

衍生工具作业6

2022-4作业 (Hull 英文第十版)

😊 姓名：*** 学号：202109120****

第17章

17.9

【问题】一种外币的当前价格为1.5美元，国内与国外的无风险利率分别为5%与9%。计算在下面两种情况下一个6个月期执行价格为1.40美元的看涨期权下限，假定期权分别是：(a)欧式；(b)美式。

【解答】

a. 欧式期权

由书中公式，欧式期权价格

$$c \geq \max(S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}, 0) = \max(1.5 e^{-0.09 \times 0.5} - 1.4 e^{-0.05 \times 0.5}, 0) = 0.069$$

即该欧式期权价格下限为0.069美元

b. 美式期权

由公式，美式期权价格 $C \geq \max(S_0 - K, 0) = 0.10$

即该美式期权价格下限为0.1美元

17.10

【问题】某股指的当前值为250，股指的连续股息收益率为每年4%，无风险利率为每年6%。这一股指上3个月期、执行价格为245的欧式看涨期权的目前价格为10美元。该股指上3个月期、执行价格为245的看跌期权价值是多少？

【解答】

由题知 $S_0 = 250, q = 0.04, r = 0.06, T = 0.25, K = 245, c = 10$

由看涨-看跌平价公式得到—— $c + K e^{-rT} = p + S_0 e^{-qT}$

带入数据得到 $10 + 245 * e^{-0.06 \times 0.25} = p + 250 * e^{-0.04 \times 0.25}$

$$\Rightarrow p = 10 + 245 * e^{-0.06 \times 0.25} - 250 * e^{-0.04 \times 0.25} \approx 3.84 \text{ 美元}$$

因此，3个月期，执行价格为245的看跌期权价值是3.84美元。

【问题】 考虑练习题17.16的情形（某个投资组合的价值为6000万美元，标准普尔500的当前值为1200）。假定投资组合的 β 为2.0，无风险利率为每年5%，投资组合与股指的股息收益率为每年3%。为了保证投资组合在1年后价值不低于5400万美元，管理者应购买什么样的期权？

【解答】

◦ 购买份数：
$$n = \frac{V_0}{S_0 * 100} * \beta = \frac{60000000}{100 * 1200} * 2 = 1000$$

◦ 购买价格：

因为要保证投资组合在1年后价值不低于5400万美元，相比6000万美元下跌10%。股息收益率每年3%，那么一共总市场收益率 $R_m = -10\% + 3\% = -7\%$

而投资组合的超额收益率 = $\beta \times$ 股指组合的超额收益率

其中投资组合的超额收益率 = $-7\% - 5\% = -12\%$ ，那么股指组合的超额收益率 = -6% ，即股指组合的收益率 = $5\% - 6\% = -1\%$

又因为提供三个月的股息收益率，那么指数的预期变化 = $-1\% - 3\% = -4\%$

预测指数的变化为 $1200 * (1 - 4\%) = 1152$ 美元

综上，应该买**1000份1152美元、1年期的欧式看跌期权**

进行答案验证：当证券组合的价值下降20%，此时变成4800万美元。记入股息，收益率为-17%，这比无风险利率低22%。

由投资组合的超额收益率 = $\beta \times$ 股指组合的超额收益率，预测到的指数收益率提供低于无风险利率11%，也即-6%的回报率。

因此，预计指数下降9%到1092。看跌期权得到的报酬为 $(1152 - 1092) \times 100000 = 6000000$ （美元），即600万美元。4800万美元加上600万美元即得5400万美元，可见，实现了风险对冲。

第18章

【问题】 考虑一个2个月期限的期货看涨期权，执行价格为40，无风险利率为每年10%，当前期货价格为47。在以下两种情况下，期货期权下限为多少？(a)欧式期权；(b)美式期权。

【解答】

a. 欧式期权的情况

由公式 $c \geq \max((F_0 - K)e^{-rT}, 0)$ 可知，欧式看涨期权下限为 $\max((47 - 40)e^{-10\% \times \frac{2}{12}}, 0) = 6.88$ 美元

b. 美式期权的情况

由公式 $C \geq \max((F_0 - K), 0)$ 可知，欧式看涨期权下限为 $\max((47 - 40), 0) = 7$ 美元

18.12

【问题】 某期货的当前价格为60，波动率为30%。无风险利率为每年8%。利用两步二叉树来估计在期货上6个月期，执行价格为60的欧式看涨期权价格。如果看涨期权为美式期权，期权是否应被提前行使？

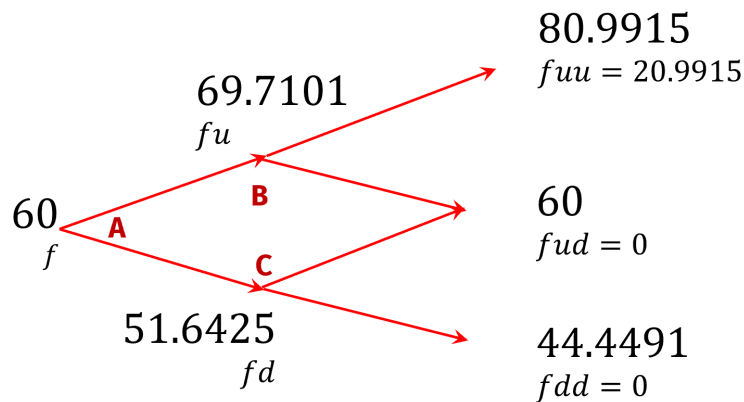
【解答】

由题，期权价格上涨的参数 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{30\% \times \sqrt{0.25}} = 1.1618$ ；

下降参数 $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-30\% \times \sqrt{0.25}} = 0.8607$

利用风险中性算得 $p = \frac{1 - d}{u - d} = \frac{1 - 0.8607}{1.1618 - 0.8607} = 0.4626$

可以画出如下的二叉树：



a. 欧式期权

由两步二叉树公式 $f = e^{-2rT} [p^2 f_{uu} + 2p(1 - p)f_{ud} + (1 - p)^2 f_{dd}]$ 带入数据

$$f = e^{-2 \times 0.08 \times 0.25} [0.4626^2 \times 20.9915 + 0 + 0] \approx 4.3155 \text{ 美元}$$

因此：期货上6个月期，执行价格为60的欧式看涨期权价格为4.3155美元。

b. 美式期权

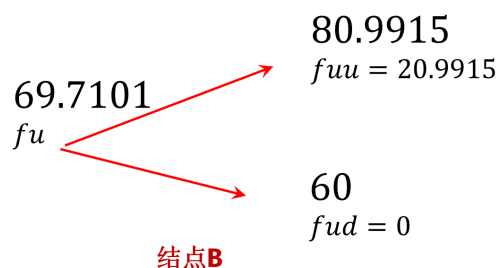
- 对于A结点：立即执行并不获利，不会提前执行

- 对于B结点：考虑如右图所示二叉树，
 $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$ ，带入数据得，
 $f = 9.5183$ ，立即执行获利
 $\max(69.7101 - 60, 0) = 9.7101$

而 $9.7101 > 9.5183$ 因此，会在结点B处提前行权

用9.7101代替B结点重算A

此时计算得美式期权在期初的价格为4.4026美元



- 对于C结点：立即执行并不获利，不会提前执行

综上，美式期权会在B结点（第一步的上行处）提前行权。

第19章

19.24

【问题】某金融机构持有以下（右图）有关英镑的场外交易期权组合。交易所里交易的一种期权的delta为0.6，gamma为1.5，vega为0.8：

(a)什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使交易组合为gamma与delta中性？
 (b)什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使得交易组合为vega与delta中性？假设所有隐含波动率的变化量相同，这样vega就可以被相加

期权类型	头寸	期权delta	期权gamma	期权vega
看涨	-1 000	0.50	2.2	1.8
看涨	-500	0.80	0.6	0.2
看跌	-2 000	-0.40	1.3	0.7
看涨	-500	0.70	1.8	1.4

【解答】

金融机构持有资产的希腊字母值分别为：

$$\text{delta} : \Delta = -1000 * 0.5 - 500 * 0.8 - 2000 * (-0.4) - 500 * 0.7 = -450$$

$$\text{gamma} : \Gamma = -1000 * 2.2 - 500 * 0.6 - 2000 * 1.3 - 500 * 1.8 = -6000$$

$$\text{vega} : V = -1000 * 1.8 - 500 * 0.2 - 2000 * 0.7 - 500 * 1.4 = -4000$$

a. gamma与delta中性

首先考虑gamma中性，如需要中性，那么需要交易所的期权的 $\text{gamma} = 6000$ ，即需要持有 $6000/1.5 = 4000$ 份期权多头。

此时整个组合的 $\delta = 4000 * 0.6 - 450 = 1950$ ，需要 $\delta = -1950$ 来维持中性。即需要持有1950英镑空头（因为标的资产的 $\gamma = 0, \delta = 1$ 所以增加英镑不影响组合的 γ ）

综上，需要持有4000份期权多头以及1950英镑空头，可以使得 γ 和 δ 中性。

b. vega与delta中性

首先考虑vega中性，如需要中性，那么需要交易所的期权的 $\gamma = 4000$ ，即需要持有 $4000/0.8 = 5000$ 份期权多头。

此时整个组合的 $\delta = 5000 * 0.6 - 450 = 2550$ ，需要 $\delta = -2550$ 来维持中性。即需要持有2550英镑空头（因为标的资产的 $\gamma = 0, \delta = 1$ 所以增加英镑不影响组合的 γ ）

综上，需要持有5000份期权多头以及2550英镑空头，可以使得vega和delta中性。

19.25

【问题】 再次考虑问题19.24中的情况。假设第二个交易期权的delta为0.1，gamma为0.5，vega为0.6。如何使投资组合保持delta、gamma和vega中性？

【解答】

首先考虑gamma和vega中性，设两个交易期权数量分别为 w_1 、 w_2 ，可以列出方程

$$\begin{cases} 1.5w_1 + 0.5w_2 = 6000 \\ 0.8w_1 + 0.6w_2 = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 3200 \\ w_2 = 2400 \end{cases}$$

此时组合的 $\delta = -450 + 3200 \times 0.6 + 2400 \times 0.1 = 1710$

因此应持有3200份第一种可交易期权多头，2400份第二种可交易期权多头，1710英镑空头才能保证资产组合达到delta、gamma和vega中性。