

Estudio Computacional del Experimento de la Doble Rendija.

Juan José Martínez Rodríguez¹

¹*jmartinez5123@alumno.uned.es*

53450486G

Física Cuántica I

Resumen

El experimento de la doble rendija, realizado por primera vez por Thomas Young en 1802 para probar la naturaleza ondulatoria de la luz, es un experimento clave para mostrar uno de los conceptos fundamentales de la física cuántica, que las partículas exhiben asimismo naturaleza ondulatoria. Mediante un estudio computacional de la teoría asociada a los fundamentos cuánticos, pretendemos comprobar que los resultados de las simulaciones están en concordancia con los resultados experimentales.

Palabras clave: *doble rendija, física cuántica, partículas, ondas.*

1. Introducción

Durante el siglo XVIII la idea prevalente sobre la naturaleza de la luz era la visión corpuscular sostenida por Newton en su famoso tratado sobre óptica [[1]], bajo la cual se mantenía que la luz se componía de corpúsculos que se desplazaban siguiendo la mecánica clásica newtoniana a una velocidad finita. En ese contexto surgieron algunos experimentos, a principios del siglo XIX, que pusieron en entredicho la visión corpuscular de la luz. Entre ellos se hallaba el experimento de la doble rendija o experimento de Young, debido al polímata inglés Thomas Young.

La idea de Young era sencilla, si la luz realmente consistía de corpúsculos desplazándose en forma de proyectiles desde el punto emisor al punto receptor, el resultado de lanzar dichos corpúsculos a través de una rendija, haciéndolos impactar una distancia después con una película fotosensible, debería observarse un patrón de impactos en la pantalla correspondiente al tamaño y forma de la rendija. Sin embargo, dicho patrón no se materializó, y en su lugar se observó un patrón que encajaba más con un patrón distinto. Como podemos observar en la Figura 1, el patrón observado corresponde a un patrón de difracción.

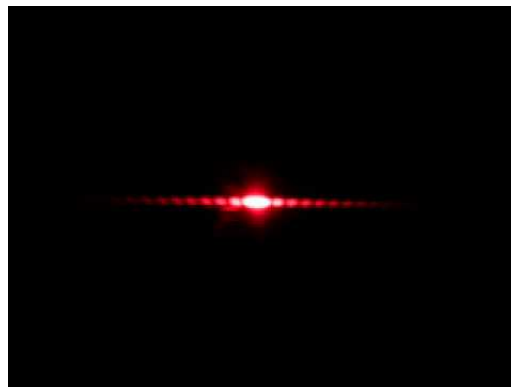


Figura 1: Patrón de difracción de una rendija.

En el caso de usar dos rendijas, en vez de una, experimentalmente se observó que el efecto era aún más acusado, como muestra la Figura 2. Estos patrones se enfrentaban directamente con la visión newtoniana de la época que atribuía naturaleza corpuscular a la luz. La explicación de Young a este suceso fue explicar la luz mediante una naturaleza ondulatoria, debido a la cual, la diferencia entre intensidades en el patrón vendría explicada por la interferencia, constructiva y destructiva, de las dos ondas provenientes de los frentes de ondas resultantes al pasar la onda original lumínica por cada una de las rendijas.

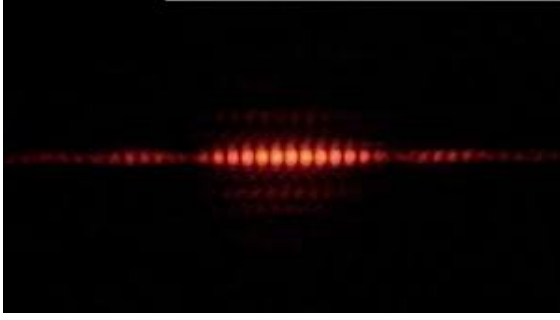


Figura 2: Patrón de difracción de doble rendija.

Cuando, casi un siglo después, el efecto fotoeléctrico fue descubierto y explicado [[2]] por Albert Einstein, se recuperó la naturaleza corpuscular de la luz, al menos durante las circunstancias descritas en dicho efecto experimental. Fue en 1924, bajos los trabajos de Louis de Broglie, cuando ambas naturalezas se aunaron bajo una visión unitaria, la llamada dualidad onda-corpúsculo de la luz [[3]]. En estos trabajos, de Broglie argumentó que una partícula, de cualquier tipo de materia, y no sólo las de las partículas constituyentes de la luz, los fotones, viajando en el espacio con un cierto momento lineal p y energía E tiene asociada una onda, que se llamó onda de materia, cuyo vector de onda se describe mediante la relación

$$k = \frac{1}{\hbar}p \quad (1)$$

mientras que su frecuencia

$$w = \frac{1}{\hbar}E \quad (2)$$

Mediante ambas relaciones, podemos considerar la longitud de onda de la onda de materia, conocida como longitud de onda de Broglie, como

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{h}{|p|} \quad (3)$$

Dicha dualidad onda-corpúsculo fue demostrada experimentalmente tres años más tarde gracias a los trabajos de G.P. Thomson por un lado, y de C.J. Davisson y L.H. Germer por otro, mediante diversas técnicas para difractar electrones. En 1961, el trabajo experimental de C. Jönsson permitió demostrar la dualidad onda-corpúsculo del electrón mediante el uso de haces de electrones. Finalmente, en 1974, los físicos P.G. Merli, G.F. Missiroli y G. Pozzi repitieron el experimento con electrones individuales, en vez de haces de electrones, demostrando la predicción de la física cuántica de que cada electrón atravesando las rendijas interfiere consigo mismo, mostrando el famoso patrón de interferencia de dos ondas.

2. Desarrollo matemático del experimento.

En esta sección detallaremos matemáticamente el experimento de la doble rendija, cuando se realiza so-

bre ondas de materia, para probar experimentalmente la difracción de partículas. El objetivo es enumerar los fundamentos matemáticos que definen el experimento, fundamentos que usaremos en la siguiente sección para simular computacionalmente el mismo. En la siguiente sección se procederá a un análisis de los resultados obtenidos en función de los parámetros usados, seguida de una sección de conclusiones sobre el experimento y su importancia para el mundo de la física cuántica.

Construiremos, de manera teórica, el experimento partiendo primero de una única rendija, por la cual se lanzarán partículas de materia, que en este caso podemos considerar electrones, impactando con una pantalla que recoge los impactos de las partículas, situada una distancia y de la rendija.

Sea dicha ecuación de onda

$$\Psi_{in}(r, t) = \Psi_0 e^{i(ky - wt)}$$

donde

$$k = \frac{p_0}{\hbar}$$

$$w = \frac{E}{\hbar} = \frac{p_0^2}{2m\hbar}$$

De acuerdo al principio de Huygens-Fresnel, en cada punto $y > 0$ la onda resultante es la superposición de ondas esféricas secundarias emitidas desde todos los puntos de la abertura de la rendija, de manera que la onda refractada será, siempre y cuando $y \gg \lambda$

$$\Psi(r, t) = \frac{k\Psi_0 e^{-iwt}}{2\pi i} \int_S \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} d^2 r' \quad (4)$$

Si para nuestro experimento, consideramos una rendija de longitud l , anchura b muy pequeña y bajo la suposición de que $l \gg y \gg \lambda$, el resultado es la onda cilíndrica

$$\Psi(r, t) = \frac{e^{-iwt/4} kb \Psi_0 e^{i(ky - wt)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \equiv C \frac{e^{i(ky - wt)}}{\sqrt{kr}} \quad (5)$$

donde

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

es la distancia entre el punto r y la rendija.

Para estudiar la difracción a través de la rendija, podemos dividir la misma en pequeñas franjas o subrendijas de anchura dz' , de manera que cada una de ellas contribuya de la siguiente manera a la ecuación de onda

$$d\Psi(r, t) \equiv C \frac{e^{i(ks' - wt)}}{\sqrt{ks'}} dz'$$

donde

$$ks' = k\sqrt{y^2 + (z' - z)^2} = k\sqrt{r^2 - 2zz' + (z')^2}$$

con $z' \in [-b/2, +b/2]$ y siendo $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ la distancia al eje central de la rendija.

Para puntos muy alejados de la rendija, donde $y \gg b$, el termino $(z')^2 - 2zz'$ es pequeño comparado con y , permitiendo el desarrollo en serie de la raíz cuadrada

$$ks' = kr - \frac{kzz'}{r} + \frac{k(z')^2}{2r}$$

y basándonos en el hecho de la cota superior

$|z'| \leq \frac{b}{2}$, y que $r \geq y$, podemos despreciar el último término si se cumple la condición del régimen óptico de Fraunhofer

$$\frac{kb^2}{8y} \sim \frac{b^2}{\lambda y} \ll 1$$

Aproximando el diferencial de función de onda como

$$d\Psi(r, t) \simeq C \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{\sqrt{kr}} e^{-ikzz'/r} dz'$$

lo cual nos permite integrar la función de la siguiente manera

$$\Psi(r, t) = \int_{b/2}^{b/2} d\Psi(r, t)$$

$$\Psi(r, t) \simeq C \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{\sqrt{kr}} \int_{b/2}^{b/2} e^{-ikzz'/r} dz'$$

y mediante el uso de la función sinc, que matemáticamente se define como

$$\text{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$$

obtener

$$\Psi(r, t) = C \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{\sqrt{kr}} \text{sinc}\left(\frac{kbz}{2r}\right) \quad (6)$$

La densidad de impactos sobre la pantalla, a una distancia y de la rendija, será proporcional a $|\Psi(r, t)|^2$ llegando finalmente a la expresión que nos permite obtener la intensidad, siendo esta

$$I(r) \propto \frac{1}{r} \text{sinc}\left(\frac{kbz}{2r}\right) = \frac{1}{r} \text{sinc}\left(\frac{\pi bz}{\lambda y}\right) \quad (7)$$

donde hemos hecho uso de que: $y \gg \lambda$ y también $y \gg b^2/\lambda \gg b$.

Una vez construido el andamiaje matemático para el experimento en el caso de una simple rendija, podemos extenderlo para el caso de doble rendija.

Sea D la distancia entre los centros de ambas rendijas, b la anchura de cada rendija, y la distancia de la pantalla a las rendijas, z la distancia al centro de la pantalla y λ la longitud de onda de la onda de materia asociada a la partícula en cuestión, considerando que cada una de las dos rendijas produce un nuevo frente de ondas, por el ya mencionado principio de Huygens-Fresnel, obtenemos que la onda resultante de la interferencia coherente de ambas ondas es

$$\Psi(r, t) \simeq C e^{-i\omega t} \left[e^{ikr_1} \text{sinc}\left(\frac{kb(z - \frac{D}{2})}{2y}\right) + e^{ikr_2} \text{sinc}\left(\frac{kb(z + \frac{D}{2})}{2y}\right) \right]$$

Podemos despreciar los términos $D/2$ en cada función sinc por el hecho de ser estos muy pequeños, resultando

$$\Psi(r, t) \simeq C e^{-i\omega t} (e^{ikr_1} + e^{ikr_2}) \text{sinc}\left(\frac{kbz}{2y}\right)$$

De igual manera que obtuvimos la densidad de impactos para una rendija, podemos obtener la densidad de impactos en la pantalla para dos rendijas como

$$I(z) \propto |\Psi(r, t)|^2 \propto |e^{ikr_1} + e^{ikr_2}|^2 \text{sinc}^2\left(\frac{2\pi z}{z_0}\right)$$

$$I(z) = 4 \cos^2\left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right] \text{sinc}^2\left(\frac{kbz}{2y}\right)$$

Finalmente, usando que $r_2 - r_1 \simeq Dz/y$ y $k = 2\pi/\lambda$ llegamos al resultado

$$I(z) \propto \cos^2 \left(\frac{\pi D z}{\lambda y} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi b z}{\lambda y} \right) \quad (8)$$

Es esta ecuación la que definirá la implementación computacional de nuestra simulación.

3. Implementación computacional del experimento.

Para la simulación del experimento se ha elegido Python como lenguaje computacional. La principal razón para esta elección, por encima de otros lenguajes de cálculo simbólico como MATLAB o Maxima, responde únicamente al existente conocimiento previo de dicho lenguaje por parte de los autores.

Para facilitar la reproducción del experimento, el código ha sido implementado en un jupyter notebook. Siguiendo buenas prácticas de código, tanto los nombres de las variables y funciones, como los comentarios, usan el inglés como lenguaje. El código está disponible en un repositorio de acceso abierto en ¹

La principal librería usada para codificar el experimento ha sido numpy. Esta librería nos permite generar un array de puntos donde evaluaremos la función (8), así como darnos acceso a las funciones trigonométricas de la misma. Un apunte digno de reseñar es que en numpy, la implementación general de la función sinc está normalizada a un factor de normalización igual a π , con lo que es necesario dividir el resultado por ese mismo factor para evitar esta normalización a un factor que no nos interesa.

El código se compone de una función que codifica la ecuación (8), y una iteración sobre un rango de valores para las distintas variables: anchura de las rendijas, separación entre las mismas, separación de las rendijas a la pantalla y longitud de onda de la onda de materia asociada a la partícula.

Los resultados de dichos experimentos se incluyen y discuten en la siguiente sección. Dichos resultados han sido graficados mediante la librería matplotlib. Para una apreciación más profunda entre las diferencias de los resultados de nuestra simulación y los resultados experimentales, invitamos al lector a consultar el epígrafe del apartado 3.5, referente a la difracción de partículas, en [4], donde pondrá encontrar algunas puntualizaciones para un tratamiento sobre dichas discrepancias, que son mínimas y explicable.

4. Resultados.

Realizamos el experimento modificando la lista de variables, de manera que por cada repetición del expe-

rimento realizaremos tres iteraciones, correspondientes a variar una de las variables entre tres posibles valores, manteniendo fijas el resto de variables.

Las variables usadas en el experimento y sus rangos de valores, son:

- Anchura de las rendijas, de valores: 100 μm , 150 μm y 200 μm .
- Longitudes de onda, de valores: 250 nm, 500 nm y 750 nm.
- Distancia de las rendijas a la pantalla, de valores: 0.3 m, 0.5 m y 1 m.
- Distancia entre las rendijas, de valores: 1 mm, 3 mm y 0 mm.

Variando la anchura de las rendijas podemos observar como la zona de incidencia de máxima amplitud se vuelve más estrecha, es decir, se concentra en un área menor, localizada en torno al centro de la pantalla, según aumenta la anchura de las rendijas. De similar manera ocurre con los diferentes máximos de la función de onda.

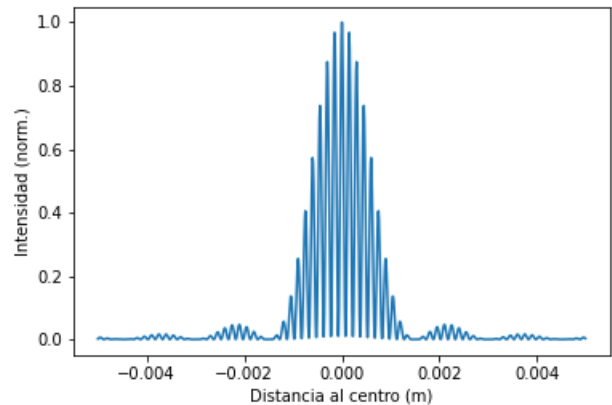


Figura 3: Patrón de difracción de doble rendija. Anchura de las rendijas de 100 μm

¹https://github.com/jjmartinezro/double_slit_particle_diffraction

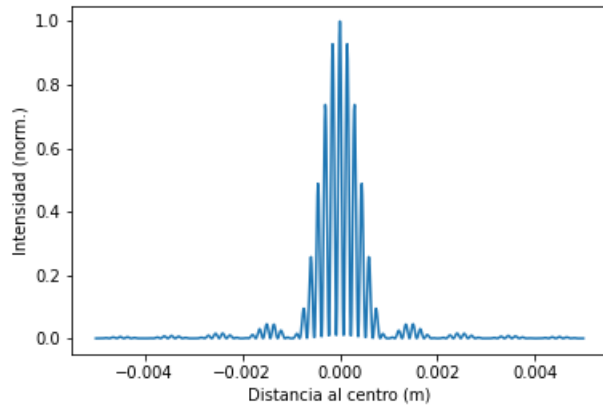


Figura 4: Patrón de difracción de doble rendija. Anchura de las rendijas de $150\ \mu\text{m}$

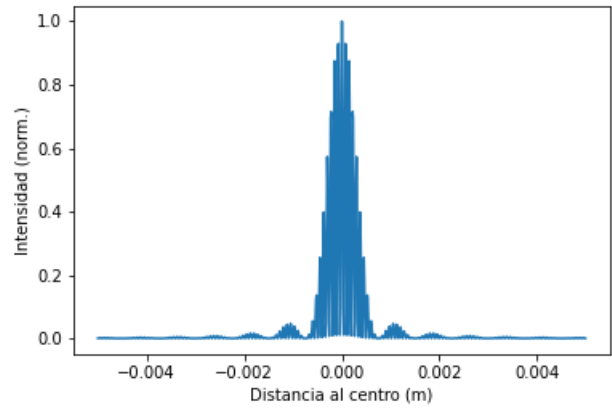


Figura 6: Patrón de difracción de doble rendija. Longitud de onda de $250\ \text{nm}$

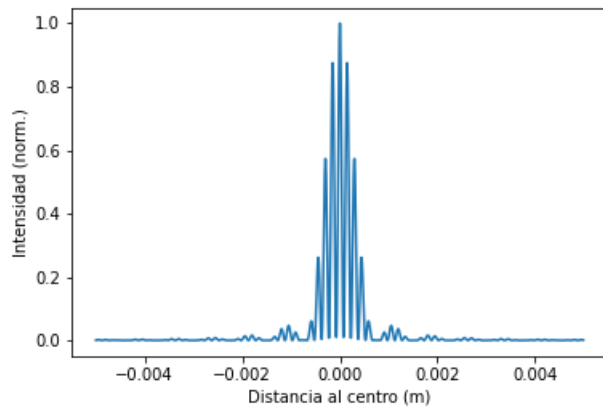


Figura 5: Patrón de difracción de doble rendija. Anchura de las rendijas de $200\ \mu\text{m}$

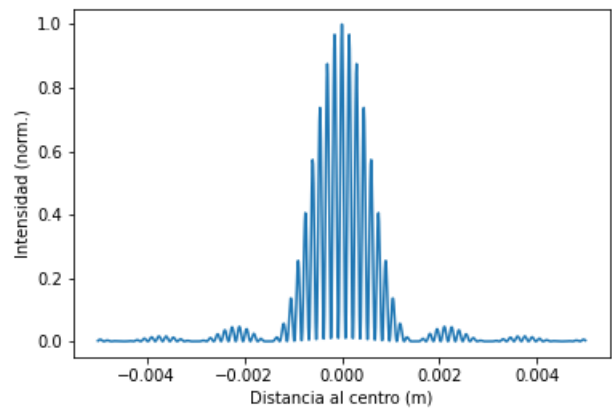


Figura 7: Patrón de difracción de doble rendija. Longitud de onda de $500\ \text{nm}$

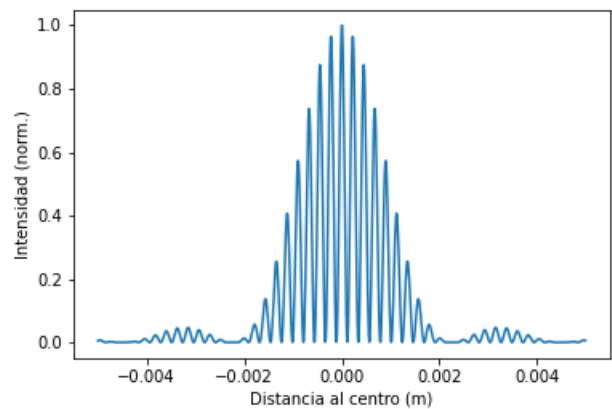


Figura 8: Patrón de difracción de doble rendija. Longitud de onda de $750\ \text{nm}$

Variando la longitud de onda de la onda incidente, que resulta en una variación de los dos frentes de onda producidos por las rendijas, podemos observar como la zona de incidencia de máxima amplitud se vuelve más ancha, es decir, se concentra en un área mayor, localizada en torno al centro de la pantalla, según aumenta la longitud de la onda.

Variando la distancia de las rendijas a la pantalla

fotosensible podemos observar como la zona de incidencia de máxima amplitud se vuelve más ancha, es decir, se concentra en un área mayor, localizada en torno al centro de la pantalla, según aumenta la distancia a la que colocamos la pantalla fotosensible de las rendijas. En cierto sentido, podemos decir que la onda resultante de la interferencia coherente se esparce en el espacio.

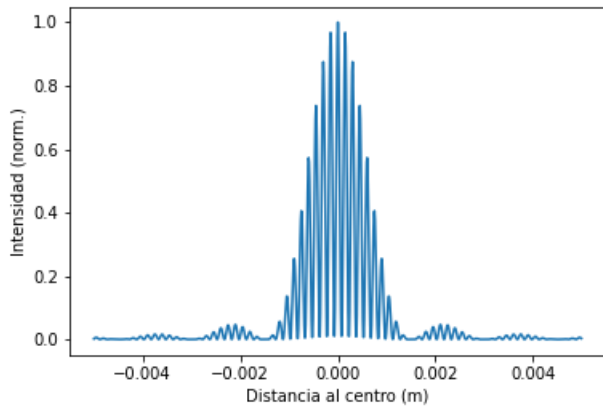


Figura 9: Patrón de difracción de doble rendija. Distancia de las rendijas a la pantalla de 0.3 m

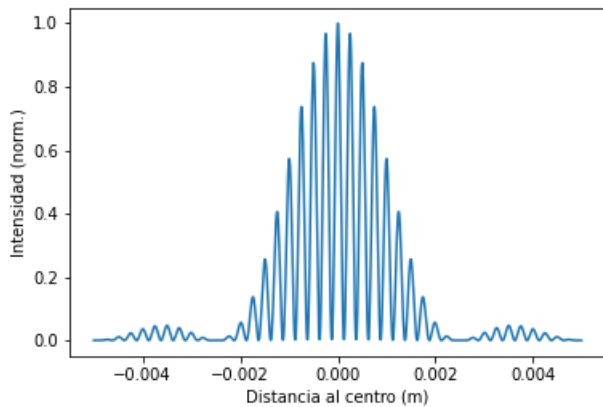


Figura 10: Patrón de difracción de doble rendija. Distancia de las rendijas a la pantalla de 0.5 m

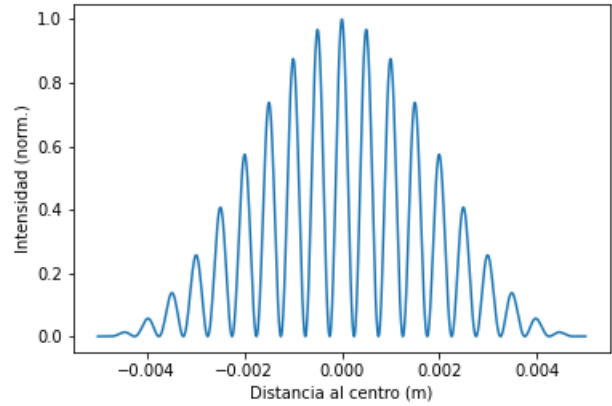


Figura 11: Patrón de difracción de doble rendija. Distancia de las rendijas a la pantalla de 1 m

Por último, variando la distancia entre las rendijas podemos observar como la intensidad se describe, según aumenta la distancia entre rendijas, por una función envolvente más densa. En última instancia, en la tercera iteración de este experimento, hemos usado una distancia nula entre las rendijas, para comprobar que en el caso equivalente al tener una sola rendija, el patrón de interferencia observado concuerda con los datos experimentales para una sola rendija, como puede verse en la gráfica.

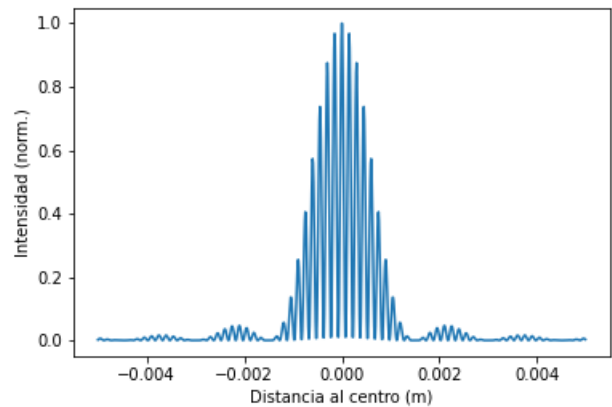


Figura 12: Patrón de difracción de doble rendija. Distancia entre las rendijas de 1 mm

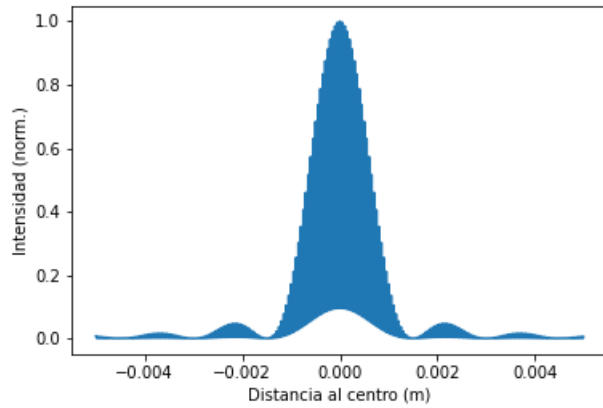


Figura 13: Patrón de difracción de doble rendija. Distancia entre las rendijas de 3 mm

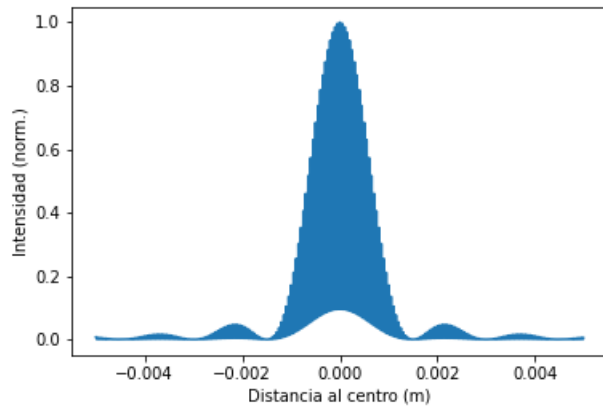


Figura 14: Patrón de difracción de doble rendija. Distancia entre las rendijas de 0 mm

5. Conclusiones.

Hemos podido comprobar mediante este experimento computacional, como se pueden simular, mediante el uso de lenguajes de programación de alto nivel (Python) y librerías específicas para cálculo matemático (numpy), los resultados del experimento de la doble rendija, un experimento crucial para mostrar uno de los principios básicos de la física cuántica, que la materia no sólo exhibe naturaleza corpuscular, sino que también exhibe naturaleza ondulatoria.

Referencias

- [1] *Opticks, or, a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections, and Colours of Light*. Newton, I. 1704.
- [2] "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt". *Annalen der Physik* Einstein, A. 1905.
- [3] *Recherches sur la théorie des quanta*. *Ann. de Physique* de Broglie, L. 1924.
- [4] "Física Cuántica I. Universidad Nacional de Educación a Distancia González, P.G., Bermejo, J.E.A., Sanz, J.J.G. 2012.