# Notes on the course *Análise no* $\mathbb{R}^n$, by Ailton Silva

Josenaldo Júnior

March 16, 2020

## Análise no $\mathbb{R}^n$

**Definition** (Espaço Vetorial)**.** Um *espaço vetorial* $(E, +, \cdot)$ é tal que as operações $+ : E \times E \to E$ e $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ satisfazem as seguintes propriedades:

- $(E, +)$ é um grupo abeliano;
- $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;
- $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{x}) = (a \cdot b) \cdot \boldsymbol{x}$;
- $(a + b) \cdot \boldsymbol{x} = a \cdot \boldsymbol{x} + b \cdot \boldsymbol{x}$;
- $a \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a \cdot \boldsymbol{x} + a \cdot \boldsymbol{y}$.

**Definition** (Produto Interno)**.** Seja $E$ um espaço vetorial. Um *produto interno* em $E$ é uma função $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que verifica:

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$;
2. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$;
3. $\langle a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = a \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$;
4. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, e $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Um espaço vetorial com produto interno é chamado de *espaço com produto interno*.

**Definition** (Matriz Definida Positiva)**.** Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_n$ é *definida positiva* quando, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ não nulo,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0$$

**Fact.** Dada uma matriz definida positiva $A = (a_{ij})_n$, a função $\langle :, \mathbb{R} \rangle^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

dada por

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

é um produto interno. Podem-se, então, definir uma quantidade não enumerável de produtos internos no espaço $\mathbb{R}^n$.

**Definition** (Norma Associada ao Produto Interno)**.** A *norma* $\|\|_{\langle,\rangle} : E \to \mathbb{R}$ *associada a um produto interno (NAPI)* $\langle,\rangle$ de um espaço vetorial $E$ é definida da seguinte forma:

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\langle,\rangle} = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

**Theorem 1** (Desigualdade de Cauchy–Schwarz)**.**

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|_{\langle,\rangle} \cdot \|\boldsymbol{y}\|_{\langle,\rangle}$$

*A igualdade é válida sse* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *são LD.*

**Fact.**

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_{\langle,\rangle} \leq \|\boldsymbol{x}\|_{\langle,\rangle} + \|\boldsymbol{y}\|_{\langle,\rangle}$$

**Definition** (Norma em um Espaço Vetorial)**.** Uma *norma* num espaço $E$ é uma aplicação $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ satisfazendo o seguinte:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, e $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|a\boldsymbol{x}\| = |a| \, \|\boldsymbol{x}\|$ (homogeneidade);
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (desigualdade triangular).

Um espaço vetorial é *normado* quando ele tem uma norma.

**Fact.** A NAPI é uma norma.

**Fact.** Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço normado. Então

$$|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

**Definition** (Norma do Máximo)**.**

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

**Fact.** A norma do máximo é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

**Definition** (Norma da Soma)**.**

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{s}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

**Fact.** A norma da soma é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

**Definition** (Norma Euclidiana em $\mathbb{R}^n$)**.**

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{euc}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

A norma euclidiana também é chamada de *norma usual* em $\mathbb{R}^n$.

**Fact.** A norma euclidiana é uma norma em $\mathbb{R}^n$.
**Definition** (Identidade do Paralelogramo)**.** Sejam $E$ um espaço normado. A *identidade do paralelogramo* é dada por

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\right)$$

**Theorem 2.** *Uma norma é proveniente de um produto interno se, e somente se, ela verifica a identidade do paralelogramo.*
**Fact.** As normas do máximo e da soma em $\mathbb{R}^n$ não satisfazem a identidade do paralelogramo e, portanto, não são provenientes de produto interno.
**Definition** (Normas Equivalentes)**.** As normas $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ são *equivalentes* quando existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|_1$$

para todos os vetores do espaço.
**Fact.** Num espaço vetorial de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.
**Definition** (Bola Aberta)**.** Seja $(E, \|\ \|)$ um espaço normado. Uma *bola aberta* de centro $a$ e raio $r > 0$, denotada por $\mathrm{B}\,(a, r)$ (ou $\mathrm{B}_r(a)$), é definida como sendo o seguinte conjunto:

$$\mathrm{B}(a, r) = \{\boldsymbol{x} \in E\ ;\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < r\}$$

**Definition** (Bola Fechada)**.** Uma *bola fechada* de centro $a$ e raio $r > 0$, denotada por $\mathrm{B}\,[a, r]$ (ou $\mathrm{B}_r[a]$), é definida como sendo o seguinte conjunto:

$$\mathrm{B}\,[a, r] = \{\boldsymbol{x} \in E\ ;\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \leq r\}$$

**Definition** (Esfera)**.** Uma *esfera* de centro $a$ e raio $r > 0$, denotada por $\mathrm{S}[a, r]$ (ou $\mathrm{S}_r[a]$), é definida como sendo o seguinte conjunto:

$$\mathrm{S}[a, r] = \{\boldsymbol{x} \in E\ ;\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| = r\}$$

**Definition** (Conjunto Limitado)**.** Seja $(E, \|\ \|)$ um espaço normado e $X \subset E$. Dizemos que $X$ é *limitado* quando existir $r > 0$ tal que

$$X \subset \mathrm{B}\,[\mathbf{0}, r]$$

Do contrário, o conjunto é *ilimitado* (não é limitado).
**Remark.** Em $\mathbb{R}^n$, como todas as normas são equivalentes, para provar que um conjunto é limitado, basta limitá-lo em qualquer norma.
**Definition** (Função Limitada)**.** Dados $(E, \|\ \|_E)$ e $(F, \|\ \|_F)$ espaços normados e $f : E \to F$, dizemos que $f$ é *limitada* quando existe $r > 0$ tal que, para todo $\boldsymbol{x} \in E$,

$$\|f(\boldsymbol{x})\|_F < r$$

**Definition** (Segmento)**.** Seja $(E, \|\ \|)$ espaço normado. Dados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$, definimos o *segmento* (que liga $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$) como sendo o conjunto:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{z} \in E\ ;\ \boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \text{ para algum } t \in [0, 1]\}$$

**Definition** (Conjunto Convexo)**.** Dizemos que $X \subset E$ é *convexo* quando $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \subset X$ para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.
**Definition** (Ponto Interior)**.** Seja $(E, \| \ \|)$ espaço normado, e $X \subset E$. Dizemos que $a \in X$ é *ponto interior* a $X$ quando existe $r_a > 0$ tal que $\mathrm{B}\,(a, r_a) \subset X$.
**Definition** (Interior de um Conjunto)**.** O conjunto dos pontos interiores de $X \subset E$ é chamado de *interior* de $X$ é denotado por $\operatorname{int} X$.
**Fact.**

1. $\operatorname{int} X \subset X$
2. $X \subset Y \implies \operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y$

**Definition** (Conjunto Aberto)**.** Dizemos que $A \subset E$ é *aberto* quando todo ponto do conjunto $A$ é ponto interior a $A$, isto é, $\operatorname{int} A = A$.
**Fact.** Bolas abertas são conjuntos abertos.
**Fact** (Propriedades de Abertos)**.** Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço normado. Então

1. Se $X$ e $Y$ são abertos em $E$, $X \cap Y$ é aberto em $E$.
2. Se $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos, então $\bigcup\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$ é um conjunto aberto.

**Definition.** Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço normado, $X \subset E$ e $a \in E$. Dizemos que $a$ pertence à *fronteira* de $X$, e denotamos $a \in \partial X$ (ou $a \in \operatorname{Fr} X$) quando $a \notin \operatorname{int} X$ e $a \notin \operatorname{int}(X^C)$.
**Fact.** Dado $E$ espaço normado e $X \subset E$, então o conjunto $\{\operatorname{int} X, \operatorname{int}(X^C), \operatorname{Fr} X\}$ é uma partição de $X$.
**Fact** (Propriedades da Fronteira)**.** Sejam $E$ um espaço normado e $X \subset E$.

1. $X \subset \operatorname{int} X \cup \operatorname{Fr} X$.
2. Se $\operatorname{Fr} X = \emptyset$, então $X$ é aberto.

**Definition** (Abertos Relativos)**.** Sejam $E$ espaço normado e $A \subset X \subset E$. Dizemos que $A$ é aberto em $X$ (aberto *relativo* a $X$) quando dado $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}\,(a, r) \cap X \subset A$.
**Theorem 3.** *Sejam $E$ espaço normado e $A \subset X \subset E$. Então $A$ é aberto em $X$ sse existe $U \subset E$ aberto tal que $A = U \cap X$.*