<u>ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2</u>

Εργασία στον Διακριτό μετασχηματισμό Fourier-DFT

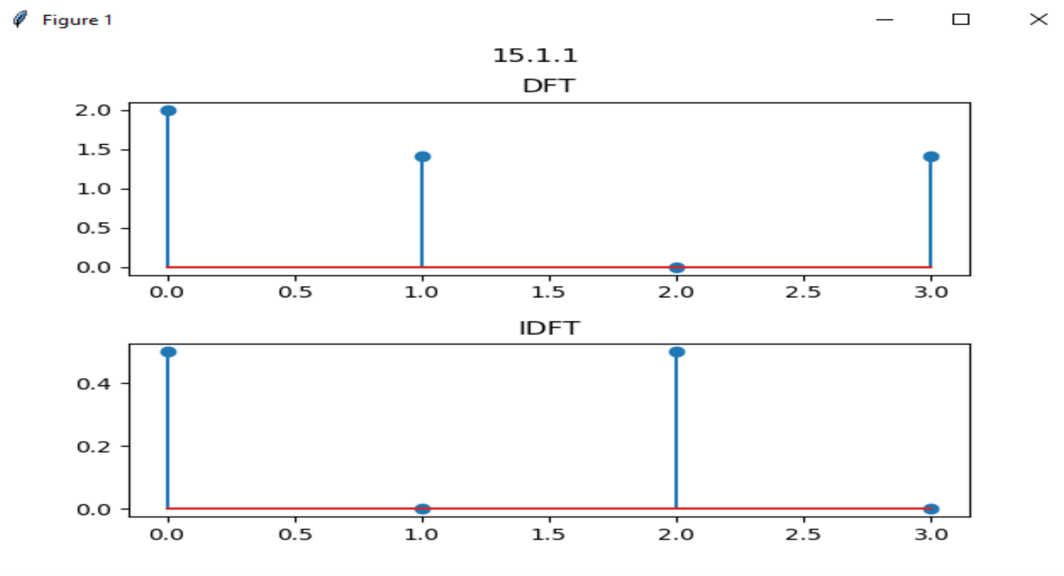
Εξάμηνο: 6^{ο}

Μέλη : Απατσίδης Ιωάννης – 2908
Ζαγόρας Οδυσσέας – 2902

Στην εργασία αυτή υλοποιήθηκαν σε python3 οι λυμένες και άλυτες ασκήσεις του Κεφαλαίου 15 του ηλεκτρονικού βιβλίου(Διακριτός μετασχηματισμός Fourier). Τα αρχεία κώδικα έχουν το αντίστοιχο όνομα των ασκήσεων που υλοποιούν (π.χ. 15.1.1).Σε κάθε .py αρχείο υπάρχει και το plot των αποτελεσμάτων. Έγινε χρήση των βιβλιοθηκών cmath , math , numpy για αριθμητικές πράξεις με ημίτονα ,συνημίτονα ,εκθετικά και μεταξύ πινάκων. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη matplotlib για τα plot. Δεν χρησιμοποιήθηκαν έτοιμες συναρτήσεις dft , fft αλλά υλοποιήθηκαν ξεχωριστά σε κάθε αρχείο από εμάς. Επίσης Ασκήσεις που λύνονται με ιδιότητες στο χαρτί λύθηκαν προγραμματιστικά με ορισμό. Αποδείξεις και θεωρητικές ασκήσεις (όπως Θεώρημα Parseval ,15.4.6,15.5.2) δεν υλοποιήθηκαν. Η δεκαδική ακρίβεια στα αποτελέσματα είναι με βάση αυτήν των έτοιμων συναρτήσεων στην python. Για παράδειγμα αποτέλεσμα όπως 2.334455e-16 θεωρείται ότι είναι 0.   Για την παρουσίαση των DFT και IDFT χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση absolute για τον υπολογισμό των μέτρων μιγαδικών αριθμών και βάσει αυτών έγιναν τα plot τους. Δηλαδή γίνεται plot το μέτρο του κάθε μιγαδικού.

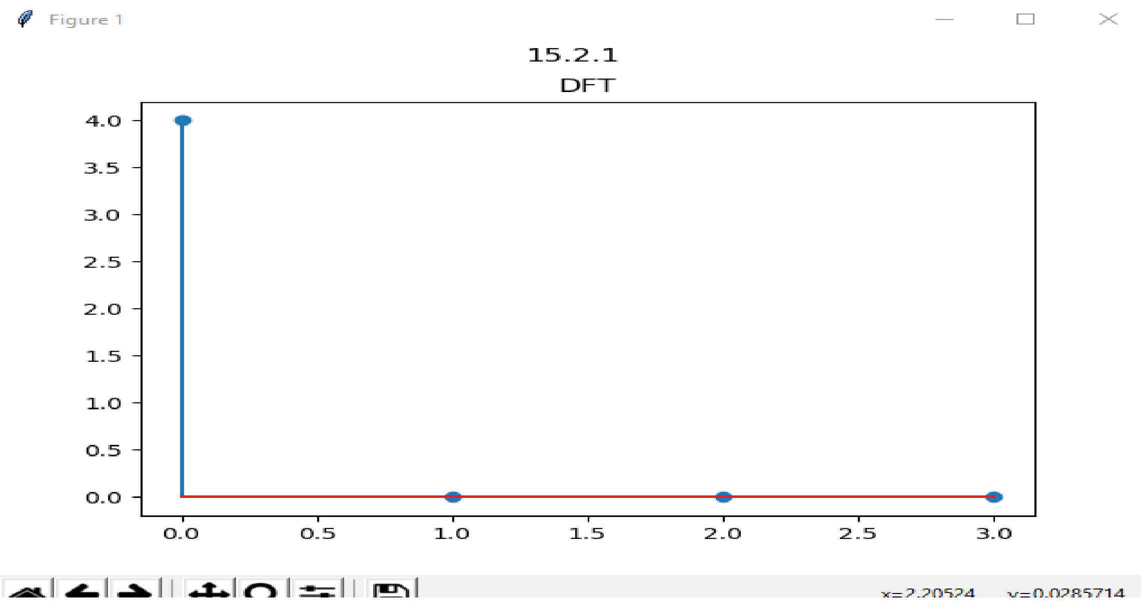
15.1.1

Η Άσκηση δίνει την ζητούμενη ακολουθία f(n):1,1,0,0 και υπολογίζουμε το DFT αυτής μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k):2,1 - i , 0 , 1 + i . Για την $2^{η}$ ακολουθία F(k):1,0,1,0 υπολογίζουμε τον IDFT της μέσω της συνάρτησης idft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία f(n):0.5 , 0 ,0.5,0 . Παρακάτω φαίνεται το plot .



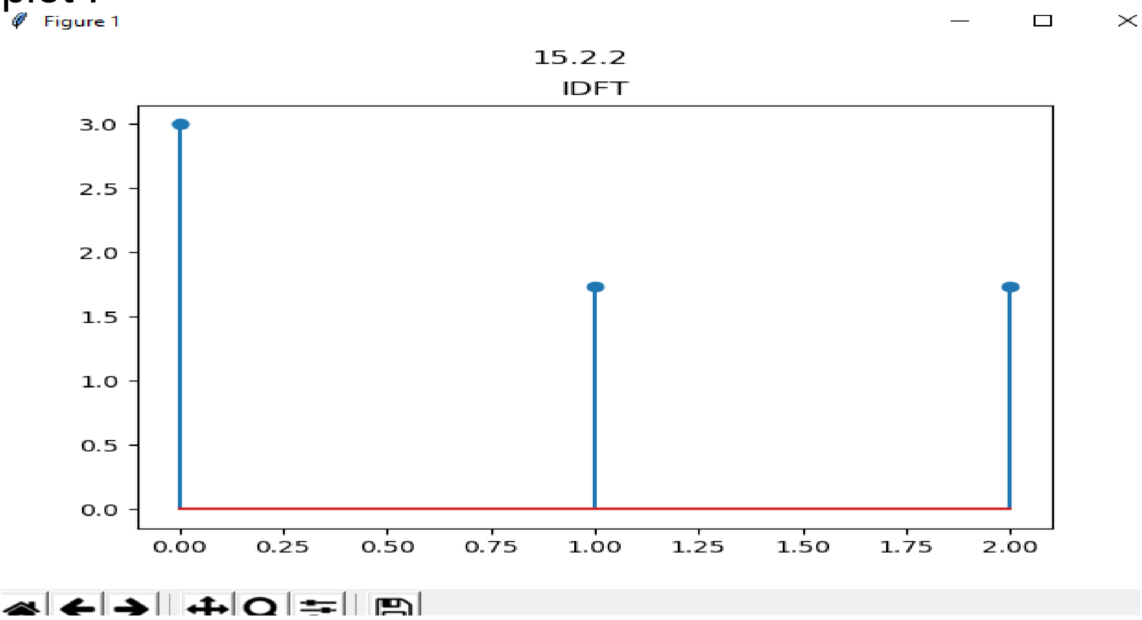
15.2.1

Η Άσκηση δίνει την ζητούμενη ακολουθία f(n):1,1,1,1 και υπολογίζουμε το DFT αυτής μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον Πίνακα F4 που τον δημιουργούμε εμείς. Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k):4 , 0 ,0,0 . Παρακάτω φαίνεται το plot .



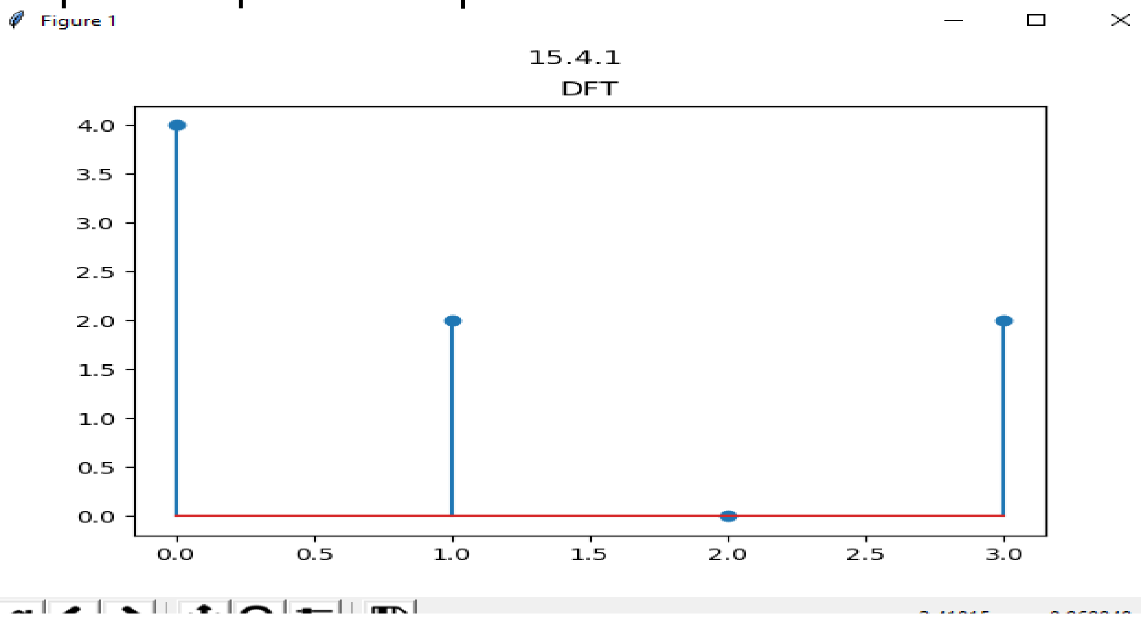
15.2.2

Η συνάρτηση αυτή δίνει την ακολουθία F(k):3,0,6 και υπολογίζουμε τον IDFT της μέσω της συνάρτησης idft που υλοποιήσαμε με βάση τον αντίστροφο πίνακα F3 που τον δημιουργούμε εμείς. Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία f(n):3 ,-i√3 ,i√3 . Παρακάτω φαίνεται το plot .



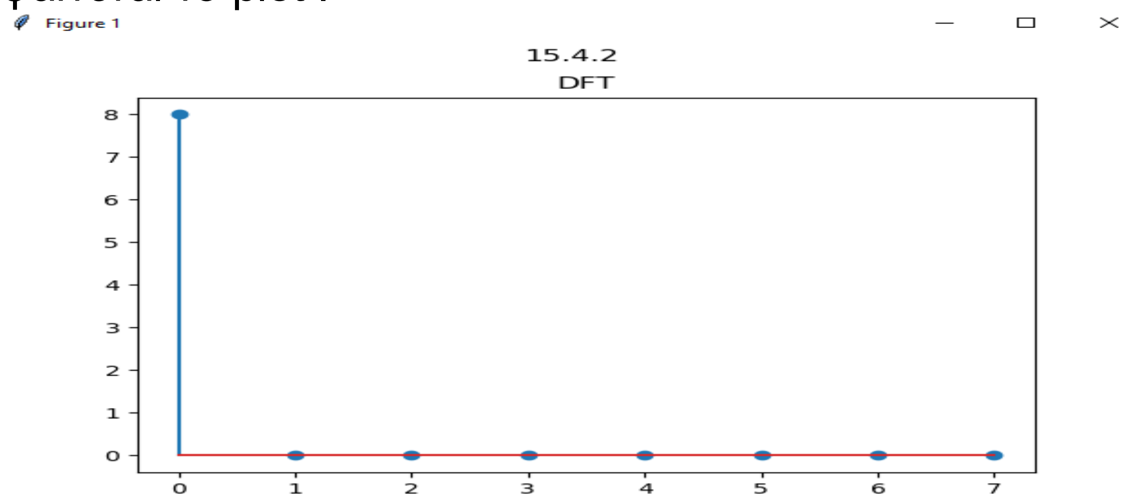
15.4.1

Η Άσκηση δίνει την ζητούμενη ακολουθία f(n):1,1,0,0 και υπολογίζουμε το DFT της g = f * f μέσω της συνάρτησης dftConv που υλοποιήσαμε με βάση τον Πίνακα F4 που τον δημιουργούμε εμείς. Στη συνάρτηση αυτή υπολογίζεται πρώτα ο DFT της f και επιστρέφουμε το γινόμενο F(k)F(k) λόγω ιδιότητας συνέλιξης . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία G(k):4, -2i ,0,2i . Παρακάτω φαίνεται το plot .



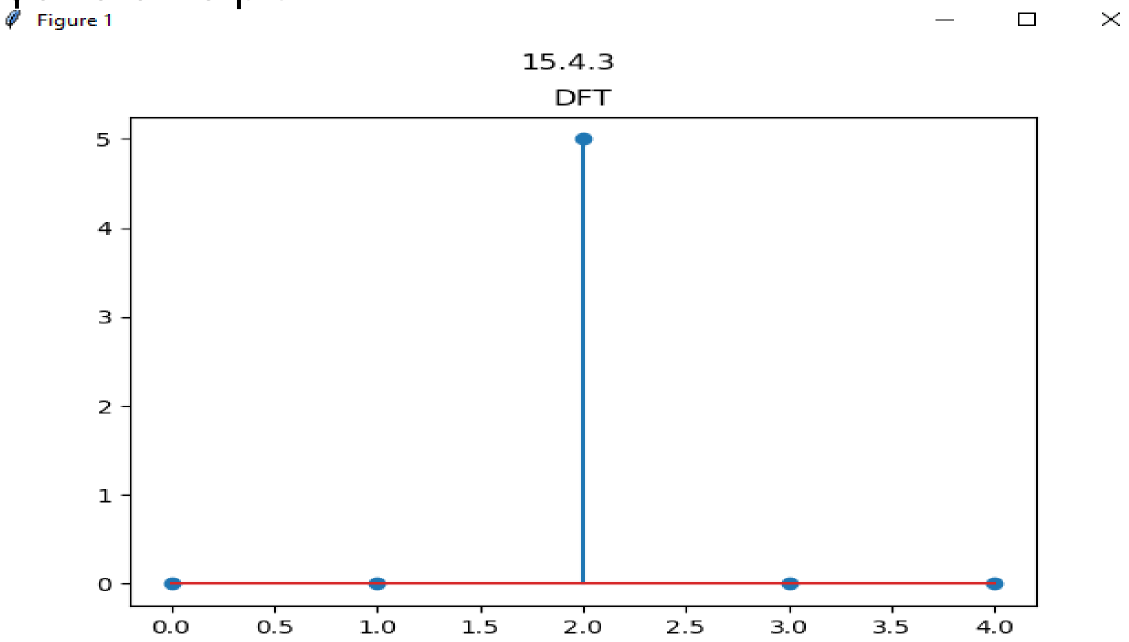
15.4.2

Έχουμε την f(n) = 1 για n = 0 ,1 , …, N. Επιλογή N = 8 και υπολογίζουμε το DFT αυτής μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k) = 0 για n ≠ 0 και F(k) = N ,όπου N = 8 ,για n = 0. Παρακάτω φαίνεται το plot .



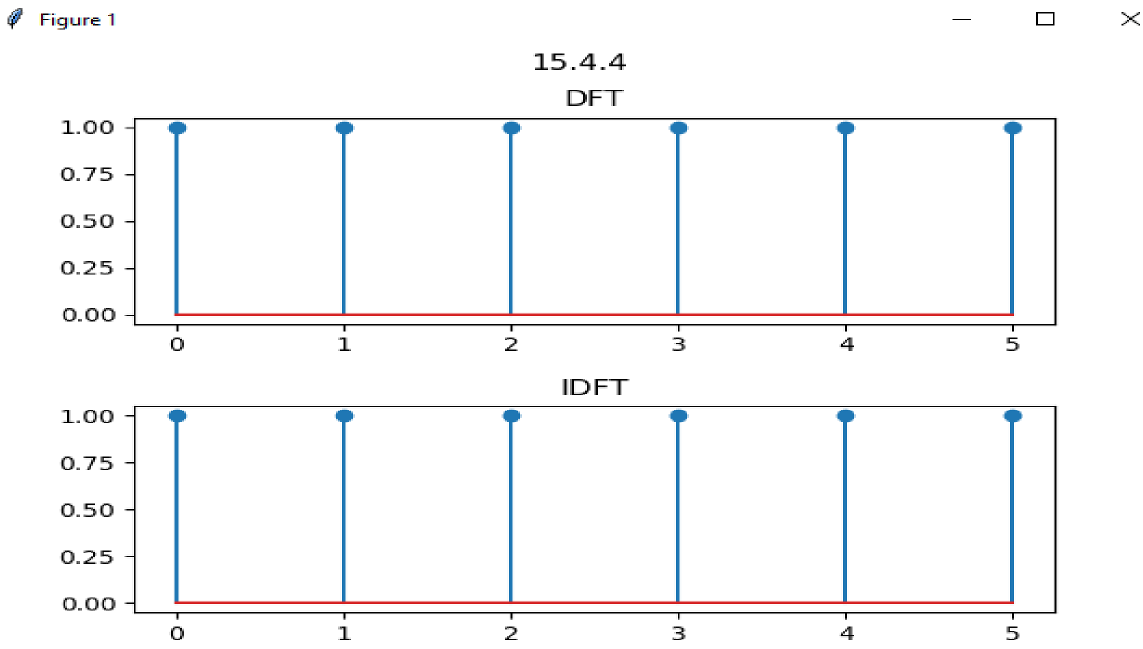
15.4.3

Για την άσκηση αυτή θεωρούμαι k0 = 2 και N = 5 . Άρα έχουμε την ακολουθία f(n) = $e^{2*\pi*i*n*2/5}$ και υπολογίζουμε το DFT αυτής μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k) = 0 για k ≠ 2 και F(k) = N ,όπου N = 5 ,για k = 2 . Παρακάτω φαίνεται το plot .



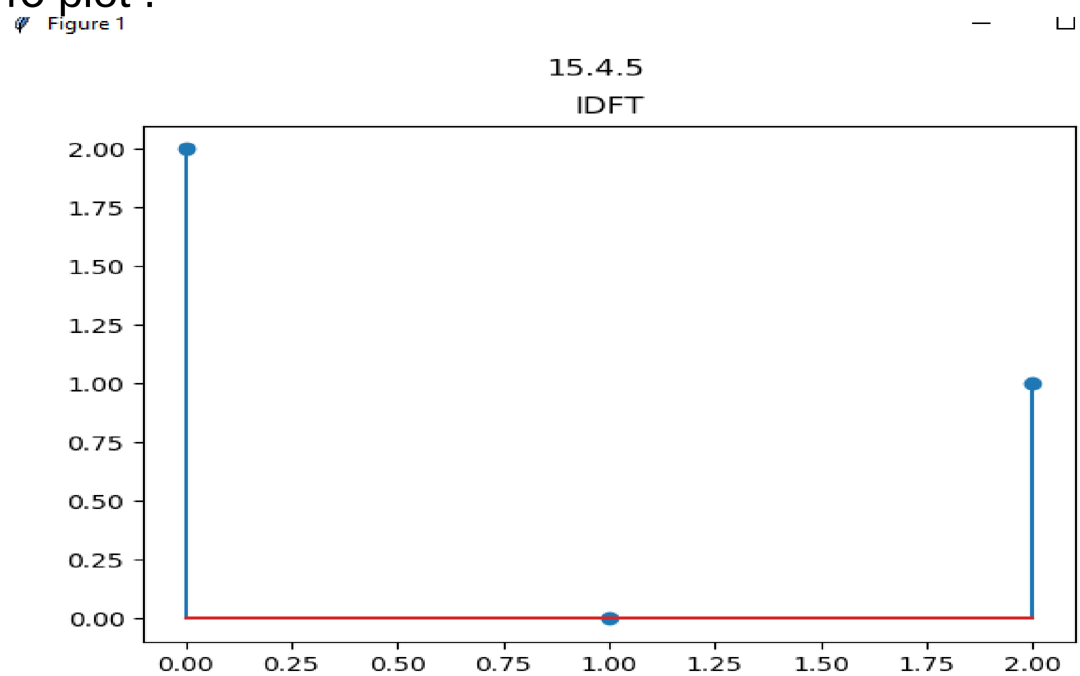
15.4.4

Έχουμε την f(n): 1,0,0…,0 για n = 0 ,1 , …, N - 1. Επιλογή N = 6 και υπολογίζουμε το DFT αυτής μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k)=1 για k = 0 , 1 ,…, 5 . Για την g(n): 0,1,0…,0 για n = 0 ,1 , …, N – 1 επιλέγουμε πάλι N = 6 και υπολογίζουμε τον DFT αυτής ομοίως με πάνω . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία G(k) : 1, 0.5 – 0.87i , - 0.5 – 0.87i, -1 , -0.5 + 0.87i , 0.5 + 0.87i . Παρακάτω φαίνεται το plot .



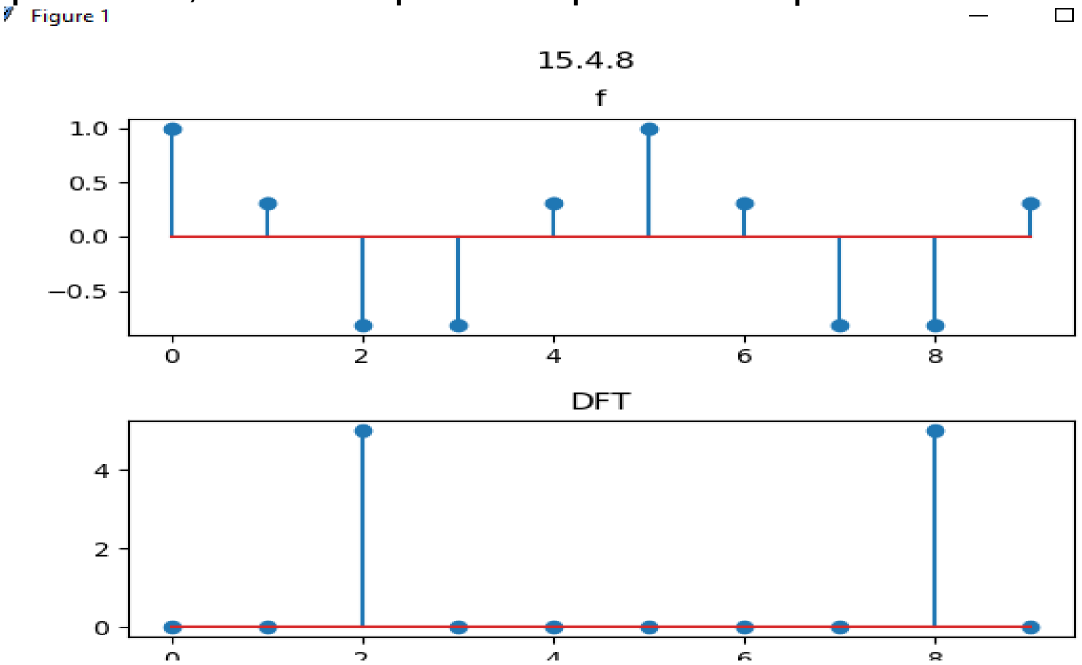
15.4.5

Ο μετασχηματισμός f*g είναι από την εκφώνηση f*g = H = {15,-2i√3, 2i√3} . Ο μετασχηματισμός f είναι F = {5,-1-i√3, -1+i√3} . Υπολογίζουμε μέσω της συνάρτησης G_trasform τον μετασχηματισμό της G . (G(k) = H(k) / F(k)) . Μετά μέσω της συνάρτησης idft υπολογίζουμε την g . Το αποτέλεσμα είναι g(n):2,0,1 . Παρακάτω φαίνεται το plot .



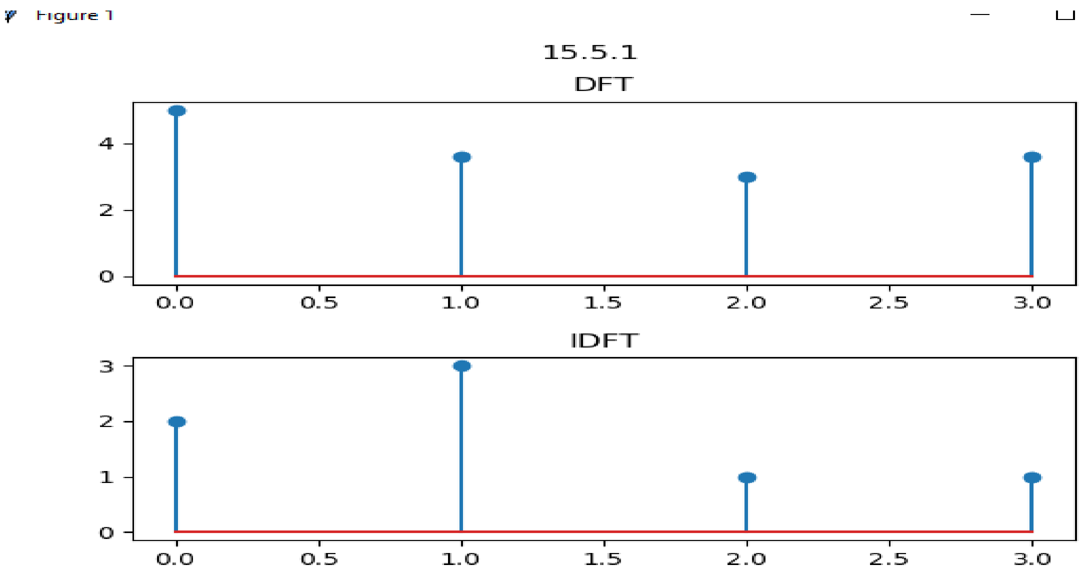
15.4.8

Για την άσκηση αυτή θεωρούμαι m = 2 και N = 10 . Άρα έχουμε την ακολουθία f(n) = cos(2*π*n*2/10) και υπολογίζουμε το DFT αυτής μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Αποδεικνύεται ότι F(k) = 5 για k = 2 , k = 8 και F(k) = 0 για k ≠ 2 ,k ≠ 8 . Παρακάτω φαίνεται το plot .



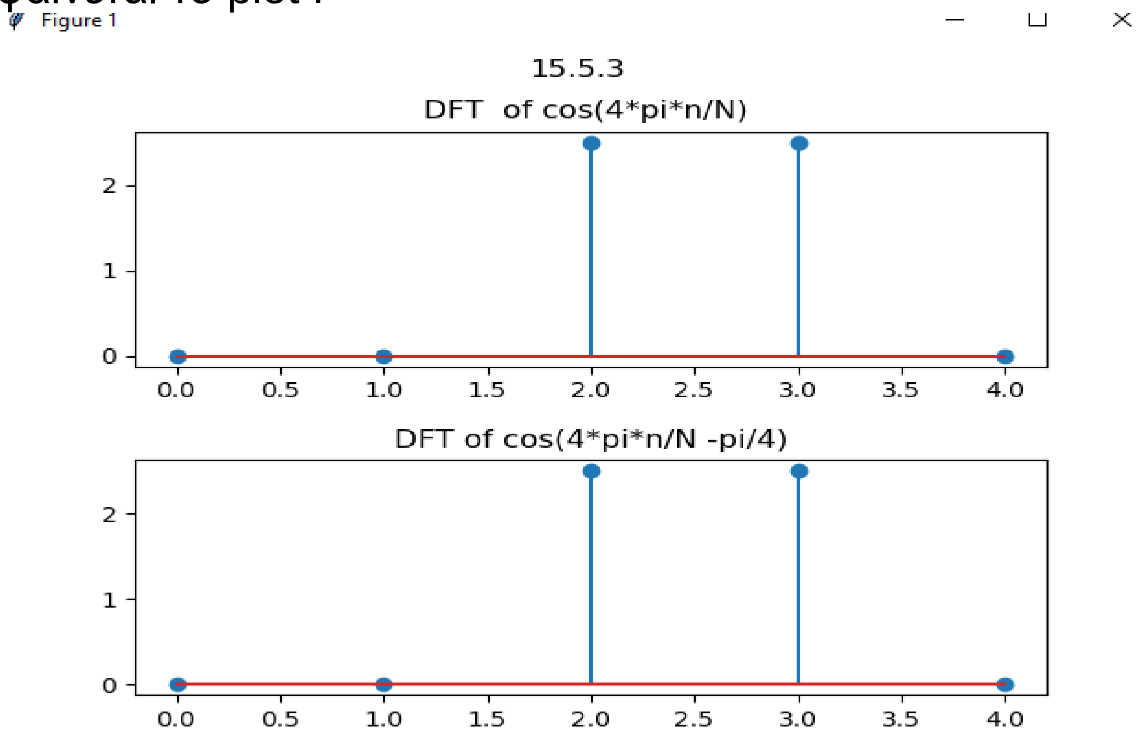
15.5.1

Η Άσκηση δίνει την ζητούμενη ακολουθία f(n):2,3,-1,1 και υπολογίζουμε το DFT αυτής μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k):5,3 -2i , -3 , 3+ 2i . Για την 2^{η} ακολουθία F(k): 5,3 -2i , -3 , 3+ 2i υπολογίζουμε τον IDFT της μέσω της συνάρτησης idft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα ,όπως αναμένουμε επειδή μας δίνει το DFT της 1^{η}ς ακολουθίας , είναι η ακολουθία f(n): 2,3,-1,1 . Παρακάτω φαίνεται το plot .

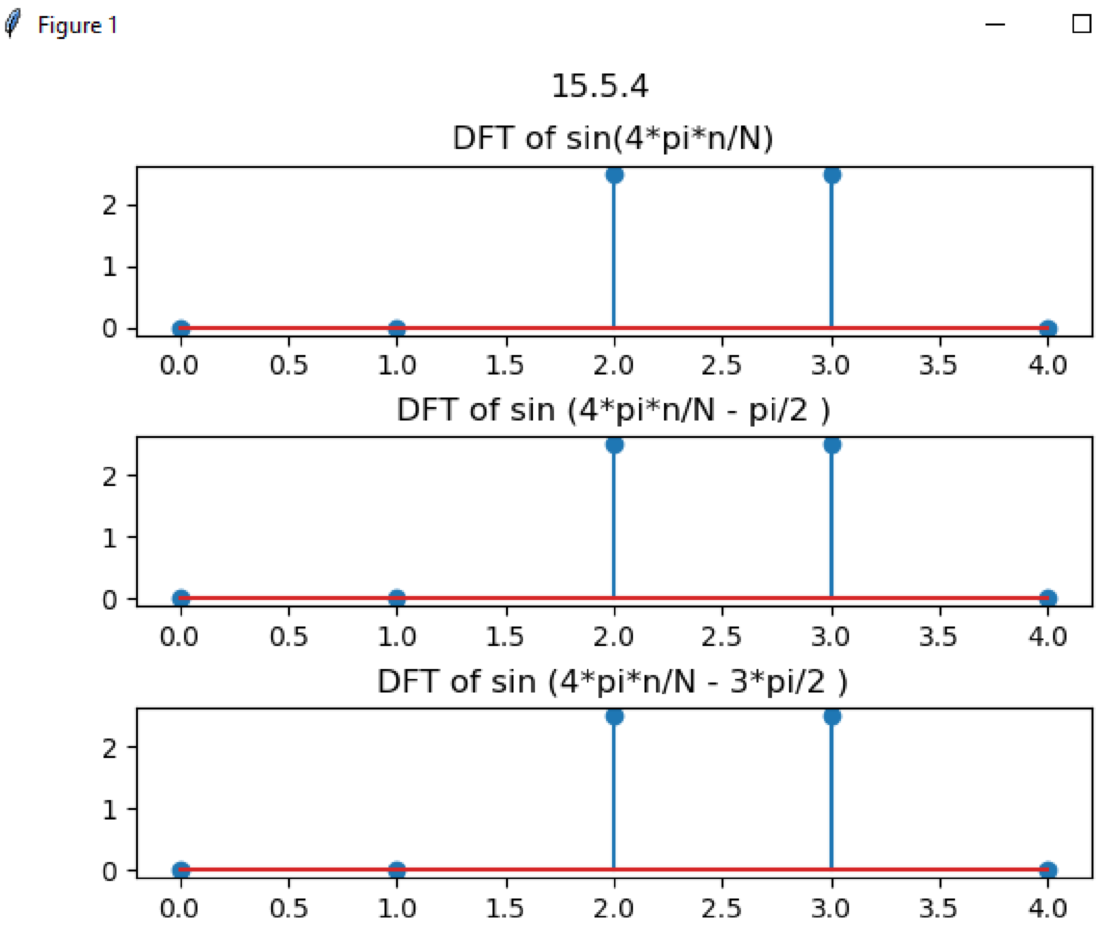


15.5.3

Επιλογή N = 5 και υπολογίζουμε το DFT της f(n) = cos(4*pi*n/5) μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k):0,0,2.5,2.5,0 για n= 0 , 1 ,…, 4 . Επιλογή N = 5 και υπολογίζουμε το DFT της g(n) = cos(4*pi*n/5 – pi/4) μέσω της ίδιας συνάρτησης dft . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία G(k):0,0, 1.76-1.76i, 1.76+ 1.76i,0 για n= 0 , 1 ,…, 4 . Παρακάτω φαίνεται το plot .

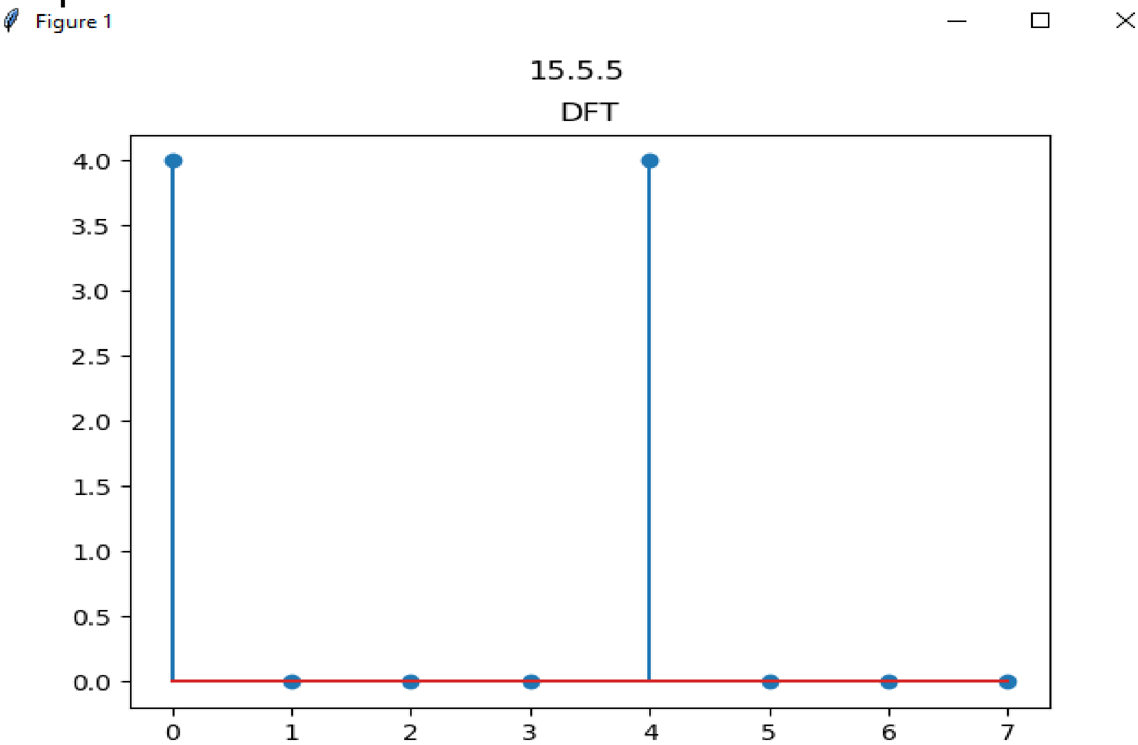


15.5.4
Επιλογή N = 5 και υπολογίζουμε το DFT της f(n) = sin(4*pi*n/5) μέσω της συνάρτησης dft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία F(k):0,0,-2.5i,2.5i,0 για n= 0 , 1 ,…, 4 . Επιλογή N = 5 και θ1 = π/2 και υπολογίζουμε το DFT της g(n) = sin(4*pi*n/5 – pi/2) μέσω της ίδιας συνάρτησης dft . Το αποτέλεσμα που δίνει είναι η ακολουθία G1(k):0,0,
-2.5,-2.5,0 για n= 0 , 1 ,…, 4 .
Για θ2 = 3π/2 έχουμε G2(k):0,0,
2.5,2.5,0 για n= 0 , 1 ,…, 4 .
Παρακάτω φαίνεται το plot .



15.5.5

Επιλέγουμε N = 8 .Υπολογίζουμε τον DFT της f(n) = 1 για n άρτιο και f(n) = 0 για n περιττό ,n = 0 , 1 ,… , 7 . Το αποτέλεσμα είναι F(k) : 4,0,0,0 ,4,0,0,0 . Είναι προφανές ότι η F είναι πραγματική . Παρακάτω φαίνεται το plot .



15.5.6

Υπολογίζουμε τον IDFT της F(k) = 1 για k = 4 και F(k)=0 για k ≠ 4 για k = 0 , 1 ,….,29 (N = 30) μέσω της συνάρτησης idft που υλοποιήσαμε με βάση τον ορισμό του . Το αποτέλεσμα είναι f(n) : (0.03), (0.026+0.019j), (0.01+0.032j), (-0.01+0.032j), (-0.02+0.019j), (-0.033), (-0.026-0.019j), (-0.01-0.03j), (0.01-0.03j), (0.02-0.0195j), (0.03), (0.027+0.019j), (0.01+0.03j), (-0.01+0.03j), (-0.026+0.019j), (-0.03), (-0.026-0.019j), (-0.01-0.03j), (0.01-0.03j), (0.026-0.019j), (0.03), (0.026+0.0192j), (0.01+0.03j), (-0.01+0.03j), (-0.026+0.019j), (-0.03), (-0.026-0.019j), (-0.01-0.031j), (0.012-0.03j), (0.026-0.019j) . Για την g(n) = cos(2*pi*m*n/N) όπου N = 3 , m,n = 0 ,1,2 ,υπολογίζουμε τον DFT της και το αποτέλεσμα είναι : G(k) : (3), (1.4-2.4j), (-1.14-1.99j), (3), (-0.26+0.45j), (-0.26-0.45j), (3), (-1.14+1.99j), (1.40+2.4j). Παρακάτω φαίνεται το plot .

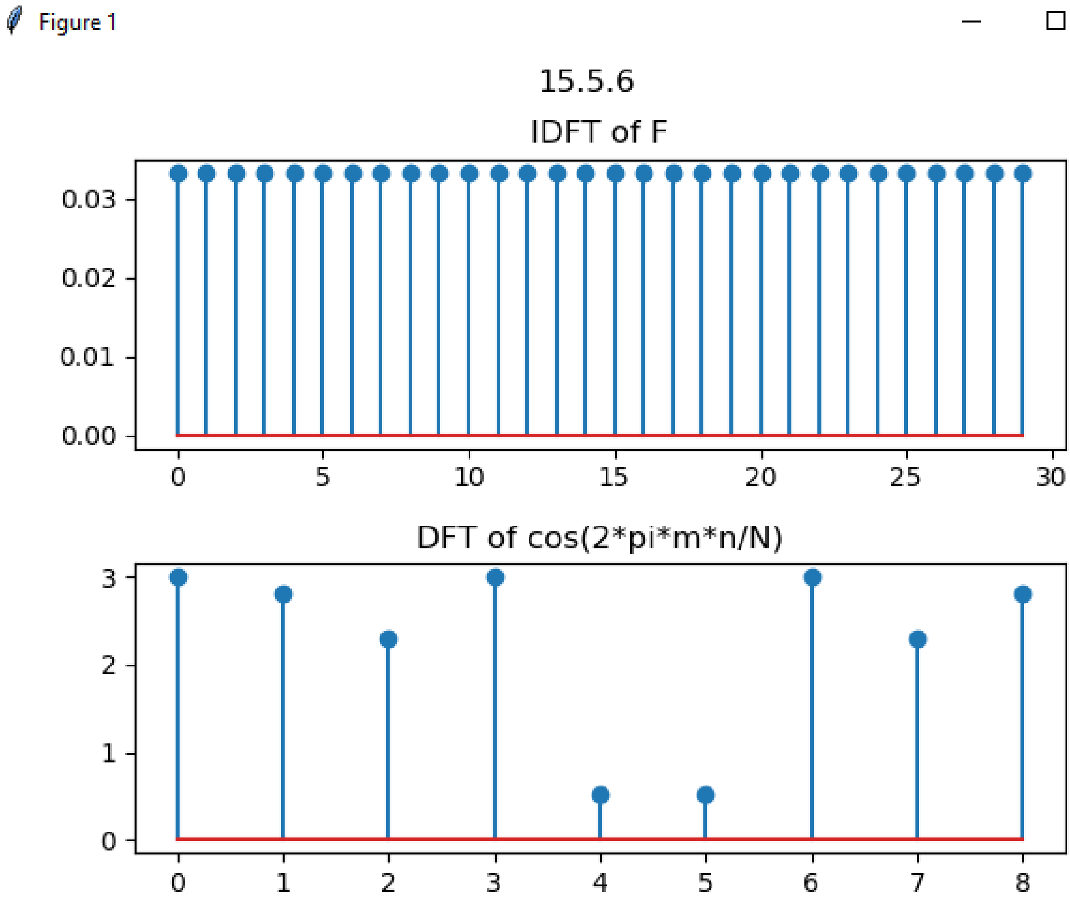


Figure 1
15.5.6
IDFT of F
0.00
0.01
0.02
0.03
0 5 10 15 20 25 30
DFT of cos(2*pi*m*n/N)
0
1
2
3
0 1 2 3 4 5 6 7 8