第3章

布林代數（續）

3.1 乘開與分解代數式

- 和項積形式的代數式，可以運用兩種分配律，以「乘開」的方法得到相對應的積項和形式的代數式：

$$X(Y+Z) = XY + XZ \qquad (3\text{-}1)$$

$$(X+Y)(X+Z) = X + YZ \qquad (3\text{-}2)$$

- 下列的定理在乘開與分解時也非常有用：

$$(X+Y)(X'+Z) = XZ + X'Y \qquad (3\text{-}3)$$

範例

$X+YZ$

$(X+Y)(X+Z)$　　$(X+Y)(X'+Z)$　$\boxed{XZ+YX'+YZ}$

$$(A+B+C')(A+B+D)(A+B+E)(A+D'+E)(A'+C)$$
$$=(A+B+C'D)(A+B+E)[AC+A'(D'+E)]$$
$$=(A+B+C'DE)(AC+A'D'+A'E)$$
$$=AC+\cancel{ABC}+A'BD'+A'BE+A'C'DE \qquad (3\text{-}4)$$

do it

- 刪除*ABC* 時項用到哪一個定理？（提示：令*X* = *AC*。）
- 在此例中，如果使用一般的分配律(3-1) 式以蠻力乘開代數式，會產生162項，其中必須刪除掉158項。

範例：分解的範例

$$
\begin{aligned}
&AC + A'BD' + A'BE + A'C'DE \\
&= \underbrace{AC}_{XZ} + \underbrace{A'}_{X'}(\underbrace{BD' + BE + C'DE}_{Y}) \\
&= (A + BD' + BE + C'DE)(A' + C) \\
&= [\underbrace{A + C'\mathrm{DE}}_{X} + \underbrace{B}_{Y}(\underbrace{D' + E}_{Z})](A' + C) \\
&= (A + B + C'DE)(A + \cancel{C'DE} + D' + E)(A' + C) \\
&= (A + B + C')(A + B + D)(A + B + E)(A + D' + E)(A' + C) \qquad (3\text{-}5)
\end{aligned}
$$

❖結果和(3-4) 式開始推導的式子相同

3.2 互斥或與全等運算

❖ **互斥或**（exclusive-OR）運算（⊕）的定義如下：

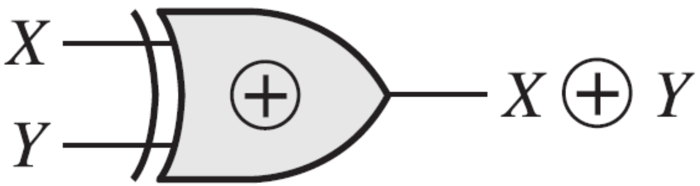
$$0 \oplus 0 = 0 \quad 0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1 \quad 1 \oplus 1 = 0$$

3.2 互斥或與全等運算

- $X \oplus Y$ 的真值表為：

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- $X \oplus Y = 1$若且唯若$X = 1$ 或$Y = 1$，但不能兩者皆是1。

3.2 互斥或與全等運算

$$X \oplus Y = X'Y + XY' \qquad (3\text{-}6)$$

❖ 下列為適用於互斥或邏輯的定理：

$$X \oplus 0 = X \qquad (3\text{-}8)$$

$$X \oplus 1 = X' \qquad (3\text{-}9)$$

$$X \oplus X = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

$$X \oplus X' = 1 \qquad (3\text{-}11)$$

$$X \oplus Y = Y \oplus X \ (\text{交換律}) \qquad (3\text{-}12)$$

$$(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z) = X \oplus Y \oplus Z \ (\text{結合律}) \qquad (3\text{-}13)$$

$$X(Y \oplus Z) = XY \oplus XZ \ (\text{分配律}) \qquad (3\text{-}14)$$

$$(X \oplus Y)' = X \oplus Y' = X' \oplus Y = XY + X'Y' \qquad (3\text{-}15)$$

3.2 互斥或與全等運算

❖ 分配律的證明如下：

$$XY \oplus XZ = XY(XZ)' + (XY)'XZ = XY(X' + Z') + (X' + Y')XZ$$
$$= XYZ' + XY'Z$$
$$= X(YZ' + Y'Z) = X(Y \oplus Z)$$

CENGAGE Learning

3.2 互斥或與全等運算

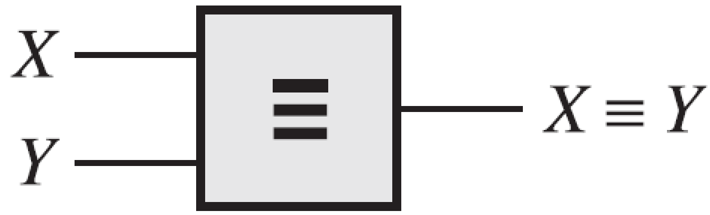
❖ **全等**（equivalent）運算（≡）定義如下：

$$(0 \equiv 0) = 1 \qquad (0 \equiv 1) = 0$$
$$(1 \equiv 0) = 0 \qquad (1 \equiv 1) = 1 \qquad (3\text{-}16)$$

3.2 互斥或與全等運算

❖ $X \equiv Y$的真值表為：

X	Y	$X \equiv Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



❖ $(X \equiv Y) = 1$若且唯若$X = Y$。

3.2 互斥或與全等運算

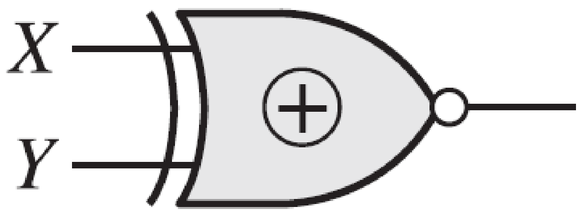
$$(X \equiv Y) = XY + X'Y' \qquad (3\text{-}17)$$

❖全等運算為互斥或運算的補數式：

$$\begin{aligned}(X \oplus Y)' &= (X'Y + XY')' = (X + Y')(X' + Y) \\ &= XY + X'Y' = (X \equiv Y)\end{aligned} \qquad (3\text{-}18)$$

3.2 互斥或與全等運算

❖ 全等邏輯閘的另外一種符號是在互斥或閘加上補數輸出：



$$(X \oplus Y)' = (X \equiv Y)$$

❖ 全等邏輯閘又稱為**互斥反或**（exclusive-NOR）邏輯閘。

3.2 互斥或與全等運算

❖ 例如：

$$A'\oplus B\oplus C=[A'B'+(A')'B]\oplus C$$

$$=(A'B'+AB)C'+(A'B'+AB')C \quad （由 (3\text{-}6) 式）$$

$$=(A'B'+AB)C'+(A'B+AB')C \quad （由 (3\text{-}19) 式）$$

$$=A'B'C'+ABC'+A'BC+AB'C$$

3.3 重合定理

- 在化簡布林代數式時，**重合定理**（consensus theorem）是非常有用的。已知一個$XY + X'Z + YZ$形式的代數式，YZ 項是多餘的且可以被刪除，因而形成等效的代數式$XY+X'Z$。
- 被刪除的那一項被稱為**重合項**（consensus term）。已知一對代數項，其中某個變數出現在一個代數項中，其補數出現在另一個代數項中，則將兩個代數項相乘之後，去掉所選的變數及其補數就形成重合項。

3.3 重合定理

❖ (2-18) 式的重合定理如下：

$$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z \qquad (3\text{-}20)$$

❖ (2-18D) 式重合定理之對偶形式如下：

$$(X + Y)(X' + Z)(Y + Z) = (X + Y)(X' + Z) \qquad (3\text{-}21)$$

範例

$$A'C'D + A'BD + \cancel{BCD} + ABC + ACD' \qquad (3\text{-}22)$$

- 首先，消去所示的*BCD*。（為何它可以被消去呢？）
- 現在*BCD* 已被刪除了，它已經不存在，所以不能用它來消去其他項。檢查所有的項對，顯示無法再利用重合定理來消去更多的代數項。

範例

- 我們重來一次：

$$A'C'D + \cancel{A'BD} + BCD + \cancel{ABC} + ACD' \qquad (3\text{-}23)$$

- 這一次不消去*BCD*；換一種方式，利用重合定理刪掉另外兩項。做完之後，觀察到*BCD* 無法被消去；注意若先消去*BCD*，則代數式化簡成為四項，但是若不先消去*BCD*，則代數式可以化簡成為三項。
- 有時候藉由簡單的刪除項目，無法直接將代數式的項目化簡成最少。這時候就必須先利用重合定理加入某個代數項，然後利用所加入的代數項去消去其他的項。例如，

範例

- 考慮代數式：

$$F = ABCD + B'CDE + A'B' + BCE'$$

- 假如先在F中加入重合項$ACDE$，可以得到：

$$F = ABCD + B'CDE + A'B' + BCE' + ACDE$$

- 然後，就可以利用重合定理消去$ABCD$和$B'CDE$，而F簡化成：$F = A'B' + BCE' + ACDE$
- 在最後的代數式中，$ACDE$項不再是多餘的且不能被消去

3.4 交換代數式之代數化簡

1. **合併代數項**（combining terms）。利用定理$XY + XY' = X$合併兩項。
2. **消去代數項**（eliminating terms）。盡可能利用$X + XY = X$消去多餘項；接著嘗試利用重合定理（$XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$）消去每個重合項。
3. **消去文字字元**（eliminating literals）。利用定理$X + X'Y = X + Y$刪除多餘的文字字元。
4. **加入多餘項**（adding redundant terms）。可經由多種方式來產生多餘項，例如：加入xx'，乘上$(x + x')$，加入yz到$xy + x'z$，或加入xy到x中。

範例

$$
\begin{aligned}
& WX + XY + X'Z' + WY'Z' && (\text{利用重合定理加入}WZ') \\
&= WX + XY + X'Z' + WY'Z' + WZ' && (\text{消去}WY'Z') \\
&= WX + XY + X'Z' + WZ' && (\text{消去}WZ') \\
&= WX + XY + X'Z' && \text{(3-27)}
\end{aligned}
$$

範例

$$\underbrace{A'B'C'D' + A'BC'D'}_{①A'C'D'} + A'BD + \underset{②}{\cancel{A'BC'D}} + ABCD + ACD' + B'CD'$$

$$= A'C'D' + BD\underset{③}{(A' + AC)} + ACD' + B'CD'$$

$$= A'C'D' + A'BD + \underbrace{BCD + ACD'}_{+ABC④} + B'CD'$$

$$= A'C'D' + \underbrace{A'BD + \cancel{BCD} + \cancel{ACD'} + \overbrace{B'CD' + ABD}^{\text{重合項}ACD'}}_{\text{重合項}BCD}$$

$$= A'C'D' + A'BD + B'CD' + ABC \qquad (3\text{-}28)$$

❖ 在步驟1、2、3 和4中分別使用什麼定理？

3.5方程式正確性的證明

- 判斷一個等式是否正確：
  1. 建立一個真值表且驗證方程式兩邊所有變數值的組合。
  2. 利用各種定理處理等式的一邊直到與另一邊相等為止。
  3. 分別化簡等式的兩邊，直到兩邊的代數式相同。
  4. 若運算為可逆的，則可在等式的兩邊作相同的運算。例如：可以將等式兩邊同取補數，但是不能在等式的兩邊同乘相同的代數式。（因為布林代數中沒有定義除法，所以乘法是不可逆的。）

範例 1

- 證明：

$$A'BD' + BCD + ABC' + AB'D = BC'D' + AD + A'BC$$

- 由左邊開始，首先加入重合項，然後合併代數項，最後利用重合定理消去代數項。

範例 1

$$A'BD' + BCD + ABC' + AB'D$$

$$= A'BD' + BCD + ABC' + AB'D + BC'D' + A'BC + ABD$$

（加入 $A'BD'$ 和 ABC' 的重合項）

（加入 $A'BD'$ 和 BCD 的重合項）

（加入 BCD 和 ABC' 的重合項）

$$= AD + A'BD' + BCD + ABC' + BC'D' + A'BC = BC'D' + AD + A'BC$$

（刪除 $BC'D'$ 和 AD 的重合項）

（刪除 AD 和 $A'BC$ 的重合項）

（刪除 $BC'D'$ 和 $A'BC$ 的重合項）　　(3-30)

範例 2

- 證明下列的等式是正確的：

$$A'BC'D+(A'+BC)(A+C'D')+BC'D+A'BC'$$
$$=ABCD+A'C'D'+ABD+ABCD'+BC'D$$

範例 2

❖ 首先，化簡等式的左邊：

$$A'BC'D+(A'+BC)(A+C'D')+BC'D+A'BC'$$

（利用吸收定理刪除$A'BC'D$）

$$=(A'+BC)(A+C'D')+BC'D+A'BC'$$

（利用 (3-3) 式乘開）

$$=ABC+A'C'D'+BC'D+A'BC'$$

（利用重合定理刪除$A'BC'$）

$$=ABC+A'C'D'+BC'D$$

範例 2

- 現在，化簡等式的右邊：

$$= ABC + A'C'D' + ABD + ABCD' + BC'D$$

- （合併$ABCD$和$ABCD'$）

$$= ABC + A'C'D' + ABD + BC'D$$

- （利用重合定理刪除ABD）

$$= ABC + A'C'D' + BC'D$$

- 因為原始的等式兩邊被分別簡化成相同的代數式，所以證明原始的等式是正確的。