

Notes on the course *Análise no \mathbb{R}^n* , by Ailton Silva

Josenaldo Júnior

March 11, 2020

1 Análise no \mathbb{R}^n

Definition (Espaço Vetorial). Um *espaço vetorial* $(E, +, \cdot)$ é tal que as operações $+: E \times E \rightarrow E$ e $\cdot: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ satisfazem as seguintes propriedades:

- $(E, +)$ é um grupo abeliano;
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
- $a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{x}$;
- $(a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x}$;
- $a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y}$.

Definition (Produto Interno). Seja E um espaço vetorial. Um *produto interno* em E é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;
2. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$;
3. $\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Um espaço vetorial com produto interno é chamado de *espaço com produto interno*.

Definition (Matriz Definida Positiva). Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ é *definida positiva* quando, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ não nulo,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0$$

Fact. Dada uma matriz definida positiva $A = (a_{ij})_n$, a função $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

é um produto interno. Podem-se, então, definir uma quantidade não enumerável de produtos internos no espaço \mathbb{R}^n .

Definition (Norma Associada ao Produto Interno). A *norma* $\|\cdot\|_{\langle, \rangle} : E \rightarrow \mathbb{R}$ associada a um produto interno (NAPI) \langle, \rangle de um espaço vetorial E é definida da seguinte forma:

$$\|\mathbf{x}\|_{\langle, \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

Theorem 1 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz).

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_{\langle, \rangle} \cdot \|\mathbf{y}\|_{\langle, \rangle}$$

A igualdade é válida sse \mathbf{x} e \mathbf{y} são LD.

Fact.

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\langle, \rangle} \leq \|\mathbf{x}\|_{\langle, \rangle} + \|\mathbf{y}\|_{\langle, \rangle}$$

Definition (Norma em um Espaço Vetorial). Uma *norma* num espaço E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo o seguinte:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, e $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$;
2. $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ (homogeneidade);
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdade triangular).

Um espaço vetorial é *normado* quando ele tem uma norma.

Fact. A NAPI é uma norma.

Fact. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Então

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Definition (Norma do Máximo).

$$\|\mathbf{x}\|_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Fact. A norma do máximo é uma norma em \mathbb{R}^n .

Definition (Norma da Soma).

$$\|\mathbf{x}\|_s = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Fact. A norma da soma é uma norma em \mathbb{R}^n .

Definition (Norma Euclidiana em \mathbb{R}^n).

$$\|\mathbf{x}\|_{\text{euc}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

A norma euclidiana também é chamada de *norma usual* em \mathbb{R}^n .

Fact. A norma euclidiana é uma norma em \mathbb{R}^n .

Definition (Identidade do Paralelogramo). Sejam E um espaço normado. A *identidade do paralelogramo* é dada por

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

Theorem 2. Uma norma é proveniente de um produto interno se, e somente se, ela verifica a identidade do paralelogramo.

Fact. As normas do máximo e da soma em \mathbb{R}^n não satisfazem a identidade do paralelogramo e, portanto, não são provenientes de produto interno.

Definition (Normas Equivalentes). As normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são *equivalentes* quando existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_1$$

para todos os vetores do espaço.

Fact. Num espaço vetorial de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.

Definition (Bola Aberta). Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Uma *bola aberta* de centro a e raio $r > 0$, denotada por $B(a, r)$ (ou $B_r(a)$), é definida como sendo o seguinte conjunto:

$$B(a, r) = \{\mathbf{x} \in E ; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

Definition (Bola Fechada). Uma *bola fechada* de centro a e raio $r > 0$, denotada por $B[a, r]$ (ou $B_r[a]$), é definida como sendo o seguinte conjunto:

$$B[a, r] = \{\mathbf{x} \in E ; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$$

Definition (Esfera). Uma *esfera* de centro a e raio $r > 0$, denotada por $S[a, r]$ (ou $S_r[a]$), é definida como sendo o seguinte conjunto:

$$S[a, r] = \{\mathbf{x} \in E ; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$$

Definition (Conjunto Limitado). Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $X \subset E$. Dizemos que X é *limitado* quando existir $r > 0$ tal que

$$X \subset B[\mathbf{0}, r]$$

Do contrário, o conjunto é *ilimitado* (não é limitado).

Remark. Em \mathbb{R}^n , como todas as normas são equivalentes, para provar que um conjunto é limitado, basta limitá-lo em qualquer norma.

Definition (Função Limitada). Dados $(E, \| \cdot \|_E)$ e $(F, \| \cdot \|_F)$ espaços normados e $f : E \rightarrow F$, dizemos que f é *limitada* quando existe $r > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in E$,

$$\|f(\mathbf{x})\|_F < r$$

Definition (Segmento). Seja $(E, \| \cdot \|)$ espaço normado. Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, definimos o *segmento* (que liga \mathbf{a} a \mathbf{b}) como sendo o conjunto:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{z} \in E ; \mathbf{z} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \text{ para algum } t \in [0, 1]\}$$

Definition (Conjunto Convexo). Dizemos que $X \subset E$ é *convexo* quando $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset X$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Definition (Ponto Interior). Seja $(E, \| \cdot \|)$ espaço normado, e $X \subset E$. Dizemos que $\mathbf{a} \in X$ é *ponto interior* a X quando existe $r_a > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r_a) \subset X$.

Definition (Interior de um Conjunto). O conjunto dos pontos interiores de $X \subset E$ é chamado de *interior* de X e é denotado por $\text{int } X$.

Fact.

1. $\text{int } X \subset X$
2. $X \subset Y \implies \text{int } X \subset \text{int } Y$

Definition (Conjunto Aberto). Dizemos que $A \subset E$ é *aberto* quando todo ponto do conjunto A é ponto interior a A , isto é, $\text{int } A = A$.