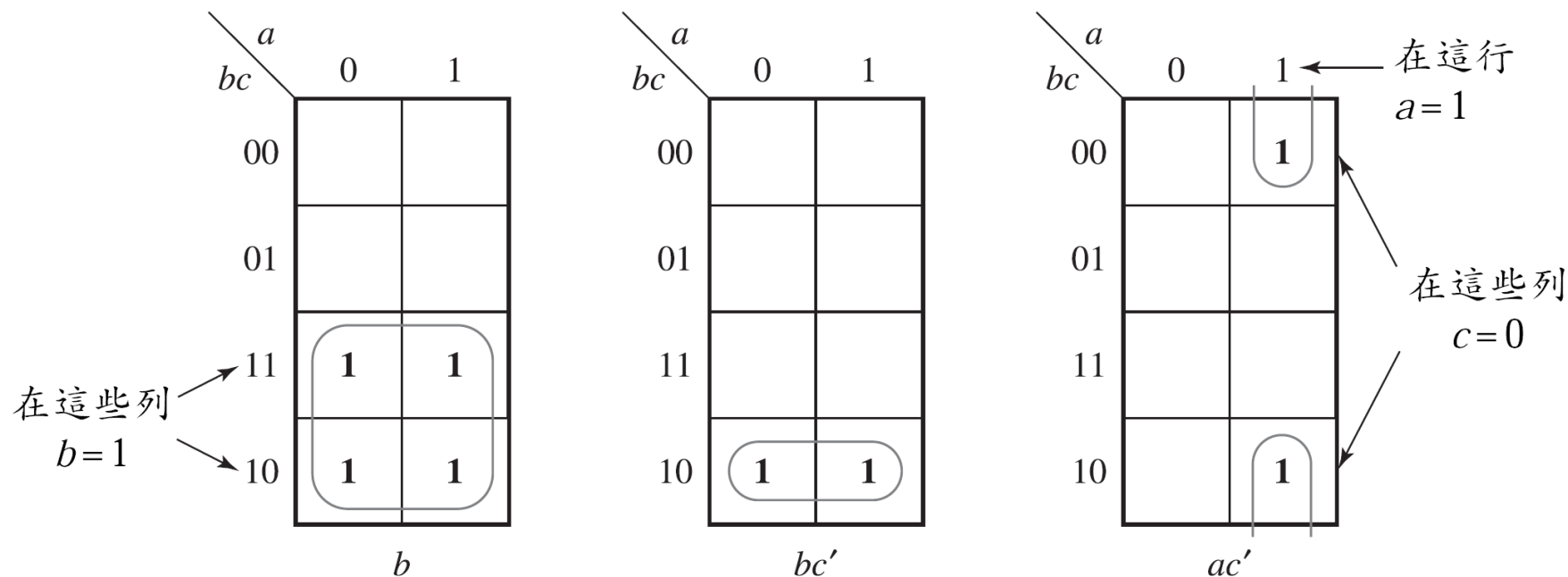
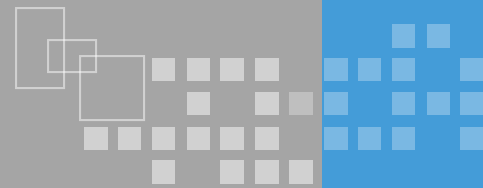


圖 5-5 積項的卡諾圖

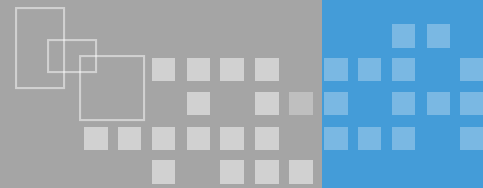
5.2 二和三變數卡諾圖



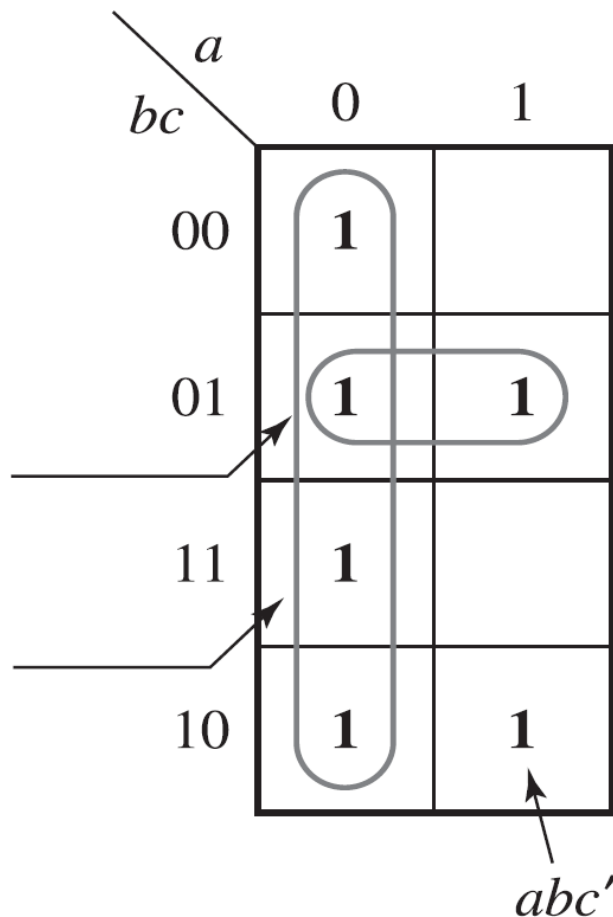
- ❖ 如果一個函數給的是代數的形式，在畫圖之前不需要將它展開成全及項形式。例如，已知：

$$f(a,b,c) = abc' + b'c + a'$$

5.2 二和三變數卡諾圖



1. 當 $a=1$ 且 $bc = 10$ 時，則 abc' 項是1，所以我們在圖中對應於 $a=1$ 行且 $bc = 10$ 列的方格填1。
2. 當 $bc = 01$ 時，則 $b'c$ 項是1，所以我們在圖中對應於 $bc = 01$ 列的兩個方格填1。
3. 當 $a = 0$ 時，則 a' 項是1，所以我們在圖中對應於 $a = 0$ 行所有的方格填1。（注意：既然已經有一個1在 $abc = 001$ 的方格，因為 $x + x = x$ ，所以我們不需要再放第二個1。）



5.2 二和三變數卡諾圖

❖ 由卡諾圖推導出一個函數的簡化表示式。

$a \backslash bc$	0	1
00		
01	1	1
11	1	
10		

$$F = \Sigma m(1, 3, 5)$$

(a) 全及項圖

$a \backslash bc$	0	1
00		
01	1	1
11	1	
10		

T_1
 $= a'b'c + a'bc$
 $= a'c$

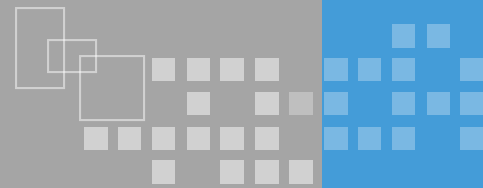
T_2
 $= a'b'c + ab'c$
 $= b'c$

$$F = a'c + b'c$$

(b) F 之化簡形式

圖 5-6 三變數函數之化簡

5.2 二和三變數卡諾圖



❖ F 補數的卡諾圖：

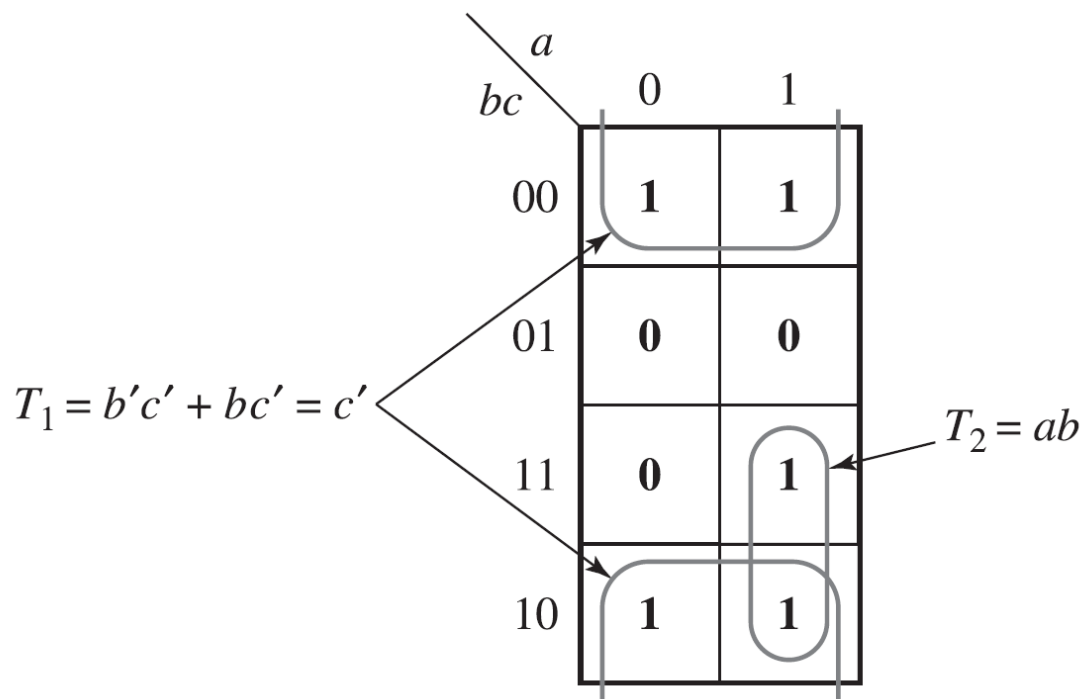
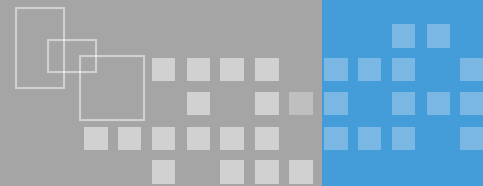


圖 5-7

圖 5-6(a) 補數的卡諾圖

5.2 二和三變數卡諾圖



❖ 利用卡諾圖說明重合定理：

$$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$$

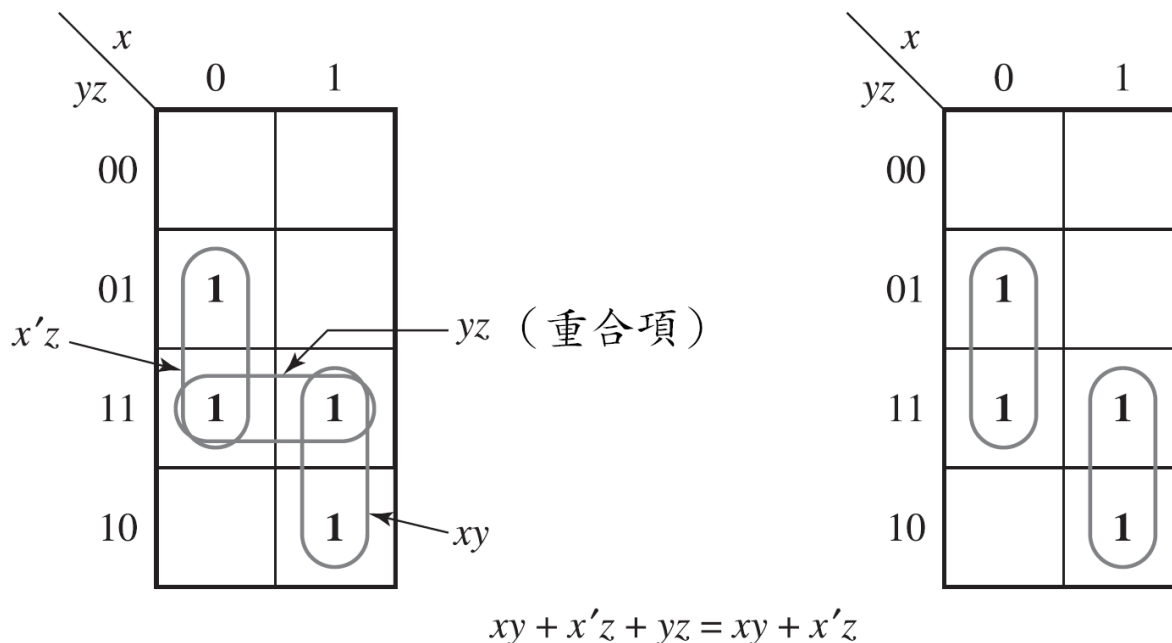
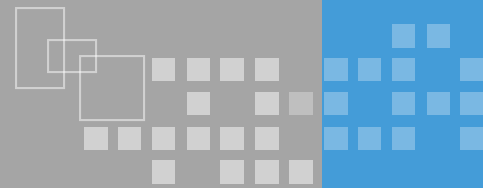


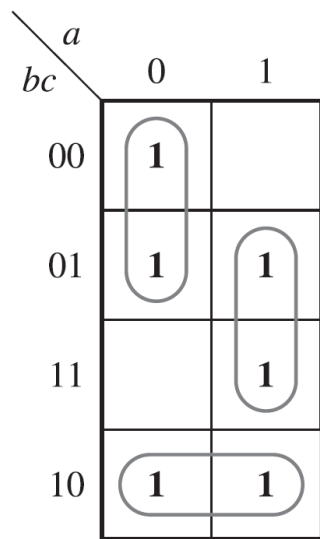
圖 5-8 利用卡諾圖說明重合定理

5.2 二和三變數卡諾圖

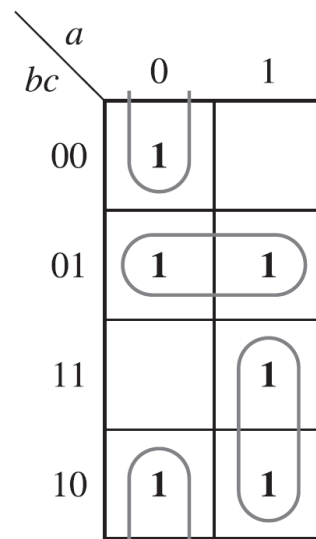


- ❖ 如果一個函數具有兩個或多個最簡積項和形式，則可以由一個卡諾圖求出所有這些形式。

$$F = \sum m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$$



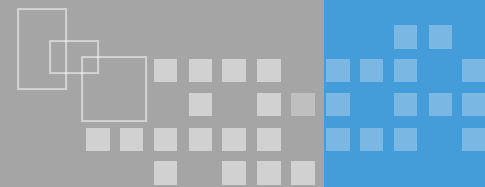
$$F = a'b' + bc' + ac$$



$$F = a'c' + b'c + ab$$

圖 5-9 具有兩個最簡形式的函數

5.3 四變數卡諾圖

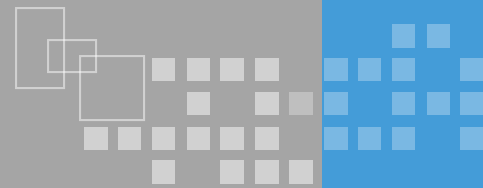


❖ 四變數卡諾圖其全及項的位置：

AB CD		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

圖 5-10 四變數卡諾圖全及項的位置

5.3 四變數卡諾圖



❖ 將 $f(a, b, c, d) = acd + a'b + d'$ 畫在一個卡諾圖上。

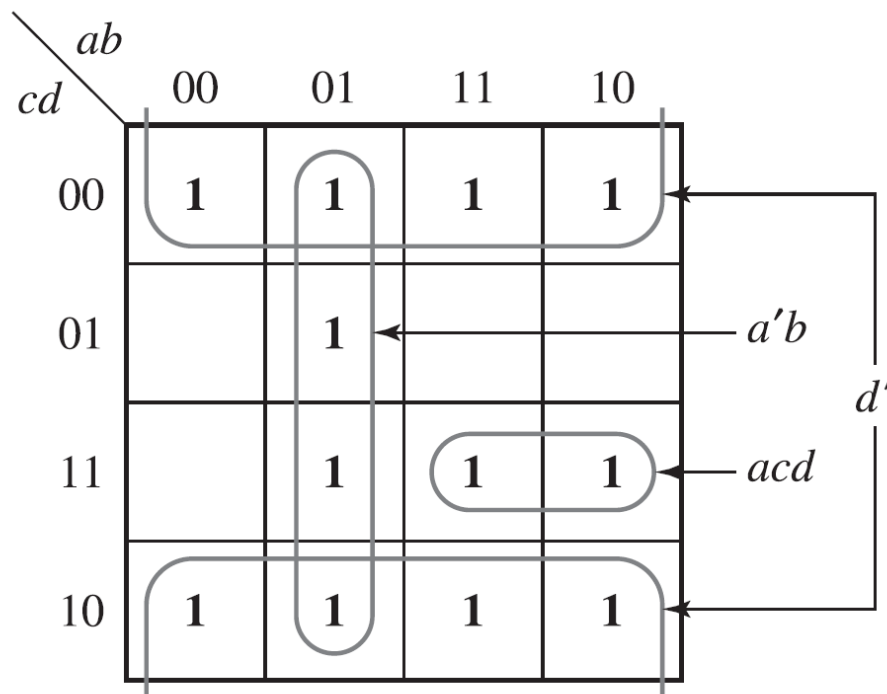
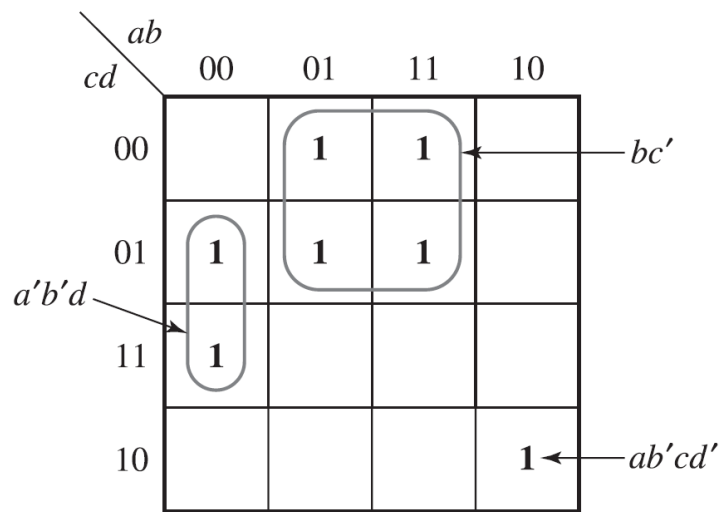


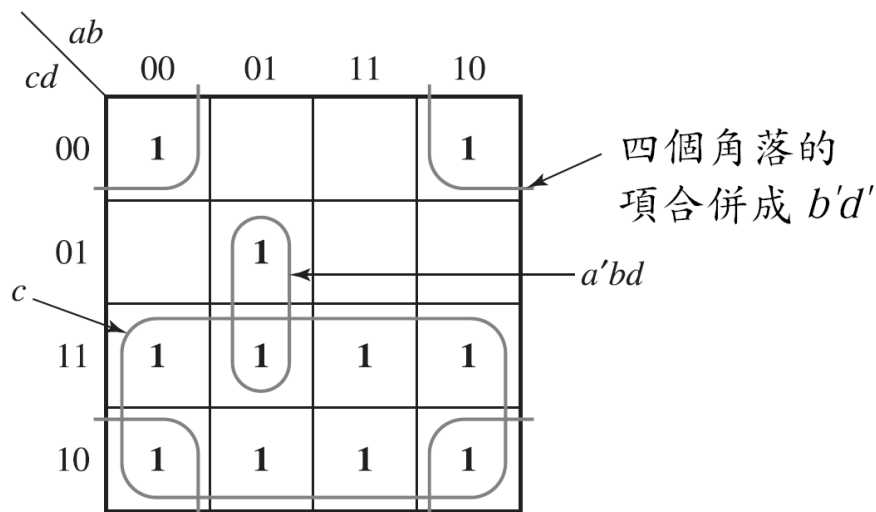
圖 5-11 $acd + a'b + d'$ 的畫法

5.3 四變數卡諾圖



$$f_1 = \sum m(1, 3, 4, 5, 10, 12, 13) \\ = bc' + a'b'd + ab'cd'$$

(a)



$$f_2 = \sum m(0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15) \\ = c + b'd' + a'bd$$

(b)

圖 5-12 四變數函數的化簡

5.3 四變數卡諾圖



ab					
cd		00	01	11	10
	00			X	
	01	1	1	X	1
	11	1	1		
	10		X		

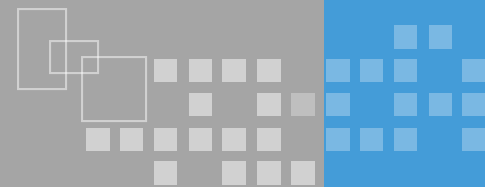
$$\begin{aligned}f &= \sum m(1, 3, 5, 7, 9) + \sum d(6, 12, 13) \\ &= a'd + c'd\end{aligned}$$



圖 5-13

一個未完全定義函數的化簡

5.3 四變數卡諾圖



❖ 最簡和項積的求法：

$$f = x'z' + wyz + w'y'z' + x'y$$

❖ 首先， f 中的1被畫在圖5-14中，然後由0的部分可得：

$$f' = y'z + wxz' + w'xy$$

❖ 則 f 的最簡和項積為：

$$f = (y + z')(w' + x' + z)(w + x' + y')$$

5.3 四變數卡諾圖

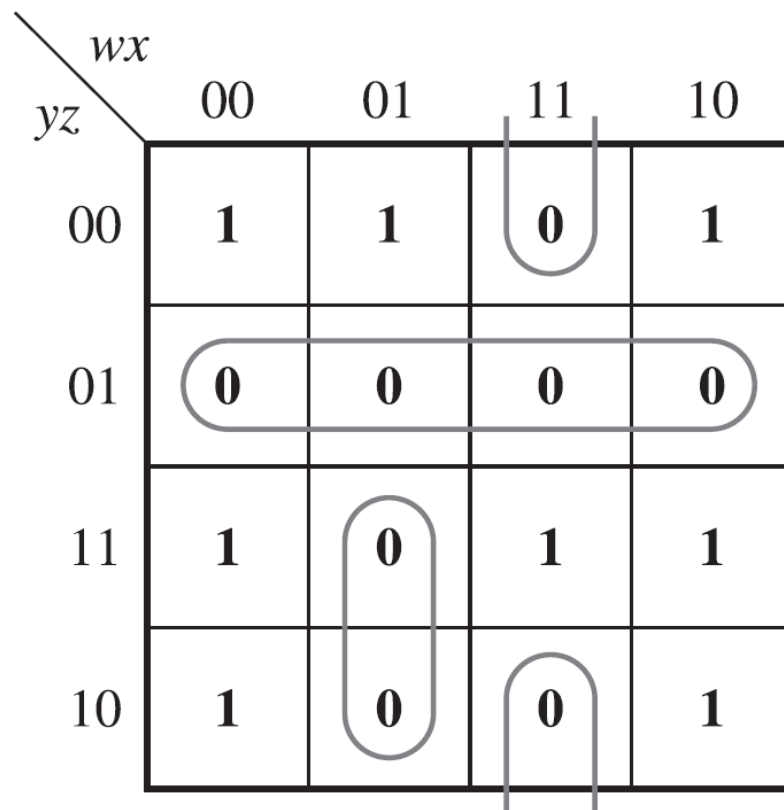
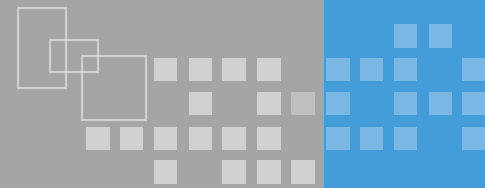


圖 5-14

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

- ❖ **含項**(implicant)：函數 F 在卡諾圖中任何單一個1或任何一組1可以被合併在一起而形成一個積項則被稱為 F 的含項。
- ❖ **質含項**(prime implicant)：若一個積項不能再和其他項合併消去變數，則稱為質含項。

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

❖ 在圖5-15中， $a'b'c$ 、 $a'cd'$ 和 ac' 因為不能再與其他項合併消去變數，所以它們是質含項

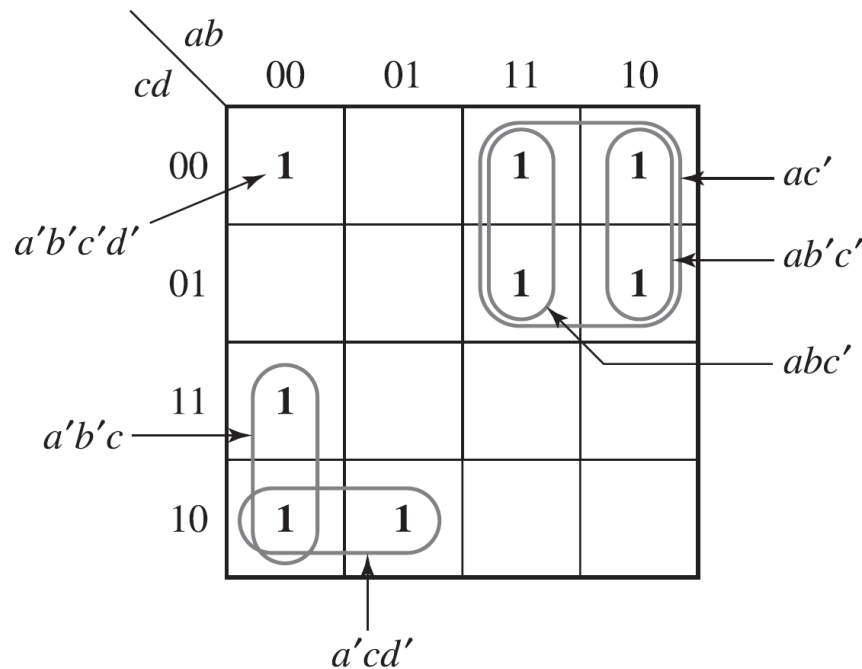
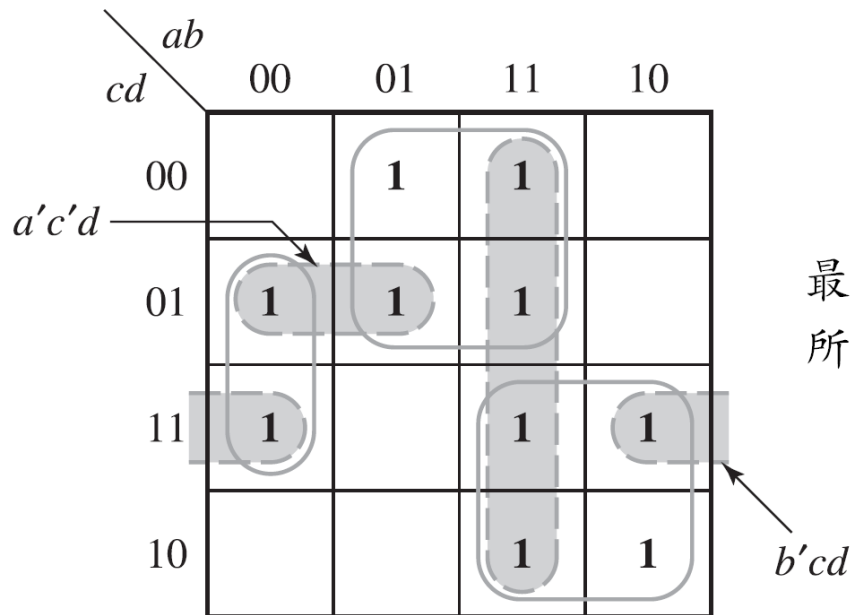


圖 5-15

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

❖ 一個函數的最簡積項和表示式包含函數的一些質含項（但不一定是全部）。



最簡解： $F = a'b'd + bc' + ac$

所有質含項： $a'b'd$ 、 bc' 、 ac 、 $a'c'd$ 、 ab 、 $b'cd$

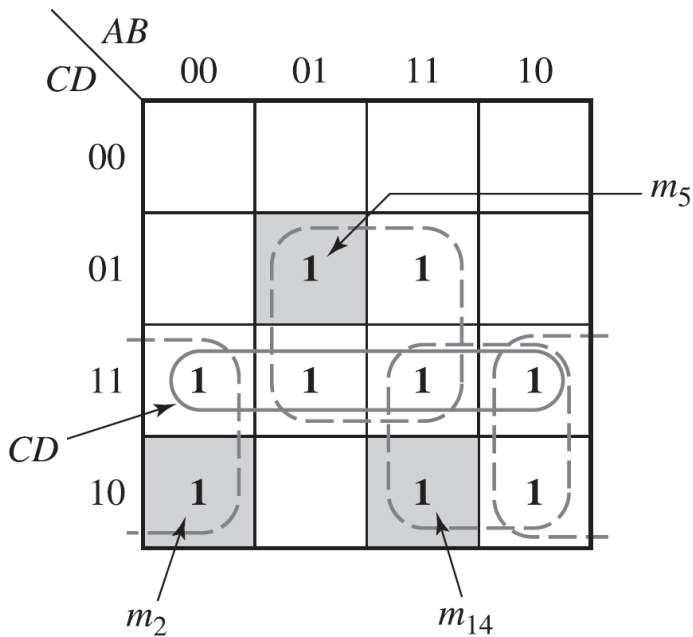
圖 5-16 所有質含項的求法

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

❖ 基本質含項 (essential prime implicant)

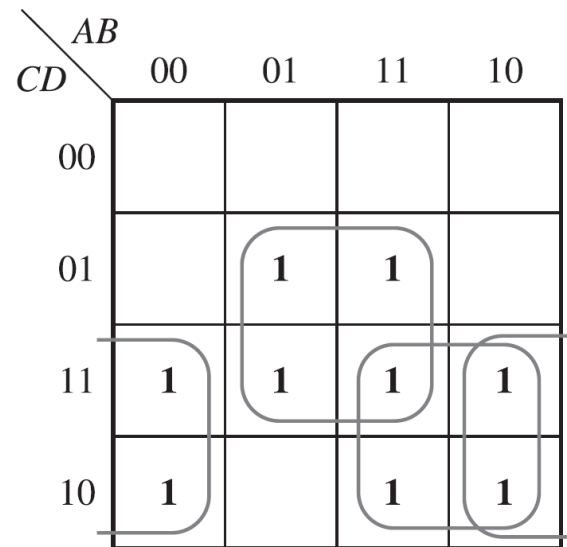
- 如果一個全及項只被一個質含項包含，則包含此全及項的質含項稱為**基本的** (essential)，且它必定是最簡積項和的一部分。

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式



$$f = CD + BD + B'C + AC$$

(a)



$$f = BD + B'C + AC$$

(b)

圖 5-17

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

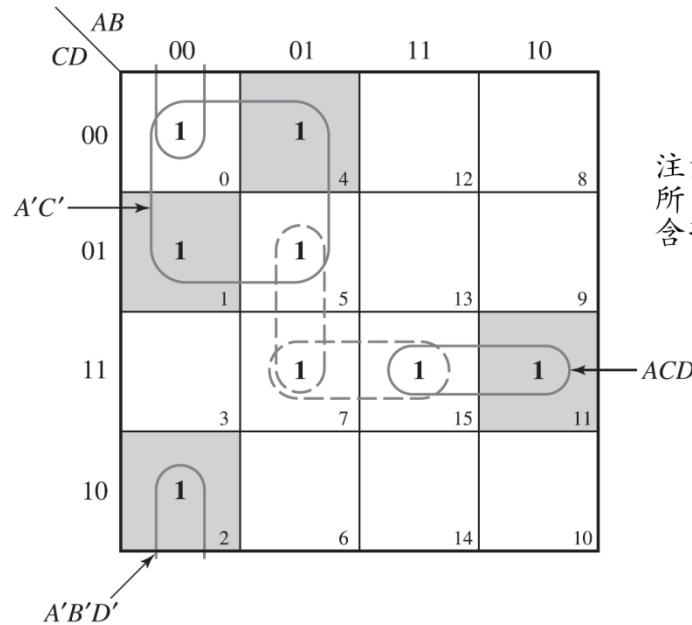


圖 5-18

❖ 答案為 $A'C' + A'B'D' + ACD + \left\{ \begin{array}{c} A'BD \\ \text{或} \\ BCD \end{array} \right\}$

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

❖ 由一個卡諾圖中求得最簡積項和：

1. 選擇一個尚未被包含的全及項（一個1）。
2. 找出與此全及項相鄰的所有1和X。（在 n 變數圖中檢查 n 個相鄰方格。）
3. 如果一個單項包含這個全及項以及所有相鄰的1和X，則此項為基本質含項，所以選擇此項。（注意：不理會項在步驟2和3中要視為1，但在步驟1中不是。）
4. 重複步驟1、2和3，直到選出所有的基本質含項。
5. 找出一組最少且可以涵蓋圖中所剩下1的質含項。（如果這種組合超過一種，則選擇一組文字字元數最少的。）

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

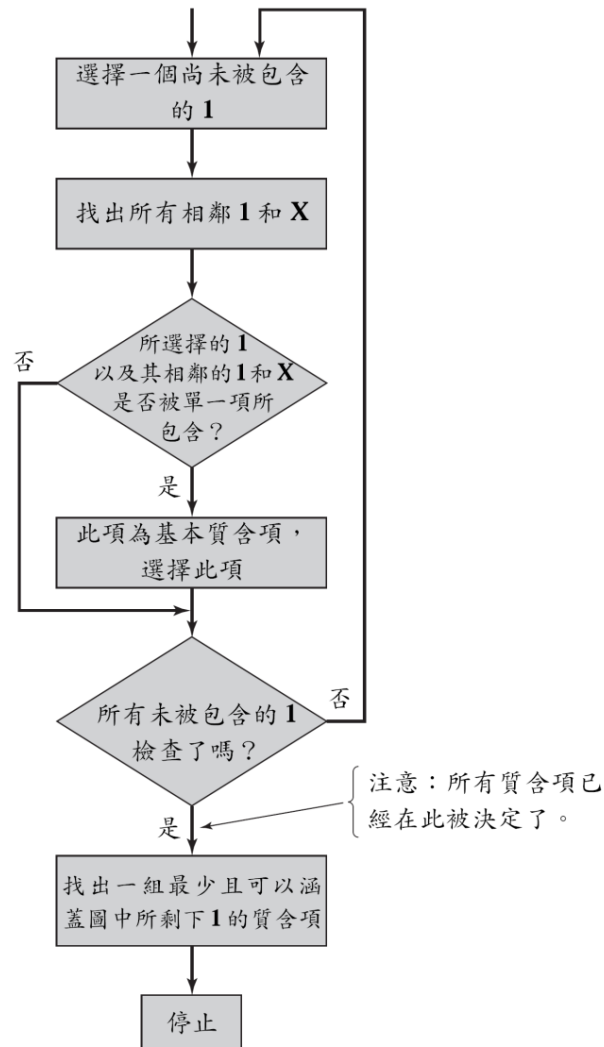


圖 5-19 利用卡諾圖決定最簡積項和的流程圖

5.4 利用基本質含項決定最簡表示式

AB \ CD		00	01	11	10
00	X_0	1_4			1_8
01			1_5	1_{13}	1_9
11			X_7	X_{15}	
10			1_6		1_{10}

陰影部分的 1 只被一個質含項所包含。

圖 5-20

5.5 五變數卡諾圖

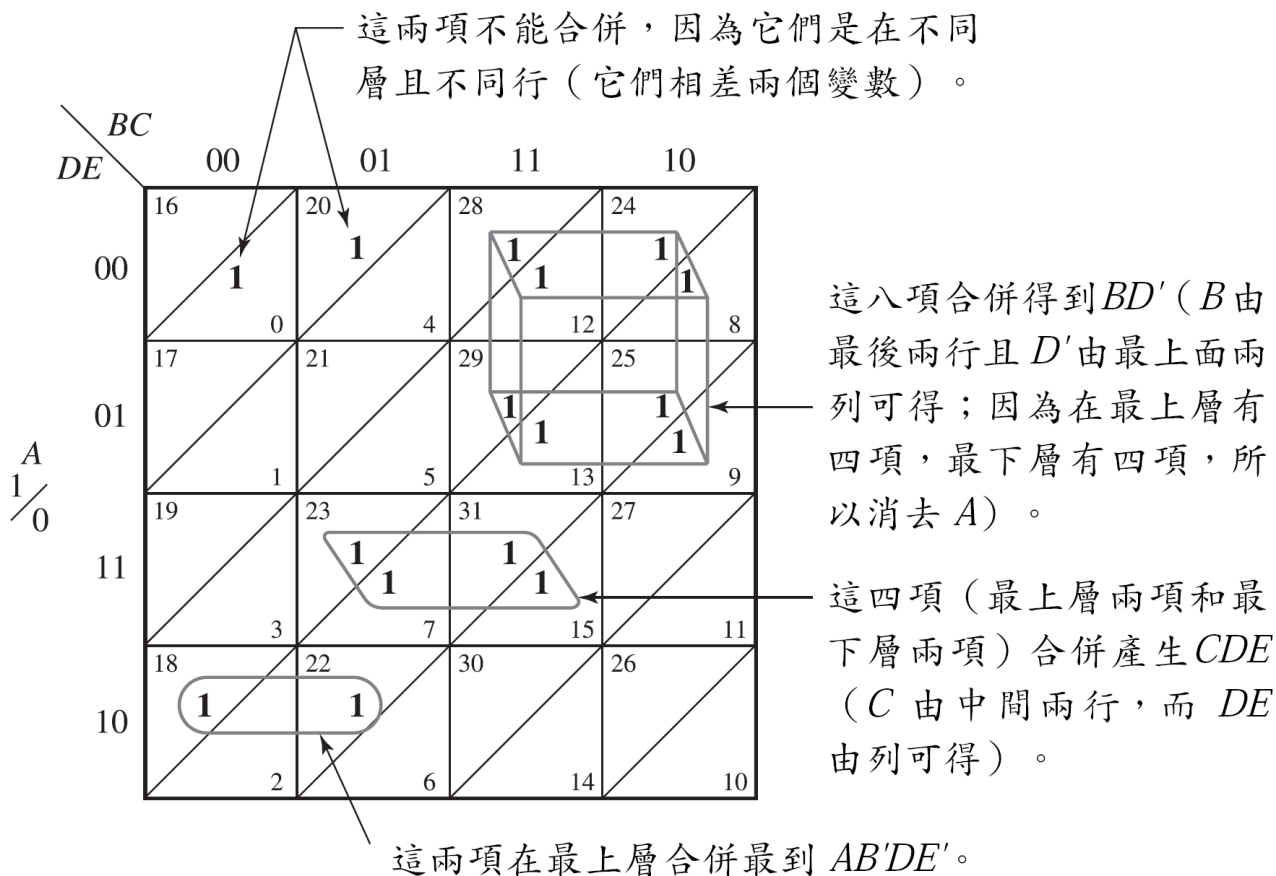


圖 5-21 五變數卡諾圖

5.5 五變數卡諾圖

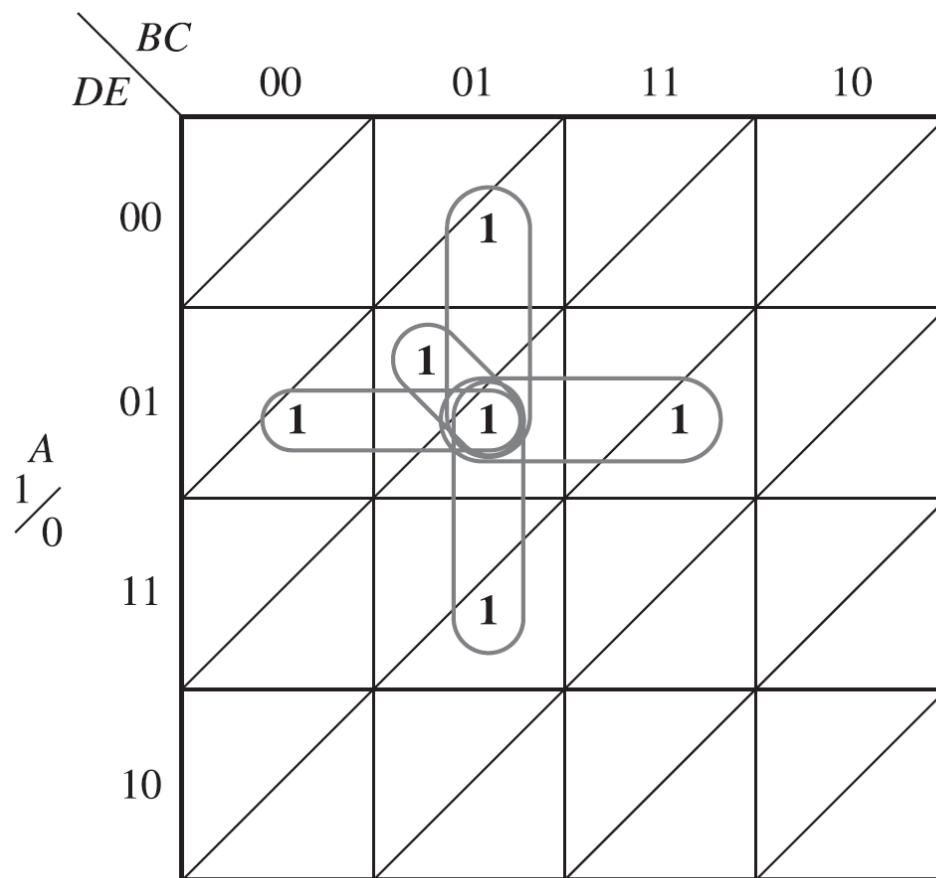
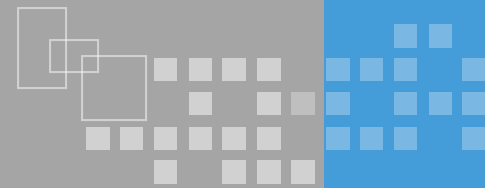


圖 5-22

5.5 五變數卡諾圖

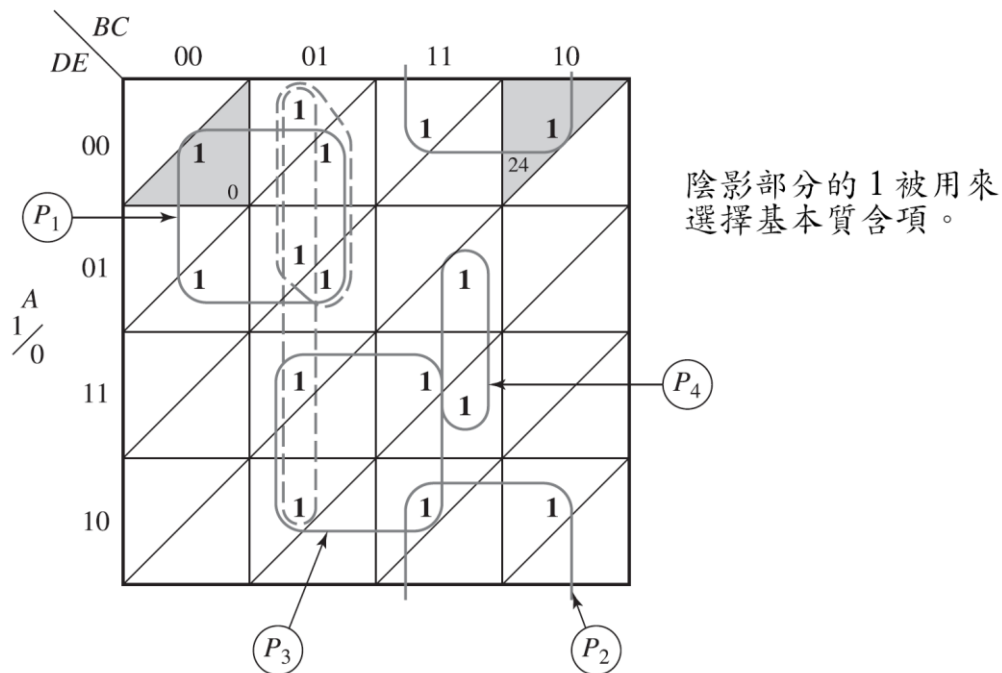
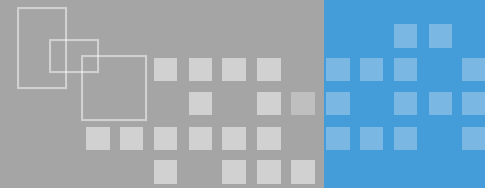


圖 5-23

❖ 圖5-23是函數

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 1, 4, 5, 13, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 31)$$

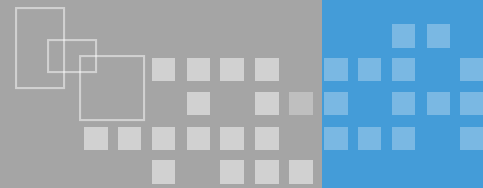
5.5 五變數卡諾圖



❖ 則最簡解的結果是：

$$F = \underset{P_1}{A'B'D'} + \underset{P_2}{ABE'} + \underset{P_3}{ACD} + \underset{P_4}{A'BCE} + \left\{ \begin{array}{c} AB'C \\ \text{或} \\ B'CD' \end{array} \right\}$$

5.5 五變數卡諾圖



❖ 圖5-24是下列函數的卡諾圖：

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 1, 3, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 19, 25, 27, 31)$$

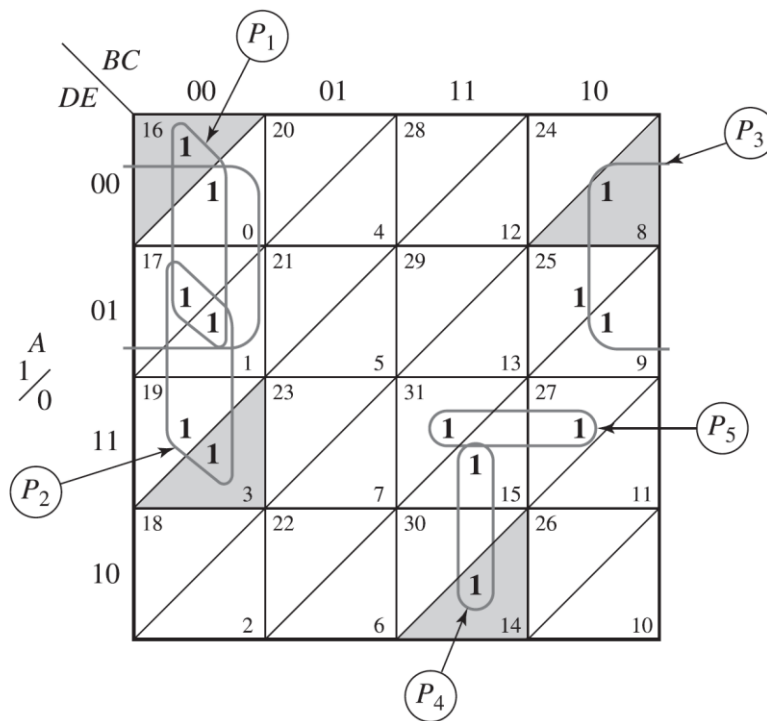
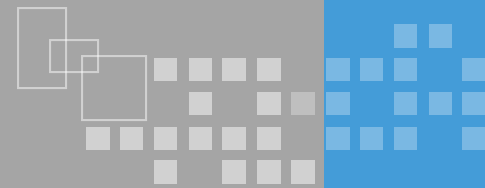


圖 5-24

5.5 五變數卡諾圖



❖ 最後的解是：

$$F = \underbrace{B'C'D'}_{P_1} + \underbrace{B'C'E}_{P_2} + \underbrace{A'C'D'}_{P_3} + \underbrace{A'BCD}_{P_4} + \underbrace{ABDE}_{P_5} + \left\{ \begin{array}{c} C'D'E \\ \text{或} \\ AC'E \end{array} \right\}$$