

衍生工具作业4

2023-2作业2 (Hull 英文第十版)

😊 姓名：*** 学号：202109120****

第10章：

10.11

【问题】描述以下交易组合的最终价值：一个刚刚承约的某资产远期合约多头和对于同一资产的欧式看跌期权的空头。看跌期权的期限与远期合约的期限相同，期权的执行价格等于交易组合刚刚设定时资产的远期价格。证明欧式看跌期权的价格与具有相同期限和相同执行价格的欧式看涨期权的价格相等。

【解答】

- a. 设资产在到期时的现货价格为 S_T ，设期权执行价格为 F_0 ，根据题意 F_0 也是期初的资产远期价格（交割价格）。

最终时，远期合约多头价值 = $S_T - F_0$ ；看跌期权价值 = $\max(F_0 - S_T, 0)$

那么这个交易组合的最终价值 = $S_T - F_0 + \max(F_0 - S_T, 0) = \max(S_T - F_0, 0)$

- b. 由第一小问知，该组合的最终价值为 $\max(S_T - F_0, 0)$ 其恰好等于一个看涨期权的最终价值。

根据“一价定律”和“无套利原理”可知，一份该组合(本题中的远期合约+看跌)和一份看涨期权应具有相同的价值，那么他们在期初时价格也应该相同，即**远期合约 f 加上欧式看跌期权 p 与具有相同执行价格和到期期限的看涨期权价值 c 相同**。即有

$$f + p = c$$

在期初时，远期合约价值 $f = 0$ ，因此 $p = c$ ，即欧式看跌期权的价格与具有相同期限和相同执行价格的欧式看涨期权的价格相等，得证。

10.12

【问题】某交易员买入一份看涨期权与看跌期权，看涨期权的执行价格为45美元，看跌期权的执行价格为40美元，两个期权具有相同的期限，看涨期权价格为3美元，看跌期权价格为4美元，画出交易员的盈利与资产价格之间的关系图。

【解答】

由题意知，分三类情况讨论——

- 当资产价格高于45美元时($S_T > 45$)会行使看涨期权：

购买期权花销7美元，看涨期权中赚钱 $S_T - K_a = S_T - 45 \Rightarrow$ 总盈利 $= S_T - 45 - 7 = S_T - 52$

- 低于40美元时($S_T < 40$)会行使看跌期权

购买期权花销7美元，看跌期权中赚钱 $K_b - S_T = 40 - S_T \Rightarrow$ 总盈利 $= 40 - S_T - 7 = 33 - S_T$

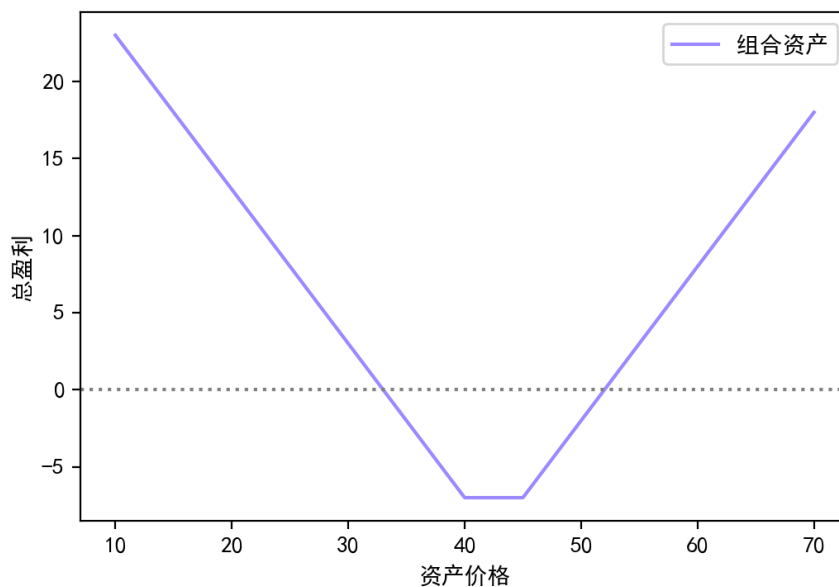
- 高于40美元低于45美元时($45 > S_T > 40$)不会行权

购买期权花销7美元，没有任何收益 \Rightarrow 总盈利 $= -7$

可以得到如下的盈利分段函数——

$$\text{总盈利} = \begin{cases} S_T - 52 & S_T \geq 45 \\ -7 & 40 < S_T < 45 \\ 33 - S_T & S_T \leq 40 \end{cases}$$

使用matplotlib绘图得——



第11章：

11.11

【问题】一份在支付股息股票上期限为4个月的欧式看涨期权价格为5美元，执行价格为60美元，股票当前价格为64美元，预计在1个月后股票将支付0.8美元的股息，所有期限的无风险利率均为12%这时对于套利者而言存在什么样的套利机会？

【解答】

欧式看涨期权应满足关系式 $c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT} - D, 0)$ 。在本题中 $c = 5, S_0 = 64, K = 60$, 那么 $Ke^{-rT} = 60 * e^{-12\% * \frac{1}{3}} \approx 57.65$ 美元，股票红利现值为 $D = 0.8 * e^{-12\% * \frac{1}{12}} = 0.79$ 美元，而 $5 < \max(64 - 57.65 - 0.79, 0) = 5.56$ ，因此其存在套利机会。

套利策略：

- 根据低买高卖原则，期权价格定价过低，应该借款**买入这份欧式看涨期权同时做空股票**。此时获得 $64 - 5 = 59$ 美元。
- 随后将这笔钱存入银行进行无风险投资，其中0.79元偿还股息，剩下的全部进行无风险投资。
- 到期时，分两种情况讨论：
 - 当股票价格高于60时，行权：从银行取出无风险投资的资产合计 $58.21 * e^{12\%/3}$ ，以执行价格60元买入股票并归还股票和利息，净赚 $58.21 * e^{12\%/3} - 60 = 0.56$ 美元
 - 当股票价格低于60时，不行权，但是在做空股票上会盈利：因为不知道最终价格，我们以最小盈利算（价格等于60），此时**至少**净赚 $58.21 * e^{12\%/3} - 60 = 0.56$ 美元，当价格低于60时，净赚更多。

11.13

【问题】当无风险利率上升与波动率下降时，用直观的方式解释为什么提前行使美式看跌期权会变得更吸引人。

【解答】

当提前执行获得的基于执行价格的利息收益大于对损失的保险价值时，会选择提前执行

(1) 当无风险利率增加时，基于执行价格获得的**利息收益增加**，因此提前执行更具有吸引力。

(2) 当波动率下降时，风险变小，美式看跌期权在**保险方面的价值变小**，使得提前执行更具有吸引力。

11.14

【问题】执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看涨期权价格为2美元。标的股票价格为29美元，在2个月与5个月时预计股票将会分别发放0.5美元的股息，所有期限的无风险利率均为10%。执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看跌期权价格是多少？

【解答】

由欧式期权看跌-看涨平价公式 $c + Ke^{-rT} + D = p + S_0$ 可以确定价格。

已知 $c = 2, S_0 = 29, K = 30, T = 0.5$ 股息贴现值

$$D = 0.5 * e^{-10\% * \frac{2}{12}} + 0.5 * e^{-10\% * \frac{5}{12}} = 0.97$$

对公式移项，带入数据得

$$p = (c + Ke^{-rT} + D) - S_0 = 2 + 30 * e^{-10\% * 0.5} + 0.97 - 29 = 2.51 \text{ 美元}$$

因此：执行价格为30美元，期限为6个月的欧式看跌期权价格是2.51美元

11.16

【问题】无股息股票上的美式看涨期权的价格为4美元，股票价格为31美元，执行价格为30美元，期限为3个月，无风险利率为8%。推导具有相同股票价格与相同执行价格和相同期限的美式看跌期权上下限。

【解答】

由美式期权看跌-看涨关系式可知： $S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$

移项得： $C - S_0 + Ke^{-rT} \leq P \leq C - S_0 + K$

带入数据得： $4 - 31 + 30 * e^{-8\% * 0.25} \leq P \leq 4 - 31 + 30$

即 $2.41 \leq P \leq 3$,因此，美式看跌期权的价格的上限和下限分别为3.00美元和2.41美元。

11.18

【问题】证明式(11-7)（提示：对于关系式的第一部分，考虑一个欧式看涨期权与一个数量为K的现金组合，以及一个美式看跌期权与一只股票的组合）。

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

【解答】

◦ 先证明关系式左侧 $S_0 - K \leq C - P$

考虑组合A：一份欧式看涨期权 c 与一个数量为K的现金

考虑组合B：一个美式看跌期权 P 与一只股票

说明：两个期权具有相同到期日，执行价格相同为K，无风险利率 $r(r>0)$

下面从两个方面考虑组合AB的价值

	组合A	组合B
不提前行权	$\max(S_T - K, 0) + Ke^{rT} = \max(S_T, K) - K + Ke^{rT}$	$\max(S_T, K)$
t时刻提前行权	Ke^{rt}	K

因为 $r > 0, t < T$ 因此在任意一种情况下, 组合A的价值均大于组合B的价值。在期初时也存在此关系, 即 $c + K \leq P + S_0$, 而 $c = C$ (在没有股利的情况下, 美式看涨期权一般不会被提前执行)

因此 $C + K \leq P + S_0 \Rightarrow S_0 - K \leq C - P$ ①得证。

◦ 下面证明关系式右侧 $C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$

已知欧式期权看跌-看涨平价公式为 $c + Ke^{-rT} = p + S_0$

而由于 $P \geq p$ (美式期权可提前执行), 且 $c = C$ (在没有股利的情况下, 美式看涨期权一般不会被提前执行), 因此 $c + Ke^{-rT} - S_0 = p \leq P \Rightarrow C + Ke^{-rT} - S_0 \leq P$

移项: $C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$ ②

◦ 将①②式子联立, 即可得到: $S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$, 得证

第12章:

12.8

【问题】利用看跌一看涨平价关系式, 说明由看涨期权生成的牛市差价最初投资与由看跌期权生成的牛市差价最初投资之间的关系。

【解答】

由欧式期权看跌-看涨平价公式 $c + Ke^{-rT} = p + S_0$, 设 p_1 和 c_1 为执行价格为 K_1 的看跌和看涨期权的价格: p_2 和 c_2 为执行价格为 K_2 的看跌和看涨期权的价格 ($K_2 > K_1$)。可得出:

$$\begin{cases} p_1 + S_0 = c_1 + K_1 e^{-rT} & \text{①} \\ p_2 + S_0 = c_2 + K_2 e^{-rT} & \text{②} \end{cases}$$

将①、②相减得 $p_1 - p_2 = c_1 - c_2 - (K_2 - K_1)e^{-rT}$

这说明运用看跌期权构建的牛市差价的初始投资小于运用看涨期权构建的牛市差价的初始投资, 且差额为 $(c_1 - c_2) - (p_1 - p_2) = (K_2 - K_1)e^{-rT}$ 。实际上, 运用看跌期权构建的牛市差价的初始投资为负值, 而运用看涨期权构建的牛市差价的初始投资为正值。

用看涨期权构建牛市差价产生的利润比用看跌期权构建的要大 $(K_2 - K_1)(1 - e^{-rT})$ 。这说明相比于运用看跌期权构建牛市差价, 运用看涨期权构建差价的策略中多包含一份无风险投资 $(K_2 - K_1)e^{-rT}$, 其盈利为 $(K_2 - K_1)e^{-rT}(e^{rT} - 1) = (K_2 - K_1)(1 - e^{-rT})$ 。

12.23

【问题】 3份同一股票上并具有同样期限的看跌期权执行价格分别为55美元、60美元和65美元，市场价格分别为3美元、5美元和8美元。解释如何构造蝶式差价。用表来说明这一策略的盈利形式。股票在什么价位时，这一交易策略会导致亏损？

【解答】

构造方法为：

- 购买一份执行价格为55美元的看跌期权
- 购买一份执行价格65美元的看跌期权
- 同时卖出两份执行价格为60美元的看跌期权。

盈利形式：

初始成本为 $3 + 8 - 2 * 5 = 1$ 。该交易策略的损益表为(最后一列为该状态下总收益)：

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权多头收益	空头期权收益	总收益	总盈利 (含成本)
$S_T > 65$	0	0	0	0	-1
$60 < S_T \leq 65$	0	$65 - S_T$	0	$65 - S_T$	$64 - S_T$
$55 < S_T \leq 60$	0	$65 - S_T$	$-2 * (60 - S_T)$	$S_T - 55$	$S_T - 56$
$S_T \leq 55$	$55 - S_T$	$65 - S_T$	$-2 * (60 - S_T)$	0	-1

导致亏损：

当最后的股票价格大于64美元或小于56美元时，蝶式差价交易策略会导致损失。

12.25

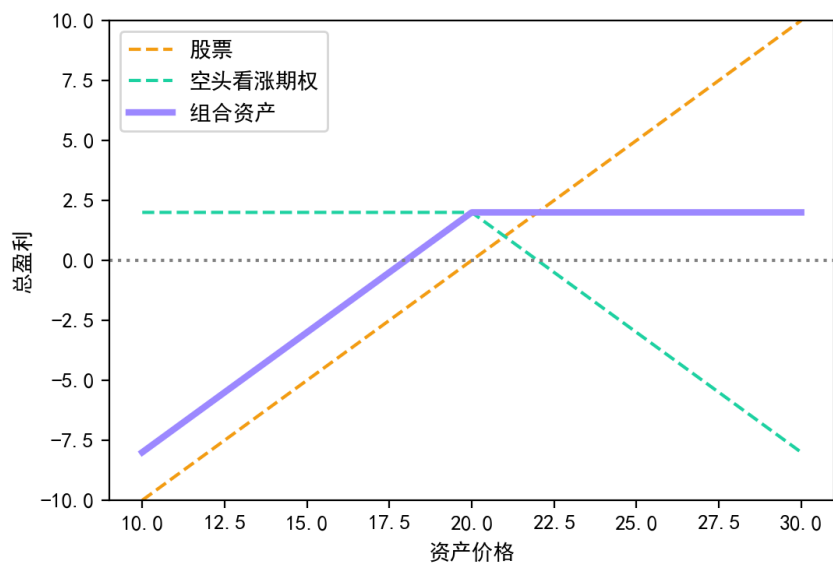
【问题】 画出以下几种投资者的交易组合与股票最终价格之间的盈亏关系图：(a)一股股票并一份看涨期的空头；(b)两股股票并一份看涨期权的空头；(c)一股股票并两份看涨期权的空头；(d)一股股票并四份看涨期权的空头。对于以上不同情形，假定看涨期权的执行价格等于当前股票价格

【解答】

a. 一股股票并一份看涨期的空头

看涨期权空头的价值为 $-max(S_T - K, 0)$,则总收益为 $-max(S_T - K, 0) + S_T - K + c$

假设 $S_0 = K = 20, c = 2$ 即有如下图像：

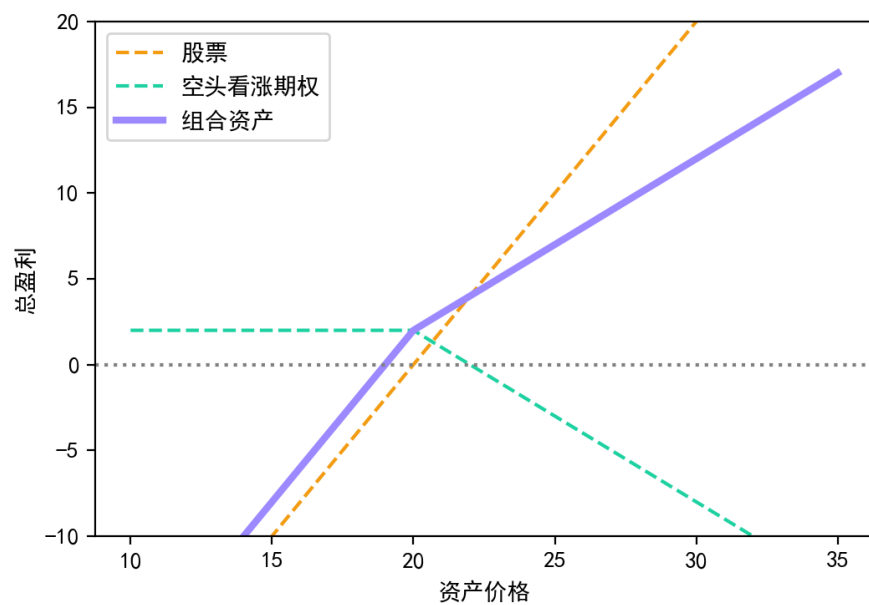


b. 两股股票并一份看涨期权的空头

看涨期权空头的价值为 $-\max(S_T - K, 0)$, 则总收益为

$$-\max(S_T - K, 0) + 2 * (S_T - K) + c$$

假设 $S_0 = K = 20, c = 2$ 即有如下图像：

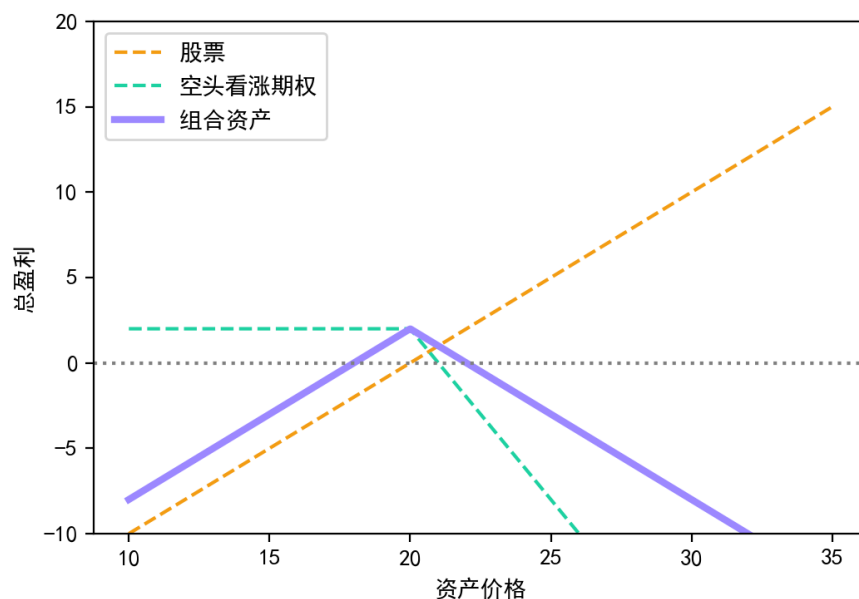


c. 一股股票并两份看涨期权的空头

看涨期权空头的价值为 $-2 * \max(S_T - K, 0)$, 则总收益为

$$-2 * \max(S_T - K, 0) + (S_T - K) + c$$

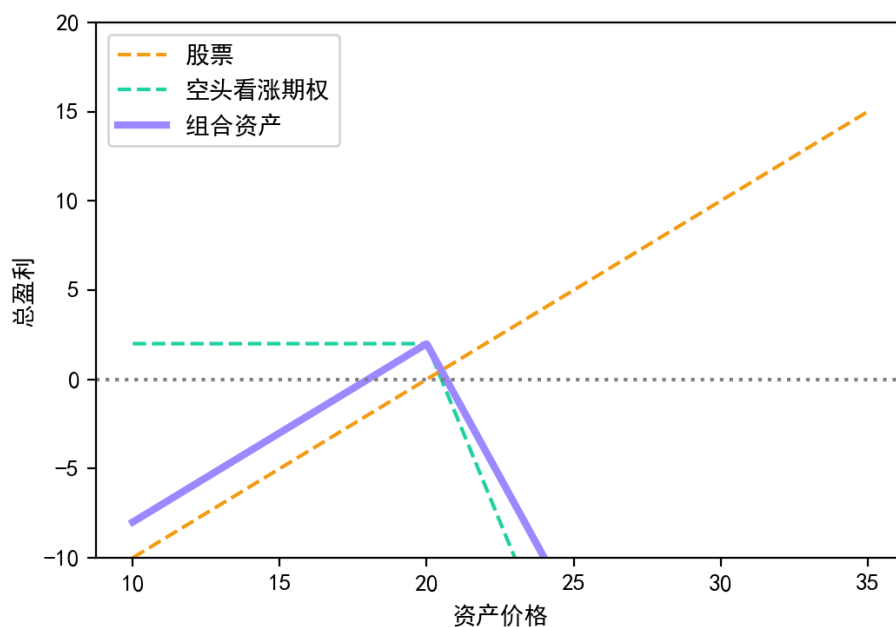
假设 $S_0 = K = 20, c = 2$ 即有如下图像：



d. 一股股票并四份看涨期权的空头

看涨期权空头的价值为 $-4 * \max(S_T - K, 0)$, 则总收益为 $-4 * \max(S_T - K, 0) + (S_T - K) + c$

假设 $S_0 = K = 20, c = 2$ 即有如下图像:



12.26

【问题】假定一股不付股息的股票价格为32美元，股票价格波动率为30%，对于所有期限的无风险利率均为每年5%。利用 DerivaGem 来计算建立以下几种交易策略的费用。

(a) 由执行价格分别为25美元与30美元，期限为6个月的欧式看涨期权所组成的牛市差价。

(b) 由执行价格分别为25美元与30美元，期限为6个月的欧式看跌期权所组成的熊市差价。

- (c)由执行价格分别为25美元、30美元与35美元，期限为1年的欧式看涨期权所组成的蝶式差价。
- (d)由执行价格分别为25美元、30美元与35美元，期限为1年的欧式看跌期权所组成的蝶式差价。
- (e)由执行价格为30美元、期限为6个月的期权所组成的跨式组合。
- (f)由执行价格分别为25美元与35美元，期限为6个月的期权所组成的异价跨式组合。
- 对于每种情形，用表来说明盈利与最终股票价格之间的关系，在分析中忽略贴现作用。

【解答】

- a. 利用软件可以算得，执行价格为25美元的看涨期权的价值为7.90美元，执行价格为30美元的看涨期权的价值为4.18美元。因此，牛市差价的成本为 $7.90 - 4.18 = 3.72$ （美元）。损益情况如下：

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权空头收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 30$	$S_T - 25$	$30 - S_T$	5	1.28
$25 < S_T \leq 30$	$S_T - 25$	0	$S_T - 25$	$S_T - 28.72$
$S_T \leq 25$	0	0	0	-3.72

- b. 利用软件可以算得，执行价格为25美元的看涨期权的价值为0.28美元，执行价格为30美元的看涨期权的价值为1.44美元。因此，熊市差价的成本为 $1.44 - 0.28 = 1.16$ （美元）。损益情况如下：

股票价格	第一份期权空头收益	第二份期权多头收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 30$	0	0	0	-1.16
$25 < S_T \leq 30$	0	$30 - S_T$	$30 - S_T$	$28.84 - S_T$
$S_T \leq 25$	$S_T - 25$	$30 - S_T$	5	3.84

- c. 利用软件可以算得，执行价格分别为25美元、30美元、35美元的看涨期权的价值分别为：8.92美元、5.60美元和3.28美元。因此，蝶式差价的成本为 $8.92 + 3.28 - 2 \times 5.60 = 1.00$ （美元）。损益情况如下

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权多头收益	空头期权收益	总收益	总盈利 (含成本)
$S_T > 35$	$S_T - 25$	$S_T - 35$	$-2 * (S_T - 30)$	0	-1
$30 < S_T \leq 35$	$S_T - 25$	0	$-2 * (S_T - 30)$	$35 - S_T$	$34 - S_T$
$25 < S_T \leq 30$	$S_T - 25$	0	0	$S_T - 25$	$S_T - 26$
$S_T \leq 25$	0	0	0	0	-1

- d. 利用软件可以算得，执行价格分别为25美元、30美元、35美元的看涨期权价值分别为：0.71美元、2.14美元和4.57美元。因此，蝶式差价的成本为
 $0.71 + 4.57 - 2 \times 2.14 = 1.00$ （美元）。损益情况如下

股票价格	第一份期权多头收益	第二份期权多头收益	空头期权收益	总收益	总盈利 (含成本)
$S_T > 35$	0	0	0	0	-1
$30 < S_T \leq 35$	0	$35 - S_T$	0	$35 - S_T$	$34 - S_T$
$25 < S_T \leq 30$	0	$35 - S_T$	$-2 * (30 - S_T)$	$S_T - 25$	$S_T - 26$
$S_T \leq 25$	$25 - S_T$	$35 - S_T$	$-2 * (30 - S_T)$	0	-1

- e. 利用软件可以算得，执行价格分别为30美元的看涨期权、看跌期权价值分别为：4.18美元、1.44美元。因此，跨式组合的成本为 $4.18 + 1.44 = 5.62$ （美元）。损益情况如下

股票价格	看涨期权多头收益	看跌期权多头收益	总收益	总盈利 (含成本)
$S_T > 30$	$S_T - 30$	0	$S_T - 30$	$S_T - 35.62$
$S_T \leq 30$	0	$30 - S_T$	$30 - S_T$	$24.58 - S_T$

- f. 利用软件可以算得，执行价格分别为35美元的看涨期权、执行价格25美元看跌期权价值分别为：1.85美元、0.28美元。因此，异价跨式差价的成本为 $1.85 + 0.28 = 2.13$ （美元）。损益情况如下

股票价格	看跌期权多头收益	看涨期权多头收益	总收益	总盈利（含成本）
$S_T > 35$	0	$S_T - 35$	$S_T - 35$	$S_T - 37.13$
$25 < S_T \leq 35$	0	0	$30 - S_T$	-2.13
$S_T \leq 25$	$25 - S_T$	0	$25 - S_T$	$22.87 - S_T$

12.28

【问题】买入执行价格为 K_1 的看涨期权，卖出执行价格为 K_2 的看跌期权，而且两者具有相同期限， $K_2 > K_1$ 所得交易头寸是什么？当 $K_2 = K_1$ 时，交易头寸是什么？

【解答】

看跌期权的期权费与支付的看涨期权的期权费的差额很小，在此忽略不计

$$\max(S - K_1, 0) - \max(K_2 - S, 0) =$$

设标的资产价格为 S

◦ 当 $K_2 > K_1$ 时：

此时所得的交易头寸可以看作范围远期合约多头，在此分三种状态讨论

状态	头寸	解释
$S < K_1$	损失 $(K_1 - S)$	看涨期权不行权，看跌期权他人行权，空方价值为 $-\max(K_1 - S, 0)$ ，即亏损 $K_1 - S$
$K_2 < S < K_1$	0	看涨期权不行权，看跌期权他人也不行权，双方价值都为0，即不亏也不赚
$S > K_2$	获益 $S - K_2$	看涨期权行权，多方价值为 $\max(S - K_2, 0)$ ，看跌期权他人也不行权。即获益 $S - K_2$

◦ 当 $K_2 = K_1$ 时：

此时所得的交易头寸可以看作远期合约多头，在此分三种状态讨论

状态	头寸	解释
$S < K_1$	损失 $(K_1 - S)$	看涨期权不行权，看跌期权他人行权，空方价值为 $-\max(K_1 - S, 0)$ ，即亏损 $K_1 - S$
$S > K_1$	获益 $S - K_1$	看涨期权行权，多方价值为 $\max(S - K_1, 0)$ ，看跌期权他人也不行权。即获益 $S - K_1$

