JOSÉ JAVIER PELEATO PRADEL

09/08/2020

EJERCICIO B&B

Algoritmia: Branch & Bound

INDICE

1.0 Enunciado.

Resolver por el algoritmo de Branch & Bound (B&B) la siguiente función con las restricciones respectivas:

$$Max\ Z = 8x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0\ (Enteros\ no\ negativos)$$

2.0 Solución.

Dada la definición del problema podemos organizar las ecuaciones de la siguiente forma:

Función de Z (Maximización)	$\rightarrow$	$Max\ Z = 8x_1 + 5x_2$
Restricciones (s.a.)	$\rightarrow$	$x_1 + x_2 \leq 6$
	$\rightarrow$	$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
	$\rightarrow$	$x_1, x_2 \geq 0$

Donde $x_1 = Eje\ x$ y $x_2 = Eje\ y$

2.1 Paso 1: Calculo y representación de solución óptima.

Cálculo de $x_1 = 0$ en restricción 1.

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 \leq 6}$$
$$x_1 + x_2 = 6$$
$$0 + x_2 = 6$$
$$\boldsymbol{x_2 = 6}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 0\ \rightarrow x_2 = 6}$$

Cálculo de $x_2 = 0$ en restricción 1.

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 \leq 6}$$
$$x_1 + x_2 = 6$$
$$x_1 + 0 = 6$$
$$\boldsymbol{x_1 = 6}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 0\ \rightarrow x_1 = 6}$$

Cálculo de $x_1 = 0$ en restricción 2.

$$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45}$$
$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$9(0) + 5x_2 = 45$$
$$x_2 = \frac{45}{5}$$
$$\mathbf{x_2 = 9}$$
$$\mathbf{x_1 = 0 \ \rightarrow x_2 = 9}$$

Cálculo de $x_2 = 0$ en restricción 2.

$$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45}$$
$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$9x_1 + 5(0) = 45$$
$$x_1 = \frac{45}{9}$$
$$\mathbf{x_1 = 5}$$
$$\mathbf{x_2 = 0 \ \rightarrow x_1 = 5}$$

Añadir restricción 1 a restricción 2 y calcular función de Z.

$$\mathbf{x_1 + x_2 = 6}$$
$$x_1 = 6 - x_2$$

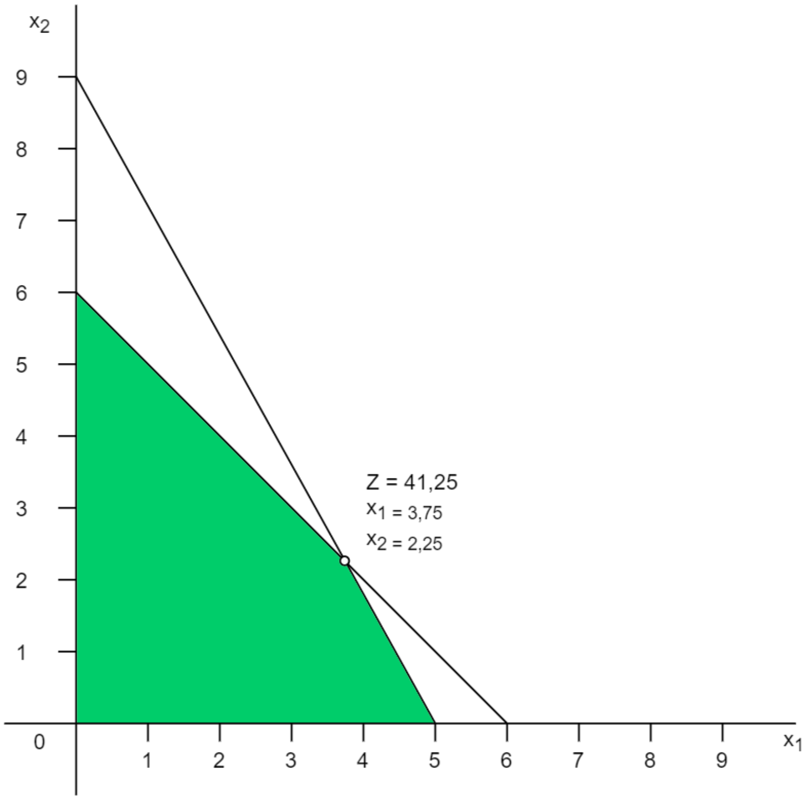
$$\mathbf{9x_1 + 5x_2 = 45}$$
$$9(6 - x_2) + 5x_2 = 45$$
$$54 - 9x_2 + 5x_2 = 45$$
$$54 - 4x_2 = 45$$
$$4x_2 = 54 - 45$$
$$x_2 = \frac{9}{4}$$
$$\mathbf{x_2 = 2,25}$$

$$x_1 = 6 - 2{,}25$$
$$\mathbf{x_1 = 3,75}$$

$$\mathbf{Z = 8x_1 + 5x_2}$$
$$Z = 8(3{,}75) + 5(2{,}25)$$
$$\mathbf{Z = 41,25}$$

La solución óptima para resultados no enteros es:

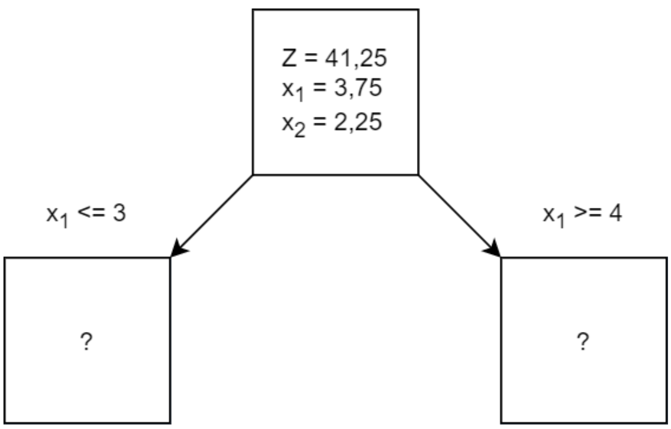
$$Z = 41{,}25$$
$$x_1 = 3{,}75$$
$$x_2 = 2{,}25$$



Solución óptima (área verde)

El área verde corresponde al espacio donde se encuentra nuestra solución en números enteros. Todo aquello que no esté dentro de dicha sección se debe realizar una poda y excluir del proceso de ramificación.

2.2 Paso 2: Calculo y representación de ramificación.



Observamos que no disponemos en nuestra posible solución de números enteros, dada la última restricción en el problema (enteros no negativos).

Para ello, podemos elegir expandir con cualquier elemento de x.

Una vez elegido con que elemento vamos a ramificar, en nuestro caso con x_1, obtenemos el número entero más cercano por arriba y por debajo al valor decimal. Lo que significa que debemos buscar aquellos números enteros menores o igual a 3 y mayores o igual a 4.

Cálculo de aplicación de ramificación y poda de $x_1 = 3$ en restricción 1.

$$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6}$$
$$x_1 + x_2 = 6$$
$$3 + x_2 = 6$$
$$\mathbf{x_2 = 3}$$
$$\mathbf{x_1 = 3 \rightarrow x_2 = 3}$$

$$\mathbf{Z = 8x_1 + 5x_2}$$
$$Z = 8(3) + 5(3)$$
$$\mathbf{Z = 39}$$

Resumen:

$$Z = 39$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 3$$

Evaluar restricciones:

$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6} \rightarrow 3 + 3 = 6 \rightarrow$ **Es correcta**

$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45} \rightarrow 9(3) + 5(3) = 42 \rightarrow$ **Es correcta**

Cálculo de aplicación de ramificación y poda de $x_1 = 3$ en restricción 2.

$$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45}$$
$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$9(3) + 5x_2 = 45$$
$$27 + 5x_2 = 45$$
$$5x_2 = 18$$
$$x_2 = \frac{18}{5}$$
$$\mathbf{x_2 = 3,6}$$

$$\mathbf{Z = 8x_1 + 5x_2}$$
$$Z = 8(3) + 5(3{,}6)$$
$$\boldsymbol{Z = 42}$$

Resumen:

$$Z = 42$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 3{,}6$$

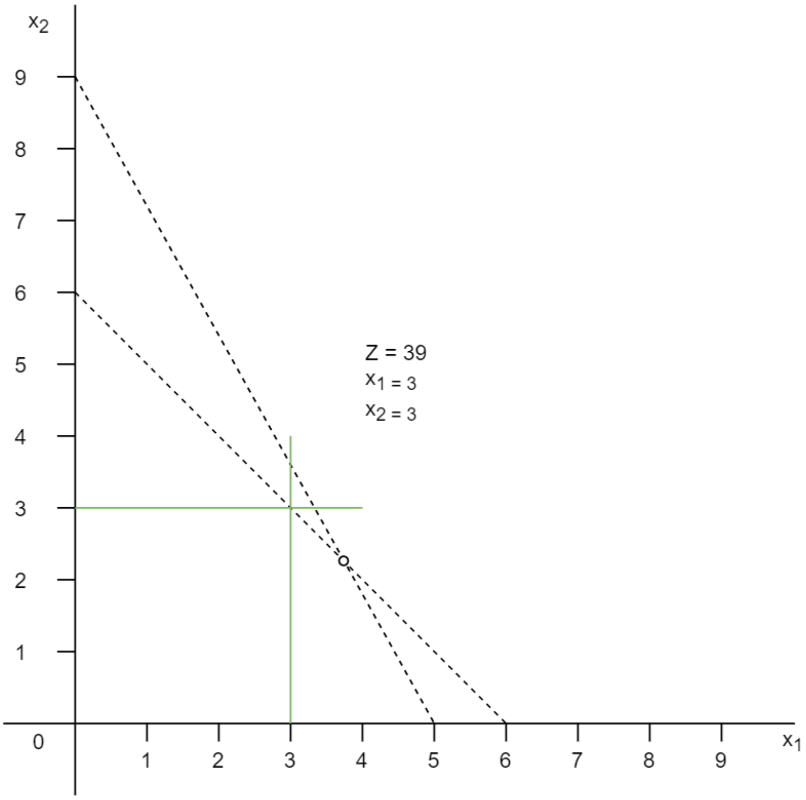
Evaluar restricciones:

$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6}$ $\rightarrow 3 + 3{,}6 = 6{,}6$ $\rightarrow$ **No es correcta**

$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45}$ $\rightarrow 9(3) + 5(3{,}6) = 45$ $\rightarrow$ **Es correcta**

Nota: Al no cumplir las restricciones queda descartada.

Representación $\boldsymbol{x_1 = 3}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x_2 = 3}$.



Cálculo de aplicación de ramificación y poda de $x_1 = 4$ en restricción 1.

$$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6}$$
$$x_1 + x_2 = 6$$
$$4 + x_2 = 6$$
$$\mathbf{x_2 = 2}$$
$$\mathbf{x_1 = 4 \ \rightarrow x_2 = 2}$$

$$\mathbf{Z = 8x_1 + 5x_2}$$
$$Z = 8(4) + 5(2)$$
$$\mathbf{Z = 42}$$

<u>Resumen:</u>

$$Z = 42$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 2$$

<u>Evaluar restricciones:</u>

$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6} \ \rightarrow 4 + 2 = 6 \ \rightarrow$ **Es correcta**

$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45} \ \rightarrow 9(4) + 5(2) = 46 \ \rightarrow$ **No es correcta**

Nota: Al no cumplir las restricciones queda descartada.

Cálculo de aplicación de ramificación y poda de $x_1 = 4$ en restricción 2.

$$\boldsymbol{9x_1 + 5x_2 \leq 45}$$
$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$9(4) + 5x_2 = 45$$
$$36 + 5x_2 = 45$$
$$x_2 = \frac{9}{5}$$
$$\mathbf{x_2 = 1,8}$$

$$\mathbf{Z = 8x_1 + 5x_2}$$
$$Z = 8(4) + 5(1{,}8)$$
$$\boldsymbol{Z = 41}$$

<u>Resumen:</u>

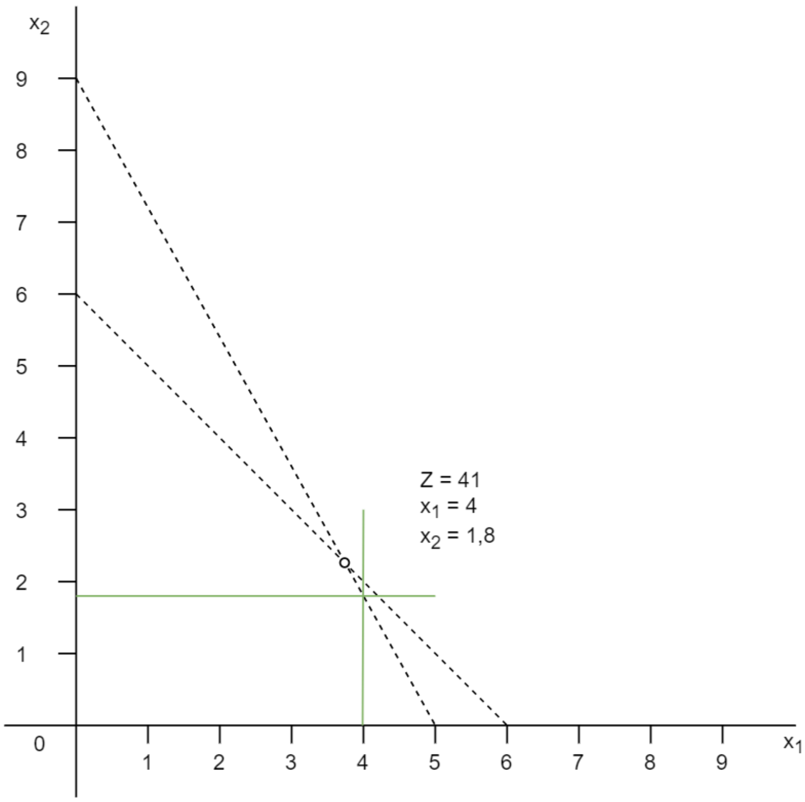
$$Z = 41$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 1{,}8$$

<u>Evaluar restricciones:</u>

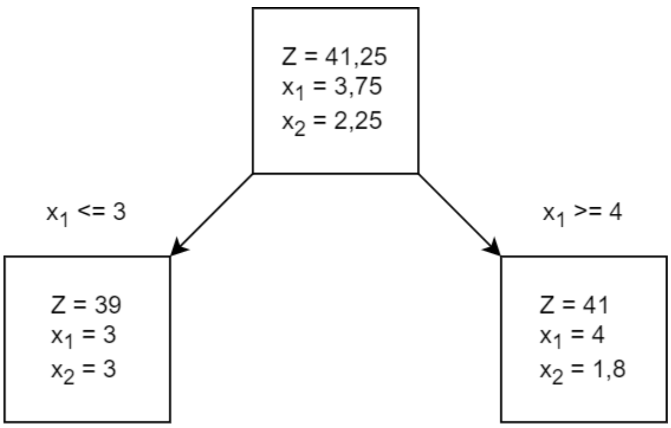
$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6} \rightarrow 4 + 1{,}8 = 5{,}8 \rightarrow$ **Es correcta**

$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45} \rightarrow 9(4) + 5(1{,}8) = 45 \rightarrow$ **Es correcta**

Representación $\boldsymbol{x_1 = 4}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x_2 = 1,8}$.



2.3 Paso 3: Calculo y representación de ramificación.

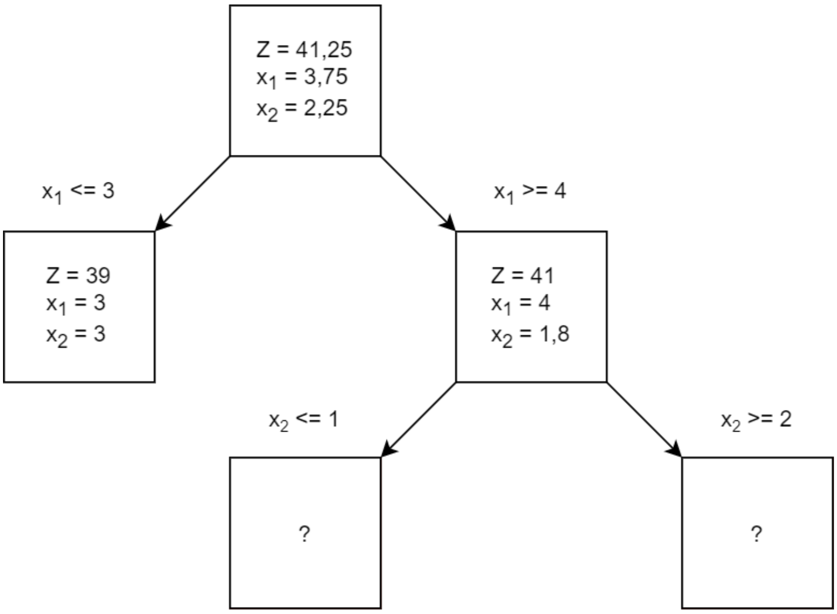


Del proceso del cálculo de las funciones para $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$ obtenemos dos resultados para Z, las cuales son posibles soluciones.

Para $x_1 \leq 3$ obtenemos un resultado en la función de $Z = 39$. En este caso obtenemos un resultado de enteros para ambos valores de x. No es necesario seguir ramificación.

Para $x_1 \geq 4$ obtenemos un resultado en la función de $Z = 41$. En este caso obtenemos un resultado de $x_2 = 1{,}8$, al ser un número decimal y Z es mayor que en el otro nodo, debemos seguir ramificando, ya que buscamos la maximización de Z.

Lo que significa que debemos buscar para x_2 aquellos números enteros menores o igual a 1 y mayores e igual a 2.

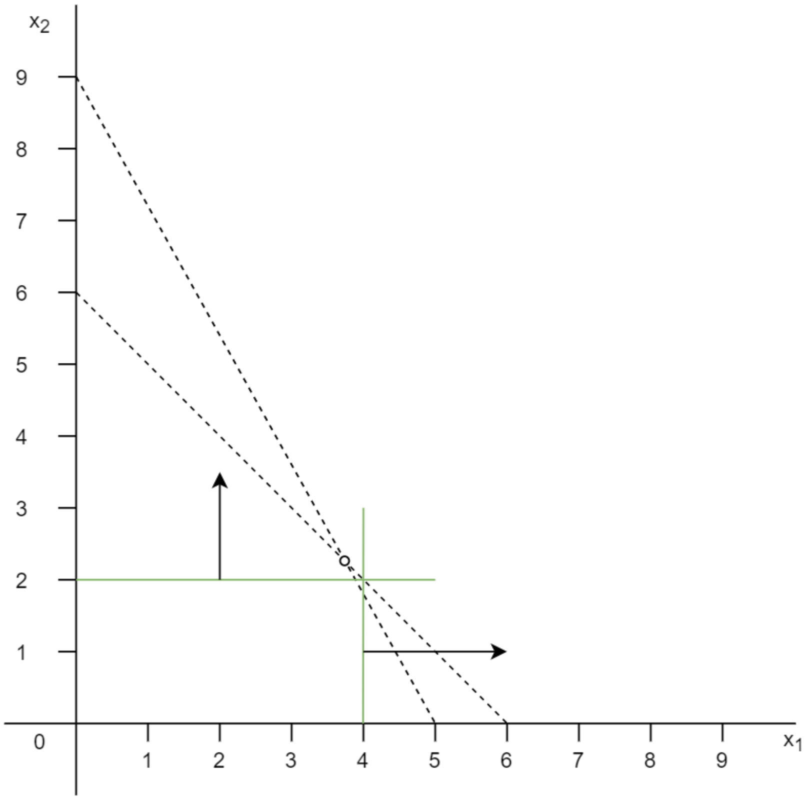


Para determinar si podemos continuar ramificando debemos analizar los resultados en el gráfico de la solución óptima.

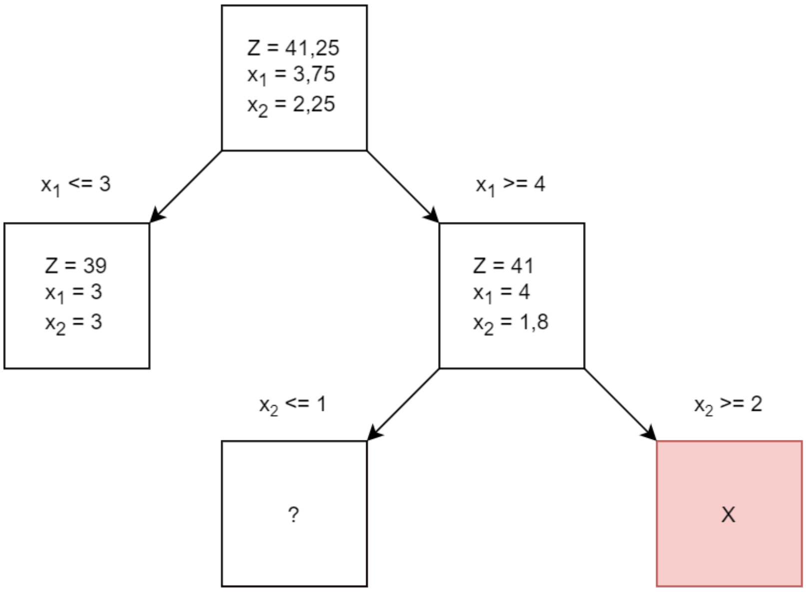
De esta forma determinaremos si debemos realizar una poda o continuar con la expansión de los nodos.

2.4 Paso 4: Representación de poda.

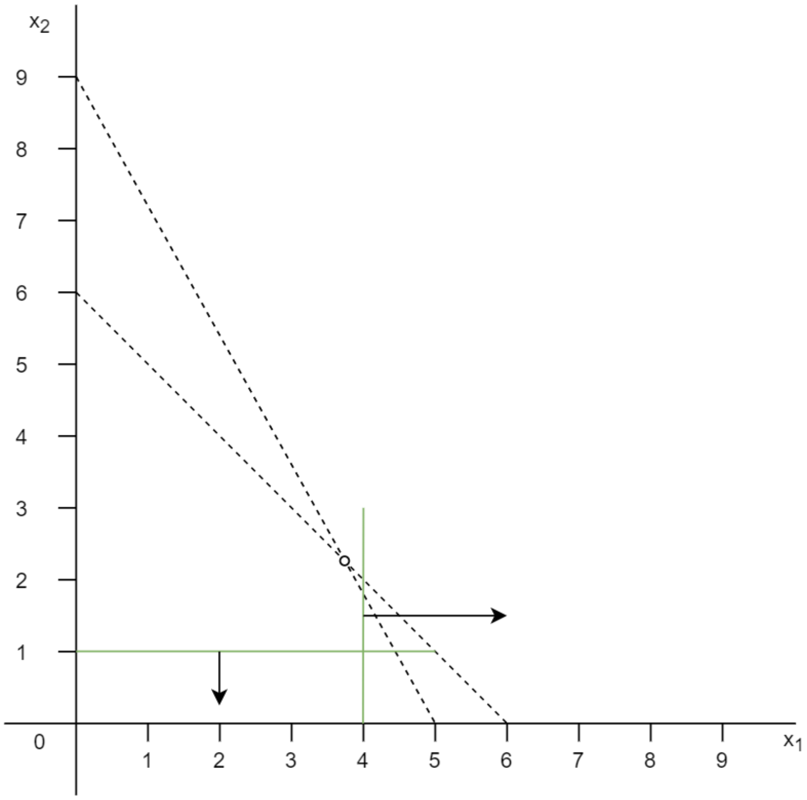
Análisis caso $x_2 \geq 2$ cuando $x_1 \geq 4$.



Observamos que para el valor $x_2 \geq 2$ y $x_1 \geq 4$ sale de las limitaciones del área de la solución óptima para la función $Z = 41{,}25$. De esta forma determinamos que **el nodo no es expandido y aplicamos una poda**.



Análisis caso $x_2 \leq 1$ cuando $x_1 \geq 4$.



Observamos que para el valor $x_2 \leq 1$ y $x_1 \geq 4$ se mantiene dentro de las limitaciones del área de la solución óptima para la función $Z = 41{,}25$. De esta forma determinamos que **el nodo debe ser calculado cómo posible solución.**

2.5 Paso 5: Calculo y representación de ramificación.

Cálculo de aplicación de ramificación y poda de $x_2 = 1$ en restricción 1 cuando $x_1 \geq 4$.

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 \leq 6}$$
$$x_1 + x_2 = 6$$
$$x_1 + 1 = 6$$
$$\boldsymbol{x_1 = 5}$$

$$\boldsymbol{Z = 8x_1 + 5x_2}$$
$$Z = 8(5) + 5(1)$$
$$\boldsymbol{Z = 45}$$

Resumen:

$$Z = 45$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 1$$

Evaluar restricciones:

$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6} \rightarrow 5 + 1 = 6 \rightarrow$ **Es correcta**

$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45} \rightarrow 9(5) + 5(1) = 50 \rightarrow$ **No es correcta**

Nota: Al no cumplir las restricciones queda descartada.

Cálculo de aplicación de ramificación y poda de $x_2 = 1$ en restricción 2 cuando $x_1 \geq 4$.

$$\boldsymbol{9x_1 + 5x_2 \leq 45}$$
$$9x_1 + 5x_2 = 45$$
$$9x_1 + 5(1) = 45$$
$$9x_1 = 40$$
$$x_1 = \frac{40}{9}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 4,\hat{4}}$$

$$\boldsymbol{Z = 8x_1 + 5x_2}$$
$$Z = 8(4,\hat{4}) + 5(1)$$
$$\boldsymbol{Z = 40,\hat{5}}$$

Resumen:

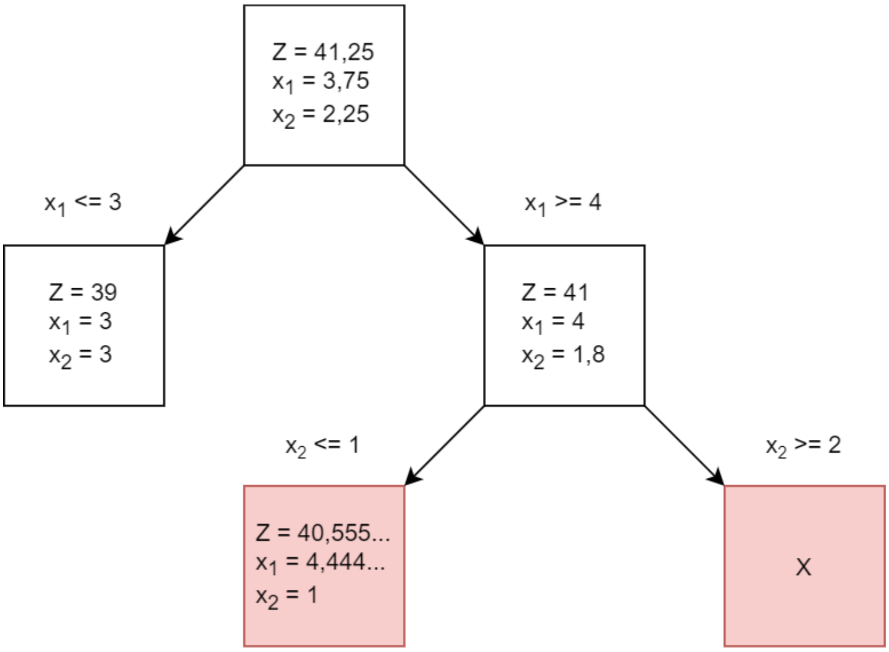
$$Z = 40,\hat{5}$$
$$x_1 = 4,\hat{4}$$
$$x_2 = 1$$

Evaluar restricciones:

$\mathbf{x_1 + x_2 \leq 6} \rightarrow 4,\hat{4} + 1 = 5,\hat{4} \rightarrow$ **Es correcta**

$\mathbf{9x_1 + 5x_2 \leq 45} \rightarrow 9(4,\hat{4}) + 5(1) = 45 \rightarrow$ **Es correcta**

2.6 Paso 6: Representación de poda.

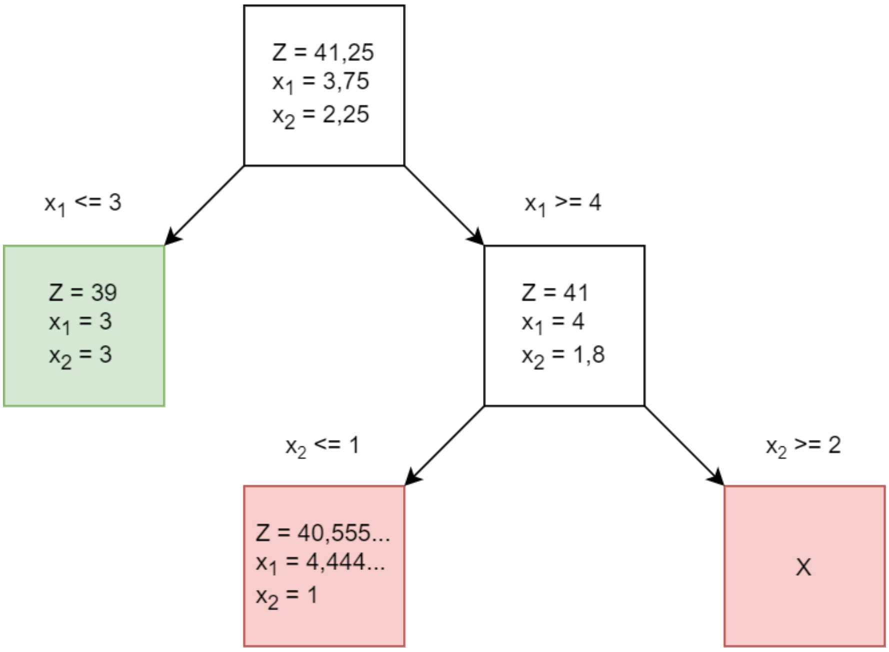


Una vez aplicado el cálculo de la función Z para $x_2 \leq 1$ cuando $x \geq 4$ obtenemos un resultado de $Z = 40,\hat{5}$. En el enunciado se nos indica un proceso de maximización y por ello se detecta que Z es menor que Z en el nodo padre que tiene un valor de $Z = 41$. Por esta razón, **no seguimos expandiendo el nodo y aplicamos un proceso de poda.**

2.7 Paso 7: Resultado final.

Una vez que ya no podemos expandir más en otros nodos según lo analizado. Se determina que la solución óptima para números enteros no negativos en maximización es:

$$\boldsymbol{Z = 39}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 3}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 3}$$



Solución óptima para enteros no negativos.

3.0 Conclusión.

En el documento hemos realizado un ejercicio de B&B de maximización. En él, hemos realizado un proceso evaluando todos los casos posibles, si cumplían sus restricciones y sus representaciones gráficas, estas últimas, nos han ayudado en la toma de decisiones de poda y evitar continuar expandiendo donde no era necesario.

José J. Peleato Pradel