

作业书写注意事项

1. 规范书写算法是交流算法的重要手段，是评分的重要依据；
2. 算法应先分析问题特征、再表述算法思想、然后写伪代码、最后是分析；
3. 算法伪代码不要依赖于具体的程序设计语言（参照课件中的例子）

第3章习题

(1-11 题为必做题，11-16 选做两题即可)

- 3.1 根据表达式 $a^{2k}=a^k \cdot a^k$ 和 $a^{2k+1}=a^k \cdot a^k \cdot a$ 设计分治(或递归)算法求解下列问题，并分析算法的时间复杂度。

- (a)输入实数 a 和自然数 n ,输出实数 a^n ;
- (b)输入实数矩阵 A 和自然数 n , 输出实数矩阵 A^n .

- 3.2 斐波那契数列满足递归方程 $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$, 其中 $F(0)=0, F(1)=1$ 。

- (a)分别用数学归纳法和第2章例19的结论，证明：

$$(1) F(n+2)=1+\sum_{i=0}^n F(i); \quad (2) F(n+2) \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n;$$

- (b)设计算法根据递归方程计算 $F(n)$ ，将时间复杂度表达成 n 的函数；
- (c)根据第2章例19中 $F(n)$ 的解析表达式，设计算法计算 $F(n)$ ，将时间复杂度复杂性表达成 n 的函数，并指明计算机运行该算法时可能遇到的问题。

- (d)根据表达式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(n-1) \\ F(n-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix}$ 和习题3.1(b)的算法，设计算法计算 $F(n)$ ，将时间复杂度复杂性表达成 n 的函数。

- (e)比较(b),(c),(d)得到的算法。

- 3.4 给定平面上 n 个点构成的集合 S ，试设计一个分治算法输出 S 的三个点，使得以这三个点为顶点的三角形的周长达到最小值。(提示：模仿最邻近点的分治过程)

- 3.5 给定平面上 n 个白点和 n 个黑点，试设计一个分治算法将每个白点与一个黑点相连，使得所有连线互不相交，分析算法的时间复杂度。(提示：划分时类似于 GrahamScan 算法考虑极角，确保子问题比较均匀)

- 3.6 给定凸多边形 p_1, p_2, \dots, p_n (边界逆时针顺序) 和 n 个点 q_1, q_2, \dots, q_n ，试设计一个分治算法计算 q_1, q_2, \dots, q_n 中位于凸多边形 p_1, p_2, \dots, p_n 内部的点的个数，使其时间复杂度是 n^2 的严格低阶函数。

- 3.7 设 $X[0:n-1]$ 和 $Y[0:n-1]$ 为两个数组，每个数组中的 n 个均已排好序，试设计一个 $O(\log n)$ 的算法，找出 X 和 Y 中 $2n$ 个数的中位数，并进行复杂性分析。

- 3.8 设 $A[1:n]$ 是由不同实数组成的数组，如果 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$ ，则称实数对 $(A[i], A[j])$ 是该数组的一个反序。如，若 $A=[3,5,2,4]$ ，则该数组存在3个反序(3,2)、(5,2)和(5,4)。反序的个数可以用来衡量一个数组的无序程度。设计一个分治算法（要求时间复杂度严格低于 n^2 ），计算给定数组的反序个数。

- 3.9 给定一个由 n 个实数构成的集合 S 和另一个实数 x ，判断 S 中是否有两个元

