衍生工具作业5

> 2022-3作业（Hull 英文第十版）

😀 姓名：*** 学号：202109120****

第13章

> *（13.1&13.4，每题分别用无套利技术、风险中性定价技术、组合复制技术这三种方法求解）*

13.1

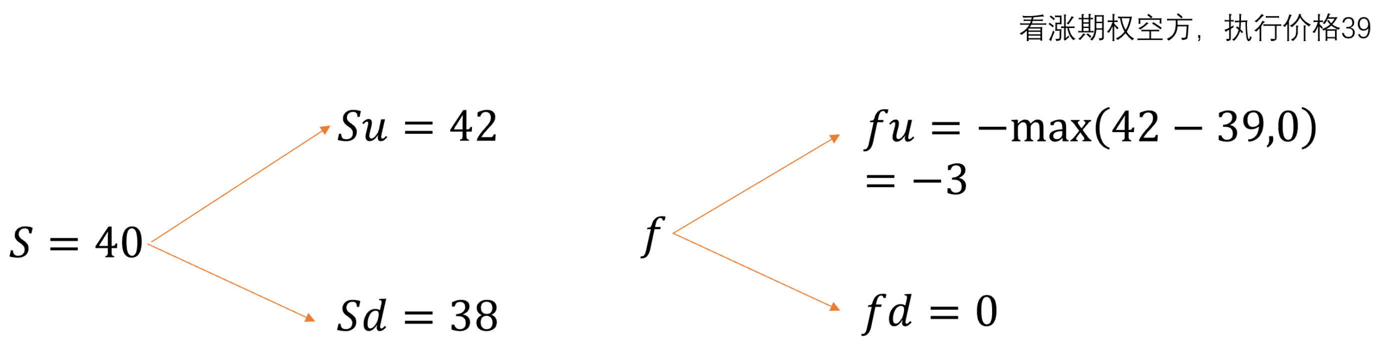
【问题】股票的当前价格为40美元，已知在 1个月后股票的价格将可能变为42美元或38美元，无风险利率为每年8%（连续复利），执行价格为39美元、1个月期限的欧式看涨期权价值是多少？

【解答】

无套利技术：

构造无风险组合——一份欧式看涨期权的空头，与 Δ 份股票现货。组合价值为 $S\Delta - f$

绘制出单步二叉树如下：



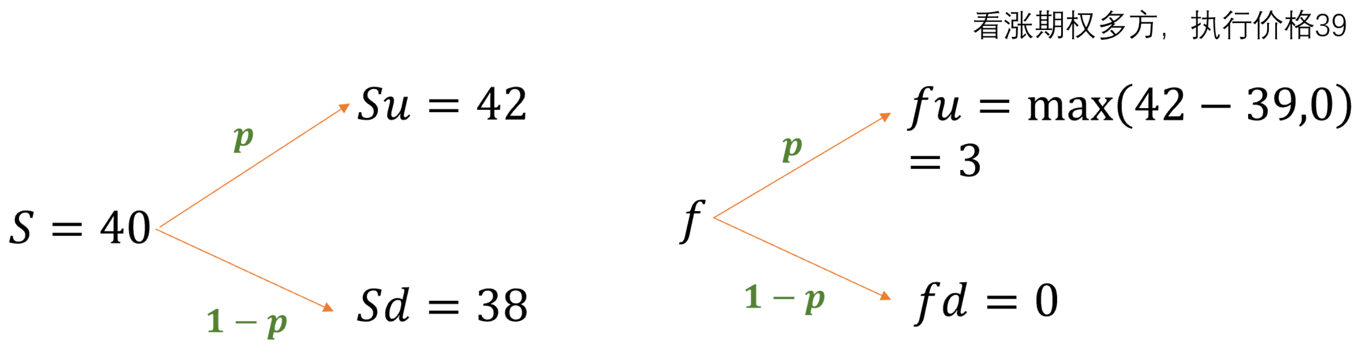
如上图可知：如果股票价格变为 $S_u = 42$ 美元，期权价格变为 $f_u = -3$,组合价值为 $42\Delta - 3$; 如果股票价格 $S_f = 42$ 美元，期权价格变为 $f_d = 0$,组合价值为 $38\Delta - 0$

因为构造的是无套利（无风险组合），那么两种状态价格需一致，即 $42\Delta - 3 = 38\Delta \Rightarrow \Delta = 0.75$,此时一个月后，组合价格为 $38 * 0.75 = 28.5$,贴现到当前，价格为 $28.5 * e^{-8\% * \frac{1}{12}} \approx 28.31$.

带入组合期初价值的公式 $S\Delta - f = 28.31 = 40 * 0.75 - f \Rightarrow f = 1.69$

因此：执行价格为39美元、1个月期限的**<u>欧式期权价值是1.69美元</u>**

风险中性定价技术：



由风险定价公式 $S_T = pS_0u + (1-p)S_0d$ ，其中 $S_T = S_0e^{rT}$

也即是有 $S_up + S_d(1-p) = S_0e^{rT}$ ，即 $42p + 38(1-p) = 40 * e^{8\% * \frac{1}{12}} \Rightarrow \ p = 0.5669$

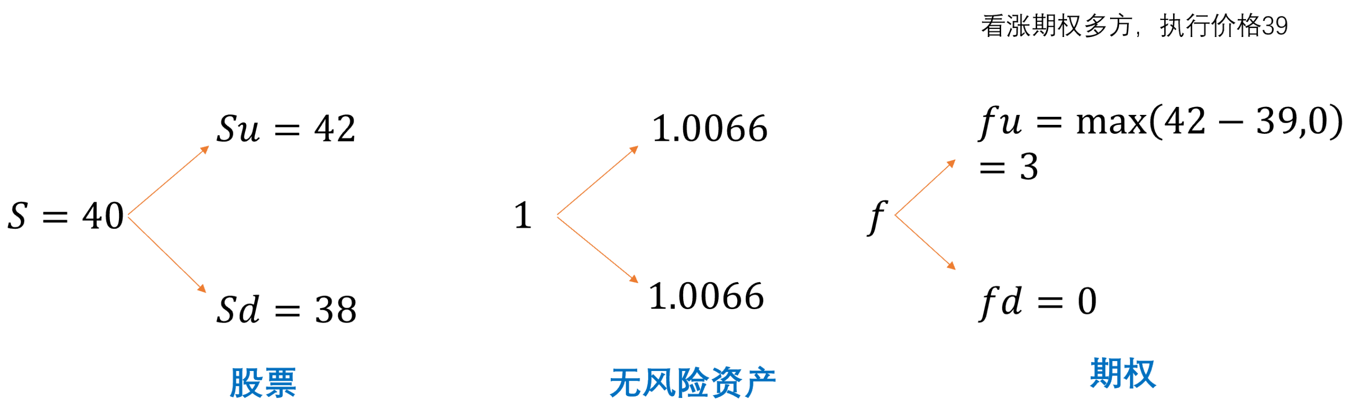
那么期权也满足这个中性风险，即

$f = e^{-rT}[f_up + f_d(1-p)] = e^{-8\% * \frac{1}{12}}[3 * 0.5669 + 0] \approx \ 1.69$

因此：执行价格为39美元、1个月期限的**欧式期权价值是1.69美元**

组合复制技术：

采用静态组合策略，用已知资产组合复制未知资产，此题即用股票复制期权



设 x 份股票和 y 份无风险资产可以构成期权，可以得到如下线性方程组：

$$x\begin{bmatrix} 42 \\ 38 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1.0066 \\ 1.0066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得：$\begin{cases} x = 0.75 \\ y = -28.3131 \end{cases}$

代入初始资产可得 $40x + 1y = 40 * 0.75 - 28.3131 \approx 1.69$

因此：执行价格为39美元、1个月期限的**欧式期权价值是1.69美元**

13.4

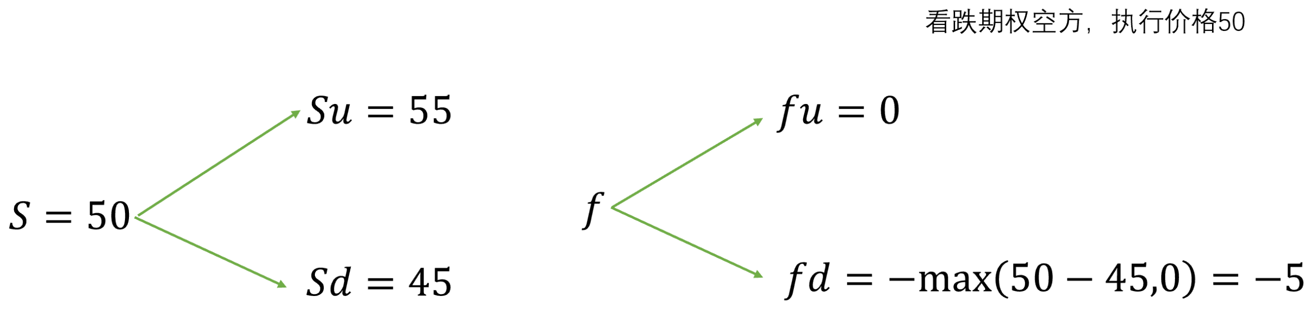
【问题】股票的当前价格为50美元，已知在6个月后这一股票的价格将可能变为45美元或55美元，无风险利率为10%（连续复利）。执行价格为50美元、6个月期限的欧式看跌期权的价值是多少？

【解答】

无套利技术：

构造无风险组合——一份欧式看跌期权的空头，与 Δ 份股票现货。组合价值为 $S\Delta - f$

绘制出单步二叉树如下：



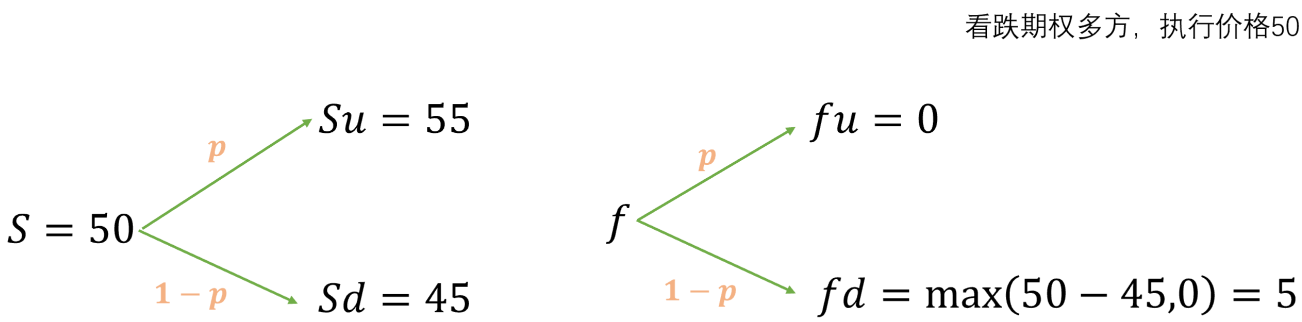
如上图可知：如果股票价格变为 $S_u = 55$ 美元，期权价格变为 $f_u = 0$,组合价值为 $55\Delta - 0$；如果股票价格 $S_f = 45$ 美元，期权价格变为 $f_d = -5$,组合价值为 $45\Delta - 0$

因为构造的是无套利（无风险组合），那么两种状态价格需一致，即 $55\Delta - 0 = 45\Delta - 5 \Rightarrow \Delta = -0.5$,此时一个月后，组合价格为 $-55 * -0.5 = -27.5$,贴现到当前，价格为 $-27.5 * e^{-10\% * \frac{6}{12}} \approx -26.16$.

带入组合期初价值的公式 $S\Delta - f = -26.16 = 50 * (-0.5) - f \Rightarrow f = 1.16$

因此：执行价格为50美元、6个月期限的**欧式看跌期权的价值是1.16美元**

风险中性定价技术：



由风险定价公式 $S_T = pS_0u + (1-p)S_0d$ ，其中 $S_T = S_0e^{rT}$

也即是有 $S_up + S_d(1-p) = S_0e^{rT}$ ，即 $55p + 45(1-p) = 50 * e^{10\% * \frac{6}{12}} \Rightarrow p = 0.7564$

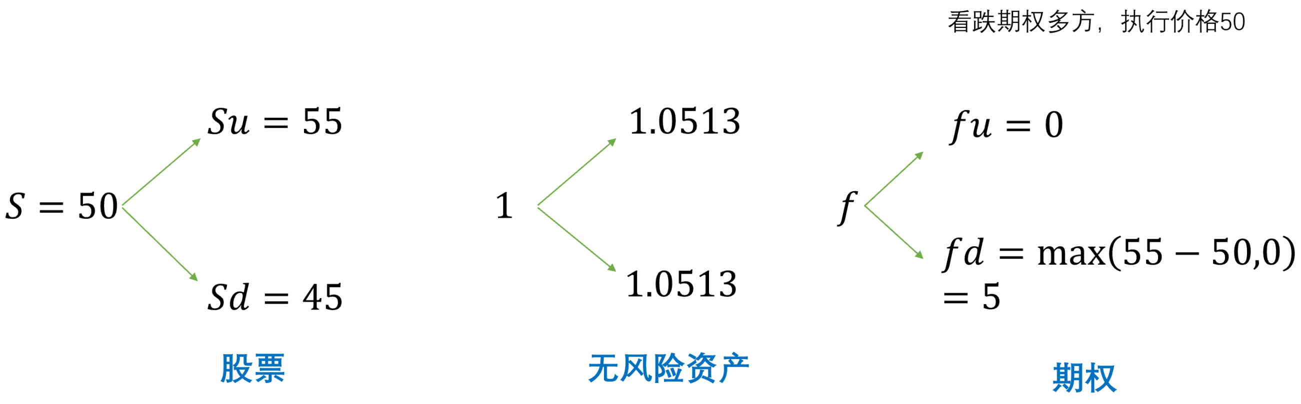
那么期权也满足这个中性风险，即

$$f = e^{-rT}[f_up + f_d(1-p)] = e^{-10\% * \frac{6}{12}}[5 * 0.2436 + 0] \approx 1.16$$

因此：执行价格为50美元、6个月期限的**欧式看跌期权的价值是1.16美元**

组合复制技术：

采用静态组合策略，用已知资产组合复制未知资产，此题即用股票复制期权



设 x 份股票和 y 份无风险资产可以构成期权，可以得到如下线性方程组：

$$x\begin{bmatrix}55\\45\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1.0513\\1.0513\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$$

解得：$\begin{cases}x=-0.5\\y=26.1581\end{cases}$

代入初始资产可得 $50x+1y=50*(-0.5)+26.1581\approx 1.16$

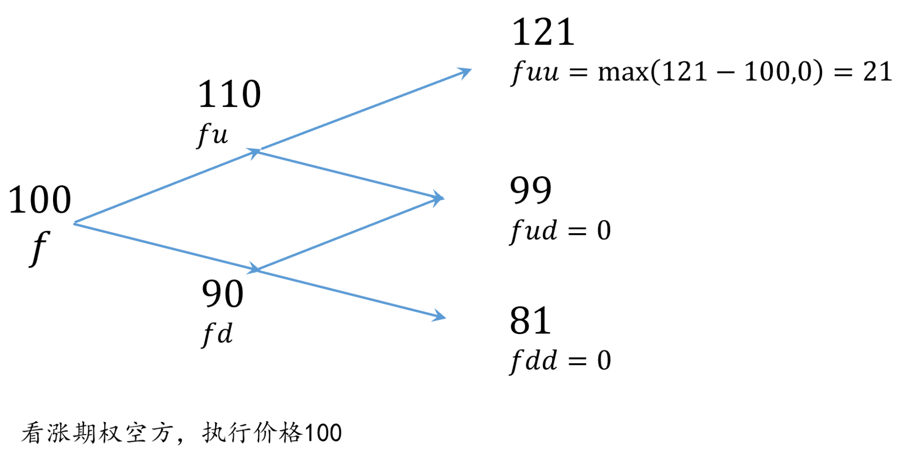
因此：执行价格为50美元、6个月期限的**<u>欧式看跌期权的价值是1.16美元</u>**

13.5

【问题】股票的当前价格为100美元，在今后每6个月内，股票价格可能会或上涨 10%或下跌10%，无风险利率为每年8%(连续复利)，执行价格为100美元、1年期的欧式看涨期权的价格是多少?

【解答】

股票和期权得二叉树变化如下图



由题知 $u=1.1\ d=0.9\ r=0.08\ T=0.5$

风险中性概率 $p=\dfrac{a-d}{u-d}=\dfrac{e^{0.08*0.5}-0.9}{1.1-0.9}\approx\ 0.7041\quad(a=e^{rT})$

由两步二叉树公式 $f=e^{-2rT}[p^2 f_{uu}+2p(1-p)f_{ud}+(1-p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$f=e^{-2*0.08*0.5}[0.7041^2*21+0+0]\approx\ 9.61$ 美元

因此：执行价格为100美元、1年期的**欧式看涨期权的价格是9.61美元**

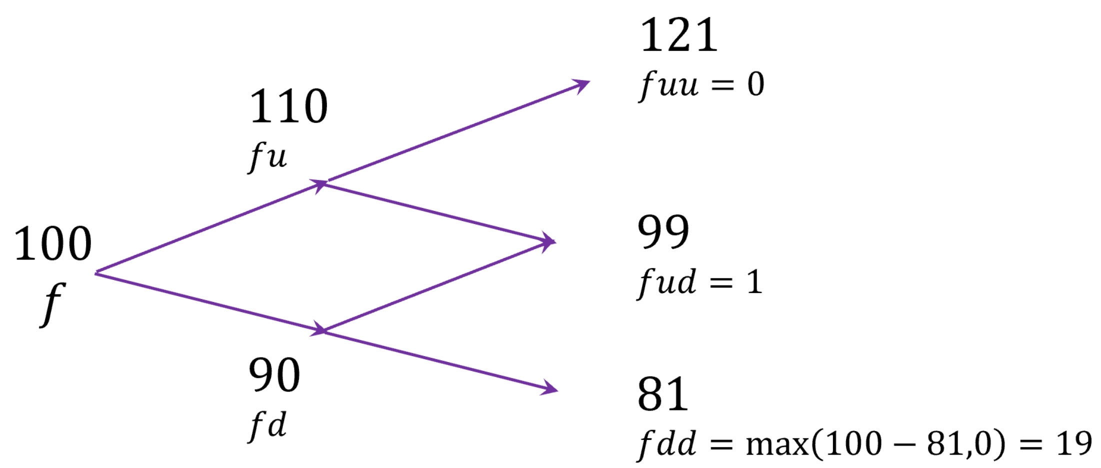
13.6

【问题】在习题5的情形下，执行价格为100美元，1年期的欧式看跌期权价格是多少？验证所得结果满足期权平价关系式。

【解答】

a. 计算期权价格

类比上一题，股票和期权得二叉树变化如下图



看跌期权空方，执行价格100

由题知 $u=1.1\ d=0.9\ r=0.08\ T=0.5$

风险中性概率 $p=\dfrac{a-d}{u-d}=\dfrac{e^{0.08*0.5}-0.9}{1.1-0.9}\approx\ 0.7041\quad (a=e^{rT})$

由两步二叉树公式 $f=e^{-2rT}[p^2 f_{uu}+2p(1-p)f_{ud}+(1-p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$f=e^{-2*0.08*0.5}[0+2*0.7041*0.2959*1+0.2959^2*19]\approx\ 1.92$ 美元

因此：执行价格为100美元、1年期的**欧式看跌期权的价格是1.92美元**

b. 验证结果

期权平价关系式为 $c+Ke^{-rT'}=p+S_0$ ，带入数据得

$1.92+100*e^{-1*0.08}=9.61+100=109.61$

因此，**结果满足期权平价关系式**

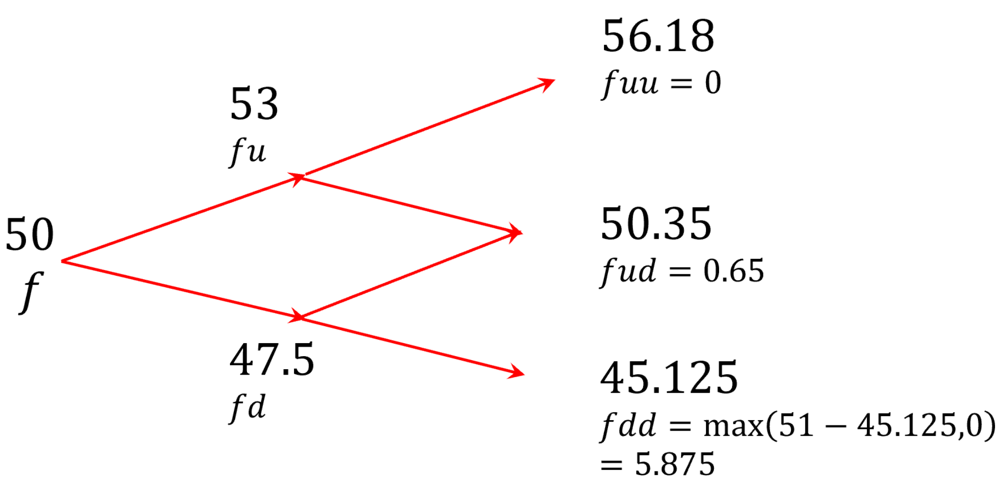
13.13

【问题】考虑习题12中的情形*（某股票的当前价格为50美元，在今后6个月的每3个月时间内，股票价格都可能会或上涨6%，或下跌 5%,无风险利率为每年5%（连续复利））*，执行价格为51美元，6个月欧式看跌期权的价值为多少？验证期权平价关系式的正确性。如果看跌期权为美式期权，在二叉树的某些节点上提前行使期权会是最优吗？

【解答】

a. 计算看跌期权价格

股票和期权得二叉树变化如下图



看跌期权空方，执行价格51

由题知 $u = 1.06\ d = 0.95\ r = 0.05\ T = 0.25$

风险中性概率 $p = \dfrac{a-d}{u-d} = \dfrac{e^{0.05*0.25} - 0.95}{1.06 - 0.95} \approx\ 0.5689 \quad (a = e^{rT})$

由两步二叉树公式 $f = e^{-2rT}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$f = e^{-2*0.05*0.25}[0 + 2 * 0.5689 * 0.4311 * 0.65 + 0.4311^2 * 5.875] \approx\ 1.376$ 美元

因此：执行价格为51美元，6个月**欧式看跌期权的价值是1.376美元**

b. 验证结果

同理可知，看涨期权的价格为 $f = e^{-2*0.05*0.25}[5.18 * 0.5689^2 + 0 + 0] \approx\ 1.635$ 美元

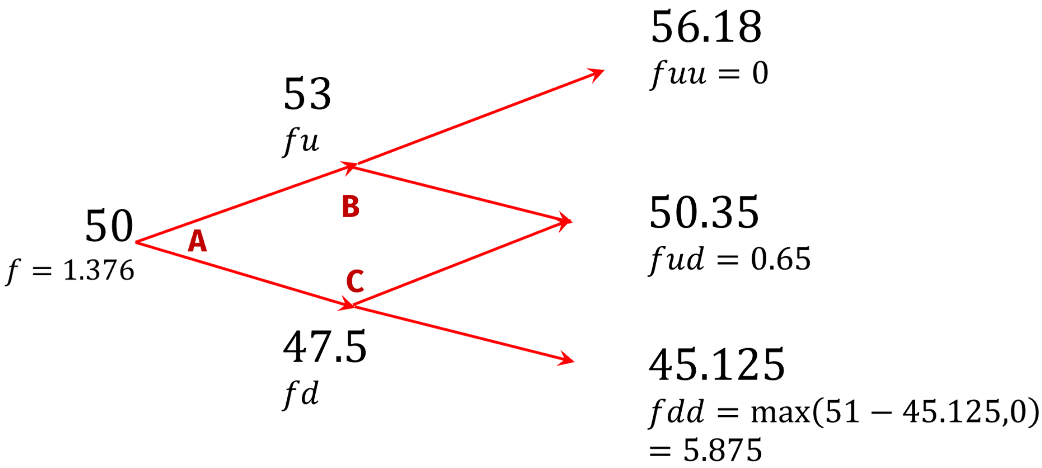
期权平价关系式为 $c + Ke^{-rT'} = p + S_0$ ，带入数据得

$1.635 + 51 * e^{-0.5*0.05} = 1.376 + 50 = 51.376$

因此，**结果满足期权平价关系式**

c. 美式期权情况下提前行使期权

因为美式期权允许提前行权，那么需要考虑下图所示的ABC三个结点，如果期权的内在价值大于时间价值，则可以行权。对下列ABC结点分析如下：

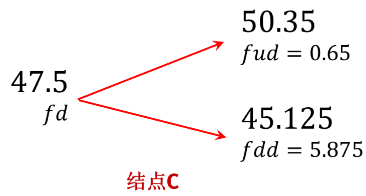


看跌期权空方，执行价格51

- 对于A结点：$f = 1.376$（第一问算得）,立即执行获利 $max(51-50,0)=1$, $1<1.376$,不会提前行权
- 对于B结点：立即执行并不获利，不会提前执行

- 对于C结点：考虑如右图所示二叉树，
  $f=e^{-rT}[pf_u+(1-p)f_d]$ ，带入数据得，$f=2.866$,立即执行获利 $max(51-47.5,0)=3.5$

  而 $3.5>2.866$ 因此，会在结点C处提前行权



即在二叉树**结点C时**（第一次下跌，股价跌至47.5时）**，提前行权是最优的！**

第14章

14.2

【问题】基于股票价格历史数据的交易策略的收益是否会总是高于平均收益？讨论这一问题。

【解答】

任何交易策略都可能因为幸运而产生高于平均回报率的收益。**关键的问题是根据风险进行相应调整时，交易策略的表现能否持续胜过市场**。某一个交易策略可能做到这一点。然而，**当足够多的投资者知道这一策略并以该投资策略进行投资时，利润将会消失**。

小公司效应便是其中一例。当对风险进行适当的调整后，由小公司的股票组成的组合收益率能够超过由大公司股票组成的组合收益率。关于这方面的论文早在20世纪80年代早期就有发表，并且促成了共同基金利用此现象盈利。但是，最新的一些文献和实证分析表明，这种现象已经开始消失。

因此，基于股票价格历史数据的交易策略的收益是否高于平均收益，需要具体情况具体分析。

14.4

【问题】变量 X_1 和 X_2 服从广义维纳过程，漂移率分别为 μ_1 和 μ_2 ，方差率分别为 σ_1^2、σ_2^2 。在以下条件下，X_1+X_2 服从什么样的过程？(a) X_1 和 X_2 在任何小的时间区间内的变化相互无关。(b) X_1 和 X_2 在任何小的时间区间内变化的相关系数为 ρ 。

【解答】

a. 变化相互无关

不妨假设 X_1 和 X_2 的初始值分别为 a_1、a_2 ,经过时间 T 后，X_1 和 X_2 的概率分布分别为

$$\begin{cases}\phi_1=\phi(a_1+\mu_1T,\sigma_1^2T)\\ \phi_2=\phi(a_2+\mu_2T,\sigma_2^2T)\end{cases}$$

因为 X_1 和 X_2 变化相互无关，即 X_1 和 X_2 相互独立，由正态分布的可加性可知

$$X_1+X_2\sim\phi(a_1+\mu_1T+a_2+\mu_2T,\sigma_1^2+\sigma_2^2)=\phi[(a_1+a_2)+(\mu_1+\mu_2)T,(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T]$$

即 X_1+X_2 同样服从广义维纳过程，漂移率为 $\mu_1+\mu_2$,方差率为 $\sigma_1^2+\sigma_2^2$

b. 变化相关系数为 ρ

正态分布具有可加性，相加后仍为正态分布，但是此时相关系数不为0

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=(a_1+a_2)+(\mu_1+\mu_2)T$$

$Var(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2cov(X_1,X_2)$,而
$cov(X_1,X_2)=\rho*\sqrt{D(X_1)D(X_2)}$,因此，$Var(X_1+X_2)=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T$

综上：$X_1+X_2\sim\phi[(a_1+a_2)+(\mu_1+\mu_2)T,(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T]$

即 X_1+X_2 同样服从广义维纳过程，漂移率为 $\mu_1+\mu_2$,方差率为 $\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2$

14.5

【问题】考虑服从以下过程的变量 $S: dS=\mu dt+\sigma\, dz$。在最初的3年中，$\mu=2,\sigma=3$；在接下的3年中，$\mu=3,\sigma=4$。如果变量的初始值为5，则变量在第6年年末的概率分布是什么？

【解答】

最初三年和接下来三年，其分别服从概率分布 ϕ_1、ϕ_2 ,具体为

$$\begin{cases}\phi_1=\phi(a_1+\mu_1T,\sigma_1^2T)=\phi(a_1+2*3,9*3)\\ \phi_2=\phi(a_2+\mu_2T,\sigma_2^2T)=\phi(a_2+3*3,16*3)\end{cases}$$

这六年的变化即是两个正态分布之和，由正态分布可加性知：

$$\phi=\phi_1+\phi_2=\phi(a_1+6,27)+\phi(a_2+9,48)=\phi(a_1+a_2+15,75)$$

考虑到变量初始值为5,即 $a_1+a_2=5$,所以变量在第6年年末的概率分布是：

$$\phi=\phi(5+15,75)=\phi(20,75)$$

14.10

【问题】假定股票价格 S 服从几何布朗运动 $dS=\mu Sdt+\sigma\ Sdz$,其中以 μ 期望收益率， σ 为波动率。变量 S^n 服从什么过程？证明 S^n 也服从几何布朗运动。

【解答】

因为股票价格S服从几何布朗运动，即也符合伊藤过程 $dx=a(x,t)\,dt+b(x,t)\,dz$

为了方便描述，不妨假设 $G(S,t)=S^n$ ，且其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}=0\\\dfrac{\partial G}{\partial S}=nS^{n-1}\\\dfrac{\partial^2 G}{\partial S^2}=n(n-1)S^{n-2}\end{cases}$$

即 G（S,t） 可微，满足伊藤引理适用条件， S^n 服从**伊藤过程**。

运用伊藤引理可知，

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial S}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial S}b\,dz$$

带入 $a=\mu S,b=\sigma S$ 可得

$$dG=(n\mu+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2)G\ dt+n\sigma G\ dz$$

因此 S 与 S^n 具有同样的形式，也**满足几何布朗运动**。其期望收益率为 $n\mu+\dfrac{1}{2}n(n-1)\sigma^2$,波动率为 $n\sigma$ 。

那么 S_T的期望值为$S_0^n e^{[\mu n+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2]T}$

14.17

【问题】假定股票的当前价格为50美元，其期望收益率和波动率分别为每年12%和每年30%。股票价格在2年后高于80美元的概率为多少？（提示：当 $\ln S_T>\ln 80$ 时， $S_T>80$ ）

【解答】

由题目可知 $\mu=0.12\ \sigma=0.30\ T=2$

股票价格服从对数正态分布，即 $\ln S_T\ \sim\ \phi\ [\ln S_0+(\mu-\dfrac{\sigma^2}{2})T,\sigma^2T]$

带入数据得 $\ln S_T\ \sim\ \phi\ [\ln 50+(0.12-\dfrac{0.30^2}{2})*2,0.3^2*2]\ \Rightarrow\ \ln S_T\ \sim\ \phi\ (4.062,0.424^2)$

若 $S_T>80\ \Rightarrow\ \ln S_T\ >\ln\ 80=4.382$

高于80美元的概率为：

$P(\ln S_T > 4.382) = 1 - P(\ln S_T \leq 4.382) = 1 - N(\frac{4.382-4.062}{0.424}) = 1 - N(0.754) = 0.225$

因此：**股票价格在2年后高于80美元的概率为22.5%**

第15章

15.6

【问题】什么是隐含波动性？如何计算？

【解答】

隐含波动率是**使得布莱克-斯科尔斯-默顿(Black—Scholes)模型中期权价格等于其市场价格的波动率**，可以由迭代计算法获得。

一种简单的计算隐含波动率的方法为(迭代/试错法)：假设有两个波动率，一个波动率太高（即期权价格远高于市场价格），一个波动率太低（即期权价格远低于市场价格）。将等于两者均值的波动率代入布莱克-斯科尔斯-默顿模型，可得到一对新的偏高波动率与偏低波动率。不断进行迭代。因此，我们只需获得最初的过高波动率及过低波动率，并重复上述步骤不断平分隐含波动率的取值范围，并逐渐收敛到正确值。

实际中可利用其他更加精确的方法，比如 Newton-Raphson方法来计算隐含波动率。

15.7

【问题】股票的当前价格为40美元，假定其期望收益率为15%，波动率为25%。在两年内的股票收益率（连续复利)的概率分布是什么？

【解答】

由题目可知 $\mu = 0.15\ \sigma = 0.25\ T = 2$

由收益率分布公式知，收益率 $x \sim \phi(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T})$

带入数据得两年内的股票收益率（连续复利)的概率分布是 $x \sim \phi(0.15 - \frac{0.25^2}{2}, \frac{0.25^2}{2})$

即 $x \sim \phi(0.11875, 0.03125)$

> 预期的价值回报率为每年11.875%，标准差为每年17.7%

15.8

某股票价格服从几何布朗运动，其中期望收益率为16%，波动率为35%，股票的当前价格为38美元。

(a)一份该股票上具有执行价格为40美元，期限为6个月的欧式看涨期权被行使的概率为多少?
(b)一份该股票上具有同样执行价格及期限的欧式看跌期权被行使的概率为多少?

【解答】

a. 看涨期权

由题目可知 $\mu = 0.16$ $\sigma = 0.35$ $T = 0.5$

股票价格服从对数正态分布，即 $\ln S_T \ \sim \ \phi\left[\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T\right]$

带入数据得

$\ln S_T \ \sim \ \phi\left[\ln 38 + (0.16 - \frac{0.35^2}{2}) * 0.5, 0.35^2 * 0.5\right] \ \Rightarrow \ \ln S_T \ \sim \ \phi\left(3.687, 0.247^2\right)$

如需行权，需要 $S_T \ > 40 \ \Rightarrow \ \ln S_T \ > \ln \ 40 = 3.689$

行权概率：

$P(\ln S_T \ > 3.689) = 1 - P(\ln S_T \leq 3.689) = 1 - N(\frac{3.689 - 3.687}{0.247}) = 1 - N(0.008) = 0.4968$

也即，期限为6个月的欧式看涨期权被**行使的概率为49.68%**

b. 看跌期权

与第一问类似，如需行权，需要 $S_T \ < 40 \ \Rightarrow \ \ln S_T \ < \ln \ 40 = 3.689$

行权概率：$P(\ln S_T \ < 3.689) = N(\frac{3.689 - 3.687}{0.247}) = N(0.008) = 0.5032$

也即，同样的欧式看跌期权被**行使的概率为50.32%**