1 Wykład 1 - Przestrzeń probabilistyczna i własności prawdopodobieństwa

Dowody własności prawdopodobieństwa

Niech $A, B, A_1, A_2, ...$ będą zdarzeniami losowymi. Wtedy:

Właściwość 1

$$
\begin{aligned}
P(\emptyset) &= 0 \\
\Omega &= \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \text{ - suma przeliczalna zdarzeń rzołącznych} \\
P(\Omega) &= P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\
1 &= 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\
0 &= P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Właściwość 2

Dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n$, takiego że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n}(A_i) \\
P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + P(\emptyset) + ... = \sum_{i=1}^{n}(A_i)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Właściwość 3

$$
\begin{aligned}
P(A') &= 1 - P(A) \\
\Omega &= P(A') \text{ - skończona suma zdarzeń rozłącznych} \\
P(\Omega)P(A \cup A') &= P(A) + P(A') \\
1 &= P(A) + P(A') \\
P(A') &= 1 - P(A)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Właściwość 4.

$$
\begin{aligned}
P(B - A) &= P(B) - P(A \cap B) \\
B &= (A \cap B) \cup (B - A) \\
P(B) &= P(A \cap B) + P(A - B) \\
P(B - A) &= P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Właściwość 5.

$$
\begin{aligned}
&A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \\
&A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A) \geq 0 \\
&P(B) \geq P(A)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Właściwość 6

Dla dowolnego zdarzenia A

$$\begin{aligned} &P(A) \in [0;1] \\ &P(A) \geq \text{ - z definicji prawdopodobieństwa} \\ &\quad ???dokonczyc \end{aligned} \tag{1.6}$$

Przykład 4.

Rzucamy n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze dokładnie raz wypadnie orzeł?

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{O, R\}\} \tag{1.7}$$

Zbior skończony

$$\overline{A} = 2^n \tag{1.8}$$

A - dokładnie raz wypadnie orzeł

$$A = \{(O, R, \ldots, R), (R, O, R, \ldots, R), \ldots, (R, R, \ldots, R, O)\}, \overline{A} = n \Rightarrow P(A) = \frac{n}{2^n} \tag{1.9}$$

Przykład 5.

Rzucamy moneta symetryczną do momentu pierwszego wypadnięcia reszki. Jakie jest prawdopodobieńtstwo, że liczba rzutów będzie parzysta?

$$\Omega\{R, oR, OOR, \ldots\} \tag{1.10}$$

Zbior przeliczalny

$$\begin{aligned} &A = \{OR, OOOR, OOOOOR\} \\ &P(A) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Przykład 6.

Krzyś i Janusz umawiają sięna kawę na dworcu PKP między 11:00 i 12:00. Osoba, ktora przyjdzie piewsza czeka na drugą 20 minut i jeśli tamta się nie pojawi, odchodzi. Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia A, że Krzyś i Janusz spotakją się?
x - moment przyjścia Krzysia
y - moment przyjścia Janusza

$$\begin{aligned} &\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\} = [0;1] \times [0;1] \\ &|\Omega| = 1 \\ &A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq \frac{1}{3}\} \\ &|A| = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że Krzyśi Janusz przyjdą dokładnie w tym samym momencie?

$$\begin{aligned} &B = \{(x, y) \in \Omega : x = y\} \\ &|B| = 0 \Rightarrow P(B) = 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

ale B nie jest zdarzeniem niemożliwym!

2 Wykład 2

Przykład 1

Obliczyć prawdopodobieństwo, że w losowo wybranej rodzinie z dwojgiem dzieci jest 2 chłopców, jeśli wiadomo, że starsze dziecko jest chłopcem

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(c,c),(d,d),(c,d),(d,c)\} \\ A &= \{(c,c),(c,d)\} \text{ - starsze dziecko jest chopcem} \\ B &= \{(c,c)\} \text{ - w rodzinie jest dwoch chłopcow} \\ P(B) &= \frac{1}{4} \\ P(B|A) &= \frac{1}{2} \text{ - B pod warunkiem A} \\ P(B|A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

stąd definicja 1

Dowód na Tw. 1.3

$$P(A'|B) + P(A|B) = \frac{P(A'\cap B) + P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \tag{2.2}$$

Przykład 2

Żona Janusza podała mu 5 ciasteczek, wśrod których dokładnie jedno jest zatrute i po zjedzeniu tego ciasteczka, zaraża ise wirusem "Matematyka". Jakie jest prawdopodobieństwo, że zarażenie nastąpi po zjedzeniu czwartego ciasteczka. A_i - i-te ciasteczko nie jest zatrute

$$\begin{aligned} P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4') &= P(A_1)\cdot P(A_1|A_2)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot P(A_4'|A_1\cap A_2\cap A_3) \\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dowód

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{i\in J}(A\cap A_i) \text{ - suma zdarzeń rozłącznych} \\ P(A) &= P(\bigcup_{i\in J}(A\cap A_i)) \\ &= \sum_{i\in J} P(A\cap A_i) \\ &= \sum_{i\in J} P(A|A_i)\cdot P(A_i) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Przykład 3

W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy 1 kule i wyrzucamy ją, nie oglądając. Następnie losujemy druga kulę Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga wylosowana kula będzie biała?

$$
\begin{aligned}
B_2 - &\ \text{wylosowanie kuli białej w drugim losowaniu} \\
P(B_2) &= \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{27}{45}=\frac{3}{5} \\
P(B2) &= P(B_2)\cdot P(B_2|B_1)+P(C_1)\cdot P(B_2|C_1) \\
P(B_1|B_2) &= \frac{P(B_1\cap B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(B_2|B_1)\cdot P(B_1)}{P(B_2)} \\
P(B_1|B_2) &= \frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{9}
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Jesli znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg, to korzystamy z wierdzenie Bayesa.

Przykład 4.

Wsród 33 monet jest jedna z dwoma orłam, (pozostałe są symteryczne). Wylosowano jedną monetę i rzucono nią 5 razy. Za każdym razem wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano monetę z dwoma orłami.
S - wylosowanie monety symetrycznej
O_5 - w każdym rzucie wypadł orzeł

$$
\begin{aligned}
P(S'|O_5) &= \frac{P(O_5|S')\cdot P(S')}{P(O_5)} \\
P(O_5) &= P(O_5|S)\cdot P(S)+P(O_5|S')\cdot(S') \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{32}{33}+1\cdot\frac{1}{33} \\
&= \frac{2}{33} \\
P(S'|O_5) &= \frac{1\cdot\frac{1}{33}}{\frac{2}{33}}=\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Niezależność zdarzeń - dowód definicji 3

$$
P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A) \tag{2.7}
$$

Definicja 4

A i B są niezależne, A i C są niezależne, B i C są niezależne - wtedy A, B, C sa niezależne parami.

$$
P(A\cap B\cap C\cap)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(CP \tag{2.8}
$$

Uwaga! Z niezależności parami nie wynika niezależnosc zdarzeń.

Przykład 5

Mamy 4 kolegów: Krzysztofa, Janusza, Jarosława i Romana.
Krzysztof umie tylko mówić
Janusz umie tylko pisać

Roman umie tylko śpiewać
Jarosław umie wszystko

Wprowadzamy zdarzenia

$$\begin{aligned} A - &\ \text{wylosowana osoba umie mówić} \\ B - &\ \text{wylosowana ososba umie pisać} \\ C - &\ \text{wylosowana ososba umie śpiewać} \\ P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) &= \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) &= \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Zdarzenia A, B, C sa niezależne parami, ale

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{ A, B, C nie sa zależne} \tag{2.11}$$

Uwaga, z tego że

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \tag{2.12}$$

nie wynika niezależnośc parami

Przykład 6

Niech

$$\Omega = [1; 0] \times [1; 0] \tag{2.13}$$

a P będzie prawdopodobieństwem geometrycznym.
Wprowadźmy zdarzenie:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \Omega : x \leq \frac{1}{2}\} \\ B &= \{(x, y) \in ; lom : y \leq \frac{1}{2}\} \\ C &= \{(x, y) \in \Omega : y \leq y\} \\ P(A \cap B \cap C) &= \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$P(A \cap C) = \frac{3}{8} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{ A i C nie sa niezależne (sa zależne)} \tag{2.15}$$

zdarzenia A, B, C nie sa niezależne parami

Schemat Bernoulliego

3 Wykład 3 - zmienne losowe jednowymiarowe

Przykład 1.

Rzucamy 1 raz symetryczną kostką. Jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, wygrywamy 100 zł. Jesli wypadnie "1", przegrywamy 1000 zł. W pozostąłych przypadkach ani nie wygraywamy, ani nie przegrywamy.

$$\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$$
$$x(\omega) = \begin{cases} 100 & ,\omega \in \{2,4,6\} \\ -1000 & ,\omega = 1 \\ 0 & ,\omega \in \{3,5\} \end{cases} \tag{3.1}$$

(Przykład zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym)

Przykład 2.

Czekamy na autobus mający przyjechać w ciągu godziny. Niech X - czas oczekiwania

$$\Omega = [0;1]\,, x(\omega) = \omega \tag{3.2}$$

(Przykład zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym)

Definicja 1

To oznacza, że przeciwobraz jest zdarzeniem losowym

Ad prz. 1

1. Wyznaczamy funkcję prawdopodobieństwa

$$\begin{aligned} P(x = 100) = P(\{\omega : \omega \in \{2,4,6\}\}) = \frac{1}{2} \\ P(x = 1000) = P(\{\omega : \omega \in \{1\}\}) = \frac{1}{6} \\ P(x = 0) = P(\{\omega : \omega \in \{3,5\}\}) = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.3}$$

   funkcje prawdopodobieństwa

2. Wyznaczamy dystrybuantę

$$F_x(t) = \sum_{x_i \le t} P(x = x_i) = \begin{cases} 0, & t \le 1000 \\ P(x = 1000) = \frac{1}{6}, & -1000 \le t \le 0 \\ P(x = -1000) + P(x = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, & 0 \le t \le 100 \\ P(x = -1000) + P(x = 0) + p(x = 100) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, & t \ge 100 \end{cases} \tag{3.4}$$

3. Jak na podstawie dystrybuanty wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa? [wykres]

$$P(x = -1000) = F_x(-1000) - \lim_{t \to 1000^-} F(t) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6} \tag{3.5}$$

Ad. prz. 2

[wykres]

$$X^{-1}(-\infty, t] = \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ [0; t], & 0 \leq t \leq 1 \\ \Omega, & t \geq 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1? \end{cases} \tag{3.7}$$

Dowód 3.

$$\begin{aligned} P(a < x < b) &= P(\{x < b\} - \{x \leq a\} \\ &= P(x < b) - P(x \leq a) \\ &= P(x \leq b) - P(x = b) - P(x \leq a) \\ &= F_x(b) - F_x(b) + \lim_{t \to b^-} F_x(t) - F_x(a) \\ &= \lim_{t \to b^-} F_x(t) - F_x(a) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ad. prz. 2.

Ile wynosi prawdopodobieństwo, ze będziemy czekać conajmniej $\frac{1}{2}$ h i nie wiecej niż 45 minut?

$$P(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}) = F_x\left(\frac{3}{4}\right) - \lim_{t \to \frac{1}{2}^-} F_x(t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{3.9}$$